ÜBER n-DIMENSIONALE GITTERTRANSFORMATIONEN.

VON

WILHELM MAGNUS

in FRANKFURT a. M.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Gruppe G_n der n-dimensionalen Gittertransformationen, das heisst die Gruppe der linearen ganzzahligen homogenen Substitutionen von n Variablen mit einer Determinante ± 1 ist für $n = 3$ von J. Nielsen[1] und für beliebiges n von J. A. de Séguier[2] untersucht worden. In beiden Fällen sind erzeugende Elemente und ein System von definierenden Relationen zwischen denselben angegeben worden.

---

[1] J. Nielsen, Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fysiske Meddelelser. V, 12. Kopenhagen 1924.

[2] J. A. de Séguier, Sur les automorphismes de certaines groupes. Comptes rendus *179* (1924). S. 139—142.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich den Fall eines beliebigen n in ganz einfacher Weise auf den von Nielsen erledigten Fall $n=3$ zurückführen lässt. Dies dürfte zu einer Einsicht in den Aufbau der Gruppe G_n beitragen, denn das bei dieser Reduktion benützte Verfahren liefert gewissermassen den gruppentheoretischen Ausdruck für den Sachverhalt, dass sich die Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers von n ganzen Zahlen auf die wiederholte Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen zurückführen lässt. Da die von de Séguier gegebene Skizze einer Ableitung eines Systems definierender Relationen für G_n sehr undurchsichtig erscheint, rechtfertigt sich die hier gegebene methodisch neue Ableitung vielleicht durch die obenstehende Bemerkung und durch die am Schluss der Einleitung angedeutete Anwendbarkeit unseres Verfahrens auf einige andere Gruppen.

In den Paragraphen 1—4 wird ein System definierender Relationen für G_n aufgestellt. In § 5 wird gezeigt, wie sich ein System definierender Relationen für die zu G_n gehörigen Kongruenzgruppen, die man erhält, wenn man die Substitutionen von G_n modulo einer Zahl s nimmt, sofort bestimmen lässt, wenn dies für $n=2$ möglich ist, und es wird gezeigt, dass die Kongruenzgruppen, welche zu einer gewissen Untergruppe $\varDelta_n$ von G_n gehören, mit wachsendem n alle und nur die direkten Produkte endlicher Gruppen von Primzahlpotenzordnung liefern.

In § 6 wird ein von Nielsen[1] für $n=3$ bewiesener Satz in verschärfter Form und ohne Benutzung des von Nielsen[3] aufgestellten Systems definierender Relationen für die Automorphismengruppe der freien Gruppe von n Erzeugenden abgeleitet. Es wird nämlich gezeigt: Ist F_n die freie Gruppe von n Erzeugenden a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, F'_n ihre Kommutatorgruppe und K_n diejenige invariante Untergruppe in der Automorphismengruppe A_n von F_n, welche von allen Automorphismen von F_n gebildet wird, die jedes Element von F_n in seiner Nebengruppe nach F'_n belassen, so wird K_n von den folgenden Automorphismen erzeugt:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & a'_i = a_i a_k a_l a_k^{-1} a_l^{-1}; & a'_r = a_r \text{ für } r \neq i. \\ 2) & a'_i = a_k a_i a_k^{-1}; & a'_r = a_r \text{ für } r \neq i. \end{array}\right\} (k \neq i \neq l \neq k)$$

Diese mögen respektive K_{ikl} und K_{ik} heissen. Sie lassen sich sämtlich durch Transformation mit geeigneten Automorphismen von F_n und Komposition dieser Transformierten aus K_{12} herstellen.

[3] »Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe«. Mathemat. Annalen *91* (1924). S. 169—209.

Es sei hier schliesslich auf eine wie mir scheint höchst wünschenswerte Übertragung des oben formulierten Satzes auf die Automorphismengruppen der Fundamentalgruppen geschlossener zweiseitiger Flächen hingewiesen. Ist p das Geschlecht einer solchen Fläche, so liefern die Periodentransformationen der Abelschen Integrale erster Gattung auf einer Riemannschen Fläche eine Untergruppe U_{2p} der Gruppe G_{2p}, welche von demjenigen Substitutionen von G_{2p} gebildet wird, die eine gewisse antisymmetrische Bilinearform in sich überführen. Bezeichnet man nun mit Φ_{2p} die Automorphismengruppe der Fundamentalgruppe unserer Fläche, so stehen U_{2p} und Φ_{2p} in demselben Verhältnis zueinander wie G_n und A_n. Das Analogon zu K_n würde dann im wesentlichen die Gruppe der Abbildungsklassen der Fläche bilden, bei denen ein kanonisches Riemannsches Schnittsystem in ein homologes aber nicht homotopes System übergeht. Da U_{2p} sich in ähnlicher Weise aus Modulgruppen aufbauen lässt, wie dies in § 1 für G_n gezeigt wird, scheint mir der Versuch einer solchen Übertragung mindestens für $p = 2$ nicht aussichtslos zu sein.

§ 1. Eine Normalform für die Elemente der Gruppe G_n.

Die Gruppe G_n der n-dimensionalen Gittertransformationen, dargestellt als Gruppe von linearen Substitutionen der Variablen x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ lässt sich erzeugen durch die folgenden Substitutionen:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{llll} O_{i-1}\colon & x'_{i-1} = -x_{i-1}; & x'_k = x_k & \text{für } k \neq i-1 \\ d_{i-1,i}\colon & x'_{i-1} = x_{i-1} + x_i; & x'_k = x_k & \text{für } k \neq i-1 \\ d_{i,i-1}\colon & x'_i \;\; = x_i + x_{i-1}; & x'_k = x_k & \text{für } k \neq i \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Für jeden Wert von i erzeugen die drei Substitutionen O_{i-1}, $d_{i-1,i}$, $d_{i,i-1}$ eine homogene erweiterte Modulgruppe, bestehend aus allen ganzzahligen Substitutionen von x_{i-1} und x_i allein mit einer Determinante ± 1. Diese Gruppe werde mit $M^{(i-1)}$ bezeichnet $(i-1 = 1, 2, \ldots, n-1)$, Elemente aus ihr mit $m_1^{(i-1)}, m_2^{(i-1)}, \ldots$.

Ist nun g ein beliebiges Element aus G_n, so kann man es in der folgenden Weise mit Hilfe von Substitutionen aus den Gruppen $M^{(i)}$ aufbauen. Die dem Element g zugeordnete Substitution besitze die Matrix (g_{ik}), in deren i-ter Zeile und k-ter Spalte also die Zahl g_{ik} steht. Man bestimme nun zwei teilerfremde

Zahlen $\mu_{n-1,n}$ und $\mu_{n,n}$ so, dass $g_{1,n-1}\,\mu_{n-1,n} + g_{1,n}\,\mu_{n,n} = 0$ ist. Zu diesen beiden Zahlen lassen sich stets zwei weitere $\mu_{n-1,n-1}$ und $\mu_{n,n-1}$ hinzubestimmen, so dass

$$x'_k = x_k \text{ für } k < n-1, \qquad \begin{aligned} x'_{n-1} &= \mu_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + \mu_{n-1,n}\,x_n \\ x'_n &= \mu_{n,n-1}\,x_{n-1} + \mu_{n,n}\,x_n \end{aligned}$$

eine Substitution $m_1^{(n-1)}$ aus $M^{(n-1)}$ ist. $g m_1^{(n-1)}$ besitzt dann eine Matrix, in der in der ersten Zeile und n-ten Spalte die Zahl Null und in der $(n-1)$-ten Spalte der grösste gemeinsame Teiler von $g_{1,n-1}$ und $g_{1,n}$ steht. Durch geeignete Wahl des Vorzeichens von $\mu_{n-1,n-1}$ und $\mu_{n,n-1}$ kann man dessen Vorzeichen beliebig vorschreiben.

Berücksichtigt man nun, dass die rechtsseitige Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix aus $M^{(i-1)}$ nur die $(i-1)$-te und i-te Spalte verändert, und dass der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen in der ersten Zeile von (g_{ik}) gleich eins sein muss, so erhält man durch $(n-1)$-fache sinngemässe Wiederholung des oben eingeschlagenen Verfahrens das Resultat:

Es gibt Elemente $m_1^{(k)}$ aus $M^{(k)}$ $(k = n-1, n-2, \ldots 2, 1)$, so dass $g m_1^{(n-1)} m_1^{(n-2)} \ldots m_1^{(2)} m_1^{(1)}$ eine Matrix ist, in deren erster Zeile in der ersten Spalte eine Eins und in der 2-ten bis n-ten Spalte eine Null steht.

Wendet man nun auf die so erhaltene Matrix dasselbe Verfahren nochmals an mit dem Ziel, in ihr auch in der zweiten Zeile möglichst viele Elemente zu Null zu machen, und so fort, so erhält man nach $\binom{n}{2}$ Schritten das Resultat:

Es gibt Elemente $m_1^{(k)}$ $(k = n-1, \ldots, 1)$, $m_2^{(k)}$ $(k = n-1, \ldots, 2), \ldots, m_{n-2}^{(k)}$ $(k = n-1, n-2)$, $m_{n-1}^{(k)}$ $(k = n-1)$ *aus den Gruppen* $M^{(k)}$, *so dass*

$$(2) \qquad g\,[m_1^{(n-1)} m_1^{(n-2)} \ldots m_1^{(1)}]\,[m_2^{(n-1)} m_2^{(n-2)} \ldots m_2^{(2)}] \ldots [m_{n-2}^{(n-1)} m_{n-2}^{(n-1)}]\, m_{n-1}^{(n-1)}$$

eine Matrix ist, in der in der Hauptdiagonale lauter Einsen und über derselben lauter Nullen stehen. Eine solche Matrix werde eine L-Matrix genannt. Alle L-Matrizen bilden eine Gruppe Λ_n. Die Matrix (2), rechtsseitig mit einem geeigneten Element L aus Λ_n multipliziert, liefert also die Einheitsmatrix, und hieraus folgt sofort, dass jede Matrix g^{-1} und somit auch jede Matrix g aus G_n gleich einem Element

$$(3) \qquad \prod_{k=1}^{n-1} [m_k^{(n-1)} \ldots m_k^{(k)}] \cdot L$$

ist, wobei die $m_k^{(\varrho)}$ ($\varrho = 1, \ldots, n-1$) in $M^{(\varrho)}$ liegen, und L ein Element von Δ_n ist. Das Produktzeichen ist natürlich symbolisch zu verstehen, die Faktoren sind nicht vertauschbar. (3) soll eine Normalform für die Elemente von G_n heissen.

§ 2. Reduktion der Aufgabe, definierende Relationen für G_n zu finden auf den Fall $n = 3$.

Die Normalform (3) für die Elemente g von G_n liefert sofort ein Verfahren zur Aufstellung eines Systems definierender Relationen für G_n, wenn es gelingt, die folgenden Aufgaben zu lösen:

Es sind Relationen zwischen den Erzeugenden (1) *von G_n anzugeben, die es ermöglichen*

I. *Jeden Ausdruck aus den Erzeugenden* (1) *auf die Form* (3) *zu bringen.*

II. *Jedes Element* (3), *das die Einheitsmatrix darstellt, in das Einheitselement der (abstrakten) Gruppe G_n zu verwandeln.*

Es soll nun zunächst eine Auflösung der Aufgaben I, II in mehrere einfachere Aufgaben angestrebt werden. Bezeichnet man die Erzeugenden (1) von G_n in irgend einer Reihenfolge mit $z_1, z_2, \ldots, z_r$, so ist ein Element g, das aus nur einer Erzeugenden $z_\varrho^{\pm 1}$ besteht schon auf die Normalform gebracht, da $z_\varrho^{\pm 1}$ zu einer der Gruppen $M^{(i)}$ gehört. Wenn man nun Relationen angibt, die es ermöglichen ein beliebiges Element

$$z_\varrho^{\pm 1} \prod_{k=1}^{n-1} [m_k^{(n-1)} \ldots m_k^{(k)}] \cdot L \tag{4}$$

auf die Normalform zu bringen, so ist Aufgabe I gelöst, da man dann sukzessive alle Elemente, die aus ein, zwei, drei, ... $z_\varrho^{\pm 1}$ Zeichen aufgebaut sind auf die Normalform bringen kann. In dieser Form wird nun I gelöst auf die folgende Art: $z_\varrho^{\pm 1}$ gehöre der Gruppe $M^{(\sigma)}$ an. Es wird nun gelingen, Relationen anzugeben, die ausdrücken:

III. *Jedes Element aus $M^{(\sigma)}$ ist mit jedem Element aus $M^{(i)}$ für $i \neq \sigma$, $i \neq \sigma \pm 1$ vertauschbar.*

IV. *Ein Ausdruck $m_1^{(\sigma)} m_1^{(\sigma+1)} m_2^{(\sigma)}$ beziehungsweise $m_1^{(\sigma)} m_1^{(\sigma-1)} m_2^{(\sigma)}$ lässt sich stets auf die Form $m_3^{(\sigma+1)} m_3^{(\sigma)} m_4^{(\sigma+1)} L_1$ beziehungsweise $m_3^{(\sigma-1)} m_3^{(\sigma)} m_4^{(\sigma-1)} L_2$ bringen, wobei die $m_\nu^{(k)}$ Elemente aus $M^{(k)}$ sind ($k = \sigma - 1, \sigma, \sigma + 1$), und L_1, L_2 in Δ_n liegen.*

V. *Ein Ausdruck $L_1 m_1^{(k)}$ lässt sich stets in einen Ausdruck $m_2^{(k)} L_2$ verwandeln, wobei $m_1^{(k)}$, $m_2^{(k)}$ Elemente aus $M^{(k)}$ und L_1 und L_2 Elemente aus Δ_n sind.*

III, IV, V ermöglichen in der Tat, jedes Element (4) auf die Normalform (3) zu bringen; denn gehört z_ϱ etwa zu $M^{(n-1)}$, so kann man es direkt mit $m_1^{(n-1)}$ vereinigen; gehört z_ϱ zu $M^{(n-2)}$, so kann man mittelst IV $z_\varrho m_1^{(n-1)} m_1^{(n-2)}$ auf die Form $\overline{m}_1^{(n-1)} \overline{m}_1^{(n-2)} m_1^{*(n-1)} L_1$ bringen, wobei L_1 in Δ_n, $\overline{m}_1^{(n-1)}$, $m_1^{*(n-1)}$ in $M^{(n-1)}$ und $\overline{m}_1^{(n-2)}$ in $M^{(n-2)}$ liegen. Vermöge V kann man dann L_1 ganz nach rechts »durchziehen» und mit dem L ganz rechts vereinigen, sodann vermöge III $m_1^{*(n-1)}$ mit $m_1^{(n-3)} \ldots m_1^{(1)}$ vertauschen und mit $m_2^{(n-1)}$ vereinigen. (Dabei ist natürlich zu beachten, dass sich sowohl L_1 wie die $m_k^{(\nu)}$ bei dem »Durchziehen» von L_1 verändern; das ist aber unwichtig, weil sie dabei immer gemäss V in Elemente aus derselben Gruppe Δ_n bezw. $M^{(\nu)}$ übergehen.) Ein ganz analoges Verfahren führt auch zum Ziel, wenn z_ϱ irgend einer anderen Gruppe $M^{(\sigma)}$ angehört; allerdings muss man III, IV, V um so häufiger anwenden, je kleiner σ wird, aber es tritt nichts prinzipiell Neues hinzu.

I ist damit auf die Lösung der Aufgaben III, IV, V reduziert. Um auch die Aufgabe II zu lösen hat man ausser III, IV, V noch

VI. *Ein System von definierenden Relationen für Δ_n anzugeben.* Dass III—VI zur Lösung von II ausreichen, soll in § 4 gezeigt werden; der Rest dieses § soll der Lösung von III und IV dienen, während V erst nach der Behandlung von VI in § 3 in Angriff genommen werden kann.

Die nach III geforderten Relationen sind sofort anzugeben; man kann sie wählen in der Form

$$\text{(III*)} \qquad (O_{i-1},\, d_{i-1,i},\, d_{i,i-1}) \rightleftarrows (O_{k-1},\, d_{k-1,k},\, d_{k,k-1})$$
$$(i \neq k,\; i \neq k \pm 1),\; (i, k = 2, \ldots, n),$$

wobei $\rightleftarrows$ »vertauschbar mit» bedeutet, und (III*) also einfach heissen soll, dass der Kommutator irgend eines Elementes in der Klammer links mit irgend einem Element in der Klammer rechts gleich dem Einheitselement 1 ist, wenn i, k die angegebenen Beziehungen erfüllen.

Die nach IV geforderten Relationen ergeben sich ohne weiteres aus der eingangs [1] genannten Arbeit von Nielsen. Bezeichnet man nämlich für $i = 2, 3, \ldots, n-1$ mit $N^{(i)}$ die von O_{i-1}, O_i, $d_{i-1,i}$, $d_{i,i-1}$, $d_{i,i+1}$, $d_{i+1,i}$ erzeugte mit G_3 isomorphe Gruppe der Substitutionen von x_{i-1}, x_i, x_{i+1} allein, so sind ja die nach IV geforderten Relationen solche, die zwischen Elementen von $N^{(\sigma+1)}$ beziehungsweise $N^{(\sigma)}$ allein bestehen, wenn man in IV noch die zusätzliche Forderung stellt, dass L_1 und L_2 zugleich in $\varDelta_n$ und in $N^{(\sigma+1)}$ bezw. $N^{(\sigma)}$ liegen sollen. Aber auch mit dieser zusätzlichen Forderung müssen Relationen der in IV verlangten Art existieren und zugleich aus einem vollständigen System definierender Relationen für $N^{(\sigma+1)}$ bezw. $N^{(\sigma)}$ folgen, da ja nach § 1 z. B. jedes Element von $N^{(\sigma+1)}$ auf die sinngemäss spezialisierte Form (3), d. h. auf die Form: Element aus $M^{(\sigma+1)}$ mal Element aus $M^{(\sigma)}$ mal Element aus $M^{(\sigma+1)}$ mal einem Element aus dem Durchschnitt von $N^{(\sigma+1)}$ und $\varDelta_n$ gebracht werden kann, was, angewandt auf das in IV auftretende Element $m_1^{(\sigma)}\, m_1^{(\sigma+1)}\, m_2^{(\sigma)}$ gerade die erste Behauptung von IV ergibt. Da nun schliesslich alle in $N^{(\sigma)}$ bestehenden Beziehungen, also insbesondere auch die in IV aufgestellten aus einem System definierender Relationen für $N^{(\sigma)}$ erhalten werden können, und da umgekehrt alle in $N^{(\sigma)}$ bestehenden Relationen auch in G_n bestehen, so folgt hiermit:

Aufgabe IV ist gelöst, wenn man ein System definierender Relationen für die Untergruppen $N^{(i)}$ von G_n $(i = 2, \ldots, n-1)$ angeben kann. Das ist nun gerade in der Arbeit von Nielsen[1] geschehen, da ja die $N^{(i)}$ mit G_3 isomorph sind. Nachstehend sind im Anschluss an die Formeln (D) S. 24 bei Nielsen[1] Relationen angegeben, die zur Definition sämtlicher $N^{(i)}$ ausreichen und folglich den in Aufgabe IV gestellten Forderungen Genüge tun. Es sind dies die folgenden Relationen:

$$(\mathrm{IV}, 1)\colon\ P_{i-1} = O_{i-1}\, d_{i-1,i}^{-1}\, d_{i,i-1}\, d_{i-1,i}^{-1}.$$

$$(\mathrm{IV}, 2)\colon\ P_{i-1}^2 = 1. \quad (\mathrm{IV}, 3)\colon\ O_{i-1}^2 = 1. \quad (\mathrm{IV}, 4)\colon\ P_{i-1}\, O_{i-1}\, P_{i-1} = O_i.$$

$$(\mathrm{IV}, 5)\colon\ (O_{i-1}\, d_{i-1,i})^2 = 1. \quad (\mathrm{IV}, 6)\colon\ (O_i\, d_{i-1,i})^2 = 1.$$

$$(\mathrm{IV}, 7)\colon\ P_{i-1}\, d_{i-1,i}\, P_{i-1} = d_{i,i-1}.$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n).$$

$$(\mathrm{IV}, 8)\colon\ P_{i-1}\, P_i\, P_{i-1} = P_i\, P_{i-1}\, P_i. \quad (\mathrm{IV}, 9)\colon\ (O_{i-1}\, P_i)^2 = 1.$$

$$(\mathrm{IV}, 10)\colon\ P_{i-1}\, P_i\, P_{i-1}\, d_{i-1,i}\, P_{i-1}\, P_i\, P_{i-1} = d_{i+1,i}.$$

$$(\mathrm{IV}, 11)\colon\ O_{i+1}\, d_{i-1,i}\, O_{i+1} = d_{i-1,i}.$$

$$(\mathrm{IV}, 12)\colon\ d_{i-1,i}\, d_{i+1,i}\, d_{i-1,i}^{-1}\, d_{i+1,i}^{-1} = 1. \quad (\mathrm{IV}, 13)\colon\ d_{i,i-1}\, d_{i,i+1}\, d_{i,i-1}^{-1}\, d_{i,i+1}^{-1} = 1.$$

$$(\mathrm{IV}, 14)\colon\ d_{i+1,i}\, d_{i,i-1}\, d_{i+1,i}^{-1}\, d_{i,i-1}^{-1} = P_i\, d_{i,i-1}\, P_i.$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Dabei sind die Relationen (IV, 1) und die Relation (IV, 4) für $i = n$ einfach als Definitionen der Elemente P_{i-1} und O_n aufzufassen. Im übrigen ist das Relationensystem (IV, 1—14) etwas modifiziert gegenüber dem System (D) von Nielsen; es ist nämlich an Stelle der dort benutzten Erzeugenden Q das dort QP benannte Element als neue Erzeugende eingeführt worden. (D, 1, 2) fallen dadurch in (IV, 2) zusammen. Die Relationen (IV, 1, 7, 10) zeigen die Möglichkeit, die hier benutzten Erzeugenden durch die von Nielsen gebrauchten auszudrücken und umgekehrt. Die übrigen Relationen entspringen unmittelbar aus dem von Nielsen angegebenen System (D), eventuell nach vorheriger Transformation mit geeigneten Produkten der P_i und Benutzung von (IV, 7, 8, 10); (dies gilt insbesondere von (IV, 13, 14)).

§ 3. Die Hilfsgruppe Δ_n.

In diesem § sollen die Aufgaben V und VI aus § 2 gelöst werden, und zwar zunächst VI, da eine genaue Kenntnis von Δ_n für die Behandlung von V erforderlich ist.

Die Gruppe Δ_n wird, wie leicht einzusehen ist und sich übrigens aus dem Folgenden mitergibt, von den $d_{i,i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ erzeugt. Allgemein liegen die Substitutionen $d_{k,l}$ mit $k > l$, welche durch $x'_k = x_k + x_l$, $x'_r = x_r$ $(r \neq k)$ definiert sind in Δ_n, und jedes Element aus Δ_n lässt sich auf eine und nur eine Weise in der Form

$$(5) \qquad d_{21}^{\lambda_{21}} d_{31}^{\lambda_{31}} d_{32}^{\lambda_{32}} \ldots d_{n,1}^{\lambda_{n,1}} d_{n,2}^{\lambda_{n,2}} \ldots d_{n,n-1}^{\lambda_{n,n-1}}$$

schreiben, wobei die λ_{kl} beliebige ganze Zahlen sind. In der Tat besitzt die dem Element (5) zugeordnete Substitution eine Matrix (g_{ik}) mit $g_{ii} = 1$, $g_{ik} = 0$ für $k > i$, $g_{ik} = \lambda_{ik}$ für $i > k$, die Elemente (5) stellen also jedes Element aus Δ_n genau einmal dar. Hieraus ergibt sich leicht[4], dass man als definierende Relationen für Δ_n die folgenden wählen kann, (die teilweise einfach als Definitionen der d_{kl} mit $k - l > 1$ aufzufassen sind):

$$\left.\begin{array}{lll} (\mathrm{VI}, 1) & d_{kl}\, d_{lr}\, d_{kl}^{-1}\, d_{lr}^{-1} = d_{kr} & \\ (\mathrm{VI}, 2) & d_{kl}\, d_{st}\, d_{kl}^{-1}\, d_{st}^{-1} = 1 & \text{für } l \neq s,\ k \neq t \end{array}\right\} \begin{array}{l} k > l,\ l > r,\ s > t. \\ k, l, r, s, t = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

[4] Man vergleiche dazu: W. Burnside: »On some Properties of Groups whose Orders are Powers of Primes«. (Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2. Bd. *11* (1913). S. 225—245). Dort werden die ganz analog gebauten Gruppen untersucht die man erhält, wenn man die Elemente der Matrizen von Δ_n modulo einer Primzahl p nimmt.

Man erkennt ferner ohne Mühe die folgende Eigenschaft von $\mathcal{A}_n$: Bezeichnet man mit $\mathcal{A}_n^{(1)}$ die Kommutatorgruppe von $\mathcal{A}_n$, und definiert man rekursiv $\mathcal{A}_n^{(\varrho)}$ als diejenige Untergruppe von $\mathcal{A}_n$, die von den Kommutatoren irgend eines Elementes aus $\mathcal{A}_n$ mit irgend einem Element von $\mathcal{A}_n^{(\varrho-1)}$ erzeugt wird, so wird $\mathcal{A}_n^{(\varrho)}$ von den $d_{k,l}$ mit $k-l>\varrho$ erzeugt, und $\mathcal{A}_n^{(\varrho-1)}/\mathcal{A}_n^{(\varrho)}$ ist eine freie Abelsche Gruppe von $n-\varrho$ Erzeugenden.

Hieraus folgt sogleich, dass sich mit Hilfe der Relationen (VI, 1, 2) jedes Element L von $\mathcal{A}_n$ auf die Form $L=d_{i,i-1}^{\lambda_{i,i-1}}L_{i-1}$ bringen lässt, wobei L_{i-1} sich aus den $d_{kl}\neq d_{i,i-1}$ $(k>l)$ zusammensetzen lässt. Denn die Elemente

$$d_{i,i-1}^{\lambda_{i,i-1}}\,d_{2,1}^{\lambda_{2,1}}\ldots d_{i-1,i-2}^{\lambda_{i-1,i-2}}\,d_{i+1,i}^{\lambda_{i+1,i}}\ldots d_{n,n-1}^{\lambda_{n,n-1}}$$

liefern ein vollständiges Repräsentantensystem der Nebengruppen von $\mathcal{A}_n^{(1)}$ in $\mathcal{A}_n$, wenn die $\lambda_{\varrho,\varrho-1}$ alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Diese letzte Bemerkung ermöglicht nun die Lösung von Aufgabe V. Ist L eine Matrix aus $\mathcal{A}_n$, $m_1^{(i-1)}$ ein Element aus $M^{(i-1)}$ und $L=d_{i,i-1}^{\lambda_{i,i-1}}L_{i-1}$, wobei L_{i-1} aus den $d_{k,l}$ mit $k>l$ und $d_{k,l}\neq d_{i,i-1}$ zusammengesetzt ist, so ist $Lm_1^{(i-1)}=d_{i,i-1}^{\lambda_{i,i-1}}L_{i-1}m_1^{(i-1)}$. Wenn es uns nun gelingt, Relationen anzugeben, mit deren Hilfe sich $L_{i-1}m_1^{(i-1)}$ in ein Element $m_2^{(i-1)}L'_{i-1}$ verwandeln lässt, wobei $m_2^{(i-1)}$ in $M^{(i-1)}$ liegt und L'_{i-1} in $\mathcal{A}_n$ liegt, so sind wir fertig, da dann $Lm_1^{(i-1)}=d_{i,i-1}^{\lambda_{i,i-1}}m_2^{(i-1)}L'_{i-1}$ wird und $d_{i,i-1}$ zu $M^{(i-1)}$ gehört. Sofern es gelingt zu zeigen, dass L'_{i-1} ebenfalls aus den $d_{k,l}$ mit $k>l$ und $d_{k,l}\neq d_{i,i-1}$ zusammengesetzt werden kann, wenn $m_1^{(i-1)}$ eines der erzeugenden Elemente $O_{i-1}^{\pm 1}$, $d_{i,i-1}^{\pm 1}$, $d_{i-1,i}^{\pm 1}$ von $M^{(i-1)}$ ist, lässt sich der Fall eines beliebigen $m_1^{(i-1)}$ durch Rekursion auf den Fall dieser speziellen $m_1^{(i-1)}$ zurückführen. Dass aber L'_{i-1} für den Fall, dass $m_1^{(i-1)}$ eines der Elemente $O_{i-1}^{\pm 1}$, $d_{i,i-1}^{\pm 1}$, $d_{i-1,i}^{\pm 1}$ ist in der Tat die angegebene Beschaffenheit besitzt, folgt ohne Mühe aus den Relationen (VI, 1, 2) und den nachstehenden Relationen, wenn man berücksichtigt, dass aus (VI, 1, 2) die Vertauschbarkeit des Kommutators zweier d_{kl} $(k>l)$ mit diesen folgt.

(V, 1) $\quad d_{k,l}\rightleftarrows(O_{i-1},\,d_{i,i-1},\,d_{i-1,i})$ für $k,l\neq i,i-1;\ k>l.$

(V, 2) $\quad d_{k,i-1}\,O_{i-1}=O_{i-1}\,d_{k,i-1}^{-1}\quad (k>i-1,\ k\neq i).$

(V, 3) $\quad d_{i-1,l}\,O_{i-1}=O_{i-1}\,d_{i-1,l}^{-1}\quad (i-1>l).$

(V, 4) $\quad d_{i-1,l}\rightleftarrows d_{i-1,i}\quad (i-1>l).$

(V, 5) $\quad d_{ki}\rightleftarrows d_{i-1,i}\quad (k>i).$

(V, 6) $$d_{i,l}\, d_{i-1,i} = d_{i-1,i}\, d_{i,l}\, d_{i-1,l}^{-1} \qquad (i > l,\ l \neq i-1).$$

(V, 7) $$d_{k,i-1}\, d_{i-1,i} = d_{i-1,i}\, d_{k,i-1}\, d_{k,i} \qquad (k > i-1,\ k \neq i).$$

Damit ist dann Aufgabe V und folglich Problem I gelöst.

§ 4. Eindeutigkeit der Normalform. Vollständigkeit des gefundenen Relationensystems.

Es soll jetzt gezeigt werden: *Die Relationen* (III*), (IV, 1—14), (V, 1—7), (VI, 1, 2) *reichen zur Definition von G_n aus.* Dazu ist nach dem in § 2 Bemerkten nur noch die Lösung von Problem II notwendig.

Es sei also ein Element aus G_n in der Form (3) aus § 1 gegeben, dem die Einheitsmatrix zugeordnet ist. Da die Elemente aus allen Gruppen $M^{(i)}$ mit $i > 1$ eine erste Zeile besitzen wie die L-Matrizen, und da die Einheitsmatrix E ebenfalls eine L-Matrix ist, muss dann das Element $m_1^{(1)}$ in (3) ebenfalls eine L-Matrix sein. Mit Hilfe des Prozesses V aus § 2 kann man dann $m_1^{(1)}$ nach rechts »durchziehen» und mit dem Element L ganz rechts in (3) vereinigen. Dadurch geht (3) über in ein Element $\mu L'$, wobei μ der von $M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots, M^{(n-1)}$ erzeugten Gruppe Γ_{n-1} angehört; diese ist mit G_{n-1}, der Gruppe der $(n-1)$-dimensionalen Gittertransformationen isomorph, und nach dem in den §§ 2, 3 Bewiesenen reichen die Relationen (III*), (IV, 1—14), (V, 1—7), (VI, 1, 2) also aus, um μ auf die Form

($\bar{3}$) $$\prod_{k=2}^{n-1} [\bar{m}_k^{(n-1)} \ldots \bar{m}_k^{(k)}]\, L^*$$

zu bringen, wobei L^* dem Durchschnitt von Γ_{n-1} und Δ_n angehört, und die $\bar{m}_k^{(\varrho)}$ Elemente von $M^{(\varrho)}$ sind. In der Tat enthalten ja die für G_n abgeleiteten Relationen auch alle die Relationen zwischen den Erzeugenden von Γ_{n-1}, die dazu nötig sind, ein beliebiges Element von Γ_{n-1} auf die Form ($\bar{3}$) zu bringen. — Eine Anwendung der oben vorgeführten Schlussweise auf die zweite Zeile der Matrix $\mu L'$ liefert, dass in ($\bar{3}$) $\bar{m}_2^{(2)}$ zu Δ_n gehören muss, und eine Wiederholung des Verfahrens liefert, dass die Relationen der vorigen §§ für G_n ausreichen, um jedes Element der Form (3), das die Einheitsmatrix darstellt, in ein Element von Δ_n zu verwandeln. Infolge der Angabe der definierenden Relationen (VI, 1, 2) für Δ_n ist damit Problem II gelöst.

Es ist klar, dass sich das hier für G_n gefundene Relationensystem wesentlich vereinfachen lässt, insbesondere durch Einführung neuer Erzeugender. Da indessen in § 6 gezeigt wird, dass die Gruppe G_n aus der in der Einleitung mit A_n bezeichneten Gruppe durch Hinzufügen einer einzigen Relation zu den definierenden Relationen von A_n entsteht, und da die definierenden Relationen von A_n sehr ausführlich von J. Nielsen[3] und später von B. Neumann[5] untersucht worden sind, kann eine solche Diskussion hier wohl unterbleiben.

§ 5. Kongruenzgruppen von G_n und A_n.

Nimmt man die Elemente der Matrizen von G_n modulo einer natürlichen Zahl $s > 1$, so erhält man eine endliche Kongruenzgruppe $G_{n,s}$, die Faktorgruppe von G_n ist. Analog geht $M^{(1)}$ bei diesem Prozess in eine endliche Kongruenzgruppe $M_s^{(1)}$ über, die mit $G_{2,s}$ isomorph ist. Eine Matrix aus G_n beziehungsweise $M^{(1)}$, die modulo s der Einheitsmatrix E kongruent ist, soll allgemein mit Γ_s beziehungsweise μ_s bezeichnet werden. Definierende Relationen für $M_s^{(1)}$ erhält man, indem man ein System von Matrizen μ_s aufsucht, aus denen sich alle anderen durch Transformation mit Elementen aus $M^{(1)}$ und Komposition dieser Transformierten zusammensetzen lassen, und diese speziellen Matrizen $\mu_{s,1}, \mu_{s,2}, \ldots$ dann durch die Erzeugenden O_1, d_{12}, d_{21} von $M^{(1)}$ ausdrückt und die so entstehenden Ausdrücke $\Phi_1(O_1, d_{12}, d_{21})$, $\Phi_2(O_1, d_{12}, d_{21}), \ldots$ gleich eins setzt. Zusammen mit den definierenden Relationen von $M^{(1)}$ liefern dann $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 1, \ldots$ ein System definierender Relationen von $M_s^{(1)}$. Es soll nun gezeigt werden:

$\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 1, \ldots$ *liefern zusammen mit den in § 4 angegebenen Relationen für G_n ein System definierender Relationen von $G_{n,s}$.*

Dazu hat man nur noch zu zeigen, dass sich alle Matrizen Γ_s aus den Matrizen μ_s durch Transformation mit Elementen aus G_n und Komposition der Transformierten aufbauen lassen. Es sei also (γ_{ik}) eine beliebige Matrix aus Γ_s. Es ist $\gamma_{11} = 1 + \lambda s$, $\gamma_{1k} = s\bar{\gamma}_{1k}$ für $k = 2, 3, \ldots, n$. Man bestimme in G_n eine Matrix (a_{ik}) mit $a_{11} = 1$, $a_{1k} = 0$ für $k = 2, 3, \ldots, n$, so dass $(\gamma_{ik})(a_{ik}) = (\delta_{ik})$ eine Matrix mit $\delta_{1k} = 0$ für $k = 3, \ldots, n$ wird. Nach der in § 1 eingeschlagenen Methode ist das ohne weiteres zu bewerkstelligen. Es wird $\gamma_{11} = \delta_{11} \equiv 1$

[5] »Die Automorphismengruppe der freien Gruppen». Mathematische Annalen *107* (1933). S. 367—386.

(mod. s) und $\delta_{12} = \delta \,.\, s$, wobei δ (bis auf das Vorzeichen) der grösste gemeinsame Teiler der $\bar{\gamma}_{1k}$ ($k = 2, 3, \ldots, n$) ist. δ_{11}, δ_{12} sind folglich teilerfremd, und wegen $\delta_{11} \equiv 1$, $\delta_{12} \equiv 0$ (mod. s) gibt es eine Matrix $\mu_s^{(0)}$ aus $M_s^{(1)}$, so dass $(\gamma_{ik})(a_{ik})\,\mu_s^{(0)}$ eine erste Zeile wie eine L-Matrix besitzt. Da von (a_{ik}) dasselbe gilt, gilt es auch von $(\gamma_{ik}) \,.\, (a_{ik})\,\mu_s^{(0)}\,(a_{ik})^{-1}$, und eine Fortsetzung des Verfahrens zeigt, wie (γ_{ik}) durch rechtsseitige Multiplikation mit Transformierten von Matrizen μ_s in eine L-Matrix verwandelt werden kann. Man hat dabei nur zu beachten, dass die Gruppen $M^{(i)}$ in G_n alle miteinander konjugiert sind, und dass dasselbe infolgedessen auch von denjenigen Untergruppen der $M^{(i)}$ gilt, die aus Matrizen Γ_s gebildet werden. Da schliesslich jede L-Matrix, die $\equiv E$ (mod. s) ist, aus Transformierten von d_{21}^s zusammengesetzt werden kann, und d_{21}^s eine Matrix μ_s ist, ist unser Satz damit bewiesen.

Die in § 3 gemachte Bemerkung, dass die dort definierte Reihe der Untergruppen $\mathsf{A}_n^{(1)}, \mathsf{A}_n^{(2)}, \ldots$ von A_n mit $\mathsf{A}_n^{(n-1)} = 1$ schliesst, überträgt sich unverändert auf die Kongruenzgruppen $\mathsf{A}_{n,s}$, die man erhält, wenn man die Matrizen von A_n modulo s betrachtet. Nach einem Satz von Burnside[4] ist $\mathsf{A}_{n,s}$ infolgedessen direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Bei geeignetem n und s ist infolgedessen ein beliebig vorgeschriebenes direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung in $\mathsf{A}_{n,s}$ als Untergruppe enthalten. Man hat dazu nur zu zeigen: Ist p eine Primzahl, so ist eine jede Gruppe H_p der Ordnung p^m Untergruppe von $\mathsf{A}_{n,p}$ bei genügend grossem n. $\mathsf{A}_{n,p}$ ist nun aber p-Sylowgruppe in der Automorphismengruppe der Abelschen Gruppe der Ordnung p^n und vom Typ $(1, 1, \ldots, 1)$ (Burnside[4]). $\mathsf{A}_{n,p}$ enthält folglich die p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe der Permutationen von n Dingen und folglich spätestens für $n = p^m$ die Gruppe H_p.

§ 6. **Ein Satz von J. Nielsen.**

In seiner oben[1] zitierten Abhandlung hat Nielsen gezeigt, dass für $n = 3$ die in der Einleitung K_n genannte Gruppe von den Transformierten des dort mit K_{12} bezeichneten Automorphismus erzeugt wird. Im Folgenden soll die in der Einleitung ausgesprochene Verallgemeinerung dieses Satzes unter Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungen bewiesen werden.

Jedem Automorphismus von F_n ist eindeutig eine Substitution aus G_n zugeordnet, denn jeder Automorphismus aus A_n ist zugleich ein solcher der freien

Abelschen Gruppe F_n/F'_n. Als Erzeugende von A_n können die Automorphismen

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{i-1} &= [a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1}^{-1}, a_i, \ldots, a_n] \\ \delta_{i,i-1} &= [a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n] \\ \delta_{i-1,i} &= [a_1, \ldots, a_{i-1} a_i, a_i, \ldots, a_n] \end{aligned}\right\} i = 2, 3, \ldots, n$$

dienen[6], wobei in den eckigen Klammern der Reihe nach die Elemente von F_n stehen, in die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bei dem betreffenden Automorphismus übergehen. $\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i}$ sind respektive die Elemente $O_{i-1}, d_{i-1,i}, d_{i,i-1}$ von G_n zugeordnet.

Es gilt nun: I. *Die in der Einleitung angegebenen Automorphismen K_{ik}, K_{ikl} erzeugen eine invariante Untergruppe K_n von A_n.*

II. *Schreibt man die sämtlichen definierenden Relationen von G_n in der Form $R_\sigma(O_{i-1}, d_{i,i-1}, d_{i-1,i}) = 1$, $(\sigma = 1, 2, \ldots)$, so wird $R_\sigma(\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i})$ ein Automorphismus aus K_n.*

Aus I und II folgt offenbar der erste Teil des in der Einleitung angegebenen Satzes. Ist nämlich $\Phi(\Omega_{i-1}, \delta_{i-1,i}, \delta_{i,i-1})$ ein beliebiger Automorphismus aus A_n, gegeben in seiner Zusammensetzung durch die $\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i}$, und entspricht diesem Automorphismus in G_n die Einheitsmatrix, so muss nach einem Satz von Dyck[7] und Schreier[7] $\Phi(O_{i-1}, d_{i,i-1}, d_{i-1,i})$ identisch sein mit einem Produkt von Transformierten der $R_\sigma^{\pm 1}(O_{i-1}, d_{i,i-1}, d_{i-1,i})$, das heisst, Φ muss sich in ein solches Produkt durch Streichen und Einfügen von Ausdrücken $O_{i-1} O_{i-1}^{-1}$, $O_{i-1}^{-1} O_{i-1}$, $d_{i,i-1} d_{i,i-1}^{-1}, \ldots$ u. s. f. verwandeln lassen. Folglich gilt, dass auch $\Phi(\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i})$ identisch ist mit einem Produkt von Transformierten der $R_\sigma^{\pm 1}(\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i})$, und nach I und II liegt also $\Phi(\Omega_{i-1}, \delta_{i,i-1}, \delta_{i-1,i})$ in K_n.

I ist direkt durch eine einfache Rechnung zu beweisen. Man wähle irgend ein System von Erzeugenden für A_n, transformiere die K_{ik}, K_{ikl} mit diesen Erzeugenden und ihren Reziproken und weise nach, dass man dabei wieder ein Produkt der K_{ik}, K_{ikl} erhält. Es ist zweckmässig, als Erzeugende von A_n hierfür etwa die folgenden zu wählen:

[6] Man zeigt leicht, dass sich aus diesen die von J. Nielsen[3] angegebenen Erzeugenden zusammensetzen lassen.

[7] W. Dyck, Mathematische Annalen *22* (1883). — O. Schreier, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität *5* (1927). S. 170 f.

$$\delta_{12},\ \Omega_1,\ \text{und}\ \Pi_{i-1} = [a_1 \ldots a_{i-2}, a_i, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n]$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n).$$

Die Rechnung soll nicht explizit vorgeführt werden, da sie völlig elementar ist. Es sollen nur einige Bemerkungen gemacht werden, mit deren Hilfe sich die Richtigkeit von I unter wesentlicher Verminderung der Anzahl der auszurechnenden Formeln beweisen lässt.

a) Ein K_{ik} oder K_{ikl} ist mit jeder Erzeugenden von A_n vertauschbar, die die Elemente a_i und a_k beziehungsweise a_i, a_k, a_l von F_n weder miteinander noch mit einem anderen a_ν kombiniert.

b) Da Ω_1 und die Π_{i-1} die Ordnung 2 besitzen, erübrigt sich die Transformation mit ihren Reziproken.

c) Da $\Pi_1 \Omega_1 \Pi_1 \delta_{12} \Pi_1^{-1} \Omega_1^{-1} \Pi_1^{-1} = \delta_{12}^{-1}$ ist, erübrigt sich die Transformation mit δ_{12}^{-1}, da sie auf die Transformation mit δ_{12}, Π_1, Ω_1 zurückgeführt werden kann.

d) Es ist $K_{ikl} = K_{ilk}^{-1}$; da wegen der besonderen Wahl der Erzeugenden von A_n die Indizes 1 und 2 eine besondere Rolle spielen, kann man also im Fall, dass einer der Indizes k, l gleich eins ist stets annehmen, dass etwa $k = 1$ ist.

e) Jeder Automorphismus, der alle $a_\nu \neq a_r$ unverändert lässt, während er a_r in ein Element $a_r' = T_1 a_r T_2$ überführt, wobei T_1, T_2 aus den $a_\nu \neq a_r$ zusammengesetzt sind und $T_2 T_1$ in der Kommutatorgruppe der von den $a_\nu \neq a_r$ erzeugten Gruppe liegt, lässt sich aus den K_{ik}, K_{ikl} zusammensetzen. Das folgt daraus, dass $T_2 T_1$ dann ein Produkt von Transformierten der Kommutatoren $(a_{\nu_1} a_{\nu_2} a_{\nu_1}^{-1} a_{\nu_2}^{-1})^{\pm 1}$ mit $\nu_1, \nu_2 \neq r$ ist, wobei auch diese Transformierten nur aus den $a_\nu \neq a_r$ bestehen.

Nun müssen die Π_{i-1}, wenn man die $K_{\varrho k}$, $K_{\varrho kl}$ mit ihnen transformiert die letzteren einfach permutieren, die Transformation mit Ω_1 führt die K_{ikl} in Automorphismen der unter e) genannten Art und die K_{ik} in sich oder in ihre Reziproken über. Analoges gilt für die Transformation mit δ_{12}; hier macht nur die Berechnung von $\delta_{12} K_{2l1} \delta_{12}^{-1}$ Schwierigkeiten; sie ergibt, dass dies der Automorphismus

$$K_{l2} K_{l1}^{-1} K_{1l} K_{l1} K_{2l1} K_{12l} K_{l2}^{-1} K_{2l}^{-1}$$

ist.[8]

Damit ist dann I bewiesen. Der Beweis von II bietet ebenfalls keine

[8] Entsprechend den Regeln der Matrizenkomposition gilt hier, dass unter $a_1 a_2$ der Automorphismus zu verstehen ist, der entsteht, wenn erst der Automorphismus a_2 und dann a_1 ausgeübt wird.

prinzipiellen Schwierigkeiten. Man hat nur zu beachten, dass von den Relationen von G_n einige als Abkürzungen aufzufassen sind; man findet, dass $\Omega_{i-1}\,\delta_{i-1,i}^{-1}\,\delta_{i,i-1}\,\delta_{i-1,i}^{-1} = \Pi_{i-1}\,K_{i-1,i}$ wird, und dieser Automorphismus wäre dann überall statt P_{i-1} in die Relationen von G_n einzusetzen. Wegen der Eigenschaft I der K_{ik}, K_{ikl} kann man aber auch für P_{i-1} überall Π_{i-1} einsetzen, denn wenn beispielsweise $P_i^2 = 1$ ist, so genügt es zu bestätigen, dass Π_{i-1}^2 in K_n liegt; $(\Pi_{i-1}\,K_{i-1,i})^2 = \Pi_{i-1}^2\,(\Pi_{i-1}^{-1}\,K_{i-1,i}\,\Pi_{i-1})\,K_{i-1,i}$ liegt dann wegen I ebenfalls in K_n. Für die d_{kr} $(k > r)$ sind entsprechend die Automorphismen $a_k' = a_k a_r$, $a_l' = a_l$ für $l \neq k$ einzusetzen; diese mögen δ_{kr} heissen. Da nun diejenigen Relationen von G_n, die die Vertauschbarkeit von solchen Automorphismen ausdrükken, die völlig getrennte Variablensysteme substituieren, trivialerweise auch bei Einsetzen der entsprechenden Automorphismen von F_n erfüllt sind, so bleiben nur noch Relationen übrig, in denen sämtliche auftretenden Automorphismen insgesamt nur 3 Erzeugende der freien Gruppe betreffen. Für diese Relationen kann eine explizite Angabe der in II geforderten Rechnung um so eher unterdrückt werden, als nach dem von Nielsen[1] bewiesenen Satz die Richtigkeit des behaupteten Resultates wegen I von vornherein feststeht.

Schliesslich ist noch zu zeigen, dass alle K_{ik}, K_{ikl} aus K_{12} durch Transformation und Komposition gebildet werden können, oder, was dasselbe besagt, dass durch Hinzufügen der einzigen Relation $(\delta_{12}\,\Omega_1)^2 \equiv K_{12}^{-1} = 1$ A_n in G_n übergeht. Dazu ist nur zu berücksichtigen, dass

$$K_{132} = \delta_{12}^{-1}\,K_{13}\,\delta_{12}\,K_{13}^{-1}$$

ist, und dass man durch Transformation mit geeigneten Produkten der Π_{i-1} offenbar alle K_{ik} aus K_{12} und alle K_{ikl} aus K_{132} erhalten kann.