# ÜBER EINE KLASSE ANALYTISCHER FUNKTIONEN VON SPEZIELLER FASTPERIODISCHER STRUKTUR.

VON

RICHARD PETERSEN

in KOPENHAGEN.

## Einleitung.

Meine Habilitationsschrift[1] — und dadurch die vorliegende Arbeit — hat ihren Ausgangspunkt in einer Abhandlung von H. BOHR (Mathematische Annalen 1930)[2] in welcher es gelungen ist, eine ganze transzendente Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ zu konstruieren, deren fastperiodische Struktur dadurch charakterisiert ist, dass es in jeder der beiden Halbebenen $-\infty < \sigma < 0$ und $0 < \sigma < +\infty$ eine der Funktion entsprechende Dirichletentwicklung gibt, und diese sind voneinander verschieden.

Damit ist zum erstenmal bewiesen, dass eine Änderung der Dirichletentwicklung sehr gut eintreten kann, ohne dass die Funktion eine Singularität überschreitet.

Auf Anregung von H. Bohr habe ich den ganzen aus diesem Satze entstehenden Problemkreis studiert, indem ich nämlich eine Klasse von Funktionen untersucht habe, welche durch die folgenden Forderungen abgegrenzt ist:

I $f(s) = f(\sigma + it)$ *sei analytisch im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$.

II $f(\sigma + it)$ *sei fastperiodisch auf jeder Geraden* $\sigma = \sigma_0$ $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$.

Eine Funktion dieser Klasse wird in eine Menge von fastperiodischen Funktionen $F_\sigma(t)$ der reellen Veränderlichen $t$ umgebildet, falls man $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ setzt; ein Studium der fastperiodischen Struktur dieser Menge von Funktionen ist in erster Reihe mein Ziel gewesen.

---

[1] Richard Petersen [1].

[2] H. Bohr [2].

Ehe ich zu einer Besprechung des Inhalts der vorliegenden Abhandlung übergehe, wird es zweckmässig sein, die im folgenden zur ausgedehnten Anwendung kommenden Definitionen aufzuzählen. Zunächst erinnere ich an H. Bohr's wohlbekannte Bezeichnungen der verschiedenen Typen der Streifen:

1) *Der »offene» Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ *wird mit* $(\sigma_1, \sigma_2)$ *bezeichnet.*

2) *Der »abgeschlossene» Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *wird mit* $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ *bezeichnet.*

3) *Statt »in jedem festen Teilstreifen* $(\sigma'_1, \sigma'_2)$, $\sigma_1 < \sigma'_1 < \sigma'_2 < \sigma_2$, *des Streifens* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$*» wird »in* $[\sigma_1, \sigma_2]$*» geschrieben.*

Beispiel: Der Ausdruck »eine Funktion $f(s)$ ist beschränkt in $[\sigma_1, \sigma_2]$» bedeutet, dass diese Funktion in jedem Teilstreifen $(\sigma'_1, \sigma'_2)$, wo $\sigma_1 < \sigma'_1 < \sigma'_2 < \sigma_2$, beschränkt ist. Hiernach ist es klar, was man zum Beispiel unter $\{\sigma_1, \sigma_2)$ zu verstehen hat.

Dann folgen die Definitionen der Verschiebungszahlen, der Fastperiodizität und der Maximalstreifen:

Die reelle Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ heisst eine zu $\varepsilon > 0$ gehörige *Verschiebungszahl* für $f(s)$ im Streifen $(\sigma_1, \sigma_2)$, wenn für jedes $s$ in $(\sigma_1, \sigma_2)$ die Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

besteht. Falls $f(s)$ zugleich im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ d. h. in $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ stetig ist, wird diese Ungleichung auch für $\sigma = \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_2$ gelten. Die Zahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ werden auf einer Zahlenachse abgetragen; dadurch entsteht eine Menge $E(\varepsilon, f(s))$, die relativ dicht heisst, wenn es eine solche Zahl $l = l(\varepsilon)$ gibt, dass jedes Intervall der Länge $l$ mindestens eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält.

**Hauptdefinition.** *Die Funktion* $f(s)$ *soll fastperiodisch in* $(\sigma_1, \sigma_2)$ *heissen, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine relativ dichte Menge* $E(\varepsilon, f(s))$ *von Verschiebungszahlen* $\tau = \tau(\varepsilon)$ *gehört; wird über* $f(s)$ *ferner vorausgesetzt, dass sie im abgeschlossenen Streifen* $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ *stetig ist, so sind die Zahlen dieser Menge auch Verschiebungszahlen* $\tau = \tau(\varepsilon)$ *für die Geraden* $\sigma = \sigma_1$ *und* $\sigma = \sigma_2$, *und* $f(s)$ *heisst dann fastperiodisch in* $\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Der Ausdruck *»eine Funktion* $f(s)$ *ist fastperiodisch in* $[\sigma_1, \sigma_2]$*»* soll bedeuten, dass $f(s)$ in jedem Teilstreifen $(\sigma'_1, \sigma'_2)$, wo $\sigma_1 < \sigma'_1 < \sigma'_2 < \sigma_2$, fastperiodisch ist.

*Der Streifen I,* $a < \sigma < b$, *heisst ein Maximalstreifen für* $f(s)$, *falls* $f(s)$ *fastperiodisch in* $[a, b]$ *ist, ohne in irgendeinem Streifen, welcher* $a$ *oder* $b$ *umschliesst, fastperiodisch zu sein.*

Damit sind die Definitionen hergezählt, und ich werde jetzt kurz die Probleme und die erhaltenen Ergebnisse besprechen.

Es sei $f(s) = f(\sigma + it)$ eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funktion.

In welchem Grade werden der Funktion gleichartig fastperiodische Eigenschaften erteilt durch die Forderung, dass $f(\sigma + it)$ *auf jeder Geraden* $\sigma = \sigma_0$ $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$ fastperiodisch sei? Oder mit anderen Worten:

Wird $f(s)$ in gewissen Teilstreifen von $\alpha < \sigma < \beta$ fastperiodisch sein?

Diese Frage ist beantwortet durch den

**Hauptsatz I.**

*Zu der Funktion $f(\sigma + it)$ gehört eine endliche oder abzählbare Anzahl von Maximalstreifen I, die im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ überall dicht gelegen sind, d. h. ein beliebiger Teilstreifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ enthält Geraden $\sigma = \sigma_0$, welche mindestens einem dieser Maximalstreifen angehören.*

Hiermit ist die fastperiodische Struktur einer Funktion der gegebenen Klasse im wesentlichen beleuchtet.

Die nächste Aufgabe entsteht dann ganz natürlich, nämlich die folgende:

Ist es möglich eine Funktion der gegebenen Klasse zu konstruieren, deren fastperiodische Struktur durch eine im voraus gegebene Menge von Maximalstreifen charakterisiert wird?

Die Antwort erhält man aus dem

**Hauptsatz II.**

*Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion zu konstruieren, für welche die Menge der Maximalstreifen, welche die in Hauptsatz I erwähnte Bedingung erfüllen, gegeben ist.*

Eine Frage, die mir von B. Jessen im Jahre 1933 gestellt wurde, hat meine Gedanken auf ein Problem gelenkt, welches man vielleicht »das zu dem obigen komplementäre» bezeichnen könnte:

Ist es möglich eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funktion aufzubauen, welche auf einer gegebenen Menge von Geraden $\sigma = \sigma_0$ innerhalb dieses Streifens fastperiodisch ist, ohne in irgendeinem der Teilstreifen fastperiodisch zu sein?

Meine Untersuchungen über dieses Problem sind nach und nach veröffentlicht worden, indem es mir erst gelungen ist, eine im Streifen analytische Funktion aufzubauen, welche auf einer und nur auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$ fastperiodisch ist[1], dann habe ich eine auf einer endlichen Anzahl von Geraden

$$\sigma = \sigma_1, \ \sigma = \sigma_2, \ldots, \ \sigma = \sigma_n$$

[1] Richard Petersen [2].

fastperiodische Funktion konstruiert[1], und schliesslich habe ich in einem Vortrag (Stockholm, 1934) den allgemeinen Satz geben können[2], nämlich den

**Hauptsatz III.**

*Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion zu konstruieren, welche auf der Menge von Geraden, die zurückbleibt, wenn man von dem gegebenen Streifen* $(\alpha, \beta)$ *die Menge von Maximalstreifen* $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ *entfernt, fastperiodisch ist, ohne auf irgendeiner anderen Geraden innerhalb des Streifens* $(\alpha, \beta)$ *fastperiodisch zu sein.*

In der vorliegenden Arbeit sind die obigen Untersuchungen gesammelt und genau referiert, indem ich auch die gebrauchten Hilfsmittel ziemlich ausfürlich besprochen habe.

Zum Schluss der Einleitung werde ich zur Orientierung eine kurze Übersicht des folgenden geben:

§ 1. Die von H. Bohr's Theorie der fastperiodischen analytischen Funktionen herrührenden Hilfsmittel, welche im folgenden ausgedehnte Anwendung finden werden.

§ 2. Runges Polverschiebung in einer für die zu behandelnden Probleme speziell zurechtgelegten Darstellung.

§ 3. Die Untersuchung einer Klasse von analytischen Funktionen mittels eines Satzes, welche in seiner ursprünglichen Form von Osgood gegeben wurde.

§ 4. Der Aufbau einer im folgenden zur Anwendung kommenden Funktion.

§ 5. Beweis des Hauptsatzes I.

§ 6. Beweis des Hauptsatzes II.

§ 7. Beweis des Hauptsatzes III.

## § 1. Hilfsmittel.

Im folgenden werden wir die wichtigsten der Sätze über fastperiodische analytische Funktionen aufzählen. Wo nicht anderes ausdrücklich bemerkt ist, sind sie von H. Bohr[3] ausgesprochen. Mehrere dieser Sätze lassen sich unschwer aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen übertragen, andere aber sind erst durch die hinzukommende Voraussetzung des analytischen Charakters der Funktionen bedingt; diese letzteren habe ich besonders hervorgehoben.

---

[1] Richard Petersen [3].
[2] Richard Petersen [4].
[3] H. Bohr [1].

**Satz 1.** Eine Funktion $f(s)$, welche im Streifen $\{\alpha, \beta\}$ bzw. in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist, ist auch in diesem Streifen beschränkt.

**Satz 2.** Sei die im offenen Streifen $(\alpha, \beta)$ analytische Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt und auf einer einzelnen Geraden $\sigma = \sigma_0$, $\alpha < \sigma_0 < \beta$, fastperiodisch.

Dann ist $f(s)$ eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion von $s$. Diesem Satze, der fundamentale Bedeutung für die ganze Theorie hat, geben wir die Bezeichnung ein »*Übertragungssatz*», worunter man einen Satz verstehen soll, welcher dazu dienlich ist, die fastperiodischen Eigenschaften auf einer einzelnen Geraden direkt auf den ganzen Streifen zu übertragen.

**Satz 3.** Die Summe und das Produkt zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischer Funktionen sind wieder fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$. Die Grenzfunktion einer in $(\alpha, \beta)$ gleichmässig konvergenten Folge von in $(\alpha, \beta)$ fastperiodischen Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ ist wieder fastperiodisch in $(\alpha, \beta)$. Über Differentiation und Integration gilt: Ist $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, wird auch $f'(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$ sein; wenn ein unbestimmtes Integral dieser Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist, wird es wiederum eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion.

**Satz 4.** Die Fourierentwicklungen der in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ für $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$, $\alpha < \sigma < \beta$, können in der *Dirichletentwicklung*

$$f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$$

gesammelt werden. Ist $f(s)$ fastperiodisch in $\{\alpha, \beta\}$, gilt die Entwicklung auch auf den Geraden $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$.

**Satz 5. Fundamentalsatz.**

Ist $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ die Dirichletentwicklung einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$, dann besteht für jedes $\sigma$, $\alpha < \sigma < \beta$, die Gleichung

$$M_t\{|f(\sigma + it)|^2\} = \Sigma |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma}.$$

Falls $f(s)$ im abgeschlossenen Streifen $\{\alpha, \beta\}$ fastperiodisch ist, wird diese Gleichung auch für $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$ bestehen.

**Satz 6. Eindeutigkeitssatz.**

Sind zwei Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ in $(\alpha, \beta)$ fastperiodisch, und haben sie in diesem Streifen die gemeinsame Dirichletentwicklung $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, so sind sie miteinander identisch.

**Satz 7.** Die Dirichletentwicklungen der Summe und des Produkts zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischer Funktionen erhält man durch formale Rechnung.

Die Dirichletentwicklung der Grenzfunktion einer in $(\alpha, \beta)$ gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen $f_n(s)$ entsteht durch formalen Grenzübergang in der Entwicklung von $f_n(s)$.

Ist $f(s)$ eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion, so entsteht die Dirichletentwicklung für $f'(s)$ durch gliedweise Differentiation der Entwicklung für $f(s)$. Ist $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch und ist $\int f(s)\, ds$ wiederum in diesem Streifen fastperiodisch, so entsteht die Dirichletentwicklung eines unbestimmten Integrals durch gliedweise Integration der Dirichletentwicklung für $f(s)$.

**Satz 8. Approximationssatz.**

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytische Funktion in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch sei, ist, dass sie sich in diesem Streifen durch Exponentialpolynome $\sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$ gleichmässig approximieren lässt.

Aus dem Approximationssatze folgen zwei »Übertragungssätze», nämlich:

**Satz 9.**[1] Es seien, den Geraden $\sigma = \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ entsprechend, zwei fastperiodische Funktionen $F_{\sigma_1}(t)$ und $F_{\sigma_2}(t)$ der reellen Veränderlichen $t$ gegeben, deren Fourierentwicklungen miteinander übereinstimmen, d. h. deren Fourierentwicklungen aus derselben Dirichletentwicklung formal entstehen, falls man für $\sigma$ den Wert $\sigma_1$ bzw. $\sigma_2$ schreibt

$$F_{\sigma_1}(t) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma_1} e^{i \Lambda_n t}, \qquad F_{\sigma_2}(t) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma_2} e^{i \Lambda_n t}.$$

Dann existiert eine Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) $f(s)$ ist stetig in $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, 2) $f(s)$ ist analytisch in $(\sigma_1, \sigma_2)$, 3) $f(\sigma_1 + it) = F_{\sigma_1}(t)$ und $f(\sigma_2 + it) = F_{\sigma_2}(t)$, 4) $f(s)$ ist fastperiodisch in $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ mit der Entwicklung $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$.

**Satz 10.** Wenn $F_{\sigma_1}(t) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma_1} e^{i \Lambda_n t}$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$ mit lauter negativen Fourierexponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ ist, so gibt es eine Funktion $f(s)$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

[1] H. Bohr [4].

1) $f(s)$ ist stetig in $\{\sigma_1, +\infty)$, 2) $f(s)$ ist analytisch in $(\sigma_1, +\infty)$, 3) $f(\sigma_1 + it) = F_{\sigma_1}(t)$, 4) $f(s)$ ist fastperiodisch in $\{\sigma_1, +\infty)$ mit der Entwicklung $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$. $f(s)$ strebt für $\sigma \to \infty$ gleichmässig in $t$ gegen 0.

**Satz 11.** Eine in der Halbebene $(-\infty, \alpha]$ fastperiodische Funktion

$$f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s},$$

deren Exponenten alle positiv mit einer von Null verschiedenen unteren Grenze sind, hat ein unbestimmtes Integral $\int f(s)\, ds$, das ebenfalls in $(-\infty, \alpha]$ fastperiodisch ist, und man erhält die Entwicklung von $\int f(s)\, ds$ durch gliedweise Integration. Schliesst die Gerade $\sigma = \alpha$ sich der Halbebene $\sigma < \alpha$ an, oder mit anderen Worten: setzt man über $f(s)$ voraus, dass sie in $(-\infty, \alpha\}$ fastperiodisch ist und die Entwicklung $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, $-\infty < \sigma \leqq \alpha$, hat, so folgt aus dem Beweise des obigen Satzes unmittelbar, dass das unbestimmte Integral von $f(\alpha + it)$ beschränkt ist, d. h. das Integral ist eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$. — Nach diesen Bemerkungen ist es möglich, den für die nach rechts abgeschlossene Halbebene $(-\infty, \alpha\}$ geltenden und dem obigen entsprechenden Satz herzuleiten.

**Satz 12.** Ist $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, und sind die Exponenten $\Lambda_n$ numerisch beschränkt, z. B. $|\Lambda_n| < 1$, dann ist $f(s)$ eine ganze Transzendente und fastperiodisch in $[-\infty, +\infty]$.

## § 2. Runges Polverschiebung.

Die von Runge angegebene Methode zur Verschiebung der Pole, welche innerhalb der Theorie der fastperiodischen analytischen Funktionen zuerst von H. Bohr[1] benutzt wurde, wird sich bei meinen späteren Untersuchungen als brauchbar erweisen. Ich werde sie deshalb ziemlich ausfürlich besprechen und habe die untenstehende Darstellung für meine besondere Anwendung speziell zurechtgelegt.

Bezeichnet man ein Polynom mit $P_0(x)$, so ist

$$R_0(z) = P_0\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)$$

eine rationale Funktion von $z$ mit den Polen $z = \pm i$.

[1] H. Bohr [2].

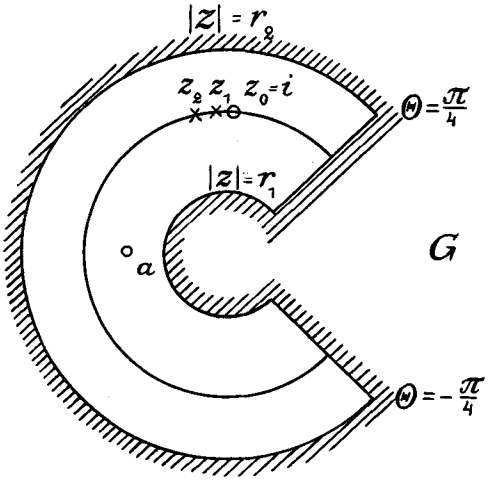
Die Aufgabe besteht aus einer »Verschiebung» der Pole $z = \pm i$ nach $z = a\ (-1 < a < 0)$, worunter man das folgende verstehen soll:

Zunächst wird ein sogenanntes »Verschiebungsgebiet» $G$ in der $z$-Ebene gewählt, welches ausserhalb einer einfachen geschlossenen Kurve liegt, die $z = \pm i$ und $z = a$ ganz umschliesst.

Indem $z = re^{i\Theta}$, ist $G$ durch

$$|z| < r_1;\ \ |z| > r_2 \text{ und } r_1 \leqq |z| \leqq r_2,\ \ -\frac{\pi}{4} < \Theta < \frac{\pi}{4}$$

definiert.




*Wir werden jetzt zeigen, dass man ein Polynom $P(x)$ so bestimmen kann, dass die rationale Funktion $R(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right)$ die Ungleichung*

$$|R(z) - R_0(z)| < \varepsilon$$

*im ganzen Gebiete $G$ befriedigt* d. h.

$$\left| P\left(\frac{1}{z-a}\right) - P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) \right| < \varepsilon;$$

in der letzteren Form der Ungleichung hat man die Lage der Pole besonders betont.

Mittels Dekomposition erhält man

$$P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = p_0\left(\frac{1}{z-i}\right) + q_0\left(\frac{1}{z+i}\right)$$

und es handelt sich jetzt darum, zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ derart festzulegen, dass im Gebiete $G$ die Ungleichungen

$$\left| p\left(\frac{1}{z-a}\right) - p_0\left(\frac{1}{z-i}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\left| q\left(\frac{1}{z-a}\right) - q_0\left(\frac{1}{z+i}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt werden.

Das Verfahren ist nun das folgende:

Auf der aus dem Kreisbogen $|z| = 1$, $\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq \pi$, und der geradlinigen Strecke von $z = -1$ bis $z = a$ gebildeten Kurve wird eine endliche Anzahl von Punkten $z_0 = i, z_1, z_2, \ldots, z_N = a$ so eingeschoben, dass für $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ der Abstand $|z_n - z_{n+1}|$ kleiner wird als der der oben definierten Kurve vom Rande des Gebietes $G$. Die Verschiebung muss in mehreren Schritten ausgeführt werden, indem man nämlich zunächst von $z_0$ nach $z_1$ verschiebt, dann von $z_1$ nach $z_2$ u. s. w.

Der erste Schritt besteht in der Bestimmung eines Polynoms $p_1(x)$, das im Gebiete $G$ die Ungleichung

$$\left| p_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) - p_0\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

befriedigt.

Die Zahl $\varrho$ wird nun so gewählt, dass der Kreis $|z - z_1| = \varrho$ den Punkt $z_0$ umschliesst, aber ganz in dem zu $G$ komplementären Gebiete gelegen ist ($\varrho <$ der Abstand vom Rande).

Die Funktion $p_0\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ ist analytisch in $|z - z_1| > \varrho$ einschliesslich des unendlich fernen Punktes und lässt sich also in eine Potenzreihe nach Potenzen von $\frac{1}{z - z_1}$ entwickeln:

$$p_0\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{(z - z_1)^n}, \quad |z - z_1| > \varrho.$$

Da $\varrho$ kleiner als der Abstand vom Rande gewählt worden ist, liegt $G$ ganz innerhalb des Gebietes $|z - z_1| > \varrho$, und die Reihe ist somit gleichmässig konvergent in $G$.

Hieraus folgt, dass es möglich ist, eine Zahl $m$ derart zu wählen, dass für jedes $z$ im Gebiete $G$ die Ungleichung

$$\left| p_0\left(\frac{1}{z - z_0}\right) - \sum_0^m \frac{k_n}{(z - z_1)^n} \right| = \left| \sum_{m+1}^\infty \frac{k_n}{(z - z_1)^n} \right| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

besteht. Die gesuchte Funktion ist also

$$p_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) = \sum_0^m \frac{k_n}{(z - z_1)^n},$$

und es gilt in $G$ die Ungleichung

$$\left| p_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - p_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Der zweite Schritt besteht in einer Verschiebung des Pols $z_1$ nach dem Pole $z_2$. Dadurch wird $p_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right)$ bestimmt, und so fährt man weiter fort.

Nach $N$ Schritten haben wir das Polynom $p_N(x)$ erreicht, welches im Gebiete $G$ die Ungleichung

$$\left| p_N\left(\frac{1}{z-a}\right) - p_0\left(\frac{1}{z-i}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt.

Dadurch haben wir eine rationale Funktion

$$p\left(\frac{1}{z-a}\right) = p_N\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

mit dem Pole $z = a$ gefunden, die im ganzen Gebiete $G$ die Bedingung

$$\left| p\left(\frac{1}{z-a}\right) - p_0\left(\frac{1}{z-i}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt.

In genau derselben Weise bestimmt man $q\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

Indem $P\left(\frac{1}{z-a}\right) = p\left(\frac{1}{z-a}\right) + q\left(\frac{1}{z-a}\right)$, haben wir also die ursprüngliche Aufgabe gelöst, denn es ist uns gelungen, eine Funktion

$$R(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

zu bestimmen, welche die verlangten Bedingungen erfüllt, d. h.

1) $R(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right)$ hat den Pol $z = a$.

2) Für jedes $z$ im Gebiete $G$ besteht die Ungleichung

$$\left| P\left(\frac{1}{z-a}\right) - P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right)\right| < \varepsilon.$$

## § 3. Eine Klasse analytischer Funktionen.

H. Bohr hat die Struktur von ganzen transzendenten Funktionen, welche auf jedem vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahle $\Theta = \Theta_0$ beschränkt bleiben, untersucht.[1]

Ich werde jetzt auf ähnliche Weise eine Klasse von Fnnktionen studieren, welche durch die folgenden Bedingungen charakterisiert wird:

1) Es sei $f(s)$ eine im Streifen $(\alpha, \beta)$, wo $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$, analytische Funktion.

2) Die Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ sei beschränkt auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$ $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$.

Bezeichnet man wie gewöhnlich die obere Grenze für $|f(\sigma_0 + it)|$, $-\infty < t < +\infty$, mit $L(\sigma_0)$, so drückt diese letztere Bedingung aus, dass die reelle Funktion $L(\sigma)$ in jedem Punkte des Intervalls $\alpha < \sigma < \beta$ definiert ist.

**Satz.** *Es gibt mindestens ein Intervall $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, in welchem die Funktion $f(\sigma + it)$ beschränkt bleibt, d. h. es gibt eine positive Zahl $K$, so dass $L(\sigma) \leqq K$, $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$.*

Fassen wir $t$ als Parameter auf, so wird die Funktion $f(\sigma + it)$ in die Menge von Funktionen

$$F_t(\sigma) = f(\sigma + it), \quad -\infty < t < +\infty,$$

umgebildet.

Für jedes feste $t$ ist $F_t(\sigma)$ eine stetige Funktion von $\sigma$ im Intervall $\alpha < \sigma < \beta$. Ferner gilt die Ungleichung $|F_t(\sigma_0)| \leqq L(\sigma_0)$ für $-\infty < t < +\infty$.

Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Menge der Funktionen $F_t(\sigma)$ ist gleichartig beschränkt in $\alpha < \sigma < \beta$, d. h.

$$|F_t(\sigma)| \leqq K \text{ für alle } t \text{ oder } |f(\sigma + it)| \leqq K.$$

Der Satz ist damit bewiesen.

2) Die Menge der Funktionen $F_t(\sigma)$ ist nicht gleichartig beschränkt in $\alpha < \sigma < \beta$. Es ist dann möglich, zwei Zahlen $\sigma_1$ und $t_1$ zu bestimmen, so dass $|F_{t_1}(\sigma_1)| > 1$, und da $F_{t_1}(\sigma)$ stetig ist, können wir $\sigma_1$ in ein in $\alpha < \sigma < \beta$ gelegenes abgeschlossenes Intervall $I_1$ einschliessen, so dass

$$|F_{t_1}(\sigma)| > 1 \text{ für alle } \sigma \text{ in } I_1.$$

---

[1] H. Bohr [3].

Nun haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Menge der Funktionen $F_t(\sigma)$ ist gleichartig beschränkt in $I_1$ d. h.

$$|F_t(\sigma)| \leqq K \text{ für alle } t \text{ oder } |f(\sigma + it)| \leqq K.$$

Der Beweis ist damit vollendet.

2) Die Menge der Funktionen $F_t(\sigma)$ ist nicht gleichartig beschränkt in $I_1$. Es ist dann möglich, zwei Zahlen $\sigma_2$ (im Intervall $I_1$) und $t_2$ so zu wählen, dass $|F_{t_2}(\sigma_2)| > 2$. Da die Funktion $F_{t_2}(\sigma)$ stetig ist, können wir nun ein abgeschlossenes Intervall $I_2$, welches ein Teilintervall von $I_1$ ist, so bestimmen, dass

$$|F_{t_2}(\sigma)| > 2 \text{ für alle } \sigma \text{ in } I_2.$$

Und so fährt man weiter fort.

Falls die erste Möglichkeit nach einer endlichen Anzahl von Schritten eintritt, haben wir den Beweis erledigt.

Es bleibt noch der Fall übrig, wo wir diese Methode bis ins Unendliche fortsetzen können. Man erhält:

$$\begin{array}{lll} |F_{t_1}(\sigma)| > 1 & \text{im Intervall} & I_1 \\ |F_{t_2}(\sigma)| > 2 & \text{»} \quad \text{»} & I_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ |F_{t_n}(\sigma)| > n & \text{»} \quad \text{»} & I_n \\ \cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

Da $I_2$ ein Teilintervall von $I_1$ ist, $I_3$ ein Teilintervall von $I_2$ ist u. s. w., wird die Folge der Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mindestens einen gemeinsamen Punkt $\sigma_0$ enthalten.

Für diesen Punkt $\sigma_0$ sind dann die Ungleichungen

$$|F_{t_1}(\sigma_0)| > 1, \ |F_{t_2}(\sigma_0)| > 2, \ \ldots, \ |F_{t_n}(\sigma_0)| > n, \ \ldots$$

erfüllt. Dem widerspricht, dass die Funktion $F_t(\sigma_0) = f(\sigma_0 + it)$ beschränkt ist.

Also muss die erste Möglichkeit eintreten, und damit haben wir den Beweis geführt.

Wir benötigen jetzt folgende

**Definition.** Unter der Bezeichnung »*Ein maximales Beschränkheitsintervall*» der Menge von Funktionen $F_t(\sigma)$ soll ein Intervall $I$, $a < \sigma < b$, verstanden werden, welches die Eigenschaft hat, dass $F_t(\sigma)$ in jedem Intervall $a_1 < \sigma < b_1$, wo $a < a_1 < b_1 < b$, gleichartig beschränkt ist, ohne in irgendeinem Intervalle,

welches $a$ oder $b$ einschliesst, beschränkt zu sein. Der Streifen $I = [a, b]$ soll ein *maximaler Beschränkheitsstreifen* der Funktion $f(\sigma + it)$ heissen.

Die maximalen Beschränkheitsstreifen werden zuweilen des Typus $[a, b)$ oder $(a, b]$ u. s. w. sein.

Hier brauchen wir aber nur zu unterstreichen:

1) $f(\sigma + it)$ ist beschränkt in jedem Intervalle $a_1 < \sigma < b_1$, $a < a_1 < b_1 < b$.

2) $f(\sigma + it)$ ist in keinem Intervalle, welches $a$ oder $b$ einschliesst, beschränkt.

Aus dem obigen können wir nun das folgende schliessen: Es gibt mindestens einen Streifen $(\alpha_1, \beta_1)$, in welchem $f(\sigma + it)$ beschränkt ist. Wird vorausgesetzt, dass $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, ist $\alpha_1$ nach unten von $\alpha$ und $\beta_1$ nach oben von $\beta$ abgegrenzt. Falls der Streifen $[\alpha_1, \beta_1]$ kein maximaler Beschränkheitsstreifen ist, gibt es einen mehr umfassenden Streifen, der die verlangten Bedingungen erfüllt. Eventuell wird es der Streifen $[\alpha, \beta]$ sein.

Setzt man z. B. $\alpha = -\infty$ und $\beta = +\infty$ voraus, so lässt der Streifen sich vielleicht in $[-\infty, b]$ oder $[a, +\infty]$ u. s. w. erweitern. Jedenfalls gibt es mindestens einen maximalen Beschränkheitsstreifen $I = [a, b]$.

Aus der Definition ergibt sich mühelos, dass zwei maximale Beschränkheitsstreifen $I'$ und $I''$ entweder keine gemeinsamen Punkte haben oder miteinander identisch sind.

Also schliessen wir:

Falls $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Intervallen $I > 1$ und eine endliche Anzahl von Intervallen $I > \frac{1}{2}$ u. s. w. Die Menge der Intervalle $I$ ist somit abzählbar oder endlich.

Falls $\alpha = -\infty < \beta < +\infty$, lässt sich dieselbe Betrachtung auf jedes Teilintervall $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, wo $-\infty < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, verwenden; dadurch erhält man auch mit dieser Voraussetzung:

Die Menge der Intervalle $I$ ist abzählbar oder endlich. Damit haben wir bewiesen:

**Satz.** *Zu der Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ gehört eine endliche oder abzählbare Anzahl von maximalen Beschränkheitsstreifen, welche überall dicht in $(\alpha, \beta)$ gelegen sind, d. h. ein beliebiger Teilstreifen enthält Geraden $\sigma = \sigma_0$, die mindestens einem dieser maximalen Beschränkheitsstreifen angehören.*

Bei dem Beweise haben wir nicht die Voraussetzung, dass $f(s)$ analytisch ist, benutzt, sondern nur, dass $f(\sigma + it)$ in $\sigma$ stetig ist. Dem Satze, der in seiner

ursprünglichen Form von Osgood[1] ausgesprochen wurde, habe ich diese spezielle Formulierung gegeben, weil wir ihn bei den folgenden Untersuchungen eben so verwenden werden.

Ich hebe ausdrücklich hervor, dass die Frage der Existenz einer derartigen Funktion an dieser Stelle übergangen ist. Diese Aufgabe wird aber später behandelt werden.

## § 4. Konstruktion eines wichtigen Beispiels.

Wir wollen nun an die erste Aufgabe herangehen, nämlich an die Konstruktion einer Funktion $\varphi(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(s)$ sei eine ganze Transzendente.

2) $\varphi(s)$ sei fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$ und $[0, +\infty)$.

3) $\varphi(s)$ habe voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen.

Es wird dieselbe Methode gebraucht wie in der vorhin erwähnten Abhandlung von H. Bohr.[2] Das wichtigste Hilfsmittel ist auch hier Runges Polverschiebung, welche ich in § 2 im nahen Anschluss an eben die Funktionen, die ich im folgenden anwenden werde, erwähnt habe.

Wenn die Linie $\sigma = 0$ sich nicht an eine der Halbebenen anschliesst, dann kann man die Pole der reinperiodischen Funktionen, die das Element der Konstruktion bilden, auf diese Linie anbringen und danach den Grenzübergang so einrichten, dass diese Pole sich bis ins Unendliche entfernen. In dem Beispiel, das ich hier aufstellen werde, schliesst sich indessen die Linie $\sigma = 0$ an die linke Halbebene, und ich muss daher das Verfahren ändern, indem ich die Pole auf eine Linie $\sigma = \sigma_0 > 0$ legen muss, die gleichzeitig mit dem Grenzübergang gegen $\sigma = 0$ verschoben wird.

Als Bausteine verwenden wir also reinperiodische Funktionen mit Polen auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$.

Wir fangen mit einer Funktion an, deren Pole auf $\sigma = 1$ liegen, z. B.

$$\varphi_0(s) = P_0\left(\frac{1}{e^{\pi(s-1)} + 1}\right) = \frac{1}{e^{\pi(s-1)} + 1}, \tag{1}$$

welche die Pole $s = 1 + (2q + 1)i \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und die Periode $2i$ hat.

[1] W. F. Osgood [1].

[2] H. Bohr [2].

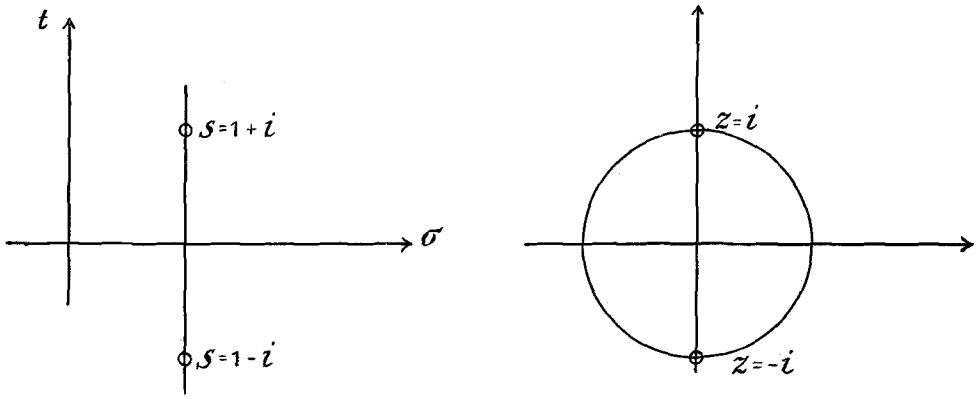
Auf $\varphi_0(s)$ wendet man die Transformation

$$z = e^{\frac{\pi}{2}(s-1)} \tag{2}$$

an, welche die Funktion in

$$R_0(z) = P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{z^2+1}$$

mit den Polen $z = \pm i$ überführt.




Die Aufgabe wird demnach sein, die Pole so zu verschieben, dass sie durch einen einzigen Pol ersetzt werden. Falls wir diese Verschiebung längs des Kreises $|z| = 1$ unternehmen, gelingt es, die dazugehörigen Pole der $s$-Ebene auf der Geraden $\sigma = 1$ zu zerstreuen.

Das Ziel ist aber nicht nur ein solches Zerstreuen, sondern auch eine seitliche Verschiebung. Es wird deshalb notwendig, die Pole in einen Punkt zu transportieren, welcher innerhalb des Kreises $|z| = 1$ gelegen ist.

Ich stelle mir daher die Aufgabe, die Pole $s = 1 + (2q+1)i$ von der Linie $\sigma = 1$ nach der Linie $\sigma = \frac{1}{2}$ so zu verschieben, dass sie gleichzeitig auf $\sigma = \frac{1}{2}$ zerstreut werden. Darauf verschiebt man von $\sigma = \frac{1}{2}$ nach $\sigma = \frac{1}{2^2}$ u. s. w.

Die Funktion $\varphi_0(s)$ ist periodisch mit der Periode $2i$ in den Halbebenen $\sigma < 1$ und $1 < \sigma$, diese Funktion ist also auch fastperiodisch in $(-\infty, 1)$ und $(1, +\infty)$. Die Dirichletentwicklung für $\varphi_0(s)$ in $(-\infty, 1)$ und $(1, +\infty)$ wird folgendermassen erhalten:

Für die Funktion $R_0(z) = \frac{1}{z^2+1}$ haben wir

$$R_0(z) = \frac{1}{z^2+1} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2m}, & |z| < 1 \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} z^{-2m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Wenn man in diese Entwicklungen $z = e^{\frac{\pi}{2}(s-1)}$ einsetzt, so erhält man

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{m\pi(s-1)} & \sigma < 1 \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-m\pi(s-1)}, & \sigma > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Das konstante Glied der Entwicklung von $\varphi_0(s)$ ist in $\sigma < 1$ gleich $1$, in $\sigma > 1$ gleich $0$.

Ferner bemerkt man, dass die Dirichletentwicklung (3) in der Halbebene $\sigma < 1$ nur ein einziges Glied enthält, dessen Exponent kleiner als $1$ ist, nämlich das zu $m = 0$ gehörige Glied $\psi_0(s) = 1$; die Entwicklung in der Halbebene $\sigma > 1$ enthält aber kein Glied, dessen Exponent grösser als $-1$ ist — dies wird durch $\chi_0(s) = 0$ ausgedrückt.

*Verschiebung der Pole von $\sigma = 1$ nach $\sigma = \frac{1}{2}$.*

Wir werden jetzt Runges Methode anwenden, indem wir die Pole $\pm i$ in der $z$-Ebene durch den einzigen Pol $-e^{-\frac{\pi}{4}}$ ersetzen.

Durch die Transformation (2) erhält man:

$$z = \pm i \quad \text{ergibt die Pole } s = 1 + (2q+1)i$$

$$z = -e^{-\frac{\pi}{4}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i.$$

Durch diese Verschiebung in der $z$-Ebene gelingt es, die Pole in der $s$-Ebene von $\sigma = 1$ nach $\sigma = \frac{1}{2}$ zu verschieben und gleichzeitig diejenigen auf $\sigma = \frac{1}{2}$ zu zerstreuen.

Es ist hiernach notwendig, ein passendes Verschiebungsgebiet $\Gamma_1$ in der $s$-Ebene und das zugehörige Gebiet $G_1$ in der $z$-Ebene zu wählen.

Das Gebiet $\Gamma_1$ wird definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{2^2} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^2},\ -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2};\ \frac{7}{2^2} < \sigma;$$

mittels (2) erhält man — indem $z = re^{i\Theta}$ — dass $G_1$ durch

$$r < e^{-\frac{3\pi}{8}};\ e^{-\frac{3\pi}{8}} \leqq r \leqq e^{\frac{3\pi}{8}},\ -\frac{\pi}{4} < \Theta < \frac{\pi}{4};\ e^{\frac{3\pi}{8}} < r$$

definiert ist.

Diese Gebiete haben wir so gewählt, dass die Pole $z = \pm i$ und $z = -e^{-\frac{\pi}{4}}$ in dem zu $G_1$ komplementären Gebiete gelegen sind, während die Pole $s = 1 + (2q+1)i$ und $s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$ in dem zu $\Gamma_1$ komplementären Gebiete liegen.

Nun wird die Folge der positiven Zahlen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_n > \cdots$ so gewählt, dass die Reihe $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ konvergiert und eine Summe hat, welche kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; diese Zahlen werden späterhin noch einer Bedingung unterworfen.

Mit Runges Verfahren bestimmen wir danach das Polynom $P_1(x)$ so, dass im Gebiete $G_1$ die Ungleichung

$$\left| P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}} z + 1}\right) - R_0(z) \right| < \varepsilon_1$$

besteht. Hiermit ist eine Funktion $R_1(z) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}} z + 1}\right)$ festgelegt, die in der $z$-Ebene analytisch ist bis auf den Pol $z = -e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Durch die Transformation (2) ergibt sich

$$\varphi_1(s) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)} + 1}\right). \tag{4}$$

Diese Funktion ist analytisch in der $s$-Ebene bis auf die Pole $s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$ und hat die Periode $4i$.

Ferner erfüllt sie in $\Gamma_1$ die Ungleichung

$$|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| < \varepsilon_1, \tag{5}$$

und wir haben die Entwicklungen

$$R_1(z) - R_0(z) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} z^m, & |z| < e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(1)} z^{-m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Durch die Transformation (2) ergibt sich weiter

$$\varphi_1(s) - \varphi_0(s) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} e^{\frac{m\pi}{2}(s-1)}, & \sigma < \frac{1}{2} \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(1)} e^{-\frac{m\pi}{2}(s-1)}, & \sigma > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Für die konstanten Glieder erhalten wir zufolge (5)

$$|a_0^{(1)}| < \varepsilon_1 \text{ und } |b_0^{(1)}| < \varepsilon_1.$$

In der Dirichletentwicklung (6) für $\sigma < \frac{1}{2}$ gibt es nur ein einziges Glied, dessen Exponent kleiner als 1 ist, nämlich $\psi_1(s) = a_0^{(1)}$, während die Entwicklung in der Halbebene $\sigma > 1$ ein einziges Glied enthält, dessen Exponent grösser als $-1$ ist, nämlich $\chi_1(s) = b_0^{(1)}$.

Der zweite Schritt besteht in einer Verschiebung der Pole von $\sigma = \frac{1}{2}$ nach $\sigma = \frac{1}{4}$.

*Verschiebung von* $\sigma = \frac{1}{2}$ *nach* $\sigma = \frac{1}{4}$.

Als Ausgangsfunktion benutzen wir

$$\varphi_1(s) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)} + 1}\right).$$

Auf $\varphi_1(s)$ wenden wir die Transformation

$$z = e^{\frac{\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)} \tag{7}$$

an, welche die Funktion in

$$R_1(z) = P_1\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)$$

überführt. Diese Funktion ist analytisch in der ganzen $z$-Ebene bis auf die Pole $\pm i$, welche wir jetzt durch den einzigen Pol $-e^{-\frac{\pi}{4^2}}$ ersetzen werden.

Man erhält:

$$z = \pm i \qquad \text{ergibt die Pole } s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$$

$$z = -e^{-\frac{\pi}{4^2}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad s = \frac{1}{4} + 4(2q+1)i.$$

Durch diese Verschiebung in der $z$-Ebene gelingt es, die Pole in der $s$-Ebene von $\sigma = \frac{1}{2}$ nach $\sigma = \frac{1}{4}$ zu verschieben und gleichzeitig diejenigen auf $\sigma = \frac{1}{4}$ zu zerstreuen.

Es ist hiernach notwendig, ein passendes Verschiebungsgebiet $\Gamma_2$ in der $s$-Ebene und das zugehörige Gebiet $G_2$ in der $z$-Ebene zu konstruieren.

Das Gebiet $\Gamma_2$ wird definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{2^3} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^3}, \quad -1 < t < 1; \quad \frac{7}{2^3} < \sigma;$$

mittels der Transformation (7) erhält man — indem $z = re^{i\Theta}$ — dass $G_2$ durch

$$r < e^{-\frac{3\pi}{32}}; \quad e^{-\frac{3\pi}{32}} \leqq r \leqq e^{\frac{3\pi}{32}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \Theta < \frac{\pi}{4}; \quad e^{\frac{3\pi}{32}} < r$$

definiert ist.

Diese Gebiete haben wir so gewählt, dass die Pole $\pm i$ und $-e^{-\frac{\pi}{4^2}}$ in dem zu $G_2$ komplementären Gebiete gelegen sind, während die Pole $s = \frac{1}{2} + 2(2q+1)i$ und $s = \frac{1}{4} + 4(2q+1)i$ in dem zu $\Gamma_2$ komplementären Gebiete liegen.

Mit Runges Verfahren bestimmen wir danach das Polynom $P_2(x)$ so, dass im Gebiete $G_2$ die Ungleichung

$$\left| P_2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^2}} z + 1}\right) - R_1(z) \right| < \varepsilon_2$$

besteht. Hiermit ist eine Funktion

$$R_2(z) = P_2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^2}} z + 1}\right)$$

festgelegt, die in der $z$-Ebene analytisch ist bis auf den Pol $z = -e^{-\frac{\pi}{4^2}}$.

Durch die Transformation (7) ergibt sich

$$\varphi_2(s) = P_2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}\left(s-\frac{1}{4}\right)}+1}\right). \tag{8}$$

Diese Funktion ist analytisch in der $s$-Ebene bis auf die Pole $s = \frac{1}{4} + 4(2q+1)i$ und hat die Periode $8i$. Ferner erfüllt sie in $\Gamma_2$ die Ungleichung

$$|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| < \varepsilon_2, \tag{9}$$

und wir haben nun die Entwicklungen

$$R_2(z) - R_1(z) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} z^m, & |z| < e^{-\frac{\pi}{4^2}} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)} z^{-m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Durch die Transformation (7) ergibt sich weiter

$$\varphi_2(s) - \varphi_1(s) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} e^{\frac{m\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)}, & \sigma < \frac{1}{4} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)} e^{-\frac{m\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)}, & \sigma > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Für die konstanten Glieder erhalten wir zufolge (9):

$$|a_0^{(2)}| < \varepsilon_2 \text{ und } |b_0^{(2)}| < \varepsilon_2.$$

In der Dirichletentwicklung (10) für $\sigma < \frac{1}{4}$ gibt es zwei Glieder, deren Exponenten kleiner als 1 sind; ihre Summe bezeichnen wir mit: $\psi_2(s) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} e^{\frac{\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)}$.

Die Entwicklung (10) in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ enthält aber zwei Glieder, deren Exponenten grösser als $-1$ sind; ihre Summe bezeichnen wir mit: $\chi_2(s) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} e^{-\frac{\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)}$.

So fährt man weiter fort, und wir wollen nun sehen, wie der $n^{\text{te}}$ Schritt verläuft.

Nach $n - 1$ Schritten haben wir

$$\varphi_{n-1}(s) = P_{n-1}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^{n-1}}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} + 1}\right)$$

erreicht; diese Funktion ist analytisch in der $s$-Ebene mit Ausnahme der Pole $s = \frac{1}{2^{n-1}} + 2^{n-1}(2q + 1)i$ und erfüllt im Gebiete $\Gamma_{n-1}$ die Ungleichung

$$|\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)| < \varepsilon_{n-1}.$$

$\Gamma_{n-1}$ ist durch

$$\sigma < \frac{1}{2^n};\ \frac{1}{2^n} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^n},\ -2^{n-3} < t < 2^{n-3};\ \frac{7}{2^n} < \sigma$$

definiert.

*Nun verschieben wir die Pole von* $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$ *nach* $\sigma = \frac{1}{2^n}$.

Als Ausgangsfunktion wird $\varphi_{n-1}(s)$ verwendet, und die Transformation ist

$$z = e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)},$$

dadurch erhält man in der $z$-Ebene

$$R_{n-1}(z) = P_{n-1}\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right).$$

Diese Funktion ist analytisch in der ganzen $z$-Ebene bis auf die Pole $z = \pm i$.

In der $z$-Ebene werden die Pole $\pm i$ nach dem Pole $-e^{-\frac{\pi}{4^n}}$ verschoben.

$$z = \pm i \quad \text{ergibt die Pole } s = \frac{1}{2^{n-1}} + 2^{n-1}(2q + 1)i$$

$$z = -e^{-\frac{\pi}{4^n}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad s = \frac{1}{2^n} + 2^n(2q + 1)i.$$

Durch diese Verschiebung in der $z$-Ebene gelingt es, die Pole in der $s$-Ebene von $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$ nach $\sigma = \frac{1}{2^n}$ zu verschieben und gleichzeitig diejenigen auf $\sigma = \frac{1}{2^n}$ zu zerstreuen.

Das Gebiet $\Gamma_n$ ist definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^{n+1}}; \quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^{n+1}}, \quad -2^{n-2} < t < 2^{n-2}; \quad \frac{7}{2^{n+1}} < \sigma,$$

und das entsprechende Gebiet $G_n$ in der $z$-Ebene wird

$$r < e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}}; \quad e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} \leqq r \leqq e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \Theta < \frac{\pi}{4}; \quad e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} < r.$$

Durch Runges Methode wird das Polynom $P_n(x)$ so bestimmt, dass im Gebiete $G_n$ die Ungleichung

$$\left| P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^n}} z + 1}\right) - R_{n-1}(z) \right| < \varepsilon_n$$

besteht.

Damit ist eine Funktion $R_n(z) = P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4^n}} z + 1}\right)$ festgelegt, die nur den Pol $-e^{-\frac{\pi}{4^n}}$ hat, und durch Anwendung der Transformation ergibt sich die Funktion

$$\varphi_n(s) = P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n}\right)} + 1}\right),$$

welche analytisch in der $s$-Ebene mit Ausnahme der Pole $s = \frac{1}{2^n} + 2^n(2q+1)i$ ist und die Periode $2^{n+1}i$ hat. Diese neue Funktion erfüllt im Gebiete $\Gamma_n$ die Ungleichung

$$|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n.$$

Ferner haben wir:

$$R_n(z) - R_{n-1}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m, & |z| < e^{-\frac{\pi}{4^n}} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(n)} z^{-m}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Die Transformation

$$z = e^{\frac{\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$$

ergibt:

$$\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n - 1}\right)}, & \sigma < \frac{1}{2^n} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n - 1}\right)}, & \sigma > \frac{1}{2^{n-1}}. \end{cases}$$

Für die konstanten Glieder erhalten wir, dass die Ungleichungen

$$|a_0^{(n)}| < \varepsilon_n \text{ und } |b_0^{(n)}| < \varepsilon_n$$

erfüllt sind.

In der zu der Halbebene $\sigma < \frac{1}{2^n}$ gehörigen Dirichletentwicklung von $\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)$ gibt es höchstens $2^{n-1}$ Glieder, deren Exponenten kleiner als 1 sind; ihre Summe bezeichnen wir mit

$$\psi_n(s) = \sum_{m=0}^{q_n} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n - 1}\right)}, \tag{11}$$

wo $q_n$ die grösste ganze Zahl ist, für welche $\frac{q_n \pi}{2^n} < 1$.

In der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2^{n-1}}$ enthält die Entwicklung höchstens $2^{n-1}$ Glieder, deren Exponenten grösser als $-1$ sind; ihre Summe bezeichnen wir mit

$$\chi_n(s) = \sum_{m=0}^{q_n} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^n - 1}\right)}, \tag{12}$$

wo $q_n$ dieselbe Zahl wie oben ist.

Wir wollen jetzt die Grösse von $|\psi_n(s)|$ in $\sigma \leqq 0$ abschätzen. Da $|R_n(z) - R_{n-1}(z)| < \varepsilon_n$ für $|z| < e^{-\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} = \delta_n$, ergibt sich aus dem Cauchy'schen Koeffizientensatze

$$|a_m^{(n)}| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\delta_n^m} = \delta_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}},$$

und es gilt somit in der linken Halbebene des Gebietes $\Gamma_n$ $\left(\text{d. h. für } \sigma < \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ die Ungleichung

$$|\psi_n(s)| \leqq 2^{n-1} \varepsilon_n.$$

Da die Halbebene $\sigma \leqq 0$ sämtlichen Gebieten $\Gamma_n$ angehört, ergibt sich, dass die Ungleichung

$$|\psi_n(s)| \leqq 2^{n-1} \varepsilon_n \tag{13}$$

richtig ist, für $\sigma \leqq 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir gehen nun dazu über, die Grösse von $|\chi_n(s)|$ in einer Halbebene, die in sämtlichen Verschiebungsgebieten $\Gamma_n$ (z. B. $\sigma \geqq 2$) enthalten ist, abzuschätzen.

Da für $|z| > e^{\frac{3\pi}{2^{2n+1}}} = \frac{1}{\delta_n}$ die Ungleichung $|R_n(z) - R_{n-1}(z)| < \varepsilon_n$ besteht, erhält man ebenso, dass

$$|b_m^{(n)}| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}},$$

woraus die Ungleichung

$$|\chi_n(s)| \leqq 2^{n-1} \varepsilon_n \tag{14}$$

folgt, die richtig ist z. B. für $\sigma \geqq 2$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Die oben gefundene Majorisierung von $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ wird erst im folgenden Paragraphen zur Anwendung kommen; an dieser Stelle kehren wir zur Untersuchung der Funktionen

$$\varphi_0(s),\ \varphi_1(s), \ldots,\ \varphi_n(s), \ldots$$

die wir eben konstruiert haben, zurück, um zu zeigen, dass diese Folge von Funktionen eine Grenzfunktion $\varphi(s)$ hat, welche eine ganze Transzendente ist.

Wir erinnern an die folgenden Eigenschaften der Funktionen:

$\varphi_0(s)$ ist analytisch in der $s$-Ebene bis auf die Pole $s = 1 + (2q + 1)i$

$\varphi_1(s)$ » » » » » » » » » $s = \frac{1}{2} + 2(2q + 1)i$

. . . . . .

$\varphi_n(s)$ ist analytisch in der $s$-Ebene bis auf die Pole $s = \frac{1}{2^n} + 2^n(2q + 1)i$

. . . . . .

$\varphi_0(s)$ hat die Periode $2i$, $\varphi_1(s)$ die Periode $4i, \ldots, \varphi_n(s)$ hat die Periode $2^{n+1}i$ u. s. w.

$|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| < \varepsilon_1$ im Gebiete $\Gamma_1$, $|a_0^{(1)}| < \varepsilon_1$ und $|b_0^{(1)}| < \varepsilon_1$

$|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| < \varepsilon_2$ » » $\Gamma_2$, $|a_0^{(2)}| < \varepsilon_2$ » $|b_0^{(2)}| < \varepsilon_2$

. . . . . .

$$|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n \text{ im Gebiete } \Gamma_n, \quad |a_0^{(n)}| < \varepsilon_n \text{ und } |b_0^{(n)}| < \varepsilon_n$$

. . . . . .

Wir betrachten die Verhältnisse innerhalb eines festen Kreises $|s| < \varrho$. Das Gebiet $\Gamma_n$ ist definiert durch

$$\sigma < \frac{1}{2^{n+1}}; \quad \frac{1}{2^{n+1}} \leqq \sigma \leqq \frac{7}{2^{n+1}}, \quad -2^{n-2} < t < 2^{n-2}; \quad \frac{7}{2^{n+1}} < \sigma,$$

und es ist somit möglich, eine solche Zahl $N$ zu wählen, dass alle Gebiete $\Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \ldots$ den Kreis $|s| < \varrho$ enthalten.

Die gesuchte Grenzfunktion wird in der Form:

$$\varphi(s) = \varphi_N(s) + \sum_{N+1}^{\infty} (\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s))$$

geschrieben.

Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind analytische Funktionen im Kreise $|s| < \varrho$.

Da im Kreise $|s| < \varrho$ die Ungleichung $|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n$ besteht, und da ferner $\sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n$ konvergent ist, ergibt sich, dass die Reihe gleichmässig konvergiert; $\varphi(s)$ ist also analytisch im Kreise $|s| < \varrho$, und da $\varrho$ beliebig gross gewählt werden kann, ist $\varphi(s)$ *eine ganze Transzendente.*

Jetzt haben wir $\varphi(s)$ festgelegt und wollen nun ihre fastperiodischen Eigenschaften untersuchen.

Da die Halbebene $\sigma \leqq 0$ sämtlichen Gebieten $\Gamma_n$ angehört, die Funktionen $\varphi_n(s)$ fastperiodisch (sogar reinperiodisch) in diesen Gebieten sind, und die Ungleichung $|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| < \varepsilon_n$ in $\sigma \leqq 0$ besteht, können wir durch eine Majorantenbetrachtung schliessen, dass die Folge gleichmässig konvergent in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ ist, d. h. $\varphi(s)$ *ist fastperiodisch in* $(-\infty, 0\}$.

Ist $\delta$ eine beliebig kleine, positive Grösse, so gehört die Halbebene $\sigma > \delta$ zu sämtlichen Gebieten $\Gamma_n$ von einer gewissen Stelle an; in genau derselben Weise wie oben lässt sich dann beweisen, dass $\varphi(s)$ fastperiodisch in der Halbebene $\delta < \sigma < +\infty$ ist, d. h. $\varphi(s)$ *ist fastperiodisch in* $[0, +\infty)$.

Da $\varphi(s)$ fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$ und in $[0, +\infty)$ ist, können — infolge des Satzes 4 § 1 — die Fourierentwicklungen der bei jedem festen Wert von $\sigma$ ent-

stehenden fastperiodischen Funktionen in zwei Dirichletentwicklungen gesammelt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &\sim A_0 + \sum_1^\infty A \quad e^{A_n s} \qquad (A_n > 0),\ \sigma < 0 \\ \varphi(s) &\sim B_0 + \sum_1^\infty B_n e^{M_n s} \qquad (M_n < 0),\ \sigma > 0 \end{aligned}\right\}.$$

Diese Entwicklungen entstehen aber durch formalen Grenzübergang in den entsprechenden Entwicklungen von $\varphi_n(s)$ — Satz 7 § 1 — also ergibt sich aus der Darstellung

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \sum_1^\infty (\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)),$$

dass

$$A_0 = 1 + \sum_1^\infty a_0^{(n)} \quad \text{und} \quad B_0 = 0 + \sum_1^\infty b_0^{(n)}.$$

Von den konstanten Gliedern zeigten wir $|a_0^{(n)}| < \varepsilon_n$ und $|b_0^{(n)}| < \varepsilon_n$; da nun ferner die Ungleichung $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ besteht, ergibt sich sofort, dass

$$|A_0| > 1 - \sum_1^\infty \varepsilon_n > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |B_0| < \sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$$

d. h. $A_0 \neq B_0$.

Die Dirichletentwicklungen der Funktion $\varphi(s)$ in den beiden Halbebenen sind also voneinander verschieden.

Damit haben wir bewiesen:

**Satz.** *Es gibt ganze transzendente Funktionen, die sowohl in* $(-\infty, 0\}$ *wie auch in* $[0, +\infty)$ *fastperiodisch sind und in den beiden Halbebenen voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen haben.*

Beim Aufbau des obigen wichtigen Beispiels haben wir die Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen $-\infty < \sigma \leqq 0$ und $0 < \sigma < +\infty$ betrachten müssen, um zu beweisen, dass die konstruierte Funktion $\varphi(s)$ nicht in $(-\infty, +\infty)$ fastperiodisch ist. Eine gewisse andere Wahl der bei der Konstruktion zu verwendenden Verschiebungsgebiete ermöglicht es aber, den Beweis allein durch Betrachtung der Menge von Verschiebungszahlen zu führen.

In dieser Weise lässt sich eine Funktion $\varkappa(s)$ aufbauen, welche die folgenden Eigenschaften hat:

1) $\varkappa(s)$ ist eine ganze Transzendente.

2) $\varkappa(s)$ ist fastperiodisch in $[-\infty, +\infty)$.

3) $\varkappa(s)$ ist nicht fastperiodisch in $(-\infty, +\infty)$.

H. Bohr hat mich doch darauf aufmerksam gemacht, dass man ein Beispiel einer solchen Funktion ganz unmittelbar angeben kann, nämlich das folgende:

$$\varkappa(s) = e^{\lambda_1 s} + e^{\lambda_2 s},$$

wo $\lambda_1$ und $\lambda_2$ negative Zahlen sind, deren Quotient irrational ist. Wir sehen sofort ein, dass $\varkappa(s)$ eine ganze transzendente in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodische Funktion ist.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass die Funktion $\varkappa(s)$ in $(-\infty, +\infty)$ nicht fastperiodisch ist.

Es gibt keine der positiven Zahl $\varepsilon$ entsprechende Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$, welche sich in der ganzen Ebene anwenden lässt. Dies wird folgendermassen bewiesen:

Wir schreiben

$$\varkappa(s + i\tau) - \varkappa(s) = e^{\lambda_1 s}(e^{i\lambda_1 \tau} - 1) + e^{\lambda_2 s}(e^{i\lambda_2 \tau} - 1),$$

woraus wir ohne Mühe schliessen können, dass eine Periode für $e^{\lambda_1 s}$ bzw. $e^{\lambda_2 s}$ nicht als Verschiebungszahl für $(-\infty, +\infty)$ benutzt werden kann.

Es sei $\tau$ eine von diesen Perioden der beiden Funktionen verschiedene Zahl. Dann ergibt sich für $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ die Umschreibung

$$|\varkappa(s + i\tau) - \varkappa(s)| = e^{\lambda_1 \sigma} \cdot |e^{\lambda_1 \tau} - 1 + e^{(\lambda_2 - \lambda_1) s} \cdot (e^{i\lambda_2 \tau} - 1)|,$$

welche für $-\infty \leftarrow \sigma$ gegen $\infty$ strebt.

Damit ist bewiesen, dass die Funktion $\varkappa(s)$ nicht in $(-\infty, +\infty)$ fastperiodisch ist.

## § 5. Die Menge der Maximalstreifen für eine im voraus gegebene Funktion.

Die Klasse von Funktionen, welche zu untersuchen mein Ziel gewesen ist, wird durch die folgenden Forderungen charakterisiert:

1) *Es sei* $f(s) = f(\sigma + it)$ *eine im Streifen* $(\alpha, \beta)$ *analytische Funktion.*

2) *Die Funktion* $f(s) = f(\sigma + it)$ *sei fastperiodisch auf jeder Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *innerhalb des Streifens.*

Da $f(\sigma_0 + it)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$ ist, ist sie auch beschränkt und erfüllt also die Ungleichung

$$|f(\sigma_0 + it)| \leqq L(\sigma_0), \quad -\infty < t < +\infty,$$

wo $L(\sigma_0)$ wie gewöhnlich die obere Grenze für $|f(\sigma_0 + it)|$ bezeichnet.

Auf die gegebene Funktion $f(\sigma + it)$ lässt sich somit der in § 3 bewiesene Satz anwenden, und man erhält:

Der Funktion $f(\sigma + it)$ entspricht eine endliche oder abzählbare Anzahl von maximalen Beschränkheitsstreifen $I(a < \sigma < b)$, welche überall dicht in $(\alpha, \beta)$ gelegen sind. Falls wir nun einen einzelnen dieser maximalen Beschränkheitsstreifen betrachten und uns daran erinnern, dass die Funktion $f(\sigma + it)$ auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$, $a < \sigma_0 < b$, (sogar auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$ innerhalb des Streifens) fastperiodisch ist, dann können wir sofort durch Anwendung des Satzes 2 § 1 schliessen, dass $f(\sigma + it)$ in $[a, b]$ fastperiodisch ist.

Wir haben damit bewiesen:

**Hauptsatz I.** *Zu der Funktion* $f(\sigma + it)$ *gehört eine endliche oder abzählbare Anzahl von Maximalstreifen* $I$, *die im Streifen* $(\alpha, \beta)$ *überall dicht gelegen sind, d. h. ein beliebiger Teilstreifen enthält Geraden* $\sigma = \sigma_0$, *welche mindestens einem dieser Maximalstreifen angehören.*

## § 6. Konstruktion einer Funktion, für welche die Menge der Maximalstreifen gegeben ist.

Im nahen Anschluss an das vorhergehende bietet sich nun die folgende Frage dar:

Ist es möglich, eine im Streifen $(\alpha, \beta)$ analytische Funktion zu konstruieren, die auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$, $\alpha < \sigma_0 < \beta$, fastperiodisch ist, und für welche die Menge der Maximalstreifen, welche die im Hauptsatze I erwähnten Bedingungen erfüllen, gegeben ist?

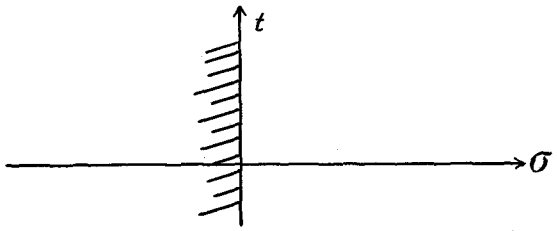
Wir nehmen vorläufig an, dass $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ und dass die gegebenen Maximalstreifen alle des Typus $[a, b]$ sind, d. h. die Funktionen sollen fastperiodisch in $[a, b]$ sein, ohne in $(a, b]$ oder in $[a, b)$ fastperiodisch zu sein.

Der Aufbau einer Funktion mit den verlangten Eigenschaften lässt sich in drei Schritten unternehmen:

A. Die Konstruktion einer Funktion, für welche der Maximalstreifen $[\alpha, \beta]$ gegeben ist.

B. Die Konstruktion einer Funktion, für welche eine endliche Anzahl von Maximalstreifen gegeben ist.

C. Die Konstruktion einer Funktion, für welche eine abzählbare Anzahl von Maximalstreifen gegeben ist.




Die Gerade $\sigma = 0$ gehört zu der linken Halbebene.

Als Element des Aufbaus werden wir die früher konstruierte Funktion $\varphi(s)$ benutzen. Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

1) $\varphi(s)$ ist eine ganze Transzendente.
2) $\varphi(s)$ ist fastperiodisch in $(-\infty, 0\}$ und in $[0, +\infty)$.
3) $\varphi(s)$ hat voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen.

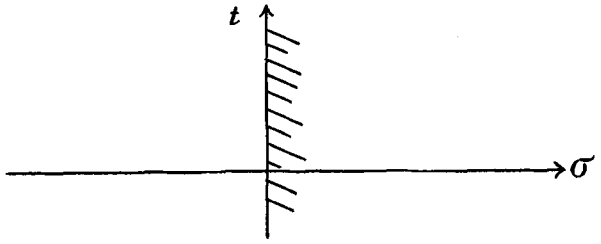
Aus der Darstellung in § 4 ergibt sich, dass die Dirichletentwicklung für $\varphi(s)$ in $(-\infty, 0\}$ lauter nicht-negative Exponenten hat, während die Dirichletentwicklung der Funktion in $[0, +\infty)$ lauter nicht-positive Exponenten hat. Durch Anwendung des Satzes 10 § 1 können wir dann schliessen, dass $\varphi(s)$ sowohl für $-\infty \leftarrow \sigma$ als auch für $\sigma \to +\infty$, $-\infty < t < +\infty$, gleichmässig gegen einen Grenzwert konvergiert.

Die Funktion ist also beschränkt in $(-\infty, 0\}$; wir bezeichnen die obere Grenze für $|\varphi(s)|$ mit $M$, d. h.

$$|\varphi(s)| \leqq M \text{ in } (-\infty, 0\}.$$

Da $\varphi(s)$ auch in $[0, +\infty)$ beschränkt ist, lässt sich zu jedem festen $r > 0$ eine solche Zahl $K = K(r)$ bestimmen, dass im Gebiete $-\infty < \sigma < +\infty$, $-r < t < +r$ die Ungleichung $|\varphi(s)| \leqq K(r)$ besteht.

Man bildet nun $\varphi(-s)$. Dadurch entsteht eine Funktion, welche fastperiodisch auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$ ist; die Halbebene $\sigma \leqq 0$ wird in $\sigma \geqq 0$, die Halbebene $\sigma > 0$ in $\sigma < 0$ überführt.




Die Gerade $\sigma = 0$ gehört zu der rechten Halbebene.

$\varphi(-s)$ hat als Funktion von $s$ die folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(-s)$ ist eine ganze Tranzendente.
2) $\varphi(-s)$ ist fastperiodisch in $(-\infty, 0]$ und in $[0, +\infty)$.
3) $\varphi(-s)$ hat voneinander verschiedene Dirichletentwicklungen in den beiden Halbebenen.

Ferner erhält man:

$$|\varphi(-s)| \leqq K(r) \text{ im Gebiete } -\infty < \sigma < +\infty, \; -r < t < +r.$$

A. Jetzt ist es uns ermöglicht, eine Funktion $f(s)$, für welche der Maximalstreifen $[\alpha, \beta]$ gegeben ist, aufzubauen.

Eine solche Funktion ist

$$f(s) = \varphi(s - \alpha) + \varphi(-s + \beta)$$

$f(s)$ hat nämlich die folgenden Eigenschaften:

1) Da $\varphi(s-\alpha)$ und $\varphi(-s+\beta)$ ganze transzendente Funktionen sind, ist ihre Summe auch eine ganze Transzendente. $f(s)$ ist eine ganze Transzendente.

2) $\varphi(s-\alpha)$ ist fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$ und in $[\alpha, +\infty)$
$\varphi(-s+\beta)$ » » » $(-\infty, \beta]$ » » $\{\beta, +\infty)$.

Über die Funktion $f(s)=\varphi(s-\alpha)+\varphi(-s+\beta)$ können wir vor allen Dingen schliessen, dass sie auf jeder Geraden $\sigma=\sigma_0$ fastperiodisch ist. Ferner ergibt sich — durch Anwendung der Sätze 3, 10 § 1 — dass $f(s)$ fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$, $[\alpha, \beta]$ und $\{\beta, +\infty)$ ist.

3) Da $\varphi(s-\alpha)$ nicht in $(\alpha, \beta]$ beschränkt ist, während in diesem Streifen $\varphi(-s+\beta)$ beschränkt bleibt, sehen wir sofort ein, dass $f(s)$ nicht in $(\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist.

In genau derselben Weise schliesst man, dass $f(s)$ nicht in $[\alpha, \beta)$ fastperiodisch ist.

Die Funktion $f(s)$ hat also den Maximalstreifen $[\alpha, \beta]$. Im Gebiete $-\infty < \sigma < +\infty$, $-r < t < +r$, besteht die Ungleichung

$$|f(s)| \leqq 2K(r).$$

B. Wir wollen jetzt eine Funktion $g(s)$ konstruieren, welche in $\alpha < \sigma < \beta$ eine endliche Anzahl von Maximalstreifen

$$I_1 = [\alpha, \alpha_1], \quad I_2 = [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, I_n = [\alpha_{n-1}, \beta]$$

hat.

Zu jedem der Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_n$ bestimmen wir die oben erwähnte Funktion $f(s)$; die dadurch entstehenden Funktionen nennen wir $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$, wo

$$f_q(s) = \varphi(s - \alpha_{q-1}) + \varphi(-s + \alpha_q); \quad \alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_n = \beta.$$

Wir bilden nun die Funktion

$$g(s) = \sum_1^n f_q(s)$$

und werden dann beweisen, dass sie die verlangten Eigenschaften hat.

1) Da die einzelnen Funktionen $f_q(s)$ ganze transzendente Funktionen sind, wird auch $g(s)$ eine ganze Transzendente sein.

2) $g(s)$ ist fastperiodisch auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$. Ferner ergibt sich — durch Anwendung der Sätze 3, 10 § 1 — dass $g(s)$ fastperiodisch in $(-\infty, \alpha\}$, $[\alpha, \alpha_1], \ldots, [\alpha_{n-1}, \beta]$ und $\{\beta, +\infty)$ ist.

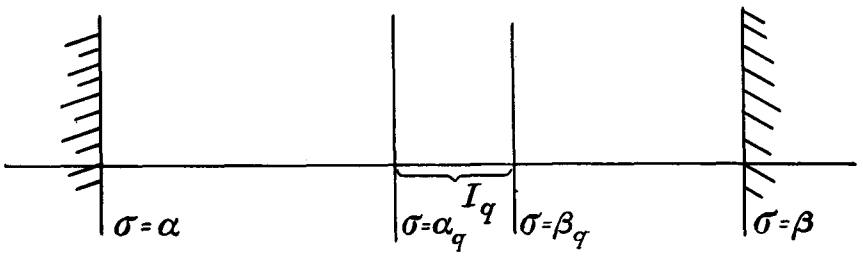
3) Um zu zeigen, dass $[\alpha, \alpha_1]$ ein Maximalstreifen für die Funktion $g(s)$ ist, schreiben wir diese in der folgenden Form: $g(s) = f_1(s) + \sum_2^n f_q(s)$.

In derselben Weise wie in A. sehen wir ein, dass $g(s)$ weder in $(\alpha, \alpha_1]$ noch in $[\alpha, \alpha_1)$ fastperiodisch ist. Die Funktion $g(s)$ hat also den Maximalstreifen $[\alpha, \alpha_1]$. Dieselbe Überlegung lässt sich bei den anderen Streifen anwenden.

C. Es bleibt noch die wesentlich schwierigere Aufgabe übrig: der Aufbau einer Funktion $h(s)$, für welche im Streifen $(\alpha, \beta)$ die Menge der Maximalstreifen

$$I_1, I_2, \ldots, I_q, \ldots, \text{ wo } I_q = [\alpha_q, \beta_q]$$

abzählbar ist.




Zu jedem dieser Intervalle $I_q$ wird eine Funktion $f_q(s)$ durch

$$f_q(s) = \delta_q \{\varphi(s - \alpha_q) + \varphi(-s + \beta_q)\},$$

wo $\delta_q$ eine positive Konstante $\leqq \frac{1}{2}$ ist, definiert.

Da $\varphi(s - \alpha_q)$ und $\varphi(-s + \beta_q)$ sowohl in $(-\infty, \alpha_q\}$ als auch in $\{\beta_q, +\infty)$ beschränkt bleiben, kann $\delta_q$ so gewählt werden, dass die Ungleichung $|f_q(s)| < 1$ in beiden dieser Streifen besteht. Die gesuchte Funktion $h(s)$ definiert man jetzt durch eine Reihe

$$h(s) = \sum_1^\infty k_q f_q(s),$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_q, \ldots$ eine Folge von positiven Zahlen bilden, welche so festgelegt werden, dass die Summe $\sum_1^\infty k_q$ konvergiert.

1) Zunächst ist zu beweisen, dass $h(s)$ eine ganze Transzendente ist. Wir sehen ein, dass innerhalb des festen Kreises $|s| < r$ die Ungleichung $|f_q(s)| \leqq$

$\leqq \frac{1}{2}\, 2\, K(r) = K(r)$ besteht; dies führt aber mit sich, dass $\sum_1^\infty k_q f_q(s)$ die konvergente Majorantenreihe $K(r) \sum_1^\infty k_q$ hat. Hieraus folgt, dass die Reihe $\sum_1^\infty k_q f_q(s)$ im Kreise $|s| < r$ gleichmässig konvergent ist, und da die einzelnen Funktionen $f_q(s)$ ganze Transzendenten sind, ist also $h(s)$ in diesem Gebiete analytisch. Da $r$ beliebig gross gewählt werden kann, haben wir damit bewiesen, dass die Funktion $h(s)$ eine ganze Transzendente ist.

2) Hiernach werden wir die fastperiodische Eigenschaft untersuchen.

Für $\sigma = \sigma_0$ erhält man

$$h(\sigma_0 + i\,t) = \sum_1^\infty k_q f_q(\sigma_0 + i\,t).$$

Falls die Gerade $\sigma = \sigma_0$ nicht den Maximalstreifen $I_1, I_2, \ldots, I_q, \ldots$ angehört, wird diese Reihe die konvergente Majorantenreihe $\sum_1^\infty k_q$ haben, denn es besteht dann die Ungleichung $|f_q(\sigma_0 + i\,t)| < 1$. Da die einzelnen Funktionen $f_q(\sigma_0 + it)$ fastperiodisch sind, ergibt sich unmittelbar, dass auch $h(\sigma_0 + it) = \sum_1^\infty k_q f_q(\sigma_0 + it)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$ ist.

Falls die Gerade $\sigma = \sigma_0$ aber einem Streifen $I_n$ angehört, können wir $h(\sigma_0 + it)$ in der Form

$$h(\sigma_0 + it) = k_n f_n(\sigma_0 + it) + \sum_{q \neq n} k_q f_q(\sigma_0 + it)$$

schreiben, welche die konvergente Majorantenreihe $k_n c_n + \sum_{q \neq n} k_q$, hat, wo $c_n$ die obere Grenze für $|f_n(\sigma_0 + it)|$, $-\infty < t < +\infty$, ist. Auch diese Reihe ist also gleichmässig konvergent, d. h. $h(\sigma_0 + it)$ ist eine fastperiodische Funktion von $t$. Damit haben wir bewiesen, dass die Funktion $h(s)$ auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$ fastperiodisch ist.

Um die fastperiodische Struktur der Funktion im Streifen $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ zu untersuchen, schreiben wir

$$h(s) = k_n f_n(s) + \sum_{q \neq n} k_q f_q(s)$$

$$h(s) = k_n f_n(s) + R(s).$$

Wir wissen schon, dass das erste Glied auf der rechten Seite in $[\alpha_n, \beta_n]$ fastperiodisch ist; eine Majorantenbetrachtung, die der obigen ganz ähnlich ist, zeigt, dass auch das zweite Glied $R(s)$ im Streifen $[\alpha_n, \beta_n]$ fastperiodisch ist. Die Funktion $h(s)$ ist also fastperiodisch in $[\alpha_n, \beta_n]$.

3) Da $k_n f_n(s)$ weder in $(\alpha_n, \beta_n]$ noch in $[\alpha_n, \beta_n)$ beschränkt ist, während die Funktion $R(s)$ aber in diesen Streifen beschränkt bleibt, können wir in gewöhnlicher Weise schliessen, dass die Funktion $h(s)$ weder in $(\alpha_n, \beta_n]$ noch in $[\alpha_n, \beta_n)$ fastperiodisch ist.

Der Streifen $[\alpha_n, \beta_n]$ ist also eben ein Maximalstreifen für die Funktion $h(s)$.

Die obigen Ergebnisse drücken wir folgendermassen aus:

**Satz.** *Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion zu konstruieren, für welche die Menge der Maximalstreifen innerhalb des festen Streifens $\alpha < \sigma < \beta$, wo $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, im voraus gegeben ist.*

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Menge der Maximalstreifen $I$ in dem endlichen Streifen $(\alpha, \beta)$ liegt; nun werden wir aber untersuchen, wie es sich verhält, falls die Menge überall dicht in der Halbebene $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$ oder in der Ebene $(-\infty, +\infty)$ gelegen ist.

Wenn jeder der Maximalstreifen $I$ endlich ist, wird der Beweis genau wie im Falle C geführt.

Es bleibt noch übrig die Möglichkeit zu untersuchen, dass ein oder (höchstens) zwei der Maximalstreifen $I$ ins Unendliche gehen.

In § 4 haben wir eine Funktion $\varkappa(s)$ konstruiert, welche in $[-\infty, +\infty)$ aber nicht in $(-\infty, +\infty)$ fastperiodisch ist. Bilden wir die Funktion $\varkappa(s) + \varkappa(-s)$, sehen wir durch Betrachtung ihrer Verschiebungszahlen, dass sie den Maximalstreifen $[-\infty, +\infty]$ hat.

Um z. B. eine Funktion mit den Maximalstreifen $[-\infty, \alpha]$ aufzubauen, wenden wir die Funktionen $\varkappa(s)$ und $\varphi(-s+\alpha)$ an und erhält die gesuchte Funktion $\varkappa(s) + \varphi(-s+\alpha)$. — In dieser Weise gelingt es irgendeinen Fall zu behandeln.

Damit haben wir bewiesen:

**Hauptsatz II.** *Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion zu konstruieren, für welche die Menge der Maximalstreifen, welche die in Hauptsatz I erwähnte Bedingung erfüllen, gegeben ist.*

## § 7. Eine ganze transzendente Funktion, welche nur auf einer Menge von Geraden fastperiodisch ist.

Wir gehen nun zur Behandlung des letzten Problems über, nämlich zur Konstruktion einer ganzen transzendenten Funktion, welche auf der Menge von Geraden, die zurückbleibt, wenn man von dem gegebenen Streifen $(\alpha, \beta)$ die im Hauptsatze II erwähnte Menge von Maximalstreifen entfernt, fastperiodisch ist, ohne auf irgendeiner anderen Geraden innerhalb des Streifens fastperiodisch zu sein.

Bei der Konstruktion einer solchen analytischen Funktion gilt es, ein Mittel zu finden, welches die Aufhebung der fastperiodischen Eigenschaft bewirken kann. Man muss sich nun erst daran erinnern, dass, wenn eine fastperiodische Funktion einer reellen Veränderlichen eine Fourierentwicklung besitzt, deren konstantes Glied von Null verschieden ist, ein unbestimmtes Integral dieser Funktion nicht beschränkt, d. h. nicht fastperiodisch wird — hiernach sieht man sofort ein, dass eben *Integration* das gesuchte Mittel ist.

In § 6 haben wir schon eine Funktion $h(s)$ konstruiert, für welche die Menge der Maximalstreifen $I_1, I_2, \ldots, I_q, \ldots$ gegeben ist (diese Menge wird speziell nur aus einer endlichen Anzahl von Streifen bestehen können).

Wir schreiben

$$h(s) = \sum_1^\infty k_q f_q(s), \tag{1}$$

wo

$$f_q(s) = \delta_q \{\varphi(s - \alpha_q) + \varphi(-s + \beta_q)\} \tag{2}$$

mit den Dirichletentwicklungen

$$f_q(s) \sim \begin{cases} \delta_q(A_0 + B_0) + \sum \delta_q A_n e^{A_n(s-\alpha_q)} + \sum \delta_q B_n e^{-M_n(s-\beta_q)}, & \sigma \leqq \alpha_q \\ \delta_q(2B_0) \quad + \sum \delta_q B_n e^{M_n(s-\alpha_q)} + \sum \delta_q B_n e^{-M_n(s-\beta_q)}, & \alpha_q < \sigma < \beta_q \\ \delta_q(A_0 + B_0) + \sum \delta_q B_n e^{M_n(s-\alpha_q)} + \sum \delta_q A_n e^{-A_n(s-\beta_q)}, & \beta_q \leqq \sigma. \end{cases} \tag{3}$$

Nun bilden wir eine neue Funktion

$$f(s) = h(s) - (A_0 + B_0) \sum_1^\infty \delta_q k_q \tag{4}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1) $f(s)$ ist eine ganze Transzendente.

2) $f(s)$ ist fastperiodisch auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$.

Falls die Gerade $\sigma = \sigma_0$ einem Maximalstreifen $I_n$ angehört, ist das konstante Glied $\delta_n k_n (B_0 - A_0)$ der Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$ von Null verschieden.

Falls die Gerade $\sigma = \sigma_0$ keinem der Maximalstreifen $I_n$ angehört, ist das konstante Glied der Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$ gleich Null.

3) $f(s)$ und $h(s)$ haben dieselbe Menge von Maximalstreifen, nämlich $I_1$, $I_2, \ldots, I_n, \ldots$.

Im folgenden werden wir ein unbestimmtes Integral von $f(s)$ untersuchen, d. h. wir werden die ganze transzendente Funktion

$$F(s) = \int f(s)\, ds = \int \left\{ h(s) - (A_0 + B_0) \sum_1^\infty \delta_k k_q \right\} ds \tag{5}$$

studieren.

*Das konstante Glied der Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$, welche einer einem Maximalstreifen angehörigen Geraden $\sigma = \sigma_0$ entspricht, ist von Null verschieden.* Aus einem bekannten Satze ergibt sich dann unmittelbar, dass $F(s)$ *auf dieser Geraden nicht fastperiodisch ist.*

*Das konstante Glied der Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$, welche einer Geraden $\sigma = \sigma_0$ entspricht, die nicht zu der Menge von Maximalstreifen $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ gehört, ist gleich Null.* Da die Exponenten sich aber im Punkte Null häufen, wird eine nähere Untersuchung hier nötig sein.

Wir bezeichnen die Maximalstreifen, die in der Halbebene $\sigma \leqq \sigma_0$ gelegen sind, mit $I_{q_1}$, während die Maximalstreifen, welche in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_0$ liegen, mit $I_{q_2}$ bezeichnet werden. In Übereinstimmung hiermit schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(s) = &\sum\nolimits^* k_{q_1} \{ f_{q_1}(s) - \delta_{q_1} (A_0 + B_0) \} \\ &+ \sum\nolimits^{**} k_{q_2} \{ f_{q_2}(s) - \delta_{q_2} (A_0 + B_0) \}, \end{aligned} \tag{6}$$

wo $\sum^*$ und $\sum^{**}$ ausdrücken sollen, dass die Summation über $I_{q_1}$ bzw. über $I_{q_2}$ ausgeführt wird.

Eine Majorantenbetrachtung zeigt sofort, dass die durch $\sum^{*}$ und $\sum^{**}$ dargestellten Funktionen ganze Transzendenten sind und die Menge von Maximalstreifen $I_{q_1}$ bzw. $I_{q_2}$ haben. Wir wollen jetzt die Glieder der Dirichletentwicklungen für $f(s)$, deren Exponenten zwischen 0 und 1 bzw. zwischen $-1$ und 0 liegen, etwas genauer studieren.

Gleichzeitig mit dem in § 4 durchgeführten Aufbau der Funktion $\varphi(s)$ haben wir die von den Gliedern der Dirichletentwicklung für $\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)$, deren Exponenten numerisch kleiner als 1 sind, herrührenden Funktionen $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ untersucht.

Zufolge § 4 (11) und (12) können wir diese Funktionen folgenderweise schreiben

$$\begin{aligned} \psi_n(s) &= \sum_{m=0}^{q_n} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)} \\ \chi_n(s) &= \sum_{m=0}^{q_n} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ferner wissen wir — § 4 (13), (14) — dass die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\psi_n(s)| &\leqq 2^{n-1}\varepsilon_n, \qquad \sigma \leqq 0 \\ |\chi_n(s)| &\leqq 2^{n-1}\varepsilon_n, \qquad \sigma \geqq 2 \end{aligned} \tag{8}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt sind.

Über die positiven Zahlen $\varepsilon_n$ haben wir in § 4 die Voraussetzung $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ gemacht. Des folgenden halber werden wir jetzt die Zahlen $\varepsilon_n$ der weiteren Bedingung, *dass* $\sum_1^\infty 2^{2n-2}\varepsilon_n$ *konvergent ist*, unterwerfen.

Wir werden zunächst die Glieder der Dirichletentwicklungen für $\varphi(s)$, deren Exponenten numerisch kleiner als 1 sind, untersuchen, oder mit anderen Worten: wir werden die Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0(s) + \psi_1(s) + \cdots + \psi_n(s) + \cdots \\ &\chi_0(s) + \chi_1(s) + \cdots + \chi_n(s) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

studieren.

Für die konstanten Glieder der Reihen (9) haben wir

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 1 + \sum_1^\infty a_0^{(n)} \\ B_0 &= 0 + \sum_1^\infty b_0^{(n)} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) bilden wir dann die Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty (\psi_n(s) - a_0^{(n)}) \\ &\sum_1^\infty (\chi_n(s) - b_0^{(n)}) \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Durch eine Majorantenbetrachtung und Verwendung der Ungleichungen (8) sehen wir, dass die durch diese Reihen definierten Summen $\psi(s)$ und $\chi(s)$ in $(-\infty, 0\}$ bzw. in $\{2, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Aus dem Satze 12 § 1 schliesst man nun, dass diese beiden Funktionen ganze Transzendenten und in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Da die Dirichletentwicklungen von $\psi(s)$ und $\chi(s)$ durch formale Addition der zu $\psi_n(s) - a_0^{(n)}$ und $\chi_n(s) - b_0^{(n)}$ gehörigen Entwicklungen entstehen, hat man

$$\left.\begin{aligned} \psi(s) &\sim \sum_{0 < \Lambda_n < 1} A_n e^{\Lambda_n s} \\ \chi(s) &\sim \sum_{-1 < M_n < 0} B_n e^{M_n s} \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Auf Grund der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihen (9) und aus der Art und Weise, in welcher wir die Ungleichungen (8) gefunden haben, sehen wir sofort, dass die Reihen (12) absolut und gleichmässig konvergent in $(-\infty, 0\}$ bzw. $\{2, +\infty)$ sind.

Wir wollen nun ein unbestimmtes Integral jeder der Funktionen betrachten

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &= \int \psi(s)\, ds \\ X(s) &= \int \chi(s)\, ds \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Zu untersuchen ist, ob diese ganzen transzendenten Funktionen $\Psi(s)$ und $X(s)$ wiederum fastperiodisch sind.

Wir müssen deshalb zu den ursprünglichen Ausdrücken (7) zurückkehren

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(s) - a_0^{(n)} &= \sum_{m=1}^{q_n} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \\ \chi_n(s) - b_0^{(n)} &= \sum_{m=1}^{q_n} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Durch Integration erhält man

$$\left.\begin{aligned} \int (\psi_n(s) - a_0^{(n)})\, ds &= \sum_{m=1}^{q_n} \frac{2^n}{m\pi} a_m^{(n)} e^{\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \\ \int (\chi_n(s) - b_0^{(n)})\, ds &= \sum_{m=1}^{q_n} \frac{-2^n}{m\pi} b_m^{(n)} e^{-\frac{m\pi}{2^n}\left(s - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

welches in Verbindung mit den in § 4 gefundenen Ungleichungen

$$\left| a_m^{(n)} \right| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}}$$

$$\left| b_m^{(n)} \right| \leqq \varepsilon_n e^{\frac{3\pi m}{2^{2n+1}}}$$

schon durch eine lose Abschätzung ergibt

$$\left.\begin{aligned} \left| \int (\psi_n(s) - a_0^{(n)})\, ds \right| &\leqq 2^{2n-2} \varepsilon_n, \qquad \sigma \leqq 0 \\ \left| \int (\chi_n(s) - b_0^{(n)})\, ds \right| &\leqq 2^{2n-2} \varepsilon_n, \qquad \sigma \geqq 2 \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Wenn wir nochmal die Voraussetzung, dass $\sum 2^{2n-2} \varepsilon_n$ konvergent ist, in Verbindung mit (15) anwenden, können wir — durch eine Majorantenbetrachtung — sofort schliessen, dass die aus (11) durch gliedweise Integration und Verwendung der durch (14) festgelegten Integrale entstehenden Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty \int (\psi_n(s) - a_0^{(n)})\, ds \\ &\sum_1^\infty \int (\chi_n(s) - b_0^{(n)})\, ds \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in der Halbebene $\sigma \leqq 0$ bzw. in $\sigma \geqq 2$ absolut und gleichmässig konvergent sind.

Daraus folgt, dass die durch die Reihen (16) definierten Funktionen eben unbestimmte Integrale $\Psi(s)$ und $X(s)$ von $\psi(s)$ bzw. $\chi(s)$ sind, d. h.

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &= \sum_1^\infty \int (\psi_n(s) - a_0^{(n)})\, ds, \quad \sigma \leqq 0 \\ X(s) &= \sum_1^\infty \int (\chi_n(s) - b_0^{(n)})\, ds, \quad \sigma \geqq 2 \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Wir haben damit die früher erwähnten Funktionen

$$\Psi(s) = \int \psi(s)\, ds$$

$$X(s) = \int \chi(s)\, ds$$

festgelegt.

Aus der Darstellung (17) lässt sich sofort schliessen, dass $\Psi(s)$ und $X(s)$ in der Halbebene $(-\infty, 0\}$ bzw. in der Halbebene $\{2, +\infty)$ beschränkt bleiben; infolge des Satzes 2 § 1 sind diese Funktionen also fastperiodisch in $[-\infty, 0]$ bzw. in $[2, +\infty]$.

Aus einem bekannten Satze ergibt sich nunmehr, dass die Dirichletentwicklungen von $\Psi(s)$ und $X(s)$ durch gliedweise Integration von (12) entstehen:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(s) &\sim \sum_{0 < \Lambda_n < 1} \frac{A_n}{\Lambda_n} e^{\Lambda_n s}, \qquad \sigma < 0 \\ X(s) &\sim \sum_{-1 < M_n < 0} \frac{B_n}{M_n} e^{M_n s}, \qquad 2 < \sigma \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Indem man sich daran erinnert, dass die Exponenten dieser Entwicklungen positiv bzw. negativ sind, erhält man aus dem Satze 12 § 1, dass $\Psi(s)$ und $X(s)$ in $(-\infty, +\infty]$ bzw. in $[-\infty, +\infty)$ fastperiodisch sind.

Wir kehren jetzt zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, die in einer Untersuchung der fastperiodischen Eigenschaften der Funktion (5)

$$F(s) = \int f(s)\, ds$$

besteht. Über diese Funktion haben wir früher bewiesen, dass sie auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0$, welche einem Maximalstreifen angehört, fastperiodisch ist.

Wir werden aber jetzt das Verhalten auf einer Geraden $\sigma = \sigma_0$, die nicht zu einem der Maximalstreifen gehört, untersuchen, und dabei wird die in (6) angegebene Umschreibung nützlich

$$\begin{aligned} f(s) = &\sum{}^{*}\ k_{q_1}\{f_{q_1}(s) - \delta_{q_1}(A_0 + B_0)\} \\ &+ \sum{}^{**} k_{q_2}\{f_{q_2}(s) - \delta_{q_2}(A_0 + B_0)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$ lässt sich in zwei Teile zerlegen; der von $\sum^{*}$ herrührende Teil wird aus den Gliedern mit negativen Exponenten bestehen, während die Glieder mit positiven Exponenten aus dem von $\sum^{**}$ herrührenden Teil stammen.

Wir begnügen uns, $\sum^{*}$ näher zu studieren

$$\sum{}^{*} k_{q_1}\{f_{q_1}(\sigma_0 + it) - \delta_{q_1}(A_0 + B_0)\}. \tag{19}$$

Die Glieder der Fourierentwicklung für $f(\sigma_0 + it)$, deren Exponenten zwischen $-1$ und $0$ liegen, rühren von

$$\sum{}^{*} k_{q_1}\delta_{q_1}\{\chi(\sigma_0 + it - \alpha_{q_1}) + \psi(-\sigma_0 - it + \beta_{q_1})\} \tag{20}$$

her.

Da die Funktionen $\psi(s)$ und $\Psi(s)$ in der Halbebene $(-\infty, 0\}$ beschränkt sind, und ferner die Funktionen $\chi(s)$ und $X(s)$ in $\{0, +\infty)$ beschränkt sind, ergibt sich, dass die Reihe (20) gleichmässig konvergiert, d. h. die Reihe stellt eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$ dar. In derselben Weise sieht man ein, dass die durch gliedweise Integration von (20) und Anwendung der durch (18) festgelegten Integrale entstehende Reihe eine fastperiodische Funktion von $t$ darstellt.

Bilden wir die Differenz zwischen den Funktionen (19) und (20), so entsteht eine neue fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen $t$, deren Fourierexponenten alle $\leqq -1$ sind. Diese Funktion lässt sich — infolge des Satzes 10 § 1 — als Randfunktion einer in der Halbebene $\{\sigma_0, +\infty)$ fastperiodischen Funk-

tion auffassen; da deren Dirichletentwicklung nur Exponenten hat, welche $\leqq -1$ sind, können wir — infolge des Satzes 11 § 1 — schliessen, dass ihr unbestimmtes Integral ebenfalls in der Halbebene $(\sigma_0, +\infty)$ fastperiodisch ist.

In genau derselben Weise verläuft die Untersuchung der Teilreihe $\sum^{**}$.

Damit haben wir gezeigt, dass $F(\sigma_0 + it)$ fastperiodisch ist, wenn die Gerade $\sigma = \sigma_0$ nicht der Menge von Maximalstreifen angehört, d. h. wir haben bewiesen den

**Hauptsatz III.** *Es ist möglich, eine ganze transzendente Funktion $F(s)$ zu konstruieren, welche auf der Menge von Geraden, die zurückbleibt, wenn man von dem gegebenen Streifen $(\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, die Menge von Maximalstreifen $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ entfernt, fastperiodisch ist, ohne auf irgendeiner anderen Geraden innerhalb des Streifens $(\alpha, \beta)$ fastperiodisch zu sein.*

---

## Literaturverzeichnis.


[1] Bohr, H. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen. Acta math. Bd. 47 (1926). S. 237—281.

[2] Bohr, H. Über analytische fastperiodische Funktionen. Math. Ann. Bd. 103 (1930). S. 1—14.

[3] Bohr, H. Über ganze transzendente Funktionen, die auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden beschränkt sind. Opuscula Mathematica A. Wiman dedicata. 1930.

[4] Bohr, H. Sur le théorème d'unicité dans la théorie des fonctions presque périodiques. Bull. d. Sc. math. 2 Série. Bd. 50 (1926). S. 1—5.

[1] Osgood, W. F. Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable; with corresponding theorems for definite integrals. Ann. of Math. 2 Series. Bd. 3 (1901). S. 25—34.

[1] Petersen, Richard. Om en Klasse næstenperiodiske analytiske Funktioner. Habilitationsschrift. Kopenhagen 1933.

[2] Petersen, Richard. En analytisk Funktion med specielle næstenperiodiske Egenskaber. Matem. Tidsskrift B. 1933. S. 33—44.

[3] Petersen, Richard. Untersuchungen über eine analytische Funktion mit speziellen fastperiodischen Eigenschaften. Videnskabernes Selskab, Math.-fys. Medd. XII, 14. S. 1—30 (1934).

[4] Petersen, Richard. Neuere Untersuchungen über fastperiodische analytische Funktionen. 8. Skand. Matematikerkongres. 1934.