ÜBER PSEUDOBEWERTUNGEN. II.

(Die Pseudobewertungen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.)

VON

KURT MAHLER

in GRONINGEN.

In einer bekannten Arbeit (Acta mathematica 41, (1918), 271—284) zeigte A. OSTROWSKI, dass ein endlicher algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ an wesentlich verschiedenen Bewertungen allein die *triviale Bewertung*, die den einzelnen zu $\mathfrak{K}$ konjugierten Körpern entsprechenden *Absolutbetrag-Bewertungen* und die den Primidealen $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ entsprechenden $\mathfrak{p}$-*adischen Bewertungen* besitzt.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich die allgemeinere Frage nach den sämtlichen Pseudobewertungen von $\mathfrak{K}$ und zeige, dass *jede solche Pseudobewertung äquivalent zu einer Summe von endlichvielen verschiedenen Bewertungen von $\mathfrak{K}$ ist;* dabei tritt die triviale Bewertung nicht als Summand auf, wenn die Pseudobewertung ihr nicht äquivalent ist.

Die Beweisführung besteht in einer systematischen Untersuchung der Eigenschaften der Pseudobewertungen von $\mathfrak{K}$ und beruht vor allem auf einer Anwendung von elementaren Sätzen über Diophantische Approximationen. Der Ostrowskische Satz wird nicht vorausgesetzt, sondern ergibt sich vielmehr als ein Nebenergebnis.

1. Sei $\mathfrak{K}$ ein endlicher algebraischer Zahlkörper, etwa vom n-ten Grad; von den n zu ihm algebraisch konjugierten Körpern

$$\mathfrak{K}^{(1)},\ \mathfrak{K}^{(2)},\ \ldots,\ \mathfrak{K}^{(n)}$$

seien die r_1 ersten

$$\mathfrak{K}^{(1)},\ \mathfrak{K}^{(2)},\ \ldots,\ \mathfrak{K}^{(r_1)}$$

reell, die übrigen $2r_2$

$$\mathfrak{K}^{(r_1+1)}, \mathfrak{K}^{(r_1+2)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(n)}$$

imaginär, und zwar seien jeweils

$$\mathfrak{K}^{(r_1+h)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}^{(r_1+r_2+h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2)$$

zu einander komplex konjugiert. Es ist

$$r_1 + 2r_2 = n;$$

wir setzen ferner wie üblich

$$r = r_1 + r_2 - 1.$$

Ist α irgend eine Zahl aus $\mathfrak{K}$, so bezeichnen wir mit

$$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$$

der Reihe nach die hierzu gehörigen konjugierten Zahlen aus den Körpern

$$\mathfrak{K}^{(1)}, \mathfrak{K}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(n)}.$$

Deren Absolutbeträge

$$\Omega^{(k)}(\alpha) = |\alpha^{(k)}| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definieren dann n Bewertungen von $\mathfrak{K}$, doch ist natürlich

$$\Omega^{(r_1+h)}(\alpha) = \Omega^{(r_1+r_2+h)}(\alpha) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2),$$

so dass wir nur zu $r+1$ verschiedenen Bewertungsfunktionen

$$\Omega^{(1)}(\alpha), \Omega^{(2)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(r+1)}(\alpha)$$

gelangen. Aus einem späteren Hilfssatz wird sich übrigens ergeben, dass diese sogar von einander unabhängig sind.

2. Sei $\mathfrak{c}$ ein Ideal aus $\mathfrak{K}$, das vom Nullideal (0) verschieden ist, und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ eine Basis desselben. Diese n Zahlen müssen also insbesondere linear unabhängig sein; daher lässt sich jede Zahl ϱ aus $\mathfrak{K}$ auf die Form

$$\varrho = r_1\gamma_1 + \cdots + r_n\gamma_n$$

mit rationalen Koeffizienten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ bringen. Seien $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ganze rationale Zahlen mit

$$|r_1 - s_1| \leq \frac{1}{2}, \quad |r_2 - s_2| \leq \frac{1}{2}, \ldots, |r_n - s_n| \leq \frac{1}{2},$$

und werde

$$\sigma = s_1 \gamma_1 + \cdots + s_n \gamma_n$$

gesetzt; dann ist

$$\Omega^{(k)}(\varrho - \sigma) \leq \frac{1}{2}(|\gamma_1^{(k)}| + \cdots + |\gamma_n^{(k)}|) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und erst recht

$$\Omega^{(k)}(\varrho - \sigma) \leq c \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wenn dabei c die positive Konstante

$$c = c(\mathfrak{c}) = \frac{1}{2} \max_{k=1, 2, \ldots, n} (|\gamma_1^{(k)}| + \cdots + |\gamma_n^{(k)}|)$$

bezeichnet.

3. Die nichtverschwindende Zahl α aus $\mathfrak{K}$ werde als Quotient

$$\alpha = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}, \qquad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1,$$

zweier teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ geschrieben. Wenn τ_1 alle Zahlen aus $\mathfrak{a}_1$ durchläuft, so durchläuft $\frac{\tau_1}{\alpha}$ offenbar alle Zahlen aus $\mathfrak{a}_2$. Unter c verstehen wir die nach § 2 zum Ideal $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_2$ gehörige positive Konstante, und wir setzen

$$c_0 = c_0(\alpha) = \max(1, c).$$

Sei ξ eine zweite Zahl aus $\mathfrak{K}$; sie genüge den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi) \leq c_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und lasse sich als Quotient

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}$$

zweier nicht unbedingt teilerfremden Ideale $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ darstellen, so dass

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{x}_2) = 1$$

ist; falls ξ verschwindet, werde unter $\mathfrak{x}_1$ das uneigentliche Ideal (0) und unter $\mathfrak{x}_2$ ein ganz beliebiges Ideal verstanden.

Da der Nenner von ξ zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd ist, so gibt es eine ganze Zahl τ_0 aus $\mathfrak{K}$ mit

$$\xi \equiv \tau_0 (\mathfrak{a}_1);$$

die allgemeinste Lösung dieser Kongruenz in ganzen Zahlen lautet

$$\tau = \tau_0 + \tau_1,$$

wo τ_1 alle Zahlen aus $\mathfrak{a}_1$ durchläuft. Wir setzen

$$\xi' = \frac{\xi - \tau}{\alpha} = \frac{\xi - \tau_0}{\alpha} - \frac{\tau_1}{\alpha},$$

und bestimmen die ganze Zahl $\frac{\tau_1}{\alpha}$ derart in $\mathfrak{a}_2$, so dass die Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi') \leq c_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten; das ist nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen gewiss möglich. Aus der Konstruktion von τ ergibt sich, dass ξ' in der Form

$$\xi' = \frac{\mathfrak{x}_1'}{\mathfrak{x}_2}$$

geschrieben werden kann, wo $\mathfrak{x}_1'$ ein neues Ideal bezeichnet.

Die Bestimmung von $\tau = \xi - \alpha\xi'$ zeigt noch, dass

$$\Omega^{(k)}(\tau) \leq c_0(1 + \Omega^{(k)}(\alpha)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

4. Da ξ' wieder die gleichen Bedingungen wie ξ erfüllt, so können wir hierauf den vorigen Prozess wiederholen, und diese Berechnung beliebig oft durchführen. Nach etwa N Wiederholungen kommen wir auf diese Weise zu der Formelkette

$$\xi = \tau + \alpha\xi', \quad \xi' = \tau' + \alpha\xi'', \ldots, \quad \xi^{(N-1)} = \tau^{(N-1)} + \alpha\,\xi^{(N)},$$

und durch Elimination der Zahlen

$$\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(N-1)}$$

zu der endlichen Reihenentwicklung

$$\xi = \tau + \alpha\tau' + \cdots + \alpha^{N-1}\tau^{(N-1)} + \alpha^N\xi^{(N)}. \tag{1}$$

Dabei genügt jede der Zahlen

$$\xi, \xi', \ldots, \xi^{(N)}$$

den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi^{(l)}) \leq c_0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, N \end{pmatrix},$$

und lässt sich als Quotient eines ganzen Ideals $\mathfrak{x}_1^{(l)}$ durch $\mathfrak{x}_2$ darstellen:

$$\xi^{(l)} = \frac{\mathfrak{x}_1^{(l)}}{\mathfrak{x}_2} \qquad (l = 0, 1, \ldots, N).$$

Verstehen wir unter η irgend eine durch $\mathfrak{x}_2$ teilbare ganze Zahl aus $\mathfrak{K}$, die nicht gleich Null ist, so werden also alle Produkte

$$\xi\eta,\ \xi'\eta, \ldots, \xi^{(N)}\eta$$

ganz in $\mathfrak{K}$; sie genügen den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi^{(l)}\eta) \leq c_0\,\Omega^{(k)}(\eta) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, N \end{pmatrix},$$

und können also nur Werte annehmen, die einer endlichen, wohl von α und ξ, nicht aber von N abhängigen Menge $\mathfrak{M}^*$ angehören. Dies folgt daraus, dass es bekanntlich nur endlichviele ganze Zahlen in $\mathfrak{K}$ geben kann, die samt allen Konjugierten von beschränktem Absolutbetrag sind. Wir erhalten also das Ergebnis, dass die Zahlen

$$\xi,\ \xi', \ldots, \xi^{(N)}, \ldots.$$

zu einer wohl von α und ξ, nicht aber von N abhängigen endlichen Menge $\mathfrak{M}$ gehören.

Was weiter die Zahlen

$$\tau,\ \tau', \ldots, \tau^{(N-1)}$$

betrifft, so sind sie alle ganz in $\mathfrak{K}$ und genügen den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\tau^{(l)}) \leq c_0(1 + \Omega^{(k)}(\alpha)) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, N-1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also das Ergebnis, dass die Zahlen

$$\tau,\ \tau', \ldots, \tau^{(N-1)}, \ldots$$

sogar zu einer allein von α, nicht aber von ξ und N abhängigen endlichen Menge $\mathfrak{N}$ gehören.

5. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Untersuchung der Pseudobewertungen des Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ über.

Sei $W(a)$ eine Pseudobewertung von $\mathfrak{K}$, die zur trivialen Bewertung

$$W_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0, \\ 1 & \text{für } a \neq 0, \end{cases}$$

nicht äquivalent ist. Dann kann $W(a)$ nur für $a = 0$ verschwinden, da andernfalls diese Funktion für alle a verschwände, was wir auch ausschliessen.

Weil $W(a)$ nicht zur trivialen Bewertung äquivalent ist, so gibt es mindestens eine Zahl α aus $\mathfrak{K}$ mit

$$\alpha \neq 0, \qquad 0 < W(\alpha) < 1.$$

Diese Zahl denken wir uns vorläufig beliebig, aber fest ausgewählt und auf die Gestalt

$$\alpha = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}, \qquad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1,$$

mit zwei teilerfremden Idealen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gebracht.

Sei alsdann wie in den letzten Paragraphen ξ eine Zahl aus $\mathfrak{K}$, die den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi) \leq c_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt, und deren Nenner $\mathfrak{x}_2$ in der Bruchdarstellung

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}$$

zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd ist. Es gilt also die Reihenentwicklung

$$\xi = \tau + \alpha\tau' + \cdots + \alpha^{N-1}\tau^{(N-1)} + \alpha^N \xi^{(N)}. \tag{1}$$

Hierin gehören aber nach Konstruktion die Koeffizienten

$$\tau, \tau', \ldots, \tau^{(N-1)}$$

der endlichen Menge $\mathfrak{N}$ an, die von ξ und N nicht abhängt; es gibt daher eine allein von α abhängige positive Zahl c_0', so dass

$$W(\tau^{(l)}) \leq c_0' \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Weiter liegen die Zahlen

$$\xi,\ \xi',\ \ldots,\ \xi^{(N)}$$

in der endlichen Menge $\mathfrak{M}$, die von N nicht abhängt; somit existiert eine nur von α und ξ abhängige positive Zahl c_0'', so dass

$$W(\xi^{(l)}) \leq c_0'' \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

ist.

Wenden wir jetzt auf die Darstellung von ξ vermöge (1) die Funktionaleigenschaften der Pseudobewertung $W(a)$ an, so ergibt sich die Abschätzung

$$W(\xi) \leq c_0' \sum_{l=0}^{N-1} W(\alpha)^l + c_0'' W(\alpha)^N.$$

Wegen $W(\alpha) < 1$ strebt aber die endliche Reihe

$$c_0' \sum_{l=0}^{N-1} W(\alpha)^l$$

mit wachsendem N gegen die endliche, allein von α abhängige positive Konstante

$$c_1 = c_1(\alpha) = c_0' \sum_{l=0}^{\infty} W(\alpha)^l,$$

während das Restglied

$$c_0''\ W(\alpha)^N$$

gleichzeitig gegen Null konvergiert. Es wird somit

$$W(\xi) \leq c_1,$$

und wir haben das Ergebnis:

Satz 1: *Es gibt eine allein von der Zahl α mit*

$$\alpha \neq 0, \qquad 0 < W(\alpha) < 1, \qquad \alpha = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}, \qquad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1$$

abhängige positive Konstante c_1, so dass jede Zahl ξ aus $\mathfrak{K}$, die den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\xi) \leq 1 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

genügt, und die sich als Quotient

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}$$

zweier Ideale $\mathfrak{x}_1$ *und* $\mathfrak{x}_2$ *darstellen lässt, wo der Nenner die Bedingung*

$$(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{a}_1) = 1$$

erfüllt, die Eigenschaft

$$W(\xi) \leq c_1$$

besitzt.

(Bei der Formulierung des Satzes wird benutzt, dass $c_0 \geq 1$ ist.)

6. Der vorige Satz lässt sich noch verschärfen, wenn tiefere Eigenschaften der Pseudobewertung $W(a)$ herangezogen werden. Zu diesem Zweck definieren wir:

Definition 1: *Für einen Index k mit $1 \leq k \leq n$ existiere keine Zahl α aus $\mathfrak{K}$, so dass gleichzeitig*

$$\Omega^{(k)}(\alpha) > 1, \qquad W(\alpha) < 1$$

ist. Dann sagen wir, dass die Bewertung $\Omega^{(k)}(a)$ in der Pseudobewertung $W(a)$ enthalten ist.

Wegen

$$\Omega^{(r_1+h)}(\alpha) = \Omega^{(r_1+r_2+h)}(\alpha) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2)$$

ist es hinreichend, allein die Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a), \ \Omega^{(2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(r_1+r_2)}(a)$$

in bezug auf diese Eigenschaft des Enthaltenseins zu betrachten. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a), \ \Omega^{(\varkappa_2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(\varkappa_s)}(a) \qquad (1 \leq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_s \leq r_1 + r_2)$$

die sämtlichen verschiedenen unter ihnen sind, die in $W(a)$ enthalten sind; dabei kann s natürlich auch gleich Null sein. Weiter bezeichnen wir mit

$$\Omega^{(\lambda_1)}(a), \ \Omega^{(\lambda_2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(\lambda_t)}(a) \qquad (1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t \leq r_1 + r_2)$$

diejenigen unter den Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a), \ \Omega^{(2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(r_1+r_2)}(a),$$

die *nicht* in $W(a)$ enthalten sind; ihre Anzahl $t = r_1 + r_2 - s$ kann ebenfalls gleich Null sein. Aus Definition 1 folgt, dass zu jedem Index

$$\lambda = \lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_t$$

mindestens eine Zahl α_λ aus $\mathfrak{K}$ existiert, für die gleichzeitig

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_\lambda) > 1, \quad W(\alpha_\lambda) < 1$$

ist.

7. Sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{K}$; die Linearform

$$y = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n$$

ergibt alle Zahlen aus $\mathfrak{K}$, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einzeln alle rationalen Zahlen durchlaufen, und speziell alle ganzen Zahlen aus $\mathfrak{K}$, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganz rational sind. Die Linearformen mit in bezug auf $\mathfrak{K}$ konjugierten Koeffizienten

$$y^{(k)} = x_1\omega_1^{(k)} + x_2\omega_2^{(k)} + \cdots + x_n\omega_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ergeben für rationale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Konjugierten zu y. Bekanntlich ist die Determinante

$$\left|\omega_l^{(k)}\right|_{k,\, l = 1, 2, \ldots, n}$$

dieser letzteren Linearformen von Null verschieden; man kann also dieses Gleichungssystem auflösen und kommt zu Formeln

$$x_l = y^{(1)}\theta_l^{(1)} + y^{(2)}\theta_l^{(2)} + \cdots + y^{(n)}\theta_l^{(n)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei werden alle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reell, wenn

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(r_1)}$$

beliebige reelle Zahlen und

$$\left(y^{(r_1+1)}, y^{(r_1+r_2+1)}\right), \left(y^{(r_1+2)}, y^{(r_1+r_2+2)}\right), \ldots, \left(y^{(r_1+r_2)}, y^{(r_1+2r_2)}\right)$$

beliebige Paare komplex konjugierter Zahlen sind.

Seien speziell

$$Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(r_1)}$$

r_1 beliebige reelle und

$$Y^{(r_1+1)}, Y^{(r_1+2)}, \ldots, Y^{(r_1+r_2)}$$

r_2 beliebige komplexe Zahlen, ferner

$$Y^{(r_1+r_2+h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2)$$

die zu

$$Y^{(r_1+h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2)$$

komplex konjugierte Zahl. Alsdann sind also die Zahlen

$$X_l = Y^{(1)}\theta_l^{(1)} + Y^{(2)}\theta_l^{(2)} + \cdots + Y^{(n)}\theta_l^{(n)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

reell. Demnach lassen sich rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so bestimmen, dass die sämtlichen Absolutbeträge

$$|X_l - x_l| \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebig klein werden; *dies ist selbst noch möglich, wenn wir verlangen, dass der Zähler jeder dieser Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine vorgegebene natürliche Zahl teilbar, ihr gemeinsamer Hauptnenner aber zu einer zweiten vorgegebenen natürlichen Zahl teilerfremd sei.* Setzen wir

$$y^{(k)} = x_1\omega_1^{(k)} + x_2\omega_2^{(k)} + \cdots + x_n\omega_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so werden $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ die Konjugierten einer Zahl

$$y = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n$$

aus $\mathfrak{K}$, und zwar wird der Zähler dieser Zahl durch eine beliebig gegebene natürliche Zahl teilbar, der Nenner zu einer beliebig gegebenen natürlichen Zahl teilerfremd; gleichzeitig werden die Absolutbeträge

$$|y^{(k)} - Y^{(k)}| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebig klein. Da jedes Ideal Teiler einer natürlichen Zahl ist, so folgt der Satz:

Satz 2: *Seien*

$$Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(r_1)}$$

beliebige reelle und

$$Y^{(r_1+1)}, Y^{(r_1+2)}, \ldots, Y^{(r_1+r_2)}$$

beliebige komplexe Zahlen, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zwei Ideale aus $\mathfrak{K}$, die auch übereinstimmen dürfen, und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine Zahl y aus $\mathfrak{K}$ mit den Konjugierten $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$, so dass

$$|y^{(k)} - Y^{(k)}| \leq \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

ist, und so dass in ihrer Darstellung als Idealbruch:

$$y = \frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_2}$$

der Zähler $\mathfrak{y}_1$ durch $\mathfrak{c}_1$ teilbar, der Nenner $\mathfrak{y}_2$ aber zu $\mathfrak{c}_2$ teilerfremd ist.

In diesem Satz ist übrigens der früher angekündete Nachweis der Unabhängigkeit der Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a),\ \Omega^{(2)}(a),\ \ldots,\ \Omega^{(r_1+r_2)}(a)$$

enthalten.

8. Sei λ einer der Indices

$$\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_t,$$

also $\Omega^{(\lambda)}(a)$ nicht in $W(a)$ enthalten; es gibt demnach eine Zahl α_λ aus $\mathfrak{K}$, so dass

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_\lambda) > 1,\quad W(\alpha_\lambda) < 1$$

ist. Sei weiter ξ eine Zahl aus $\mathfrak{K}$, die sich als Idealbruch

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}$$

mit zu dem Ideal $\mathfrak{a}_1$ aus Satz 1 teilerfremden Nenner $\mathfrak{x}_2$ schreiben lässt.

Es lässt sich eine natürliche Zahl f_λ mit

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_\lambda^{f_\lambda}) > \Omega^{(\lambda)}(\xi),$$

also auch mit

$$\Omega^{(\lambda)}\left(\frac{\xi}{\alpha_\lambda^{f_\lambda}}\right) < 1$$

finden. In Satz 2 werde

$$Y^{(\lambda)} = \frac{\xi^{(\lambda)}}{\alpha_\lambda^{(\lambda) f_\lambda}},\qquad Y^{(k)} = 0\qquad (k \neq \lambda;\ k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

gesetzt und für $\varepsilon > 0$ eine genügend kleine Zahl, für $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2$ eine genügend hohe natürliche Potenz von $\mathfrak{a}_1$ genommen. Dann liefert der Satz die Existenz einer Zahl η_λ aus $\mathfrak{K}$, die den Ungleichungen

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_\lambda^{f_\lambda}\eta_\lambda - \xi) \leq \frac{1}{t},\qquad \Omega^{(k)}(\alpha_\lambda^{f_\lambda}\eta_\lambda) \leq \frac{1}{t}\qquad (k \neq \lambda,\ k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

und

$$\Omega^{(k)}(\eta_\lambda) \leq 1\qquad (k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

genügt, deren Nenner zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd ist, und deren Zähler sich durch eine so hohe Potenz von $\mathfrak{a}_1$ teilen lässt, so dass der Nenner von $\alpha_\lambda^{f_\lambda}\eta_\lambda$ zu $\mathfrak{a}_1$ ebenfalls teilerfremd wird. Diese Konstruktion ergibt nach Satz 1 insbesondere die Ungleichung

$$W(\eta_\lambda) \leq c_1,$$

wegen

$$W(\alpha_\lambda^{f_\lambda}) \leq W(\alpha_\lambda)^{f_\lambda} < 1$$

demnach

$$W(\alpha_\lambda^{f_\lambda} \eta_\lambda) \leq c_1.$$

Man bestimme solche zwei Zahlen $\alpha_\lambda^{f_\lambda}$ und η_λ für jeden der Indizes

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$$

und setze dann

$$\eta = \xi - \sum_{\tau=1}^{t} \alpha_{\lambda_\tau}^{f_{\lambda_\tau}} \eta_{\lambda_\tau},$$

so dass somit

$$W(\xi) \leq W(\eta) + \sum_{\tau=1}^{t} W(\alpha_\lambda^{f_\lambda} \eta_\lambda) \leq W(\eta) + c_1 t$$

gilt. Wir leiten hieraus eine Abschätzung für $W(\xi)$ her, indem wir erst eine solche für $W(\eta)$ bestimmen.

9. Aus den Abschätzungen für die Absolutbeträge der Konjugierten der Zahlen $\alpha_\lambda^{f_\lambda} \eta_\lambda$ und $\alpha_\lambda^{f_\lambda} \eta_\lambda - \xi$ folgt für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$

$$\Omega^{(\lambda)}(\eta) \leq \Omega^{(\lambda)}(\alpha_\lambda^{f_\lambda} \eta_\lambda - \xi) + \sum_{\substack{\tau=1 \\ \lambda_\tau \neq \lambda}}^{t} \Omega^{(\lambda)}(\alpha_{\lambda_\tau}^{f_{\lambda_\tau}} \eta_{\lambda_\tau}) \leq \frac{t}{t} = 1,$$

und für $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$

$$\Omega^{(\varkappa)}(\eta) \leq \Omega^{(\varkappa)}(\xi) + \sum_{\tau=1}^{t} \Omega^{(\varkappa)}(\alpha_{\lambda_\tau}^{f_{\lambda_\tau}} \eta_{\lambda_\tau}) \leq \Omega^{(\varkappa)}(\xi) + \frac{t}{t} = \Omega^{(\varkappa)}(\xi) + 1.$$

Bedeute zur Abkürzung $\Omega(\xi)$ die Funktion

$$\Omega(\xi) = \max(\Omega^{(\varkappa_1)}(\xi), \Omega^{(\varkappa_2)}(\xi), \ldots, \Omega^{(\varkappa_s)}(\xi))$$

und für $s = 0$ die Null. Dann ist folglich erst recht

$$\Omega^{(k)}(\eta) \leq \Omega(\xi) + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Es gibt eine positive Zahl c_1', die allein von $\mathfrak{a}_1$ abhängt, so dass die kleinste natürliche Zahl g, die zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd und nicht kleiner als

$$\Omega(\xi) + 1$$

ist, der Ungleichung

$$g \leq c_1'(\Omega(\xi) + 1)$$

genügt. Die Zahl

$$\eta^* = \frac{\eta}{g}$$

besitzt einen zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremden Nenner, und es gilt für sie

$$\Omega^{(k)}(\eta^*) \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Demnach ist nach Satz 1

$$W(\eta^*) \leq c_1,$$

wegen

$$W(g) \leq g\, W(1) \leq c_1''(\Omega(\xi) + 1), \qquad (c_1'' = W(1)\, c_1')$$

also

$$W(\eta) \leq W(\eta^*)\, W(g) \leq c_1 c_1''(\Omega(\xi) + 1).$$

Daraus folgt

$$W(\xi) \leq W(\eta) + c_1 t \leq c_1 c_1''(\Omega(\xi) + 1) + c_1 t \leq c_1(2 c_1'' + t) \max(\Omega(\xi), 1),$$

und also ergibt sich der Satz:

Satz 3: *Seien*

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(\varkappa_s)}(a)$$

diejenigen unter den Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a),\ \Omega^{(2)}(a), \ldots, \ \Omega^{(r_1+r_2)}(a),$$

die in $W(a)$ enthalten sind, und werde unter $\Omega(\xi)$ die Funktion

$$\Omega(\xi) = \max(\Omega^{(\varkappa_1)}(\xi),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(\xi), \ldots, \ \Omega^{(\varkappa_s)}(\xi)),$$

bzw. die Null für $s = 0$ verstanden. Sei ferner α eine Zahl aus $\mathfrak{K}$ mit

$$\alpha \neq 0, \qquad 0 < W(\alpha) < 1, \qquad \alpha = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}, \qquad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1.$$

Dann existiert eine nur von α abhängige positive Konstante c_2, so dass jede Zahl ξ aus $\mathfrak{K}$, deren Nenner zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd ist, der Ungleichung

$$W(\xi) \leq c_2 \max(\Omega(\xi), 1)$$

genügt.

Besonders bemerkenswert ist nach diesem Satz der Fall $s = 0$, in dem sich eine konstante obere Schranke für $W(\xi)$ ergibt.

10. Wird von diesem Fall $s = 0$ abgesehen, so lässt sich für die Pseudobewertung $W(a)$ auch eine untere Schranke herleiten.

Sei also $s \geq 1$. Dann ist nach Definition 1 stets

$$W(\xi) \geq 1 \quad \text{für} \quad \Omega(\xi) > 1,$$

und wir dürfen daher ohne Einschränkung annehmen, dass

$$0 < \Omega(\xi) \leq 1$$

sei. Offenbar gibt es eine rationale Zahl $\varrho = p/q$ mit

$$1 < \Omega(\xi) \, |\varrho| \leq 2,$$

deren Nenner q zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd ist, so dass also nach Satz 3

$$W(\varrho) \leq c_2 \max(\Omega(\varrho), 1) = c_2 |\varrho| \leq \frac{2 c_2}{\Omega(\xi)}$$

ist. Setzt man

$$\varrho \xi = \xi^*,$$

so wird nach Konstruktion von ϱ wegen $\Omega(\xi^*) = \Omega(\xi) \, |\varrho| > 1$:

$$\Omega(\xi^*) > 1$$

und also nach der vorigen Bemerkung

$$W(\xi^*) \geq 1.$$

Da aber

$$W(\xi^*) \leq W(\varrho) \, W(\xi)$$

ist, so folgt demnach

$$W(\xi) \geq \frac{W(\xi^*)}{W(\varrho)} \geq \frac{1}{2 c_2} \Omega(\xi)$$

und also der Satz:

Satz 4: *Seien*

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a), \; \Omega^{(\varkappa_2)}(a), \; \ldots, \; \Omega^{(\varkappa_s)}(a)$$

diejenigen unter den Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a), \; \Omega^{(2)}(a), \; \ldots, \; \Omega^{(r_1 + r_2)}(a),$$

die in $W(a)$ *enthalten sind, und zwar werde* $s \geq 1$ *angenommen. Dann gibt es eine allein von der Pseudobewertung* $W(a)$ *abhängige positive Zahl* c_3, *so dass für* $\Omega(\xi) = \max(\Omega^{(\varkappa_1)}(\xi), \ \Omega^{(\varkappa_2)}(\xi), \ldots, \ \Omega^{(\varkappa_s)}(\xi)) > 1$

$$W(\xi) \geq 1$$

und für $\Omega(\xi) \leq 1$

$$W(\xi) \geq c_3\, \Omega(\xi)$$

ist.

Dieser Satz zeigt, dass

$$\Omega^{(\varkappa)}(a) \subset W(a) \qquad (\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s)$$

ist; die durch Definition 1 gegebene Erklärung des »Enthaltenseins» von $\Omega^{(\varkappa)}(a)$ in $W(a)$ ist also mit der allgemeinen Definition in Einklang.

11. Es werde ein weiterer Begriff eingeführt:

Definition 2: *Eine Zahl* $\delta \neq 0$ *aus* $\mathfrak{K}$ *heisse W-Zahl, wenn*

$$\lim_{l=\infty} W(\delta^l) = 0$$

ist, falls l *alle natürlichen Zahlen durchläuft.*

Da nach Voraussetzung $W(a)$ nicht zur trivialen Bewertung $W_0(a)$ äquivalent ist, so gibt es gewiss W-Zahlen, denn es existiert ja sogar eine Zahl $\alpha \neq 0$ mit

$$W(\alpha) < 1.$$

Jede W-Zahl δ denken wir als gekürzten Idealbruch

$$\delta = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}, \qquad (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = 1,$$

geschrieben; der Zähler $\mathfrak{d}_1$ kann dann entweder das Einheitsideal $\mathfrak{o} = (1)$ oder ein beliebiges hiervon verschiedenes Ideal sein. Es ist klar, dass eine geeignete natürliche Potenz δ^l von δ der Ungleichung

$$W(\delta^l) < 1$$

genügt, also mit der früher mit α bezeichneten Zahl identifiziert werden darf.

Definition 3: *Eine W-Zahl* δ, *etwa mit der gekürzten Idealbruch-Darstellung*

$$\delta = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}, \qquad (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = 1,$$

heisst reduziert, wenn es keine W-Zahl δ^*, etwa mit der gekürzten Idealbruch-Darstellung

$$\delta^* = \frac{\mathfrak{d}_1^*}{\mathfrak{d}_2^*}, \qquad (\mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^*) = 1,$$

gibt, deren Zähler $\mathfrak{d}_1^*$ ein echter Teiler des Zählers $\mathfrak{d}_1$ von δ ist.

Auch die Existenz einer reduzierten W-Zahl ist klar, da es eine W-Zahl schlechthin gibt, und der Zähler derselben nur endlichviele Teiler enthält, man also nach endlich oft wiederholtem Abspalten eines Teilers schliesslich zum Zähler einer W-Zahl gelangen muss, von dem sich kein Faktor mehr abspalten lässt. Gibt es speziell eine W-Zahl mit dem Zähler $\mathfrak{o}$, so ist diese W-Zahl bereits reduziert.

12. Wir zeigen:

Satz 5: *Sei*

$$\delta = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}, \qquad (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = 1,$$

eine reduzierte W-Zahl; dann ist der Zähler $\mathfrak{d}_1$ entweder gleich $\mathfrak{o}$ oder ein Produkt von lauter verschiedenen endlichvielen Primidealen.

Zum Beweis genügt es anzunehmen, dass $\mathfrak{d}_1$ durch mindestens ein Primideal teilbar ist; $\mathfrak{d}_1$ wird also eine Primidealzerlegung

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}_1^{d_1} \mathfrak{p}_2^{d_2} \ldots \mathfrak{p}_\varrho^{d_\varrho}$$

zulassen, wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\varrho$ lauter verschiedene Primideale und $d_1, d_2, \ldots, d_\varrho$ natürliche Zahlen bedeuten. Wir setzen

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_\varrho;$$

es gibt dann nach bekannten Sätzen ein Ideal $\mathfrak{e}_2^*$ in derselben Idealklasse wie $\mathfrak{e}_1$, das zu $\mathfrak{e}_1$ teilerfremd ist, ferner eine Zahl ε^* aus $\mathfrak{K}$ mit der Bruchdarstellung

$$\varepsilon^* = \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{e}_2^*} \qquad (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2^*) = 1.$$

Sei e eine zu $\mathfrak{e}_1$ teilerfremde natürliche Zahl, ferner

$$\mathfrak{e}_2 = e\,\mathfrak{e}_2^*$$

und

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{e} = \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{e}_2}, \qquad (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = 1.$$

Wir werden den Beweis zum Abschluss bringen, indem wir zeigen, dass für genügend grosses e die neue Zahl ε wieder W-Zahl ist; wegen der Eigenschaft von δ, reduziert zu sein, muss also

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{e}_1$$

sein.

Zum Beweis setzen wir

$$d = \max\,(d_1, d_2, \ldots, d_\varrho)$$

und

$$\varepsilon = \delta \zeta.$$

Besitzt dann ζ die Idealbruchdarstellung

$$\zeta = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2}, \qquad (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = 1,$$

so ist $\mathfrak{z}_2$ gewiss zu $\mathfrak{d}_1$ teilerfremd, denn man hat

$$\zeta = \frac{\mathfrak{e}_1^d}{\mathfrak{d}_1} \cdot \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{e}_2^d},$$

und hier ist $\frac{\mathfrak{e}_1^d}{\mathfrak{d}_1}$ ein ganzes Ideal, während $\frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{e}_2^d}$ nach Konstruktion einen zu $\mathfrak{d}_1$ teilerfremden Nenner hat. Ohne Einschränkung dürfen wir e bereits so gross annehmen, dass

$$\Omega^{(k)}(\zeta) = \Omega^{(k)}\left(\frac{\varepsilon^{*d}}{\delta\, e^d}\right) \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

ist.

In Satz 1 werde die Zahl α nunmehr mit einer genügend hohen natürlichen Potenz von δ identifiziert, so dass $\mathfrak{a}_1$ eine Potenz von $\mathfrak{d}_1$ und daher teilerfremd zu $\mathfrak{z}_2$ wird. Dann ergibt der Satz, dass für jede natürliche Zahl g

$$W(\zeta^g) \leq c_1,$$

und also

$$W(\varepsilon^{d\,g}) \leq c_1\, W(\delta^g)$$

wird. Da sich jede natürliche Zahl f in der Form

$$f = d\,g + h$$

darstellen lässt, wo g eine nichtnegative ganze rationale Zahl und h eine der endlichvielen Zahlen
$$h = 0, 1, 2, \ldots, d-1$$
ist, so gilt also in der Tat
$$W(\varepsilon^f) \leq W(\varepsilon^h)\, W(\varepsilon^{dg}) \leq c_1\, W(\varepsilon^h)\, W(\delta^g)$$
und demnach
$$\lim_{f\to\infty} W(\varepsilon^f) = 0,$$
da
$$\lim_{f\to\infty} W(\delta^g) = 0$$
und $W(\varepsilon^h)$ für alle f beschränkt ist.

13. Die reduzierte W-Zahl
$$\delta = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}, \qquad (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = 1,$$
werde nunmehr irgendwie, aber fest, ausgewählt. Weiter sei
$$\delta^* = \frac{\mathfrak{d}_1^*}{\mathfrak{d}_2^*}, \qquad (\mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^*) = 1,$$
eine zweite W-Zahl, die nicht unbedingt reduziert zu sein braucht. Wir zerlegen ihren Zähler in zwei Faktoren
$$\mathfrak{d}_1^* = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2,$$
wo $\mathfrak{b}_1$ das Produkt derjenigen Primfaktoren von $\mathfrak{d}_1^*$ ist, die in $\mathfrak{d}_1$ aufgehen, $\mathfrak{c}_2$ dagegen das Produkt der übrigen Faktoren. Demnach geht $\mathfrak{b}_1$ in einer genügend hohen Potenz von $\mathfrak{d}_1$ auf, während
$$(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_1) = 1$$
ist.

Bedeute $\mathfrak{c}_1$ ein Ideal aus derselben Idealklasse wie $\mathfrak{c}_2$, das zu der Norm von $\mathfrak{d}_1$ teilerfremd ist und γ^* eine Zahl aus $\mathfrak{K}$ mit der Darstellung
$$\gamma^* = \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_2}.$$
Es lässt sich eine genügend grosse natürliche Zahl c finden, die durch $\mathfrak{c}_1$ teilbar, dagegen zu $\mathfrak{d}_1$ teilerfremd ist, so dass die Zahl

$$\gamma = \frac{\gamma^*}{c} = \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_2 c}$$

den Ungleichungen

$$\Omega^{(k)}(\gamma) \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

genügt. Ist

$$c = \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_3,$$

so erhält γ die Idealbruch-Darstellung

$$\gamma = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3},$$

und sein Nenner wird zu $\mathfrak{d}_1$ teilerfremd, da $\mathfrak{c}_2$ und c, also auch $\mathfrak{c}_3$ es sind. Wenden wir Satz 1 auf die natürlichen Potenzen γ^l von γ an, indem wir α mit einer genügend hohen natürlichen Potenz von δ, demnach $\mathfrak{a}_1$ mit derselben Potenz von $\mathfrak{d}_1$ gleichsetzen, so ergibt sich die Ungleichung

$$W(\gamma^l) \leq c_1,$$

also auch

$$W((\gamma\,\delta^*)^l) \leq c_1 W(\delta^{*l}),$$

und demnach

$$0 \leq \lim_{l \to \infty} W((\gamma\,\delta^*)^l) \leq c_1 \lim_{l \to \infty} W(\delta^{*l}) = 0,$$

so dass die Zahl

$$\beta = \gamma\,\delta^*$$

wieder eine W-Zahl ist. Ihre Idealbruch-Darstellung lautet

$$\beta = \frac{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2}{\mathfrak{d}_2^*} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3} = \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{d}_2^* \mathfrak{c}_3},$$

und zwar ist hier

$$(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}_2^* \mathfrak{c}_3) = 1,$$

da $\mathfrak{d}_2^*$ sogar zu $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_3$ sogar zu $\mathfrak{d}_1$ teilerfremd ist und $\mathfrak{b}_1$ nur durch Primideale teilbar sein kann, die auch in $\mathfrak{d}_1$ aufgehen.

Sei jetzt $\mathfrak{b}_1^*$ das Produkt der ersten Potenzen der verschiedenen Primideale die in $\mathfrak{b}_1$ aufgehen; demnach ist $\mathfrak{b}_1^*$ gewiss ein Teiler von $\mathfrak{d}_1$. Falls nicht schon β reduziert ist, so gibt es doch eine reduzierte W-Zahl, deren Zähler entweder gleich $\mathfrak{b}_1^*$ oder gleich einem echten Teiler hiervon ist. Nach Voraussetzung ist aber δ reduziert und es gibt demnach gewiss keine reduzierte W-Zahl, deren Zähler ein echter Teiler von $\mathfrak{d}_1$ ist. Folglich ist $\mathfrak{b}_1^*$ kein echter Teiler von $\mathfrak{d}_1$, sondern vielmehr

$$\mathfrak{b}_1^* = \mathfrak{d}_1,$$

und also

$$\mathfrak{d}_1 \mid \mathfrak{b}_1$$

und erst recht

$$\mathfrak{d}_1 \mid \mathfrak{d}_1^*.$$

Wenn auch δ^* reduziert ist, so ergibt sich auf gleiche Weise

$$\mathfrak{d}_1^* \mid \mathfrak{d}_1$$

und demnach

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_1^*.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 6: *Alle reduzierten W-Zahlen in bezug auf die Pseudobewertung $W(a)$ besitzen in ihrer Darstellung als gekürzten Idealbruch*

$$\delta = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}, \qquad (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = 1,$$

den gleichen Zähler $\mathfrak{d}_1$, und der Zähler $\mathfrak{c}_1$ jeder nicht reduzierten W-Zahl

$$\gamma = \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_2}, \qquad (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) = 1,$$

ist durch $\mathfrak{d}_1$ teilbar.

Der Zähler der reduzierten W-Zahlen spielt also eine ausgezeichnete Rolle; deshalb definieren wir:

Definition 4: *Der allen reduzierten W-Zahlen in bezug auf $W(a)$ gemeinsame Zähler werde mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet und heisse der Charakter der Pseudobewertung $W(a)$.*

Bei den folgenden Überlegungen denken wir stets eine reduzierte W-Zahl

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}^*}, \qquad (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*) = 1,$$

beliebig, aber fest ausgewählt.

14. Nach Satz 5 ist der Charakter $\mathfrak{C}$ entweder gleich $\mathfrak{o}$ oder ein Produkt aus lauter verschiedenen endlich vielen Primidealen. Falls $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}$ ist, ist Satz 6 für die allgemeinen W-Zahlen ohne Inhalt, da jedes Ideal durch $\mathfrak{o}$ teilbar ist.

Aus diesem Grunde werde vorläufig angenommen, dass $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden ist und sich demnach durch mindestens ein Primideal teilen lässt. Wir ordnen alsdann $\mathfrak{C}$ die sogenannte *$\mathfrak{C}$-adische Pseudobewertung*

$$\Omega\ (a)$$

folgendermassen zu:

Definition 5: *Sei $C > 1$ eine beliebige Konstante. Dann sei*

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(0) = 0,$$

dagegen für jede Zahl $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) = C^{-f},$$

wobei f diejenige ganze rationale Zahl bedeutet, für die das auf gekürzte Form gebrachte gebrochene Ideal

$$(\alpha)\,\mathfrak{C}^{-f} = \frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2}, \qquad (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = 1,$$

einen nicht durch $\mathfrak{C}$ teilbaren Zähler $\mathfrak{m}_1$ und einen zu $\mathfrak{C}$ teilerfremden Nenner $\mathfrak{m}_2$ besitzt.

Dass $\Omega_{\mathfrak{C}}(a)$ in der Tat eine Pseudobewertung ist, lässt sich aus dieser Definition ohne Schwierigkeit ableiten. Ist $\mathfrak{C}$ insbesondere ein Primideal $\mathfrak{p}$, so wird $\Omega_{\mathfrak{C}}(a)$ sogar zu einer Bewertung und zwar gerade gleich der *Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Bewertung.*

Die durch Satz 6 gegebene notwendige Bedingung dafür, damit eine Zahl γ W-Zahl ist, lässt sich mit Hilfe von $\Omega_{\mathfrak{C}}(a)$ sehr einfach folgendermassen ausdrücken:

»*Damit eine Zahl γ W-Zahl sei, ist notwendig, dass sie der Ungleichung*

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\gamma) < 1$$

genügt.»

15. Nach dieser Bemerkung ist demnach eine Zahl α mit

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) \geq 1$$

niemals eine W-Zahl, und folglich muss für sie

$$W(\alpha) \geq 1$$

sein, da ja sonst

$$\lim_{l \to \infty} W(\alpha^l) = 0$$

folgte. Wir wollen jetzt eine entsprechende untere Schranke für die Zahlen $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ mit

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) < 1$$

herleiten.

Nach Definition 5 gibt es zu solchen Zahlen α eine natürliche Zahl f, so dass gerade

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) = C^{-f}$$

ist. Wir setzen

$$\alpha = \Gamma^{f} \alpha^{*}$$

und haben dann

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha^{*}) = 1,$$

so dass α^{*} gewiss keine W-Zahl und also

$$W(\alpha^{*}) \geq 1$$

ist. Wegen

$$W(\alpha) = W\left(\frac{\alpha^{*}}{\Gamma^{-f}}\right) \geq \frac{W(\alpha^{*})}{W(\Gamma^{-f})} \geq \frac{1}{W(\Gamma^{-f})}$$

ergibt sich demnach folgende Aussage:

Satz 7: *Der Charakter $\mathfrak{C}$ von $W(a)$ sei von 0 verschieden und es bedeute $\Omega_{\mathfrak{C}}(a)$ die zu $\mathfrak{C}$ gehörige $\mathfrak{C}$-adische Pseudobewertung. Jede Zahl α aus $\mathfrak{K}$ mit $\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) \geq 1$ genügt dann der Ungleichung*

$$W(\alpha) \geq 1.$$

Sei dagegen $\alpha \neq 0$ eine Zahl aus $\mathfrak{K}$ mit $\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) < 1$, also mit $\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) = C^{-f}$, wo f eine natürliche Zahl bedeutet; dann ist

$$W(\alpha) \geq \frac{1}{W(\Gamma^{-f})},$$

wo Γ die früher ausgewählte reduzierte W-Zahl bezeichnet.

(Man beachte, dass für $\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha) \to 0$ gleichzeitig f über alle Grenzen wächst, wegen

$$W(1) \leq W(\Gamma^{f})\, W(\Gamma^{-f})$$

also

$$\frac{1}{W(\Gamma^{-f})} \leq \frac{W(\Gamma^{f})}{W(1)}$$

gegen Null konvergiert, wie es sein muss.)

Nach diesem Satz 7 kann $W(\alpha)$ für eine Zahl α aus $\mathfrak{K}$ nur dann klein sein, wenn gleichzeitig $\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha)$ einen kleinen Wert hat. Demnach besteht die Relation

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(a) \subset W(a).$$

16. Das letzte Ergebnis und das Schlussergebnis aus § 10 fassen wir jetzt in eine einzige Formel zusammen. Es seien wieder

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(a),\ \ldots,\ \Omega^{(\varkappa_s)}(a)$$

die sämtlichen verschiedenen unter den Bewertungen

$$\Omega^{(1)}(a),\ \Omega^{(2)}(a),\ \ldots,\ \Omega^{(r_1+r_2)}(a),$$

die in $W(a)$ enthalten sind, und dann

$$\Omega(a) = \max(\Omega^{(\varkappa_1)}(a),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(a),\ \ldots,\ \Omega^{(\varkappa_s)}(a)),$$

bzw. für $s = 0$

$$\Omega(a) = 0.$$

Weiter sei $\Omega_{\mathfrak{C}}(a)$ die durch Definition 5 gegebene Pseudobewertung, falls

$$\mathfrak{C} \neq \mathfrak{o}$$

ist; für $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}$ dagegen werde

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(a) = 0$$

gesetzt. Dann ist also

$$\Omega(a) \subset W(a), \tag{I}$$

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(a) \subset W(a), \tag{II}$$

und demnach

$$\Omega(a) + \Omega_{\mathfrak{C}}(a) \subset W(a), \tag{A}$$

wobei für $s = 0$ oder $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}$ Null-Summanden fortgelassen werden können.

Unser Ziel ist jetzt der Nachweis, dass auch umgekehrt

$$W(a) \subset \Omega(a) + \Omega_{\mathfrak{C}}(a) \tag{B}$$

und folglich

$$W(a) \sim \Omega(a) + \Omega_{\mathfrak{C}}(a) \tag{C}$$

ist; damit wäre also eine zu $W(a)$ äquivalente Pseudobewertung gefunden.

17. Um diesen Nachweis zu führen, unterscheiden wir drei Fälle. Zunächst bemerken wir jedoch, dass nicht gleichzeitig

$$s = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{o}$$

sein kann, da sonst nach Satz 3, wo $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{o}$ und $\Omega(\xi)$ durch 0 zu ersetzen wäre, die Funktion $W(\xi)$ für jede Zahl ξ aus $\mathfrak{K}$ beschränkt, wegen

$$W(\alpha) \geq W\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \qquad \text{für } \alpha \neq 0$$

also für jede Zahl $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ auch grösser als eine positive Konstante wäre; dies widerspricht jedoch der Annahme, dass $W(a)$ nicht zur trivialen Bewertung $W_0(a)$ äquivalent ist.

Demnach liegt einer dieser drei Fälle vor:

(a) $$s \geq 1, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{o}.$$

(b) $$s = 0, \quad \mathfrak{C} \neq \mathfrak{o}.$$

(c) $$s \geq 1, \quad \mathfrak{C} \neq \mathfrak{o}.$$

Wir verstehen unter

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

eine unendliche Folge von Zahlen aus $\mathfrak{K}$, die in bezug auf die Pseudobewertung

$$\Omega(a) + \Omega_{\mathfrak{C}}(a)$$

gegen Null strebt; d. h. im Fall a sei

$$\lim_{l \to \infty} \Omega(\alpha_l) = 0,$$

im Fall b

$$\lim_{l \to \infty} \Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha_l) = 0,$$

und im Fall c

$$\lim_{l \to \infty} \Omega(\alpha_l) = \lim_{l \to \infty} \Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha_l) = 0.$$

Alsdann werden wir zeigen, dass auch

$$\lim_{l \to \infty} W(\alpha_l) = 0$$

ist, und damit die Richtigkeit der Behauptung (B) erweisen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir jedoch die Annahme machen, dass keine der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

verschwindet, denn es ist ja gleichzeitig

$$\Omega(0) = 0, \ \Omega_{\mathfrak{C}}(0) = 0, \ W(0) = 0.$$

Bedeute Γ die ausgewählte reduzierte W-Zahl, für die also

$$\lim_{l \to \infty} W(\Gamma^l) = 0$$

ist; daher ist nach Satz 4 im Fall a

$$\Omega(\Gamma) < 1,$$

nach Satz 7 im Fall b

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\Gamma) < 1,$$

und nach Satz 4 und Satz 7 im Fall c

$$\Omega(\Gamma) < 1, \quad \Omega_{\mathfrak{C}}(\Gamma) < 1.$$

Diese Ungleichungen folgen daraus, dass für jedes natürliche l

$$\Omega(\Gamma^l) = \Omega(\Gamma)^l, \ \Omega_{\mathfrak{C}}(\Gamma^l) = \Omega_{\mathfrak{C}}(\Gamma)^l$$

ist.

Wir denken uns nunmehr eine möglichst grosse ganze rationale Zahl f_l im Fall a durch die Forderung

$$\Omega(\alpha_l \Gamma^{-f_l}) \leq 1,$$

im Fall b durch die Forderung

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha_l \Gamma^{-f_l}) \leq 1,$$

und im Fall c durch die Forderungen

$$\Omega(\alpha_l \Gamma^{-f_l}) \leq 1, \quad \Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha_l \Gamma^{-f_l}) \leq 1$$

bestimmt; demnach ist in allen drei Fällen nach Satz 3, wenn α mit einer genügend hohen Potenz von Γ und $\mathfrak{a}_1$ also mit der gleichen Potenz des Charakters $\mathfrak{C}$ gleich gesetzt wird:

$$W(\alpha_l \Gamma^{-f_l}) \leq c_2.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Limeseigenschaften der Folge

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

wird dann offenbar f_l mit wachsendem Index l beliebig gross und strebt gegen $+\infty$, so dass also

$$\lim_{l\to\infty} W(\Gamma^{f_l}) = 0$$

ist und sich somit wegen

$$W(\alpha_l) \leq W(\alpha_l \Gamma^{-f_l})\, W(\Gamma^{f_l}) \leq c_2\, W(\Gamma^{f_l})$$

die zu beweisende Beziehung

$$\lim_{l\to\infty} W(\alpha_l) = 0$$

wirklich ergibt.

18. Wir haben damit bewiesen, dass *jede Pseudobewertung des Körpers $\mathfrak{K}$, die nicht äquivalent zur trivialen Bewertung ist, einer Pseudobewertung*

$$\Omega(a) + \Omega_{\mathfrak{C}}(a)$$

äquivalent ist. Hier gilt nach Definition von $\Omega(a)$:

$$\Omega(a) \sim \Omega^{(\varkappa_1)}(a) + \Omega^{(\varkappa_2)}(a) + \cdots + \Omega^{(\varkappa_N)}(a).$$

Sei ferner

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_v$$

die Darstellung von $\mathfrak{C}$ als ein Produkt von lauter verschiedenen Primidealen; eine solche Darstellung ist nach Satz 5 möglich, falls nicht gerade $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}$ ist. Seien weiter

$$\Omega_{\mathfrak{p}_1}(a),\ \Omega_{\mathfrak{p}_2}(a),\ \ldots,\ \Omega_{\mathfrak{p}_v}(a)$$

die den einzelnen Primfaktoren von $\mathfrak{C}$ entsprechenden Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Bewertungen. Dann ist leicht einzusehen, dass eine Zahlfolge

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$$

aus $\mathfrak{K}$, die die Limesgleichung

$$\lim_{l\to\infty} \Omega_{\mathfrak{C}}(\alpha_l) = 0$$

erfüllt, auch die Gleichungen

$$\lim_{l\to\infty} \Omega_{\mathfrak{p}_1}(\alpha_l) = \lim_{l\to\infty} \Omega_{\mathfrak{p}_2}(\alpha_l) = \cdots = \lim_{l\to\infty} \Omega_{\mathfrak{p}_v}(\alpha_l) = 0$$

befriedigt, und dass umgekehrt die erste Gleichung richtig ist, wenn die letzteren Gleichungen gelten. Also ist

$$\Omega_{\mathfrak{C}}(a) \sim \Omega_{\mathfrak{p}_1}(a) + \Omega_{\mathfrak{p}_2}(a) + \cdots + \Omega_{\mathfrak{p}_v}(a),$$

und wir erhalten die Aequivalenz

$$W(a) \sim \sum_{\sigma=1}^{s} \Omega^{(\varkappa_\sigma)}(a) + \sum_{\tau=1}^{v} \Omega_{\mathfrak{p}_\tau}(a),$$

wo rechts als Summanden nur noch Bewertungen auftreten. Falls $s = 0$ ist, fällt auf der rechten Seite die erste Summe fort, und für $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}$ ist die zweite Summe fortzulassen.

19. Es ist jetzt möglich zu zeigen, dass die Summanden

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a), \ldots, \Omega^{(\varkappa_s)}(a), \Omega_{\mathfrak{p}_1}(a), \ldots, \Omega_{\mathfrak{p}_v}(a)$$

in der vorigen Darstellung von $W(a)$ ein unabhängiges System bilden, so dass es sich hierbei also um eine direkte Summendarstellung handelt.

Seien dazu

$$A_1, A_2, \ldots, A_s, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$$

irgend $s + v$ Zahlen aus $\mathfrak{K}$; der Beweis wird erbracht sein, wenn wir zeigen können, dass es Zahlen ζ aus $\mathfrak{K}$ gibt, so dass die Werte

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(\zeta - A_1), \Omega^{(\varkappa_2)}(\zeta - A_2), \ldots, \Omega^{(\varkappa_s)}(\zeta - A_s), \Omega_{\mathfrak{p}_1}(\zeta - \alpha_1), \Omega_{\mathfrak{p}_2}(\zeta - \alpha_2), \ldots, \Omega_{\mathfrak{p}_v}(\zeta - \alpha_v)$$

gleichzeitig beliebig klein sind. Offenbar darf noch ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$$

der Reihe nach ganz $\mathfrak{p}_1$-adisch, ganz $\mathfrak{p}_2$-adisch, ..., ganz $\mathfrak{p}_v$-adisch sind.

Nach Satz 2 gibt es eine Zahl ξ aus $\mathfrak{K}$, für die der Reihe nach

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(\xi - A_1), \Omega^{(\varkappa_2)}(\xi - A_2), \ldots, \Omega^{(\varkappa_s)}(\xi - A_s)$$

beliebig klein sind, deren Nenner zu $\mathfrak{C} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_v$ teilerfremd und deren Zähler durch eine beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{C}$ teilbar ist, so dass

$$\Omega_{\mathfrak{p}_1}(\xi), \Omega_{\mathfrak{p}_2}(\xi), \ldots, \Omega_{\mathfrak{p}_v}(\xi)$$

also auch beliebig klein sind.

Wegen der Verschiedenheit der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_v$ ist es weiter bekanntlich für jedes noch so grosse natürliche l möglich, eine ganze Zahl η^* aus $\mathfrak{K}$ zu finden, die den Kongruenzen

$$\eta^* \equiv \alpha_1 (\mathfrak{p}_1^l),\ \eta^* \equiv \alpha_2 (\mathfrak{p}_2^l),\ \ldots,\ \eta^* \equiv \alpha_v (\mathfrak{p}_v^l)$$

genügt. Bedeutet h eine genügend grosse natürliche Zahl mit

$$h \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_1^l\, \mathfrak{p}_2^l \ldots \mathfrak{p}_v^l),$$

so erfüllt die Zahl

$$\eta = \frac{\eta^*}{h}$$

somit die Relationen

$$\eta \equiv \alpha_1 (\mathfrak{p}_1^l),\ \eta \equiv \alpha_2 (\mathfrak{p}_2^l),\ \ldots,\ \eta \equiv \alpha_v (\mathfrak{p}_v^l)$$

in gleicher Weise wie η^*, und es folgt, dass die Werte

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(\eta),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(\eta),\ \ldots,\ \Omega^{(\varkappa_s)}(\eta),\ \Omega_{\mathfrak{p}_1}(\eta - \alpha_1),\ \Omega_{\mathfrak{p}_2}(\eta - \alpha_2),\ \ldots,\ \Omega_{\mathfrak{p}_v}(\eta - \alpha_v)$$

beliebig klein sind. Die Zahl

$$\zeta = \xi + \eta$$

leistet demnach alles, was verlangt wird.

20. Die direkte Summe von mindestens zwei Bewertungen kann gewiss nicht wieder eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ sein, da die zugehörige perfekte Erweiterung von $\mathfrak{K}$ Nullteiler enthält. Da aber die Bewertungen von $\mathfrak{K}$ unter den Pseudobewertungen dieses Körpers enthalten sind, und sich nach den letzten Ergebnissen also auch als direkte Summe

$$W(a) \sim \sum_{\sigma=1}^{s} \Omega^{(\varkappa_\sigma)}(a) + \sum_{\tau=1}^{v} \Omega_{\mathfrak{p}_\tau}(a)$$

darstellen lassen müssen, so ergibt sich, dass in dieser Darstellung nur ein einziger Summand auftreten darf, dass jede nichttriviale Bewertung von $\mathfrak{K}$ also entweder einer Absolutbetragbewertung

$$\Omega^{(k)}(a)$$

oder einer Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Bewertung

$$\Omega_{\mathfrak{p}}(a)$$

äquivalent sein muss.

Insgesamt haben unsere Entwicklungen also zu folgendem abschliessenden Ergebnis geführt:

Hauptsatz: *Sei $\mathfrak{K}$ ein endlicher algebraischer Zahlkörper. Dann ist jede Bewertung dieses Körpers entweder äquivalent zur trivialen Bewertung $W_0(a)$, oder zu einer der $r_1 + r_2$ verschiedenen Absolutbetragbewertungen $\Omega^{(k)}(a)$ $(k = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$, oder zu einer der unendlichvielen Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Bewertungen $\Omega_{\mathfrak{p}}(a)$, wo $\mathfrak{p}$ durch alle Primideale des Körpers läuft. Ferner ist jede Pseudobewertung von $\mathfrak{K}$ entweder äquivalent zur trivialen Bewertung von $\mathfrak{K}$, oder äquivalent zu einer direkten Summe*

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \Omega^{(\varkappa_\sigma)}(a) + \sum_{\tau=1}^{v} \Omega_{\mathfrak{p}_\tau}(a)$$

von endlichvielen verschiedenen Bewertungen des Körpers.

Unser Beweis gibt auch, wenigstens theoretisch, ein Mittel, um diese Zerlegung in jedem einzelnen Fall wirklich auszuführen; zu diesem Zweck sind die nach Definition 1 in der Pseudobewertung enthaltenen sämtlichen verschiedenen Absolutbetragbewertungen

$$\Omega^{(\varkappa_1)}(a),\ \Omega^{(\varkappa_2)}(a), \ldots, \Omega^{(\varkappa_s)}(a)$$

und ferner der Charakter

$$\mathfrak{C}$$

derselben zu bestimmen.

Krefeld, Januar 1935.

Zusatz bei der Korrektur: Zu Teil I dieser Arbeit (Acta mathematica 66, S. 79—119) sind noch folgende Bemerkungen nachzutragen:

In seinem Bericht »Algebren» (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete IV 1; Berlin 1935) behandelt M. Deuring in Kapitel VI, § 10 u. 11 ebenfalls Pseudobewertungen und zwar für beliebige hyperkomplexe Systeme; u. a. gibt er den Zerlegungssatz aus Teil I, § 15 für den Spezialfall nicht notwendigerweise endlich vieler $\mathfrak{p}$-adischer Bewertungen. Die Deuringschen Untersuchungen sind etwas älter als die meinigen, mir aber erst zu Gesicht gekommen, als Teil I schon gedruckt war.

Weiter sei erwähnt, dass meine Vermutung aus Teil I, § 23, Seite 118 unten, über elementare Ringe falsch ist. Z. B. ist der Ring P aller rationalen Zahlen elementar (d. h. jede seiner Pseudobewertungen einer endlichen Summe irreduzibler Pseudobewertungen äquivalent); der durch Adjunktion einer Unbestimmten z entstehende transzendente Erweiterungskörper $R = P(z)$ ist dagegen nicht mehr elementar. — Eine andere Vermutung an der gleichen Stelle über die Eindeutigkeit der Darstellung einer Pseudobewertung als direkte Summe irreduzibler Pseudobewertungen habe ich dagegen zeigen können; der Beweis ist in den Proceedings der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, XXXIX (1936) 57—65, unter dem Titel: Über Pseudobewertungen I a (Zerlegungssätze) erschienen.

Groningen, 3. Februar 1936.

K. Mahler.