ÜBER KOMBINATORISCHE TOPOLOGIE.

VON

M. DEHN

in FRANKFURT a. M.

Inhaltsangabe.

Seite.

Einleitung 124
§ 1. Kanonische Darstellung der topologischen Komplexe 127
I. Darstellung der Bäume 127
II. Darstellung der allgemeinen Komplexe 132
§ 2. Darstellung der Polyeder vom Geschlecht null 135
I. Einleitung 135
II. Baum, Zwiebel und *BZ*-Reihe 136
a) Einführung 136
b) Kanonisierung 138
c) Vereinfachung der Ableitung 139
d) Beispiele 141
III. Die *BZ*-Figur 141
a) Einführung 141
b) Anwendungen. Färbungssatz. Autopolare Polyeder 143
IV. Darstellung der Transformationen der Polyeder und der Transformationen der *BZ*-Reihen 144
a) Aufbauende Polyedertransformationen 144
b) Einführung des *t*-Graphen 145
c) Die Auflösung des *t*-Graphen und die *BZ*-Reihe 146
d) Die erzeugenden Transformationen, *EBZ*-Transformationen, für eine *BZ*-Transformation 148
e) Die abbauenden Polyedertransformationen 149
f) Beispiele 151
V. Untersuchung der *t*-Graphen 152

a) Symbolische Darstellung durch das T-Schema und ihre Ableitung aus der BZ-Reihe 152
b) Mehrdeutigkeit des T-Schemas und die höheren T-Schemata . . . 153
c) Beispiele 155
§ 3. Darstellung der Graphen auf der Kugel (Gauss'sches Problem) 157
I. a) Die Gauss'sche Bedingung für das System der Symbolreihen . . . 157
b) Die Auflösung der Graphen durch die U-Transformationen. Notwendige und hinreichende Bedingung, Mehrdeutigkeit 157
c) Beispiele 159
II. a) Die Algebra der Graphen und der allgemeinen kombinatorischen Topologie, die Spiele. Ihr charakteristischer Gegensatz zu den Gruppen, Wechsel des Operationsbereichs 161
b) Beispiel, das Spielbild 163
§ 4. Orientierbare Flächen von höherem Geschlecht 164
a) Baum, Zwiebel und BZ-Reihe, Beispiel 164
b) Gerüst 165
c) Transformationen der BZ-Reihen, t-Graph 166
d) Gauss'sches Problem 167

Einleitung.

Im folgenden sollen einige einfache Probleme der kombinatorischen Topologie behandelt werden. Die Gebilde dieses Teiles der Geometrie bestehen, wie bekannt, aus einer endlichen Anzahl von Punkten $S_0^1 \ldots S_0^{\alpha_0}$, einer endlichen Anzahl von Strecken $S_1^1 \ldots S_1^{\alpha_1}$ als Verbindungen von je zwei (auch ev. zusammenfallenden) der Punkte S_0^i, einer endlichen Anzahl von Flächenstücken $S_2^1 \ldots S_2^{\alpha_2}$, die eingespannt sind in geschlossenen aus den Strecken S_1^i gebildeten Zügen, usw., endlich aus Raumstücken $S_m^1 \ldots S_m^{\alpha_m}$, wobei an die Stelle der geschlossenen Streckenzüge geeignet zu definierende sphärische Mannigfaltigkeiten treten. Ein solches Gebilde heisst ein m-dimensionaler Komplex und wird mit C_m bezeichnet.

Hier erhebt sich schon unser *erstes Problem*: Zwei Komplexe C_m und C'_m heissen *topologisch gleich*, falls sich die Punkte von C_m und die Punkte von C'_m, die Strecken von C_m und die Strecken von C'_m und entsprechend allgemein die k-dimensionalen Raumstücke von C_m und die von C'_m so einander ein-eindeutig zuordnen lassen, dass die »vereinigte Lage» für die Stücke verschiedener Dimension erhalten bleibt, d. h. dass, wenn in C_m ein Punkt zur Begrenzung einer

Strecke gehört, der durch die Zuordnung in C'_m entsprechende Punkt zur Begrenzung der entsprechenden Strecke gehört, ferner dass, wenn in C_m eine Strecke zur Begrenzung eines Flächenstückes gehört, in C'_m die entsprechende Strecke zu der Begrenzung des entsprechenden Flächenstückes gehört usw. Um zu entscheiden, ob zwei Komplexe C_m und C'_m mit gleicher Anzahl von Punkten, Strecken usw. topologisch gleich sind, kann man sämtliche überhaupt mögliche ein-eindeutige Zuordnungen der Punkte, Strecken usw. von C_m zu den Punkten, Strecken usw. von C'_m daraufhin untersuchen, ob unter ihnen solche sind, bei denen die vereinigte Lage erhalten bleibt. Eine eindringendere Betrachtung wird aber neben den Zahlen der Punkte, Strecken usw. noch weitere topologische Invarianten (oder invariante Elemente) bestimmen, sodass die Übereinstimmung *der geordneten Reihe dieser Invarianten die notwendige und hinreichende Bedingung für die topologische Gleichheit zweier Komplexe* darstellt. Die Aufstellung eines solchen vollständigen Invariantensystems für den allgemeinen Komplex oder, was dasselbe ist, die *kanonische Darstellung der* C_m bildet den Inhalt des ersten Paragraphen. Die kanonische Darstellung eines gegebenen Komplexes wird im allgemeinen nicht ohne Probieren möglich sein. Aber dieses Probieren bezieht sich nur auf *einen* Komplex, *nicht auf Paare*, wie bei der obigen primitiven Methode. Das ist der prinzipielle Fortschritt. In praktischer Hinsicht ist er analog dem Fortschritt vom dem direkten Vergleich zweier Anzahlen durch successive Zuordnung der Elemente zu dem Vergleich der geordneten Ziffern in der Darstellung jeder der Anzahlen etwa im Dezimalsystem. Es ist bezeichnend für die bis jetzt noch so mangelhafte systematische Entwicklung der Topologie, dass dieses einfache Problem bisher in der Literatur, wie mir jedenfalls scheint, nicht behandelt wurde.

Nachdem dieses Problem gelöst ist, wird man sofort die Forderung erheben, die Eigenschaften solcher geordneter Reihen festzustellen, die Komplexe der verschiedenen Dimensionen darstellen. Diese Feststellung wird in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt, ist aber wohl mit keinen Schwierigkeiten verbunden. Dagegen bildet diese Feststellung den ersten Schritt bei der Behandlung einer zweiten Art von Problemen.

Diese zweite Stufe von topologischen Problemen zu überwinden macht bedeutend grössere Schwierigkeiten: Durch die charakteristischen topologischen Transformationen, vor allem durch die »internen» Transformationen, d. h. durch Zerlegung, werden die topologischen Komplexe der verschiedenen Dimensionen in Klassen eingeteilt. Man nennt zwei Gebilde homöomorph, wenn sie durch

interne Transformationen in einander übergeführt werden können. Es erhebt sich nun das Problem, *die verschiedenen Klassen homöomorpher Gebilde von einander durch die Darstellung zu unterscheiden.* Dies Problem ist bisher nur in den allereinfachsten Fällen, der Hauptsache nach für diejenigen Komplexe, die geschlossene oder berandete Flächen sind, gelöst. Wir werden in § 2 sehr einfache Darstellungen für Flächen geben, sodass jeder zu einer bestimmten Klasse gehörenden Darstellung eindeutig eine Fläche der entsprechenden Klasse homöomorpher Flächen zugehört. Dass jeder Fläche auch umgekehrt eindeutig eine solche Darstellung zugeordnet werden kann, erreichen wir durch Benutzung der in § 1 entwickelten Methode. Diese Darstellung der Flächen hat noch eine ganz andere Bedeutung. Es gibt viele topologische Fragen, die spezielle Eigenschaften derjenigen Komplexe betreffen, die geschlossene Flächen bestimmter Art sind, ich denke etwa an das Vierfarben-Problem. Soll die Lösung dieser Probleme nicht von einem glücklichen Zufall abhängen, so ist es nötig, eine möglichst vollständige Übersicht über die Gesamtheit dieser Komplexe zu haben. Eine solche wird für die Polyeder durch die in § 2 gegebene Darstellung versucht. Mit ihrer Hilfe wird auch ein sehr einfacher Färbungssatz abgeleitet. Endlich wird durch diese Darstellung der Weg eröffnet, um rechnerische Methoden für die Topologie zu verwerten. Dazu ist zunächst eine gewissermassen algebraische Darstellung der topologischen Gebilde erforderlich, eine Art *analytischer Geometrie für die Topologie*, die wenigstens in den Grundzügen für die orientierbaren geschlossenen Flächen in § 2 und § 4 gegeben wird.

In § 3 behandeln wir das *Gaussische Problem der Tracte*, dessen Lösung sich zwanglos an die vorangehenden Erörterungen anschliesst. Hier tritt die algebraische Structur in so einfacher Form auf, dass sie zu näherer Betrachtung geeignet ist. Es treten die charakteristischen Unterschiede gegenüber den Gruppen klar hervor: Die Associationen von verschiedenen Operationen zu einer einzigen Operation ist im allgemeinen nicht möglich. Es werden Systeme solcher Operationen, die als *Spiele* bezeichnet werden, abstract dargestellt und durch geometrische Gebilde voranschaulicht.

Die Algebraisierung der Topologie ist leichter an die üblichen Vorstellungen anzuschliessen bei einem Problem, in dem ganz spezielle Komplexe behandelt werden, nämlich diejenigen, die durch Zerlegung eines Rechteckes in Rechtecke geliefert werden. Dieses Problem werden wir an anderer Stelle behandeln.

§ 1.

Kanonische Darstellung der topologischen Komplexe.

I. Es ist zweckmässig, unsern Weg über die *kanonische Darstellung der Bäume* zu nehmen. Als Bäume bezeichnet man die zusammenhängenden Streckenkomplexe C_1 ohne geschlossene Streckenzüge. Zu der Darstellung der Bäume benutzen wir *topologisch ausgezeichnete Punkte* und damit auch ausgezeichnete Teilbäume. Diese ermöglichen eine von den einfachsten zu beliebigen Bäumen aufsteigende kanonische Darstellung, falls Bestimmungen über die *Anordnungen* getroffen werden.

a) *Mittelpunkt oder Achse eines Baumes.* C. Jordan hat als topologisch ausgezeichnete Elemente die *Zentralelemente* erkannt: ein aus mehreren Strecken bestehender Baum hat notwendig *Endstrecken*, d. h. Strecken, deren einer Endpunkt ein *äusserer Punkt ist*, von dem keine andere Strecke ausgeht. Entfernt man von einem Baum sämtliche Endstrecken, so bleibt ein Punkt, *Mittelpunkt*, oder eine Strecke, *Achse*, oder ein Baum mit weniger Strecken übrig, den man wie den ursprünglichen Baum durch Entfernung der Endstrecken verkleinern kann. Durch Fortsetzung dieses Prozesses kommen wir schlesslich zu einem Mittelpunkt oder einer Achse, die die topologisch ansgezeichneten Zentralelemente des Baumes sind. Die Bäume sind also durch die Art ihrer Zentralelemente in zwei verschiedene Klassen eingeteilt, solche mit Mittelpunkt und solche mit Achse. Die Zentralelemente sind durch Extremumseigenschaften ausgezeichnet und auch durch diese eindeutig zu definieren: Zwei Punkte des Baumes sind durch einen und nur einen Streckenzug miteinander verbunden. Das Maximum n der Anzahl der Strecken eines solchen Zuges sei für den Zug Z erreicht, dann ist, falls n gerade ist, der Mittelpunkt von Z der Mittelpunkt des Baumes und falls n ungerade ist, die mittlere Strecke von Z die Achse des Baumes. Aus der ursprünglichen Definition, aber auch durch direkte Betrachtung, folgt leicht, dass alle solche maximalen Züge durch denselben Punkt resp. dasselbe Punktepaar (dieselbe Strecke) hindurchgehen. Diese Eindeutigkeit der Bestimmung ausgezeichneter Elemente durch extremale Eigenschaften macht die Bäume vor allen anderen Komplexen geeignet zur kanonischen Darstellung.

Die von dem Mittelpunkt oder von jedem der Achsenendpunkte ausgehenden Teilbäume liefern topologisch ausgezeichnete Gesamtheiten von kleineren Bäumen. Es ist nur nötig, diese anzuordnen und bei der Anordnung auch die

Art, wie sie an den Zentralelementen angeheftet sind, zu berücksichtigen. Das wird ermöglicht durch

b) *Bezeichnung der Punkte eines Baumes.* Allen äusseren Punkten ordnen wir den Buchstaben F zu. Hat der Baum einen Mittelpunkt, so bezeichnen wir ihn mit M_0, hat er eine Achse, so bezeichnen wir die Endpunkte der Achse mit A_0^1 und A_0^2, wobei wir über die Verteilung dieser beiden Bezeichnungen auf die Achsenendpunkte erst später eine Entscheidung treffen wollen. Alle Mittelpunkte resp. Achsenendpunkte der an M_0 oder an einem der A_0^i hängenden Teilbäumen bezeichnen wir mit M_1 resp. mit A_1^1 und A_1^2. So fahren wir fort und nennen einen Punkt M_r einen *Mittelpunkt r-ter Stufe*, A_r^1 und A_r^2 *Achsenendpunkte r-ter Stufe.* Da M_r resp. A_r^1 und A_r^2 stets äussere Punkte der an ihnen hängenden Bäume sind, so tritt jeder innere Punkt nur einmal als Mittelpunkt oder als Achsenendpunkt auf.

c) *Das einem Baume zugeordnete Wort.* Aus den Buchstaben F, M_r, A_r^1, A_r^2 und den Klammer-(Zusammenfassungs-) Zeichen wollen wir ein Wort für den Baum bilden. Und zwar sollen in diesem Wort soviel Buchstaben F vorkommen, wie der Baum äussere Punkte hat, so viele M_r, wie er Mittelpunkte r-ter Stufe, aber jeder dieser Punkte so oft als Strecken von ihm ausgehen, so viel A_r^1 und A_r^2, wie der Baum Achsenpunkte r-ter Stufe hat, aber jeder Achsenendpunkt einmal weniger oft als Strecken von ihm ausgehen. Wir werden die Anordnung dieser Buchstaben und ihre Zusammenfassung durch Klammerzeichen so vorschreiben, *dass das Wort eindeutig den Baum bestimmt, und alle topologisch gleichen Bäume dasselbe Wort ergeben. Diese Worte geben damit die kanonische Darstellung der Bäume.*

Wir bezeichnen den aus zwei Punkten und einer Strecke bestehenden, einfachsten Baum mit FF. Wir nehmen ferner an, wir hätten schon alle Bäume mit weniger als n Punkten im obigen Sinne kanonisch durch Worte bezeichnet. Diese Worte seien auch in einer einfachen Reihe angeordnet, d. h. zwei Baumworte B_1 und B_2 sind entweder identisch oder B_1 kommt in dieser Reihe vor B_2, oder B_2 kommt in dieser Reihe vor B_1. Es sei nun ein Baum mit n Punkten und einem Mittelpunkt M_0 gegeben. Dann betrachten wir die Bäume, die an M_0 hängen, und die sie nach unserer Annahme darstellenden Worte. In jedem dieser Worte entspricht dem Punkte M_0 ein F, da ja M_0 für jeden dieser Bäume ein äusserer Punkt ist. Es kann auch sein, dass M_0 mehreren Punkten F des für sich betrachteten Teilbaumes zugeordnet werden kann, falls nämlich

diese Punkte auf dem Teilbaum topologisch æquivalent sind d. h. bei einer etwa möglichen Abbildung des Teilbaumes auf sich einander entsprechen. In diesem Falle ordnen wir M_0 demjenigen F zu, das in dem den Teilbaum darstellenden Wort zuerst kommt. Ändern wir jetzt in jedem solchen Teilbaumwort den M_0 zugeordneten Buchstaben F in M_0 um, die Zeichen M_r in M_{r+1}, die Zeichen A_s^i in A_{s+1}^i (in Übereinstimmung mit der Bezeichung der Punkte des gegebenen Baumes), schliessen jedes dieser Worte in Klammern und ordnen die Klammern nach der Stellung der eingeklammerten Worte (*vor* der Änderung ihrer Zeichen) in der nach Voraussetzung vorhandenen Reihe von links nach rechts in aufsteigender Ordnung, dann ordnen wir dem gegebenen Baum die Gesamtheit dieser geordneten eingeklammerten Worte als Wort zu. Wir haben jetzt noch eine Bestimmung über die Anordnung der Bäume mit n Punkten zu treffen. Zunächst ordnen wir die Zeichen, aus denen die Worte zusammengesetzt sind. Der Einfachheit halber bezeichnen wir noch die nach rechts offne Klammer (Anfangsklammerzeichen) mit $\varkappa^{-1}$, die nach links offne (Schlussklammer) mit $\varkappa$. Dann ordnen wir die Zeichen in die Reihe

$$F M_0 A_0^1 A_0^2 M_1 A_1^1 A_1^2 \ldots M_r A_r^1 A_r^2 \ldots \varkappa^{-1} \varkappa$$

F hat den niedrigsten Platz, $\varkappa$ den höchsten. Betrachten wir jetzt zwei Worte B_1 und B_2 von dem letzten Buchstaben anfangend, der bei beiden $\varkappa$ sein wird, dann wird, wenn die beiden Worte nicht identisch sind, ein Buchstabe des einen Wortes zuerst von dem an gleicher Stelle stehenden Buchstaben des andern Wortes verschieden sein. *Die Ordnung der beiden Worte soll dieselbe sein wie die oben festgelegte Ordnung dieser beiden Buchstaben.* Es kann auch sein, dass das eine Wort, etwa B_1, weniger Buchstaben hat als das andere und identisch ist mit einem Endabschnitt von B_2, dann soll B_1 niedrigere Ordnung haben als B_2. Diese Anordnung hat die Eigenschaft, dass zwei nicht identische Worte verschiedene Ordnung haben und dass, wenn B_1 grössere Ordnung hat als B_2 und B_2 grössere Ordnung hat als B_3, dann B_1 auch grössere Ordnung hat als B_3; die Wortanordnung ist einfach. Das folgt sofort aus der einfachen Anordnung der Zeichen selbst.

Zwei topologisch verschiedene Bäume von n Punkten bestimmen auch verschiedene Worte: Nach Voraussetzung gehört zu jedem der eingeklammerten Teilworte topologisch nur *ein* Teilbaum und das Zeichen F, das bei der Wortbildung für den ganzen Baum in M_0 verwandelt wird, bezeichnet einen bestimmten Punkt dieses Teilbaumes oder einen von topologisch gleichwertigen Punkten. Liefern aber zwei

Bäume dasselbe Wort mit dem Zeichen M_0, so können wir die am M_0 hängenden Teilbäume ein-eindeutig mit Erhaltung der vereinigten Lage so aufeinander abbilden, dass dabei die dem Punkte M_0 entsprechenden F-Punkte einander entsprechen. Also sind durch diese Abbildungen auch die beiden ganzen Bäume als topologisch gleich nachgewiesen. Die besondere Bedeutung von M_0 spielt hier keine Rolle, sie wird benutzt dazu, um umgekehrt jedem Baum nur *ein* Wort entsprechen zu lassen.

Unter den an M_0 hängenden Teilbäumen können auch topologisch identische, also auch durch identische Worte dargestellte vorkommen. Dann ist die Reihenfolge der entsprechenden Klammern willkürlich. Die Erscheinung, dass in einem Baumwort gleiche Klammern hinter einander und in derselben grösseren Klammer oder überhaupt nicht eingeklammert vorkommen, bedeutet, dass der Baum Transformationen in sich zulässt.

Es ist noch der Fall zu erledigen, dass der gegebene Baum mit n Punkten keinen Mittelpunkt sondern eine Achse hat. Wir bezeichnen dann in den Worten für die von den Achsenendpunkten ausgehenden Teilbäumen diejenigen Punkte F (wir nehmen hierzu wieder wie oben das erste in Betracht kommende F), die mit einem Achsenendpunkt zusammenfallen, mit dem indifferenten Buchstaben A_0, den wir in der Reihe der Buchstaben an die Stelle von A_0^1 und A_0^2 setzen. Wir betrachten jetzt die Gesamtheit dieser, mit Klammern versehener und geordneter Worte für jeden Achsenendpunkt. Auch diese Gesamtheiten haben nach unseren Vorschriften eine Ordnung und wir bezeichnen denjenigen Punkt mit A_0^1, für den diese Gesamtheit niedrigere Ordnung hat, den andern mit A_0^2. Sind die Worte dieser beiden Gesamtheiten identisch, dann ist der ganze Baum so in sich zu transformieren, dass dabei die Achsenendpunkte einander entsprechen. In diesem Falle bezeichnen wir wirkürlich den einen Punkt mit A_0^1, den Andern mit A_0^2. Jetzt führen wir in jenen Gesamtheiten anstelle des Zeichens A_0 das Zeichen des zugehörigen Achsenendpunktes A_0^1 resp. A_0^2 ein, vermehren alle Indices um 1 und setzen aus diesem Gesamtheiten das ganze Wort zusammen, indem wir zunächst diejenigen mit A_0^1, dann die mit A_0^2 schreiben. Es folgt dann, genau so wie oben, dass die kanonische Darstellung auch auf diese Bäume mit n Punkten ausgedehnt werden kann. Damit haben wir jetzt durch Induction für alle Bäume eine kanonische Darstellung gefunden.

Beispiel. Der in der Figur 1 dargestellte Baum wird nach unseren Vorschriften kanonisch durch das Wort

$$((A_1^1 M_0)(A_1^2 F))(((M_2 A_1^1)(M_2 M_0))((A_1^2 F)((M_2 A_1^2)(M_2 F)))((M_1 F)((A_2^1 M_1)(A_2^2 F)) \cdot$$
$$\cdot (((A_2^1 M_1)(A_2^1 M_0))((A_2^2 F)(A_2^2 F))))$$

dargestellt, wo die Zeichen $\varkappa^{-1}$ und $\varkappa$ wieder durch (und) ersetzt sind.

d) *Baumworte ohne Klammern.* Wenn auch die eben dargestellten Wortbildungen unsere Bedingungen erfüllen, so sind sie doch als zu umständlich zu bezeichnen. Die Klammern sind zwar als Bezeichnung für die Gesamtheit von Teilbäumen etwas topologisch Invariantes, aber es liegt nahe, neben der Bezeichnung der Punkte nur eine geeignete einfache lineare Anordnung der Zeichen zur Charak-

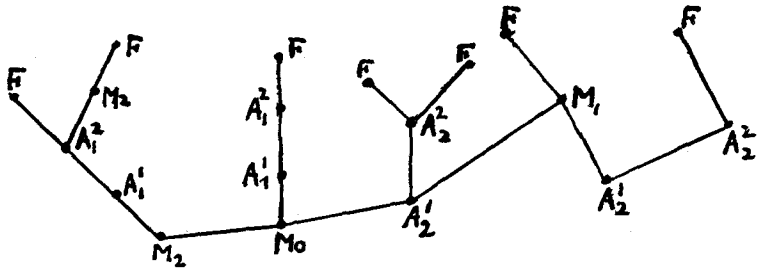


Fig. 1.

terisierung des Baumes anzuwenden. Ich weiss nicht, ob das in voller Allgemeinheit möglich ist. Dagegen kann man leicht die Klammern entfernen, wenn man Doppelindices einführt: Es sei etwa wieder ein Baum mit einem Mittelpunkt M_0 vorgelegt. Für jeden nicht aus *einer* Strecke bestehenden Teilbaum, der an M_0 hängt, wird M_0 in der Darstellung durch das Baumwort nicht an der ersten Stelle stehen. In jedem solchen Teilbaumwort hängen wir an den M_0 vorhergehenden (stets von F verschiedenen) Buchstaben als zweiten Index die o und versetzen M_0 an den Anfang des diesen Teilbaum darstellenden Wortes. Nach Durchführung dieser Operation teilen die Zeichen M_0 das Wort ein in die den einzelnen an M_0 hängenden Teilbäumen entsprechenden Worte, der zweite Index o gibt die ursprüngliche Stellung von M_0 an. Genau so behandeln wir A_0^1 und A_0^2. Entsprechend verfahren wir in jedem der Teilworte mit den Zentralelementen erster Stufe und dem entsprechenden zweiten Index 1 usw. bis zu den Zentralelementen letzter Stufe, deren Zeichen stets schon in unseren Worten vor den betreffenden Zeichen F stehen. Wir können jetzt, ohne dass der Zusammenhang der Teile verwischt wird, alle Klammern weglassen. Auf diese Weise entsteht aus dem obigen verklammerten Baumwort das Wort

$$M_0 A^1_{10} A^2_1 F M_0 A^1_{11} M_{21} M_{20} A^2_1 F A^2_1 M_{21} M_2 F M_0 M_1 F M_1 A^1_{21} A^2_2 F M_1 A^1_{21} A^1_{20} A^2_2 F A^2_2 F.$$

Für die Anordnung der Bäume benutzt man wohl zweckmässig die Form der verklammerten Worte.

Für die Baumworte ohne Klammern sei noch Folgendes bemerkt: Jedem Punkte des Baumes entspricht eine Gruppe durch keinen Buchstaben mit niedrigerem ersten Index getrennter, im ersten und ev. im oberen Index übereinstimmender Buchstaben. Gibt es aber zu P noch einen andern Punkt P' von der Art, dass der Baum so in sich transformiert werden kann, dass dabei P und P' sich entsprechen, dann entsprechen P und P' zwei solcher Gruppen, die man beliebig P und P' zuordnen kann. Solche topologisch æquivalenten Punkte sind in dem obigen Beispiel nur die Punkte, die den letzten beiden Buchstaben F entsprechen.

II. Kanonische Darstellung der allgemeinen Komplexe.

a) *Accessorische Punktepaare an einem Baum.* Für das Folgende ist es wichtig, *Paare* von Punkten eines Baumes auszuzeichnen und das in eindeutiger Weise in den Baumworten zum Ausdruck zu bringen. Sei ein solches Punktepaar etwa $P_1 \overline{P}_1$, so wollen wir in dem Baumwort hinter den beiden ersten Zeichen für die Punkte P_1 und $\overline{P}_1$ die Buchstaben P_1 resp. $\overline{P}_1$ setzen. Es können speziell auch P_1 und $\overline{P}_1$ topologisch æquivalent sein, dann soll hinter das erste betreffende Zeichen der ersten Gruppe (s. o. S. 132) P_1 gesetzt werden, hinter das erste betreffende Zeichen der zweiten Gruppe $\overline{P}_1$. Endlich können auch $\overline{P}_1$ und P_1 denselben Punkt bedeuten, dann setzen wir hinter den ersten Buchstaben für P_1 und $\overline{P}_1$ zuerst P_1 und dann $\overline{P}_1$. In derselben Weise zeichnen wir beliebig viele solche *accessorische Punktepaare* $P_2 \overline{P}_2 \ldots P_n \overline{P}_n$ aus. Ist etwa P_2 topologisch æquivalent mit P_1, so setzen wir das Zeichen P_2 hinter das erste betreffende Zeichen in der *zweiten* Gruppe. Ist P_2 identisch mit P_1, dann setzen wir den Buchstaben P_2 hinter den Buchstaben P_1, falls aber auch $\overline{P}_1$ mit P_1 identisch ist, hinter $\overline{P}_1$. Die *Anordnung* dieser *durch accessorische Punktepaare beschwerten Bäume* bewirken wir, indem wir hinter die geordnete Reihe der Buchstaben für den Baum die Buchstaben $P_1 \overline{P}_1 \ldots P_n \overline{P}_n$ fügen und im übrigen dieselbe Vorschrift für die Anordnung der Worte machen wie oben. Damit wären die Worte für die beschwerten Bäume sowie ihre Anordnung erst bestimmt, nachdem die Indices für die acces-

sorischen Punkte angegeben und eine Entscheidung darüber getroffen ist, welche Punkte mit P_i und welche mit $\overline{P}_i$ zu bezeichnen sind. Liegen aber für einen beschwerten Baum solche Bestimmungen nicht vor, dann wählen wir von allen möglichen Worten für diesen Baum, die allen möglichen solchen Bestimmungen entsprechen, dasjenige aus, das die *kleinste Ordnung* hat. Führen zwei verschiedene Bestimmungen zu demselben Worte, so ist das ein Zeichen dafür, dass der beschwerte Baum Transformationen in sich zulässt.

b) *Jeder Streckenkomplex* kann, meistens in sehr mannigfaltiger Weise, als *beschwerter Baum* aufgefasst werden: durch Weglassung von $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ geeigneten Strecken wird ein Streckenkomplex (mit α_1 Strecken und α_0 Punkten) zu einem Baum. Jeder weggelassenen Strecke entspricht durch ihre Endpunkte ein Paar von (ev. zusammenfallenden) Punkten auf dem Baum. Diese nehmen wir als accessorische Punktepaare und erhalten in dem so entstehenden beschwerten Baum das topologisch eindeutige Abbild des gegebenen Streckenkomplexes. Sind zwei beschwerte Bäume in der Weise auf einander abbildbar, dass den Punkten, accessorischen Punktpaaren und Strecken des einen Baumes ein-eindeutig die entsprechenden Elemente des anderen Baumes entsprechen, dann sind auch die diesen beschwerten Bäumen entsprechenden Streckenkomplexe einander topologisch gleich. Wir ordnen jetzt einer Streckenkomplex *eindeutig* einen beschwerten Baum durch den *kleinsten* beschwerten Baum zu, der aus dem Komplex durch den obigen Prozess entsteht. Damit haben wir *die kanonische Darstellung und gleichzeitig eine einfache Anordnung aller Streckenkomplexe.*

Beispiel: Der Komplex der Strecken eines Tetraeders. (Fig. 2, 3.) Zu diesem Komplex gehören nur zwei Bäume mit je drei Strecken, der eine mit einem Mittelpunkt und dem Wort $M_0 F M_0 F M_0 F$, der andere mit einer Achse und dem Wort $A_0^1 F A_0^2 F$. Ordnen wir die Bezeichnung der accessorischen Punktepaare (d. h. der Punktepaare für die drei übrigen Strecken) so, dass die kleinsten beschwerten Bäume entstehen, dann bekommen wir für den ersten Fall den kleinsten beschwerten Baum

$$M_0 F \overline{P}_3 \overline{P}_2 M_0 F P_3 \overline{P}_1 M_0 F P_2 P_1$$

und in zweiten Fall

$$A_0^1 \overline{P}_2 F \overline{P}_3 \overline{P}_1 A_0^2 P_3 F P_2 P_1 .$$

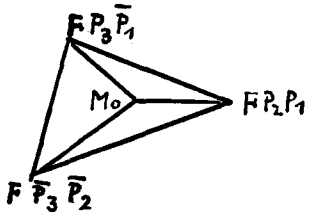


Fig. 2.

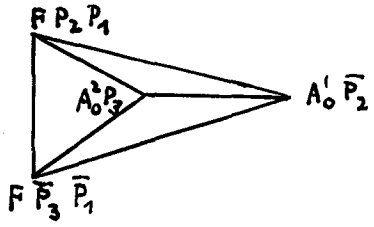


Fig. 3.

Nach unseren Anordnungsbestimmungen ist das erste Wort kleiner und ist also die kanonische Darstellung des Streckenkomplexes.

c) Es ist nun leicht, zu *höheren Komplexen* überzugehen. In der Einleitung wiesen wir darauf hin, dass ein zweidimensionaler Komplex aus dem ihm zu Grunde liegenden Streckenkomplex entsteht, indem in gewisse geschlossene Strekkenzüge Flächenstücke eingespannt werden. Das drücken wir in unseren Komplexworten folgendermassen aus: die Randpunkte eines solchen Flächenstückes bezeichnen wir, wie sie auf dem Rande aufeinander folgen, mit $Q_{1k}\,Q_{2k}\ldots$ und fügen diese Zeichen je *hinter* eine den betreffenden Punkt im Streckenkomplex bezeichnende Gruppe von Buchstaben (etwa $M_r P_k P_l \ldots$) hinzu. Ordnen wir wieder hinter die bisherige Reihe von Buchstaben die Buchstaben Q_{ik} in der Reihenfolge $Q_{11}\,Q_{21}\ldots Q_{12}\,Q_{22}\ldots$ an und erweitern dementsprechend unsere Anordnungsbestimmungen für die Worte, dann erhalten wir ein bestimmtes Wort dem gegebenen Komplex zugeordnet in dem *Wort kleinster Ordnung.* Es ist klar, dass auch umgekehrt jedem solchen Worte topologisch nur *ein* Flächenkomplex entsprechen kann. (Es ist selbstverständlich, dass nicht jedes solche Wort einen Flächenkomplex darstellt, wie schon ein beliebiges aus dem Zeichen $M_i A_k^1 A_k^2$ und F zusammengesetztes Wort keinen Baum darzustellen braucht). Auf diese Weise haben wir auch die *Flächenkomplexe kanonisch dargestellt und einfach angeordnet.*

Beispiel. Kanonische Darstellung des Tetraeders (s. Fig. 4)

$$M_0\,Q_{34}\,Q_{33}\,Q_{32}\,F\,\bar{P}_3\,\bar{P}_2\,Q_{24}\,Q_{23}\,Q_{31}\,M_0\,F\,P_3\,\bar{P}_1\,Q_{14}\,Q_{22}\,Q_{21}\,M_0\,F\,P_1\,P_1\,Q_{13}\,Q_{12}\,Q_{11}.$$

Durch Auszeichnung von geeigneten Systemen geschlossener Folgen von Punktepaaren auf einem Baume kommen wir zu einem dreidimensionalen Komplex und durch Bezeichnung, Anordnung und Aufsuchen der Worte niedrigster Ordnung zur kanonischen Darstellung solcher Komplexe. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung gelangen wir zur Erkenntnis, dass *durch* unsere *Bezeichnungs- und*

Anordnungsmethoden für jeden beliebigen n-dimensionalen Komplexe eine kanonische Darstellung und für alle eine einfache Anordnung gefunden wird, womit wir das Ziel dieses Paragraphen erreicht haben. Es ist aber zu bemerken, dass diese

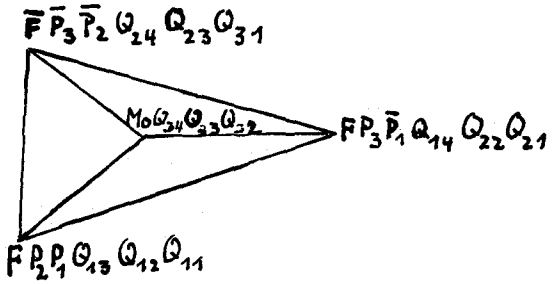


Fig. 4.

Darstellung desto umständlicher und künstlicher erscheint, je höher wir in den Dimensionen heraufgehen. Man darf deswegen nicht erwarten, dass diese Darstellung bei Behandlung spezieller topologischer Probleme für höhere Komplexe Dienste leisten wird.

§ 2.

Darstellung der Polyeder vom Geschlecht null.

I. Alle topologische Eigenschaften der Komplexe sind gleichzeitig Eigenschaften der für sie aufgestellten Symbole. Bestimmte Klassen von Komplexen definieren also auch bestimmte Klassen von solchen Symbolen. Aber die Charakterisierung einer solchen Klasse von Symbolen wird im allgemeinen sehr umständlich, undurchsichtig und für die Anwendungen, das Rechnen mit den Symbolen ganz ungeeignet sein. Für besondere Klassen von Komplexen wird man deswegen zweckmässig besondere Symbole einführen. Wir wollen das im folgenden für die gewöhnlichen Polyeder durchführen. Wir werden zeigen, dass man mit diesen Symbolen auch in gewissem Sinne rechnen kann. Wir stellen einmal die Transformationsformeln auf, die den Transformationen des Polyeders entsprechen, andererseits diejenigen, die *eine* symbolische Darstellung mit *anderen* desselben Polyeders verknüpfen. Denn unsere symbolische Darstellung ist nicht eindeutig durch das Polyeder gegeben, sondern hängt noch von einem auf mannigfache Weise zu wählendem Bezugssystem (Koordinatensystem) ab.

Für besondere Klassen von Polyedern und für besondere Zwecke, z. B. für

die Formulierung des Vierfarbenproblems, sind bereits einfache symbolische Darstellungen gegeben worden[1]. Unsere Darstellung umfasst alle Polyeder, insbesondere alle vom Geschlecht 0. Die Teilflächen dürfen sich in Punkten oder Kanten selbst berühren, aber mehrfach zusammenhängenden Teilflächen sind ausgeschlossen. Die Kanten können auch zusammenfallende Endpunkte haben.

II. Baum, Zwiebel und *BZ*-Reihe.

a) *Einführung.* Wie in § 1 verbinden wir sämtliche Punkte eines Polyeders vom Geschlecht null durch einen Baum (von beiläufig $\alpha_0 - 1$ Ecken). Von einem *Endpunkt* P des Baumes möge die Baumstrecke $b = PP'$ sowie sonst

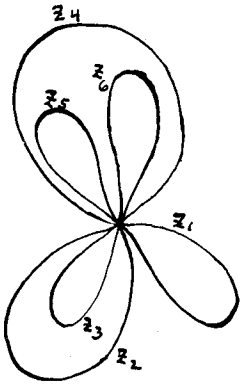


Fig. 5.

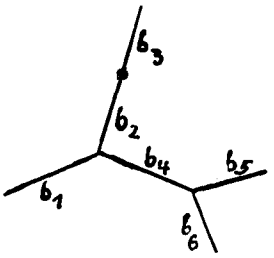


Fig. 6.

noch die Kanten $z_1 z_2 \ldots$ ausgehen. Wir transformieren das Polyeder, indem wir b weglassen und die beiden Ecken P und P' miteinander verschmelzen. Das ist eine »interne» Transformation, eine Erweiterung der in dem Encyklopädie-Artikel über Analysis Situs eingeführten Transformation, bei der die Verschmelzung nur dann ausgeführt wird, wenn von P ausser b nur noch eine einzige andere Strecke ausgeht. — In mancher Hinsicht scheint mir übrigens diese interne Transformation nebst der umgekehrten, der Zerlegung einer Ecke in zwei Ecken, als fundamentale interne Transformation besser geeignet zu sein als die in der Encyklopädie eingeführte spezielle. — Nach dieser Transformation wählen wir wieder eine Endstrecke des verkleinerten Baumes, bringen sie durch eine Trans-

[1] S. z. B. HEEGAARD, Norsk mathem. forening II 1933, wo eine Darstellung von HEAWOOD behandelt wird. Für andere symbolische Darstellungen, die aber im wesentlichen nur eine Tabelle der vereinigten Lage von Punkten und Flächen liefern s. Encykl. III AB 12 (Steinitz) S. 43 ff.

formation zum Wegfall und fahren so fort, bis wir den ganzen Baum auf einen Punkt reduziert haben. Dann erhalten wir ein Polyeder, dessen Einteilung durch ebensoviele Flächen wie ursprünglich vorhanden waren, also α_2 Flächen gebildet wird, ferner durch $\alpha_2 - 1$ Kanten und einen einzigen Punkt, etwa O. Alle Kanten haben ihren Anfangs- und Endpunkt in O. Das Polyeder wird durch die Figur 5 dargestellt ($\alpha_2 = 7$). Wir bezeichnen ein solches Polyeder als *Zwiebel*. Es ist *dual* entsprechend dem auf einer Kugelfläche ausgebreiteten *Baum* mit einer einzigen Fläche und $\alpha_0' - 1$ Kanten; z. B. entspricht der in der Figur 5 dargestellten Zwiebel der in der Figur 6 dargestellte Baum. Bezeichnen wir die Kanten einer Zwiebel mit $z_1 \ldots z_{\alpha_2 - 1}$, dann ergibt die Aufeinanderfolge der Kanten z_i um den Punkt O eine Symbolreihe $z_i z_k \ldots z_r$, in der jedes Symbol zweimal vorkommt. Diese Symbolreihe definiert eindeutig die Zwiebel, und auch umgekehrt gehört zu der Zwiebel, abgesehen von Bezeichnung und zyklischer Vertauschung eindeutig eine solche Symbolreihe. Soll aber die Symbolreihe überhaupt eine Zwiebel darstellen, so ist dazu eine Bedingung für die Anordnung der Paare gleicher Symbole zu erfüllen, nämlich: *Zwei Paare gleicher Symbole trennen sich in der Symbolreihe nicht.* Diese Bedingung ist aber, wie leicht zu sehen, auch hinreichend. Für die in der Figur dargestellte Zwiebel lautet die Symbolreihe

$$z_1 z_1 z_2 z_3 z_3 z_2 z_4 z_5 z_5 z_6 z_6 z_4 .$$

Bei der Ableitung dieser Bedingung müssen wir die Voraussetzung benutzen, dass das Polyeder das Geschlecht 0 hat.

Durch Kombination von Zwiebel und Baum entsteht das Polyeder. Wir müssen jetzt diese Kombination symbolisch darstellen. Dazu betrachten wir den letzten Schritt, durch den unser Polyeder zur Zwiebel wurde. Wir haben nur eine Baumstrecke b_l mit den Endpunkten Q und O (s. Fig. 7). Auf der Zwiebel mögen etwa die von Q ausgehenden Strecken beim Umlauf den Symbolen $z_i\, z_{k'} \ldots z_{q'}$ entsprechen, die von O ausgehenden an das Symbol $z_{q'}$ anschliessend $z_q \ldots z_i$. Die Strecke b_l bewirkt also eine Einteilung der z-Symbole in zwei Abteilungen. Umgekehrt bestimmt eine beliebige solche Abteilung der $2(\alpha_2 - 1)$ Symbole in zwei Abteilungen ein Polyeder mit zwei Ecken, das durch Verschmelzung dieser beiden Ecken in eine Zwiebel übergeht. Vor dem vorletzten Schritt (s. Fig. 8), der das Polyeder in das Polyeder mit zwei Ecken verwandelt, geht etwa vom Punkte Q noch die Strecke QR aus. Es gehen dann etwa von Q der Reihe nach durchlaufen die Strecken $QO \equiv b_l\; z_{i'} \ldots z_{r'} \ldots QR \equiv b_m$

$z_{s'} \ldots z_{q'}$ aus, von R die Strecken $z_{r''} \ldots z_{s''}$. Diese Einteilung der Zwiebelstrekken drücken wir aus durch die Symbolreihe

$$z_q \ldots z_i b_l z_{i'} \ldots z_{r'} b_m z_{r''} \ldots z_{s''} b_m z_{s'} \ldots z_{q'} b_l.$$

Die beiden Paare b_l und b_m trennen sich nicht. Die beiden Symbole b_m heben aus einer der beiden Abteilungen, in die die beiden Symbole b_l die z-Reihe zerlegen, eine Unterabteilung heraus. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir schliesslich das *ursprüngliche Polyeder dargestellt durch eine Symbolreihe, die BZ-Reihe, bestehend aus einer geraden Anzahl von z-Symbolen und einer geraden Anzahl von b-Symbolen. Die z-Symbole sind paarweise gleich, ebenso die b-Symbole. Zwei Paare von gleichen z-Symbolen trennen sich nicht, ebenso nicht zwei Paare*

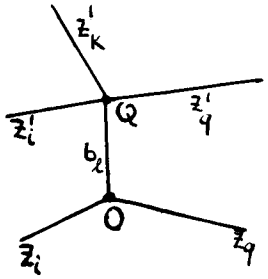


Fig. 7.

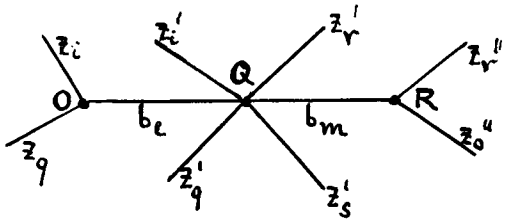


Fig. 8.

von gleichen b-Symbolen. Und umgekehrt liefert jedes solche aus zwei Arten von Symbolen bestehende Reihe, in der die Nicht-Trennungseigenschaft erfüllt ist, eindeutig ein Polyeder vom Geschlecht 0.

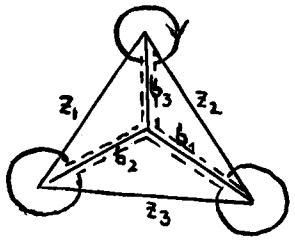
b) *Kanonisierung der BZ-Reihe.* Zu einem Polyeder gehören im allgemeinen sehr viele BZ-Reihen, je nach der Wahl des Baumes, den wir in das Polyeder hineinlegen. Die *Anzahl* der z-Symbole und die der b-Symbole ist freilich bestimmt, zu $2(\alpha_2 - 1)$ resp. $2(\alpha_0 - 1)$. Jedem Paare gleicher Symbole entspricht eine Kante. Jedoch ist die *Anordnung* der Symbole für dasselbe Polyeder noch auf sehr viele verschiedene Weisen möglich, wie wir an Beispielen sehen werden. Es ist aber ganz leicht, mit den Methoden von § 1 *einem gegebenen Polyeder eindeutig eine Symbolreihe zuzuordnen.* Dazu ist es nur nötig, die *Symbolreihen mit gleicher Gliederanzahl anzuordnen:* Wir setzen fest, dass jedes z höhere Ordnung hat als jedes b und dass bei gleichartigen Symbolen der Index über die Ordnung entscheidet, etwa so, dass dem grösseren Index auch die höhere Ordnung enspricht. Eine Symbolreihe A sei dann von höherer Ordnung als die

Symbolreihe B, falls von rechts nach links betrachtet das erste Symbol u in A, das von dem an derselben Stelle in B stehenden Symbol verschieden ist, höhere Ordnung hat als v. Dadurch bekommen zwei nicht identische Symbolreihen (gleicher Anzahl) verschiedene Ordnung, und alle Symbolreihen (gleicher Anzahl) sind einfach angeordnet. *Ordnen wir jetzt einem gegebenen Polyeder die BZ-Reihe mit der grössten möglichen Ordnung zu, so ist diese Zuordnung eindeutig.* Dabei kann auch die Zuordnung der Symbolreihen zu den einzelnen Strecken auf verschiedene Weise möglich sein, das bedeutet dann, dass das Polyeder sich selbst auf verschiedene Weise topologisch æquivalent ist, also topologische Automorphismen besitzt.

Damit ist unser erstes Ziel erreicht. Um die Transformationen zu ermitteln, die die verschiedenen zu demselben Polyeder gehörenden Symbolreihen miteinander verknüpfen, dient uns eine weiter unten auseinandergesetzte geometrische Deutung der Symbolreihe (s. S. 141).

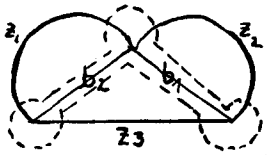
c) *Vereinfachung der Ableitung der BZ-Reihe.* Bevor wir Beispiele behandeln, wollen wir die *Ableitung der Symbolreihe wesentlich vereinfachen,* indem wir sie direkt, ohne die Zusammenziehung des Polyeders auf eine Zwiebel zu benutzen, aufstellen. Wenn wir nämlich die obige schrittweise Wiederherstellung des ursprünglichen Polyeders aus der Zwiebel genauer betrachten, ergibt sich ohne Schwierigkeit die folgende Regel für die direkte Aufstellung der BZ-Reihe: nachdem in einem Polyeder die Strecken eines Kantenbaumes mit $b_1 \ldots b_{\alpha_0-1}$, die übrig bleibenden Kanten, die Zwiebelkanten, mit $z_1 \ldots z_{\alpha_2-1}$, bezeichnet sind, gehen wir etwa von einer Ecke aus, an der z-Strecken hängen, schreiben die Bezeichnung der in bestimmtem Umlaufsinn unmittelbar aufeinander folgenden, von der Ecke ausgehenden z-Strecken hin, etwa $z_i \ldots z_k$ bis wir zu einer ersten b-Strecke etwa b_l kommen. Eine solche gibt es, da von jeder Ecke mindestens eine b-Strecke ausgeht. Dann durchlaufen wir von der Ecke aus im umgekehrten Sinne von b_l anfangend die unmittelbar aufeinanderfolgenden b-Strecken derjenigen an $z_k b_l$ grenzenden Teilfläche, bei der in diesem Sinne z_k die b_l vorangehende Strecke ist, und schreiben die Bezeichnungen $b_l \ldots b_m$ der Reihe nach hinter die Reihe $z_i \ldots z_k$. Da auf der Begrenzung jeder Teilfläche mindestens eine z-Strecke liegt, so kommen wir bei der Durchlaufung der Begrenzung der Fläche auch zu z-Strecken; sei z_s die erste, zu der wir kommen. Dann umlaufen wir wieder im ersten Umlaufssinn diejenige b_m und z_s ausstrahlende Ecke, bei der in diesem Umlaufssinn $b_m z_s$ vorangeht (diese besondere Bestim-

mung ist nötig für den Fall, dass b_m und z_s beide Endpunkte gemeinsam haben). Wenn wir so fortfahren, die Ecken und Teilflächen des Polyeders zu durchlaufen und die Bezeichnungen der Kanten nacheinander hinzuschreiben, erhalten wir die ganze BZ-Reihe und zugleich den Satz, dass bei dieser Art der Durchlaufung alle Strecken zweimal durchlaufen resp. überschritten werden, bis wir zu der ersten Ecke und der ersten Strecke zurückkommen. Wir werden diese



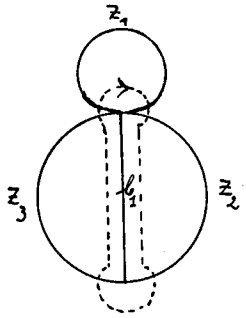
$z_1 z_2 b_3 b_1 z_2 z_3 b_1 b_2 z_3 z_1 b_2 b_3$

Fig. 9 a.



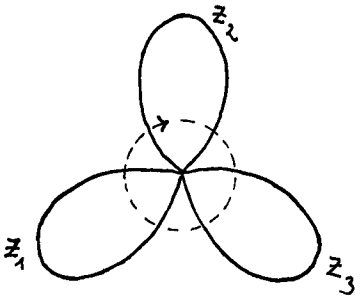
$z_1 z_2 b_1 z_2 z_3 b_1 b_2 z_3 z_1 b_2$

Fig. 9 b.



$z_1 z_2 b_1 z_2 z_3 b_1 z_3 z_1$

Fig. 9 c.



$z_1 z_2 z_2 z_3 z_3 z_1$

Fig. 9 d.

Konstruktion weiter unten bei der geometrischen Deutung der BZ-Reihe wiederfinden, aber sie folgt auch, wie bemerkt, ohne weiteres durch Betrachtung der schrittweisen Entstehung des Polyeders aus der Zwiebel. Umgekehrt ergiebt sich aus der BZ-Reihe die Berandung jeder Fläche und der Zyklus der von einer Ecke ausgehenden Kanten. So erhält man die Berandung einer Fläche, indem man von einem z_i in der BZ-Reihe nach einer Richtung vorwärtsgehend die aufeinanderfolgenden b-Symbole hinschreibt, bis man zu einem z-Symbol, etwa z_l kommt; dann geht man von dem *anderen* Symbol z_l in derselben Richtung weiter usw. Ganz ebenso erhält man, wenn man in diesem Verfahren z und b vertauscht, die Eckenzyklen.

d) *Beispiele.* Erstes Beispiel (s. Fig. 9): Tetraeder mit eingezeichneter Durchlaufung, ferner die Zwiebel und die aufeinanderfolgenden Stadien der aus der Zwiebel entstehenden Polyeder mit den zugehörigen Symbolreihen.

Zweites Beispiel (s. Fig. 10): Tetraeder mit anderem Baum und eingezeichneter Durchlaufung nebst zugehöriger BZ-Reihe.

Drittes Beispiel (s. Fig. 11) mit eingezeichneter Durchlaufung und BZ-Reihe.

Wir haben bei der Darstellung nicht auf die maximale BZ-Reihe Rücksicht genommen. Diese zur kanonischen Darstellung der Polyeder notwendige

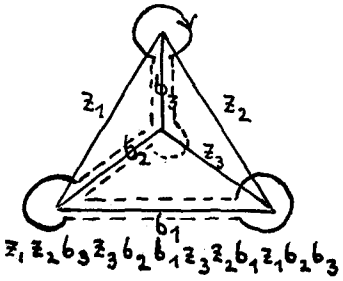


Fig. 10.

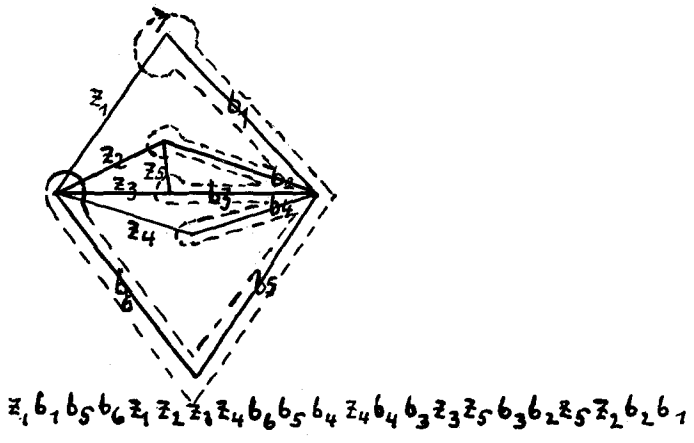


Fig. 11.

Bestimmung muss wohl im allgemeinen durch Probieren der verschiedenen möglichen Kantenbäume und sodann durch geeignete Wahl der Bezeichnung erreicht werden. Es gibt natürlich einige allgemeine Regeln für die Auswahl, z. B., dass man von einer Ecke möglichst viele z-Strecken ausgehen lässt und mit den entsprechenden Symbolen die BZ-Reihe anfängt, indem man den Symbolen die grösstmöglichen Indices gibt.

III. Die BZ-Figur.

a) *Einführung.* Es liegt nahe, die Symbole der BZ-Reihe sowie sie in dieser aufeinander folgen, zyklisch auf einer geschlossen Kurve C einer Kugelfläche anzuordnen, die gleichen z-Symbole etwa durch im Inneren von C verlaufende Strecken zu verbinden (wobei wir als »Inneres» ein beliebiges der beiden von C begrenzten Gebiete bezeichnen), ebenso die gleichen b-Symbole durch im

Äusseren von C verlaufende Strecken. Diese Verbindungsstrecken können wegen der charakteristischen Eigenschaften der BZ-Reihe als sich nicht schneidend angenommen werden. Die entstehende Figur wollen wir als *BZ-Figur* bezeichnen. In den Figuren 12, 13, 14 geben wir die BZ-Figuren für die drei obigen Beispiele. In der Fig. 14 sind nur die Indices der Symbole angegeben. Ihre Lage im Inneren oder Äusseren von C entscheidet darüber, ob sie z- oder b-Symbole darstellen.

Die BZ-Figur hat eine einfache und nicht unwichtige *geometrische Bedeutung* für das gegebene Polyeder: Der Kurve C entspricht die die BZ-Reihe liefernde Durchlaufungskurve, den im Innern von C laufenden Strecken die Zwiebelkanten, den im Äussern laufenden die Baumkanten. Den α_2 Gebieten, in die

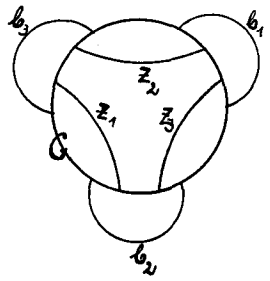


Fig. 12.

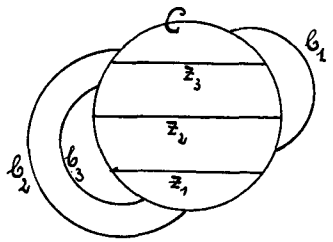


Fig. 13.

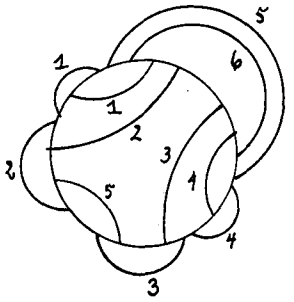


Fig. 14.

das Innere von C durch die z-Strecken zerfällt und ihren Begrenzungen durch diese Strecken entsprechen die Teilflächen und ihre Begrenzungen, soweit sie Zwiebelkanten sind. Den α_0 Gebieten, in die das Äussere von C durch die b-Strecken zerfällt und ihrer Begrenzung durch diese Strecken entsprechen die Ecken und die von ihnen ausgehenden Kanten, soweit sie Baumkanten sind. Die vollständige Begrenzung einer Teilfläche erhalten wir, indem wir bei der Umlaufung des betreffenden Gebietes des C-Inneren den Zwiebelkanten noch die Baumkanten hinzufügen, die den auf dem Rande dieses Gebietes und gleichzeitig auf C liegenden b-Punkten entsprechen. Der Aufeinanderfolge in der BZ-Figur entspricht die Aufeinanderfolge auf dem Polyeder. Ebenso gehen von einer Ecke ausser den das betreffende Gebiet des C-Äusseren begrenzenden Baumstrecken noch die z-Kanten aus, die den auf der Begrenzung dieses Gebietes und gleichzeitig auf C liegenden z-Punkten entsprechen. In der BZ-Figur kommt die *Dualität* (Polarität) zwischen Ecken und Teilflächen, Baum und Zwiebel in *geometrisch gleichem Verhalten* zum Ausdruck.

Der Beweis für diese Eigenschaften der BZ-Figuren ergibt sich unmittelbar aus der Funktion der geordneten z-Symbole für die Bildung der Zwiebel und der Funktion der geordneten b-Symbole für die Zerlegung der z-Symbole in Abteilungen und Bildung des Eckenbaumes. Die aus der BZ-Figur entnommenen Darstellungen der Flächen und Ecken geben genau die Vorschriften für die Darstellung, die wir bereits oben angegeben haben.

b) *Zwei Anwendungen:*

1) Aus der Zerlegung der Kanten in Baum- und Zwiebelkanten ergibt sich ein *einfacher Satz über eine Färbung des Polyeders.* Die Ecken eines Baumes kann man so mit *zwei* Farben färben, dass keine Strecke gleichgefärbte Endpunkte hat. Man braucht nämlich nur, von einer Ecke ausgehend, die Ecken einzuteilen in solche, die eine gerade, und solche, die eine ungerade Anzahl von Strecken entfernt sind von der Ausgangsecke. Dieser und den um eine gerade Anzahl von Strecken entfernten Ecken gebe man die eine Farbe, allen anderen die zweite. Da die Endpunkte einer Strecke verschiedenen Abteilungen angehören, hat damit jede Kante verschieden gefärbte Endpunkte. Ebenso kann man die Teilflächen einer Zwiebel mit *zwei* Farben so färben, dass an einer Kante stets zwei verschieden gefärbte Flächen anstossen. Da jede Kante des Polyeders entweder als zur Gruppe der Zwiebelkanten oder als zur Gruppe der Baumkanten gehörig betrachtet werden kann, so haben wir das Resultat: *die Ecken eines Polyeders und seine Teilflächen kann man je mit zwei Farben so färben, dass keine Kante gleichzeitig zwei gleich gefärbte Endpunkte und zwei gleich gefärbte an sie anstossende Flächen besitzt.* Die Gültigkeit dieses »Zweifarbensatzes» erstreckt sich im Gegensatz zu dem Vierfarbensatz auch auf solche Polyeder, die sich selbst in Strecken berührende Teilflächen besitzen.

2) Die BZ-Figur, die nur die anschauliche Darstellung der BZ-Reihe ist, regt dazu an, *Polyeder* zu konstruieren, *die auf sich selbst dual abgebildet werden können*, d. h. deren Ecken den Flächen ein-eindeutig, deren Kanten ein-eindeutig einander so zugeordnet werden können, dass die vereinigte Lage erhalten bleibt. Wir wollen solche Polyeder als *autopolar*[1] bezeichnen. Um solche Polyeder zu erhalten, konstruieren wir BZ-Figuren, die durch eine Abbildung der C-Kurve auf sich und Vertauschung von C-Inneren und C-Äusseren in sich übergehen. Die einfachsten solchen Beispiele stellen die Figuren 12, 13 dar. In der Tat

[1] Diese Bezeichnung wurde von Kirkman 1857 in den Phil. Trans. gegeben.

ist ja das Tetraeder ein autopolares Polyeder und kann auf zwei wesentlich verschiedene Weisen auf sich selbst dual abgebildet werden, wobei jedesmal ein geeigneter Kantenbaum den zugehörigen Zwiebelkanten entspricht. Ein weniger triviales Beispiel liefert die Figur 15. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die Figur durch »Drehung von C um π» und Vertauschung von Innerem und Äusserem und von b mit z in sich übergeht. Diese BZ-Figur liefert das in der Figur 16 dargestellte autopolare Polyeder ($\alpha_0 = \alpha_2 = 8$). Es lassen sich auf diese Weise leicht mannigfache Beispiele von autopolaren Polyedern gewinnen, die

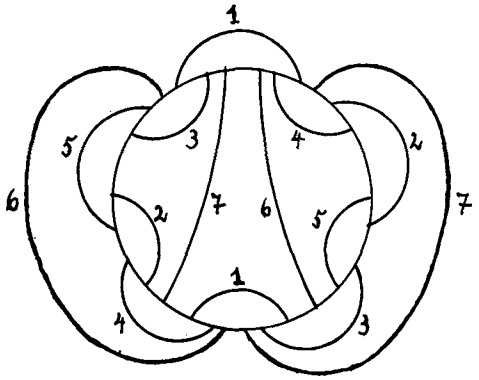


Fig. 15.

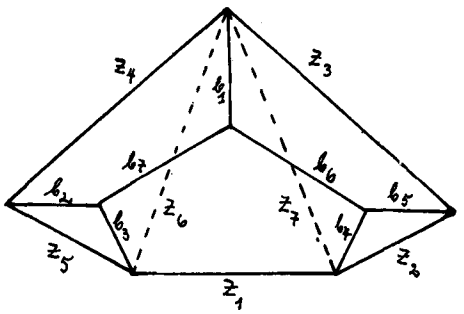


Fig. 16.

alle die Eigenschaft haben, dass bei der dualen Abbildung auf sich die Kanten eines geeigneten Kantenbaumes in die zu diesem Baum gehörigen Zwiebelkanten übergehen, oder, was dasselbe ist, in lauter von den Kanten des Baumes verschiedene Kanten übergehen. Es erhebt sich die (noch ungelöste) Frage, *ob es autopolare Polyeder gibt, die diese Eigenschaft nicht haben,* d. h. ob es Polyeder gibt, die zwei verschiedene Zerlegungen in Zwiebel und Baum gestatten, die dual auf einander abbildbar sind. Dabei ist der triviale Fall des autopolaren und gleichzeitig automorphen (d. h. auf sich selbst topologisch abbildbaren) Polyeders (z. B. des Tetraeders) auszuschliessen.

IV. Darstellung der Transformationen.

a) *Aufbauende Polyedertransformationen.* Wir *stellen* jetzt *die internen Transformationen* des Polyeders in der BZ-Figur und in der BZ-Reihe *dar.* Die *Zerlegung einer Teilfläche* in zwei Flächen durch Hinzufügung einer Diagonale erfolgt in der BZ-Figur durch die Hinzufügung einer neuen, im Inneren von C verlaufenden Strecke, die zwei bestimmte Randstücke, die den beiden

Ecken der Diagonalen entsprechen, verbindet und in der der Teilfläche entsprechenden Teilfläche des C-Inneren verläuft. In der BZ-Reihe hat man entsprechend ein Paar neuer z-Symbole an vorgeschriebenen Stellen einzufügen. Dual entsprechend wird die interne Transformation der *Eckenauseinanderziehung* (s. o. S. 136) behandelt. Man fügt in der BZ-Figur eine im C-Äusseren verlaufende Strecke hinzu, die zwei bestimmte Randstücke (die den beiden an der neuen Kante anstossenden Flächen entsprechen) verbindet und in der der Ecke entsprechenden Teilfläche des C-Äusseren verläuft. In der Symbolreihe hat man ein Paar neuer b-Symbole an vorgeschriebenen Stellen einzufügen.

Die Darstellung der *abbauenden internen Transformationen*, also Verschmelzung zweier durch eine Kante getrennter Teilflächen oder Verschmelzung zweier durch eine Kante verbundener Ecken erfolgt durch Weglassung der entsprechenden Strecke der BZ-Figur, *falls* sie im ersten Falle eine z-Strecke (eine im C-Innern verlaufende Strecke), im zweiten Falle eine b-Strecke (eine im C-Äusseren verlaufende Strecke) ist. Die Transformation ist aber nicht direkt durchzuführen, falls im ersten Falle eine b-Strecke, im zweiten Falle eine z-Strecke wegfallen soll. Man muss vielmehr in diesem Falle durch eine andere Wahl von Baum und Zwiebel die betreffende Strecke in die für die Transformation geeignete Abteilung bringen, d. h. in eine Zwiebel- resp. Baumstrecke verwandeln. Das soll im folgenden Abschnitt behandelt werden.

b) *Einführung des t-Graphen.* Wir betrachten jetzt Transformationen der BZ-Reihe resp. der BZ-Figur, die nicht einer Transformation des Polyeders sondern einer *Änderung des Bezugssystems* Baum-Zwiebel entsprechen. Wir gelangen dazu am einfachsten durch eine geometrische Betrachtung der BZ-Figur, die diese in direkte Verbindung mit dem gegebenen Polyeder bringt. Dazu nehmen wir eine einfache Transformation des Polyeders vor, die schon öfters benutzt wurde[1]. Zu jeder Kante s gibt es vier »benachbarte» Kanten, nämlich jede, die bei Umlaufung der beiden an s hängenden Teilflächen auf s folgt. Die benachbarten Kanten fallen teilweise zusammen, wenn eine der Flächen, die an s hängen, ein Zweieck ist oder eine der Ecken von s zweistrahlig ist. Eine Kante, die für sich allein eine Teilfläche begrenzt oder von deren einem Endpunkt keine weitere Kante ausgeht, ist sich selbst benachbart. (S. Fig. 17a—d). Wir nehmen nun auf jeder Kante s einen Punkt S an und verbinden jeden solchen Punkt durch vier verschiedene Strecken t mit den vier Punkten auf den benachbarten Kanten,

[1] Vgl. etwa Steinitz-Rademacher, Polyeder § 47 ff.

gleichgültig, ob diese Kanten zum Teil miteinander oder mit s zusammenfallen. Diese neuen Strecken t bilden einen sogenannten *Graphen von der vierten Ordnung*, d. h. einen Streckenkomplex, bei dem von jeder Ecke vier Strecken ausgehen. Die Ecken unseres Graphen, den wir *t-Graphen* nennen wollen, entsprechen den Kanten des gegebenen Polyeders.

c) *Die Auflösung des t-Graphen.* Benachbarten Kanten auf dem Polyeder entsprechen benachbarte Symbole in der BZ-Reihe und umgekehrt, den vier zu

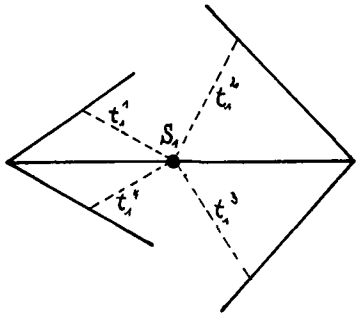


Fig. 17 a.

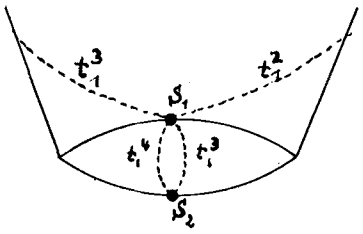


Fig. 17 b.

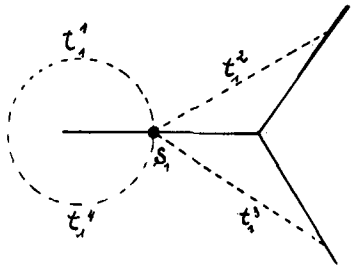


Fig. 17 c.

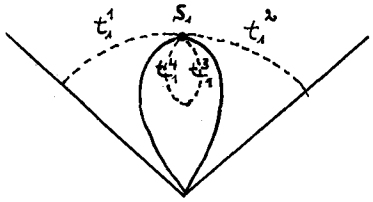


Fig. 17 d.

einem Symbol z_i oder b_k in der BZ-Reihe benachbarten Symbolen entsprechen die vier zu der Kante z_i resp. b_k benachbarten Kanten. Einem Paar aufeinanderfolgender Symbole entspricht eindeutig eine t-Strecke, und jeder t-Strecke entspricht eindeutig ein Paar aufeinanderfolgender Symbole der BZ-Reihe. Durchlaufen wir also diese einmal zyklisch, so durchlaufen wir alle Strecken t jede genau einmal. Wir ordnen die Strecken t dadurch zu einem geschlossenen Zuge; den zwei aufeinander folgenden Symbolpaaren mit einem gemeinsamen Symbol entsprechen zwei t-Strecken mit einem gemeinsamen Endpunkt S. Dieser geschlossene Zug hat besondere Eigenschaften. Es mögen $t_i^1\, t_i^2\, t_i^3\, t_i^4$ durch einen Punkt gehen, etwa durch den Punkt S_i auf z_i, und es mö-

gen der Durchlaufung der BZ-Reihe entsprechend t_i^1 und t_i^2 aufeinander folgen, ebenso t_i^3 und t_i^4, dann *schneiden* sich auf dem Polyeder die Züge $t_i^1\, t_i^2$ und $t_i^3\, t_i^4$ *nicht*, wie man unmittelbar aus der BZ-Figur (S. Fig. 18), oder auch aus den für die BZ-Reihe geltenden Konstructionsregeln sieht. Dasselbe gilt für die vier t-Strecken, die von dem Punkte einer Kante $b_\varkappa$ ausgehen. (Man beachte, dass die $b_\varkappa$-Darstellung in der BZ-Figur keine topologische ist; den Endpunkten von $b_\varkappa$ in der BZ-Figur entsprechen die Seiten von $b_\varkappa$ im ursprünglichen Polyeder). Wir haben so das Resultat:

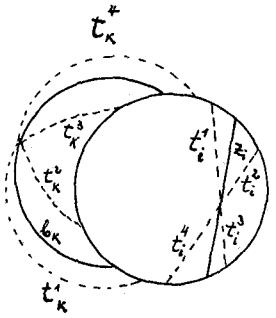


Fig. 18.

Jede BZ-Reihe stellt eine Auflösung des t-Graphen in einen singularitätenfreien Streckenzug (mit Selbstberührungspunkten) *dar*. Umgekehrt liefert eine singularitätenfreie Auflösung A des t-Graphen eine BZ-Reihe. Bezeichnen wir nämlich diejenigen Ecken des Streckenzuges A, bei denen aufeinanderfolgende Strecken auf verschiedenen Seiten der betreffenden Polyederkante liegen, mit z_i, diejenigen bei denen aufeinanderfolgende Strecken auf derselben Seite liegen, mit b_k, und bezeichnen wir mit z_i und b_k auch die betreffenden Polyederkanten, dann liefert A eine $b_\varkappa - z_i$-Symbolreihe, von der wir nachweisen werden, dass sie das Polyeder in der festgelegten Weise darstellt, dass sie also eine BZ-Reihe des Polyeders ist. In der Tat, aus den $b_\varkappa$ kann man keinen geschlossenen Zug bilden. Denn, angenommen, es gäbe einen solchen Zug Γ, so gäbe es keine zwei aufeinander folgenden Strecken von A, die von der einen Seite auf die andere Seite von Γ übergehen, denn nach unserer Voraussetzung liegen je zwei solche Strecken auf derselben Seite von Γ. Also würde A mindestens in zwei geschlossene Züge gegen unsere Voraussetzung zerfallen. Es bilden die b_k aber auch einen zusammenhängenden Streckenkomplex, einen Baum, der alle Ecken des Polyeders enthält. Denn bilden etwa $b_1 \ldots b_m$ einen Baum, der nicht alle Ecken des Polyeders enthält und von dessen freien Enden nur z-Strecken ausgehen, dann bilden die zu diesen b_k gehörenden t-Strecken und diejenigen t-Strecken, die die zu den freien Enden des Baumes gehörenden z-Strecken miteinander verbinden einen geschlossenen Teil von A. Das ist gegen unsere Voraussetzung, da es jedenfalls noch andere Ecken und also auch andere t-Strecken gibt. Jede z-Strecke, die von einem freien Ende ausgehend nach einer nicht zum Baum gehörenden Ecke führt, liefert solche anderen t-Strecken. Es ergibt sich also, dass alle b_k-Strecken einen Baum bilden, der alle Ecken des Polyeders enthält. Die mit diesem Baum konstruierte BZ-Reihe stimmt mit

der mit Hilfe von A konstruierten überein. Denn die Vorschrift, die wir oben gaben, um aus einer auf dem Polyeder gegebenen Einteilung *der Kanten* in Baum- und Zwiebelkanten die BZ-Reihe zu gewinnen, entspricht vollständig der Vorschrift, wie aus dem Streckenzug A die Symbolreihe zu gewinnen ist: Wenn an einer Ecke z-Kanten aufeinander folgen, müssen wir um die Ecken herumlaufend die Symbolreihe bilden; entsprechend, wenn der Streckenzug A um eine Ecke herumläuft, haben wir die Kanten mit z-Symbolen zu bezeichnen usw. Wir haben also das Resultat:

Jede Auflösung des t-Graphen in einen singularitätenfreien Streckenzug A liefert eine Darstellung des Polyeders durch Baum und Zwiebel.

d) *Die EBZ-Transformationen. Wie wirkt die Abänderung der Auflösung des Graphen auf die BZ-Reihe?* Bezeichnen wir den einen Teil, der von A auf

Fig. 19.

dem Polyeder begrenzt wird, wenn wir A von den Selbstberührungspunkten ohne Entstehung von Doppelpunkten abheben, als das Innere von A, den andern als das Äussere und zwar etwa derart, dass ein Auflösungspunkt auf einer z-Kante im Innern von A liegt, dann liegen alle Auflösungspunkte für die Kanten z im Innern von A, alle Auflösungspunkte für die Kanten b im Äussern von A. Das folgt am einfachsten daraus, dass A alle Teilflächen im umgekehrten Sinne durchläuft wie die Ecken. Es seien nun z_i und b_k zwei solche Kanten, dass die auf ihnen liegenden Auflösungspunkte sich auf dem Streckenzug A trennen. Es sei die Eckenreihe von A etwa durch $z_i\, a\, b_k\, c\, z_i\, d\, b_k\, e$ dargestellt (S. Fig. 19). »Schalten» wir nun an den Stellen z_i und b_k »um», d. h. wählen wir an beiden Stellen die anderen singularitätenfreien Verbindungen der t-Strecken, dann wird aus z_i ein b-Punkt, etwa b_i', aus b_k ein z-Punkt, etwa z_k' und aus A wird A' mit der Symbolreihe $b_i'\, a\, z_k'\, e\, b_i'\, d\, z_k'\, c$, woraus sich eine *einfache Regel für diese Transformation* des Streckenzuges A resp. *der BZ-Reihe* ergibt, die vorschreibt, wie die Stücke von A resp. der BZ-Reihe zwischen z_i und b_k miteinander vertauscht werden. Bei dieser Transformation bleiben alle inneren Selbstberührungspunkte

innere, alle äusseren Selbstberührungspunkte äussere, sodass also die Bezeichnung der Symbole in den Stücken a, c, d und e erhalten bleibt.

Wir wollen nun beweisen, dass *aus diesen Elementartransformationen* (bezeichnet mit *EBZ-Transformationen*) die *allgemeinste Transformation* von A oder *die allgemeinste BZ-Transformation erzeugt* werden kann. Das ist sofort durch Betrachtung der BZ-Figur einzusehen. Denn, mögen $b_1 \ldots b_k$ Strecken eines zum Polyeder gehörenden Baumes $B \equiv b_1 \ldots b_k b_{k+1} \ldots b_{\alpha_0-1}$ sein, und man will statt der Strecke $b_{k+\nu}$ eine andere Baumstrecke b_i', die in der zu B gehörenden Zwiebel etwa z_i sei, einführen unter Erhaltung der Strecken $b_1 \ldots b_k$ als Baumstrekken, dann betrachte man die beiden z_i auf der Kurve C der BZ-Figur. Angenommen keines der Paare von Endpunkten der Strecken $b_{k+1} \ldots b_{\alpha_0-1}$ trennen die beiden z_i, dann kann man von einem z_i zum andern z_i in dem Äusseren von C gelangen, ohne eine der Strecken $b_{k+1} \ldots b_{\alpha_0-1}$ zu überschreiten. Das bedeutet aber, dass man von dem einen Endpunkt der Strecke z_i zum anderen Endpunkt gelangen kann durch einen Streckenzug, der nur Strecken aus der Reihe $b_1 \ldots b_k$ enthält. Also bildet die Strecke z_i mit einem Teil von diesen Strecken einen geschlossenen Zug; wenn die beiden Endpunkte von z_i zusammenfallen, gehört keine der Strecken $b_1 \ldots b_k$ zu diesem Zuge, es können aber auch alle diese Strecken dazu gehören. In jedem Falle kann z_i unter dieser Voraussetzung mit den Strecken $b_1 \ldots b_k$ keinen zum Polyeder gehörenden Baum bilden. Aber ist ein die beiden z_i trennendes Paar unter $b_{k+1} \ldots b_{\alpha_0-1}$ vorhanden, dann wenden wir die entsprechende EBZ-Transformation an und haben dann $b_i' \equiv z_i$ als Baumstrecke neben den alten $b_1 \ldots b_k$ eingeführt. Wir können demnach durch EBZ-Transformationen successive einen beliebig vorgegebenen Baum des Polyeders in einen beliebigen anderen vorgegebenen verwandeln, also die allgemeinste BZ-Transformation erzeugen.

e) Jetzt können wir auch die *abbauenden internen Transformationen* in der BZ-Reihe durchführen. Die Verschmelzung zweier Flächenstücke längs einer Kante erfolgt durch Weglassung der beiden zugehörigen Symbole, falls diese Kante eine z-Kante ist. Falls sie eine b-Kante ist, muss diese b-Kante zunächst in eine z-Kante verwandelt werden. Die b-Kante kann nur dann nicht in eine z-Kante verwandelt werden, falls die beiden zugehörigen b-Symbole von keinem Paar von z-Symbolen getrennt werden. Das bedeutet aber, dass an den beiden Seiten der betreffenden Kante dieselbe Fläche angrenzt. Im allgemeinen wird durch die Weglassung dieser Kante eine zweifach zusammenhängende Fläche

entstehen, was wir ausgeschlossen haben (s. Fig. 20). Diese Verschmelzung kommt also als interne Transformation nicht in Frage. Im speziellen Fall, dass die beiden b in der BZ-Reihe unmittelbar aufeinander folgen, geht von dem einen Endpunkt der b-Kante keine andere Kante aus, die Kante endet frei im Polyeder (s. Fig. 21). Lässt man diese beiden Symbole weg, so stellt die BZ-Reihe dasselbe Polyeder, nur ohne diese Kante und ohne den freien Endpunkt

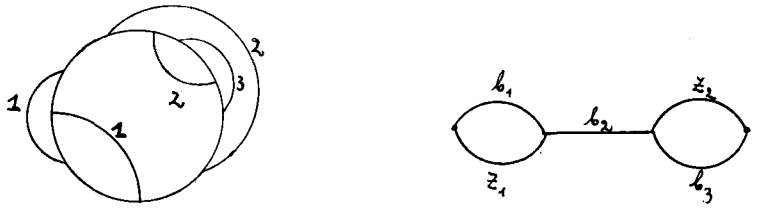


Fig. 20.

dar. Ganz entsprechend erfolgt die Verschmelzung zweier Ecken längs einer Kante durch Weglassung eines Paares von gleichen b-Symbolen, die zu dieser Kante gehören. Gehören aber zu dieser Kante zwei z-Symbole, dann müssen erst durch Transformation diese z-Symbole in b-Symbole verwandelt werden.

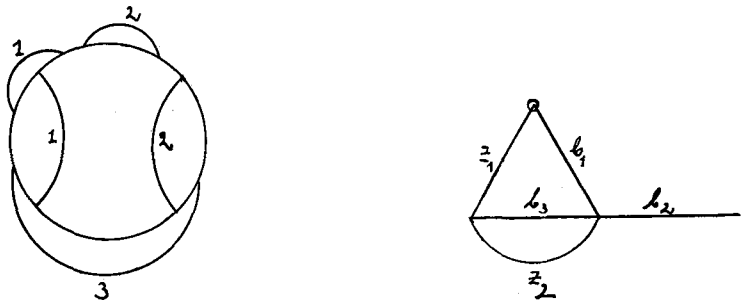


Fig. 21.

Dies ist nur dann unmöglich, wenn das Paar der z-Symbole von keinem b-Paar getrennt wird. Diesen Fall haben wir schon oben behandelt: die beiden Endpunkte der betreffenden Kante fallen zusammen, sie kommt für die interne Transformation nicht in Frage. Ziehen wir eine solche Kante zusammen, so entstehen im allgemeinen zwei geschlossene Polyeder mit einem gemeinsamen Punkt. Im besonderen Falle begrenzt aber diese Kante für sich eine Fläche, die durch das Zusammenziehen der Kante wegfällt. Diesem Zusammenziehen entspricht die Weglassung der beiden z-Symbole aus der BZ-Reihe. Zusammenfassend haben wir also: Jede abbauende interne Transformation des Polyeders

kann, eventuell nach einer EBZ-Transformation, durch Weglassung eines Symbolpaares in der BZ-Reihe dargestellt werden.

Hiermit ist unser Hauptziel erreicht: Die Polyeder vom Geschlecht o sind in einfacher Weise durch Symbolreihen, die BZ-Reihen, dargestellt: jeder BZ-Reihe entspricht eindeutig ein Polyeder, die verschiedenen BZ-Reihen, die zu demselben Polyeder gehören, gehen durch Transformationen, die BZ-Transformationen, aus *einer* BZ-Reihe hervor. Die BZ-Transformationen werden erzeugt durch einfach zu beschreibende besondere Transformationen, die EBZ-Transformationen. Die internen Transformationen des Polyeders werden durch Weglassung von Symbolpaaren, eventuell verbunden mit EBZ-Transformationen, dargestellt. — Alle topologischen Lehrsätze und Aufgaben, die sich auf Polyeder vom Geschlecht o beziehen, sind demnach auf das Operieren mit den BZ-Reihen zurückgeführt.

f) Wir wollen noch einige *Beispiele* anführen:

Gegeben sei ein Polyeder durch eine BZ-Reihe. Es wird die BZ-Reihe für das Polyeder gesucht, das aus dem gegebenen dadurch entsteht, dass auf allen Kanten ein innerer Eckpunkt (oben mit S_i bezeichnet) hinzugefügt wird.

Auflösung: man ergänze ein Paar $b_k \ldots b_k$ zu $b_k b'_k \ldots b'_k b_k$ und ein Paar $z_i \ldots z_i$ zu $b''_i z_i b''_i \ldots z_i$ (oder auch $z_i \ldots b''_i z_i b''_i$).

Man bestimme die BZ-Reihe für das Polyeder, das aus den in der vorigen Aufgabe konstruierten entsteht, indem noch die Verbindungskanten der inneren Punkte je zweier benachbarter Kanten hinzugefügt werden (diese Kanten sind oben als t-Kanten bezeichnet).

Auflösung: Man füge zwischen zwei aufeinander folgende Symbole $b_k b'_k$ oder $b'_k b_k$ oder $b''_i z_i$ oder $z_i b''_i$ je ein Paar $z'_{k1} z'_{k2}$ oder $z'_{k3} z'_{k4}$ oder $z''_{i1} z''_{i2}$ oder $z''_{i3} z''_{i4}$ ein und bestimme in folgender Weise, dass je zwei dieser neuen Symbole gleich sein sollen: wir betrachten zwei aufeinander folgende Kanten des Polyeders der ersten Aufgabe, etwa $z_i z_{i+1}$, dann kommen diese in der BZ-Reihe dieses Polyeders noch einmal vor, und zwar in den Gruppen $b''_{i+1} z_{i+1} b''_{i+1}$ und $b''_i z_i b''_i$. Wir identifizieren dann in der erweiterten Reihe z''_{i2} und $z''_{i+1,3}$. Sind aber in der Reihe des ersten Polyeders etwa $z_i b'_k$ zwei aufeinander folgende Symbole, dann folgt auf dieses b'_k das Symbol b_k, und es kommt z_i noch in der Gruppe $b''_i z_i b''_i$ vor. Hier identifizieren wir z'_{k3} mit z''_{i2}. Sind ferner $b''_i b_k$ zwei in der Reihe des ersten Polyeders aufeinander folgende Symbole, dann folgt b'_k auf dieses b_k und wir identifizieren z''_{i4} mit z_{k1}. Analog ist die Identifizierung in den noch übrigen Fällen. Man entnimmt die Bestimmungen am besten der BZ-Figur.

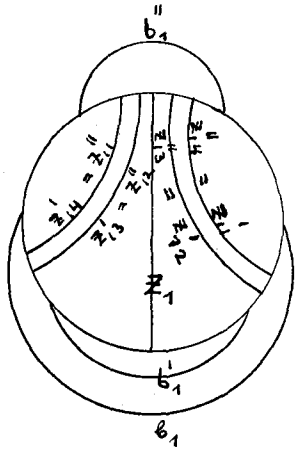


Fig. 22.

Beispiel: (siehe Fig. 22) Gegebenes Polyeder:

$$z_1\, b_1\, z_1\, b_1$$

erstes abgeleitetes Polyeder:

$$b_1''\, z_1\, b_1''\, b_1\, b_1'\, z_1\, b_1'\, b_1$$

zweites abgeleitetes Polyeder:

$$b_1''\, z_{11}''\, z_{12}''\, z_1\, z_{13}''\, z_{14}''\, b_1''\, b_1\, z_{11}'\, z_{12}'\, b_1'\, z_1\, b_1'\, z_{13}'\, z_{14}'\, b_1$$

hier sind zu identifizieren:

$$z_{13}' \text{ und } z_{12}'', \quad z_{12}' \text{ und } z_{13}''$$

$$z_{11}' \text{ und } z_{14}'', \quad z_{14}' \text{ und } z_{11}''.$$

V. Untersuchung der t-Graphen.

a) *Das T-Schema.* Es lohnt sich, den *t-Graphen,* der zu einem Polyeder gehört, noch etwas *näher zu untersuchen.* Vorweg betrachten wir aber umgekehrt die zu einem t-Graphen gehörenden Polyeder. *Ist ein auf einer Kugelfläche liegender Graph von der vierten Ordnung, etwa C_4, gegeben, dann gehören zu ihm zwei einander dual entsprechende Polyedereinteilungen Π und Π^*, deren t-Graph C_4 ist.* C_4 teilt nämlich die Kugelfläche in zwei Gruppen von Flächenstücken ein. Zwei Flächenstücke derselben Gruppe haben keine Begrenzungsstrecke gemeinsam. Nehmen wir jetzt irgend eine Auflösung A von C_4 und bezeichnen diejenigen Selbstberührungspunkte von A, bei denen die Paare aufeinander folgender Strecken von A zu zwei Flächenstücken der ersten Gruppe gehören, mit b_k, die anderen Punkte mit z_i, so liefert die Aufeinanderfolge der Symbole für die Selbstberührungspunkte, wie sie auf A aufeinander folgen, eine BZ-Reihe für ein Polyeder Π, zu dem C_4 als t-Graph gehört. Vertauschen wir die Bezeichnungen z und b, so erhalten wir ein Polyeder Π^*, das Π dual entspricht. Während die Auflösung in *einen* singularitätenfreien Zug auf mannigfache Weise geschehen kann, ist die *Auflösung in Züge, die an allen Punkten S sich durchsetzen, eindeutig,* da es zu jeder in einen solchen Punkt einmündenden t-Strecke nur eine nicht benachbarte ausgehende t-Strecke gibt. Die so entstehenden Züge charakterisieren wir durch die aufeinander folgenden Symbole der Durchkreuzungspunkte S_i resp. der Kanten z_i oder b_i, auf denen S_i liegt. Das so entstehende Schema von Symbolreihen wollen wir das T-Schema nennen.

Aus der BZ-Figur ist ohne weiteres zu ersehen, wie das T-Schema aus der BZ-Reihe entsteht. Wir können die Symbole hierbei, gleichgültig, ob sie zu Zwiebel oder Baumkanten gehören, einfach mit S_i bezeichnen. Dann gehe man von einem Symbol, etwa S_1 in der BZ-Reihe in einer bestimmten Richtung zu dem nächsten Symbol, etwa S_2, dann vom anderen Symbol S_2 in der *umgekehrten* Richtung zum nächsten Symbol, etwa S_3, weiter vom andern Symbol S_3 in der ersten Richtung zum nächsten Symbol etwa S_4 usw., bis man wieder zum Symbol S_1 der Ausgangsstellung zurückgekehrt ist. Dann wird durch die Symbolreihe $S_1 S_2 S_3 \ldots S_1$ ein Zug des t-Graphen mit oder ohne Doppelpunkte dargestellt. Sind durch diese Reihe noch nicht alle Symbolpaare erschöpft, so gehe man von einem noch nicht durchlaufenen Symbol aus und mache denselben Prozess, der wieder einen Zug liefert. Wir fahren solange fort, bis alle Symbole in Reihen angeordnet sind, denen ebenso viele Züge des t-Graphen entsprechen. Da der t-Graph eindeutig zum Polyeder gehört und ebenfalls eindeutig *diese* Art von Auflösung der Züge, so sind die Anzahl der Reihen im T-Schema, die Anzahl der Symbole in den einzelnen Reihen, die Verteilung von gleichen Symbolen auf die verschiedenen Reihen und überhaupt ihre Anordnung, abgesehen von zyklischer Veränderung in den einzelnen Reihen, etwas gegenüber der Bezeichnung der Polyeder-Elemente Invariantes. Wir haben auf diese Weise ein das Polyeder charakterisierendes Schema.

Aber es ist zu bemerken, dass zwar das Polyeder eindeutig das T-Schema liefert, im Gegensatz zur BZ-Reihe; aber weder liefert jedes solche Schema ein Polyeder vom Geschlecht o — denn jeder Graph vierter Ordnung, auch wenn er gar nicht auf einer Kugelfläche realisiert werden kann, liefert ein solches Schema — noch ist das Polyeder eindeutig durch das Schema bestimmt. Denn die Realisierung des Schemas auf einer Kugelfläche ist, wenn sie überhaupt möglich ist, auf verschiedene Weise möglich.

b) *Die Mehrdeutigkeit des T-Schemas und die höheren T-Schemata. Die Mehrdeutigkeit des T-Schemas wird wenigstens teilweise aufgehoben durch die höheren zu einem Polyeder gehörenden t-Graphen:* der zu einem Polyeder gehörende t-Graph gibt selbst wieder eine polyedrische Einteilung der Kugelfläche — mit lauter vierstrahligen Ecken — und liefert also wieder einen t-Graphen, *den t^2-Graphen des ursprünglichen Polyeders*, zu dem das T^2-Schema gehört. Auch dieser Graph ist eindeutig dem Polyeder zugeordnet und abhängig von der Realisierung des T-Schemas auf der Kugelfläche, oder, was dasselbe ist, von der BZ-Reihe dieser

Realisierung. Wir betrachten noch die weiteren Graphen, den Graphen dritter, ... n-ter Ordnung. Es ist ohne Schwierigkeit zu sehen, wie diese höheren t-Graphen mit den niederen zusammenhängen: der t^{n+2}-Graph entsteht aus dem t^n-Graphen durch Ersatz jedes Zuges durch zwei parallele Züge.

Hierzu geben wir das einfachste Beispiel: Das gegebene Polyeder habe zwei Flächen und eine Kante (s. Fig. 23). BZ-Reihe: zz. T-Schema: zz. BZ-

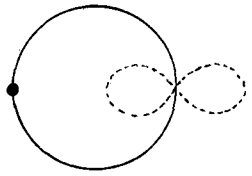


Fig. 23 a. Polyeder und t-Graph.

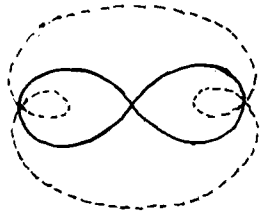


Fig. 23 b. t-Graph und t^2-Graph.

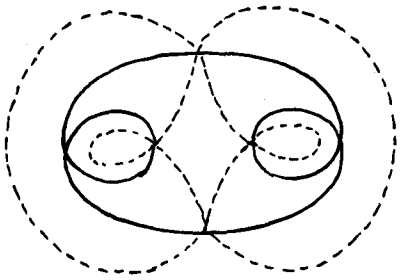


Fig. 23 c. t^2Graph und t^3-Graph.

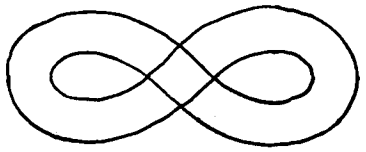


Fig. 23 d. t^3-Graph.

Reihe des t-Graphen auf der Kugel: $z_1 z_1 z_2 z_2$. T^2-Schema: $z_1 z_1 z_2 z_2$. BZ-Reihe des t^2-Graphen: $z_1' z_1' z_3' b' z_3' z_2' z_2' b'$. T^3-Schema:

$$\begin{cases} z_1' z_1' b' z_3' \\ z_2' z_2' z_3' b' \end{cases}.$$

Man sieht aus den Figuren, wie der t^3-Graph aus dem t-Graphen durch Verdoppelung entsteht.

Das T^2-Schema hätte auch die Realisation R'', die in der Figur 24 dargestellt ist, gestattet. R'' ist von dem in dem ursprünglichen liegenden t^2-Graphen topologisch verschieden. Zu dieser Realisation R'' gehört die BZ-Reihe: $z_1'' z_1'' z_3'' b'' z_2'' z_2'' z_3'' b''$, deren T-Schema nach unseren Vorschriften

$$\begin{cases} z_1'' z_1'' b'' z_2'' z_2'' z_3'' \\ z_2'' b'' \end{cases}$$

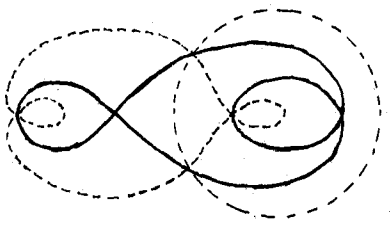


Fig. 24. R'' und t-Graph von R''.

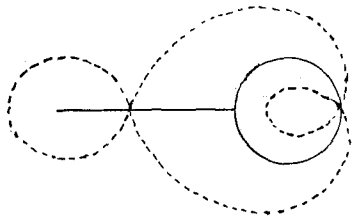


Fig. 25. R'' als t-Graph.

ist. Dieses T-Schema von R'' ist verschieden von dem T^3-Schema durch die Verteilung der Symbole auf die beiden Reihen. In diesem Falle liefern erst T^2-Schema und T^3-Schema zusammen eindeutig die Realisation des T^2-Schemas. Übrigens gehört zu R'' als t-Graphen das in der Figur 25 dargestellte autopolare Polyeder, das gar kein Graph ist. Also ist auch aus diesem Grunde R'' als Realisation eines T^2-Schemas ausgeschlossen.

Die *Invarianz des T-Schemas* gegen die EBZ-Transformationen ist leicht direkt d. h. ohne geometrische Überlegungen durch die Anordnungseigenschaften der BZ-Reihe, der EBZ-Transformationen und des T-Schemas einzusehen.

Die Realisation des T-Schemas in dem gegebenen Polyeder lässt sich nach unseren Methoden durch die Symboldarstellung der aufbauenden und abbauenden internen Transformationen in einer BZ-Reihe darstellen und damit dann auch das T^2-Schema gewinnen. Es wäre wünschenswert, diese Ableitung durchzuführen und direkt die *Invarianz des T^2-Schemas* gegen EBZ-Transformationen darzutun. Auch wäre noch zu untersuchen, ob die höheren T^n-Schemata, vielleicht nur bis zur zweiten Ordnung, genügen, um die Realisation des T-Schemas eindeutig zu charakterisieren, und damit zu beweisen, dass das System der T^n-Schemata, das aus dem BZ-System folgt und *eindeutig*, im Gegensatz zum BZ-Schema selbst, zu dem Polyeder gehört, dieses auch eindeutig bestimmt.

Es sei noch bemerkt, dass das T^n-Schema $2^n \alpha_1$ Kanten, $2^{n-1} \alpha_1$ Ecken $(2^{n-1}-1)\alpha_1$ Vierecke und $\alpha_0 + \alpha_2$ andere Flächen hat, deren Seitenzahl den Strahlenzahlen der α_0 Ecken und den Seitenzahlen der α_2 Flächen des ursprünglichen Polyeders entsprechen. Für grosses n entsteht eine Einteilung der Kugel, die »fast überall» ein Quadratnetz ist und $\alpha_0 + \alpha_2$ singuläre Flächen hat.

c) Wir geben als *Beispiel* noch die Reihe der T^n-Schemata für das Tetraeder. Das T-Schema können wir aus jeder der beiden BZ-Reihen, die wir oben

für das Tetraeder gegeben haben, entnehmen. Aus der ersten BZ-Reihe ergibt sich das Schema

$$\begin{cases} z_1\, z_2\, b_3\, b_2 \\ z_2\, z_3\, b_2\, b_1 \\ z_3\, b_3\, b_1\, z_1 \end{cases}$$

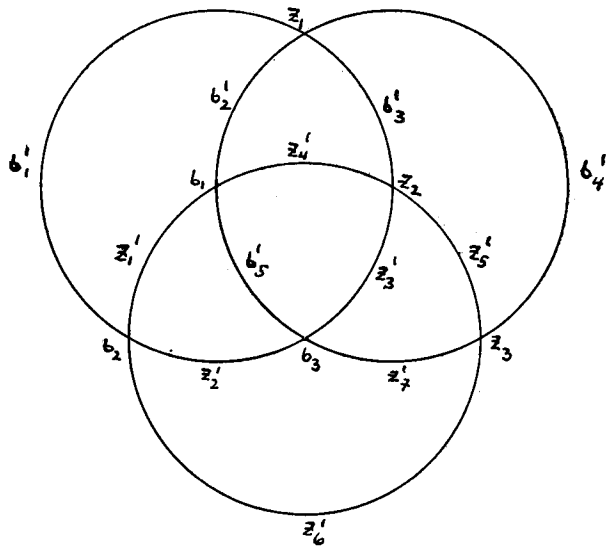


Fig. 26.

Aus der zweiten BZ-Reihe ergibt sich das Schema

$$z_1\, z_2\, z_3\, b_2$$

$$z_2\, b_1\, z_2\, b_3$$

$$b_3\, z_1\, b_1\, z_3$$

Die beiden Schemata sind in der Tat (abgesehen von der Bezeichnungsänderung, nämlich Vertauschung von z_3 und b_3) gleich. Die zugehörige Realisation ist in der Figur 26 (für das erste Schema) dargestellt. Dafür ist eine BZ-Reihe (mit Bezeichnung nach Fig. 26):

$$b'_1\, b'_2\, z'_1\, b'_5\, z'_2\, z'_7\, z'_3\, b'_5\, z'_4\, b'_2\, b'_3\, z'_4\, z'_3\, z'_5\, b'_3\, b'_4\, z'_5\, z'_7\, z'_6\, b'_4\, b'_1\, z'_6\, z'_2\, z'_1$$

also erhalten wir als T^2-Schema für das Tetraeder

$$\begin{cases} b_1' z_6' z_7' z_3' z_4' b_2' \\ b_2' z_1' z_2' z_7' z_5' b_3' \\ z_1' b_5' z_3' z_5' b_4' b_1' \\ b_5' z_2' z_6' b_4' b_3' z_4' \end{cases}$$

mit der Realisation in Figur 27.

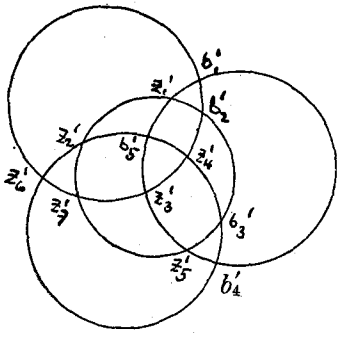


Fig. 27.

Die t^n-Graphen entstehen durch Verdoppelung aus den t^{n-2}-Graphen. Also hat der t^{2m}-Graph des Tetraeders doppelpunktslose Züge, der t^{2m+1}-Graph $3 \cdot 2^m$ doppelpunktslose Züge.

§ 3.

Darstellung der Graphen auf der Kugel (Gauss'sches Problem).

I. a) *Die Gaussische Bedingung.* Es liegt nahe, an dieser Stelle das *Gaussische Problem der Trakte*[1] in etwas erweiterter Form zu behandeln. Es sei ein Schema von Symbolen, in einer oder mehreren Reihen angeordnet, gegeben, in dem jedes Symbol zweimal vorkommt. Was sind die Bedingungen dafür, dass dieses Schema das Schema für die aufeinander folgenden Doppelpunkte eines Graphen vierter Ordnung auf einer Kugel ist? Gauss behandelt nur den Fall, dass eine einzige Reihe von Symbolen vorliegt, dass also der Graph in einem einzigen Zuge (»Trakt» bei Gauss) durchlaufen wird. Er gibt als eine notwendige Bedingung an, dass je zwei gleiche Symbole durch eine gerade Anzahl von Symbolen getrennt werden. Für ein Schema, das aus mehreren Reihen besteht, lautet diese *Gaussische Bedingung:* jede Reihe enthält eine gerade Anzahl von Symbolen und die Reihen sind durch zyklische Verschiebung so anzuordnen, dass jedes Symbol (in einer oder mehreren Reihen) an einer geraden und an einer ungeraden Stelle vorkommt. Diese Bedingung folgt ohne Schwierigkeit daraus, dass zwei geschlossene Züge sich auf der Kugel in einer geraden Anzahl von Punkten durchsetzen. Dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, hat schon Gauss erkannt.

b) *Notwendige und hinreichende Bedingungen.* Für unsere Betrachtung liegt es nahe zu sehen, welche die Bedingungen dafür sind, dass aus einem

[1] S. Gauss, Werke Bd VIII (Nachlass) s. 271 ff.

solchen Graphen-Schema eine BZ-Reihe gewonnen werden kann, für die das Graphen-Schema das T-Schema ist. Dazu ist es nötig, den Graphen in geeigneter Weise an allen Stellen so umzuschalten, dass ein einziger Zug ohne Doppelpunkte, nur mit Selbstberührungspunkten herauskommt. Folgende Regel für die Umschaltung scheint mir recht einfach zu sein (sie ist die Erweiterung einer Idee, die mir Heegaard vor etwa 25 Jahren mitteilte). Kommt das Symbol s in zwei Reihen vor, die etwa sD_1 und D_2s sein mögen, dann bilden wir aus diesen beiden Reihen die Reihe sD_1sD_2. Kommt ein weiteres Symbol s' wieder in zwei Reihen des neuen Schemas vor, so verschmelzen wir wieder die beiden Reihen und fahren so fort, bis das Schema in lauter Reihen zerfällt, die jede jedes Symbol zweimal enthalten. Da diese Reihen lauter vollständig von einander getrennte Graphen liefern, so können wir annehmen, dass wir nur eine

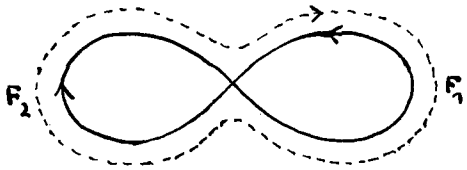


Fig. 28.

einzige solche Reihe zu behandeln haben. Wir nehmen an, wir hätten mit dem Symbol $s, s' \ldots s^{(m)}$ dieser Reihe je die Verschmelzung zweier Reihen durchgeführt, und es blieben noch die Symbole $v, v' \ldots$ über. Durch die mit $s, s' \ldots$ durchgeführten Operationen sind die Doppelpunkte an den betreffenden Stellen zu Selbstberührungsstellen geworden. Wir haben durch geeignete Operationen die den Symbolen $v, v' \ldots$ entsprechenden Doppelpunkte aufzulösen. Es sei die Reihe etwa vF_1vF_2. Wir bilden aus ihr die neue Reihe $vF_1^{-1}vF_2$, d. h. wir kehren in dem *einen* Teil der Reihe zwischen v und v die Reihenfolge der Symbole um. Daraus entsteht das Schema für einen Zug in dem der Punkt v ein Selbstberührungspunkt ist (s. Fig. 28). So operieren wir in beliebiger Reihenfolge mit allen übrigen Symbolen $v' \ldots$. Dadurch sind alle Doppelpunkte des Graphen in Selbstberührungspunkte verwandelt, die von einem einzigen durch die Reihe dargestellten Zug A durchlaufen werden. Unter der Voraussetzung, dass der, dem ursprünglichen Schema entsprechende Graph mit lauter Doppelpunkten auf einer Kugelfläche realisierbar ist, ist auch der Zug A mit seinen Selbstberührungspunkten auf der Kugelfläche realisierbar. *Dann aber müssen sich die Symbole der A darstellenden Reihe in zwei Klassen, eine z-Klasse und eine b-Klasse, einteilen lassen, sodass kein Paar von gleichen z-Symbolen durch ein Paar von z-*

Symbolen, kein Paar von gleichen b-Symbolen durch ein Paar von b-Symbolen getrennt wird, wie aus den topologischen Eigenschaften der Kugelfläche ohne weiteres folgt. Die A-Reihe liefert bzw. eine BZ-Reihe und ein Polyeder in dem die s- bzw. v-Symbole sich als Baum- oder Zwiebelstrecken auffassen lassen. Wenden wir jetzt rückwärts die oben angegebene, das T-Schema liefernde Transformation (die ganz unabhängig ist von der Art, wie die Symbole der A-Reihe auf Baum- und Zwiebelstrecken verteilt werden) auf die Symbolreihe für A an, so muss das ursprünglich gegebene Schema des Graphen herauskommen, falls eben die Voraussetzung erfüllt ist, dass der Graph auf einer Kugelfläche realisierbar ist. Wir erhalten so den Satz: *Dann und nur dann, wenn das Schema des Graphen I) durch die angegebene Umschaltungsoperation U eine BZ-Reihe liefert, II) durch die Umkehrungsoperation wieder aus der BZ-Reihe entsteht, stellt das Schema einen auf der Kugelfläche realisierbaren Graphen dar.* Damit ist das Gaussische Problem für den allgemeinsten Graphen vierter Ordnung gelöst.

Es ist noch Folgendes zu bemerken: 1) Das Erfülltsein der Bedingung II) ist unabhängig von dem Erfülltsein der Bedingung I), wie die einfachsten Beispiele zeigen. Es sei etwa das Schema $ab\ ab$ gegeben. Hier hat die Umschaltung U gar keine Wirkung, weil zwischen zwei gleichen Symbolen nur *ein* anderes Symbol steht. Wir erhalten also als Symbolreihe für A: $ab\ ab$. Diese Reihe stellt in der Tat eine BZ-Reihe dar, für die a das einzige Symbol der z-Klasse, b das einzige Symbol der b-Klasse ist. Bilden wir aber zu dieser BZ-Reihe das T-Schema, so erhalten wir nach unseren Vorschriften das zweireihige Schema

$$\begin{cases} a\ b \\ b\ a \end{cases}$$

das von dem ursprünglich gegebenen verschieden ist. In der Tat befriedigt ja das gegebene Schema die Gaussische Bedingung nicht. Es ist aber die Frage, ob die Gaussische Bedingung zusammen mit der Bedingung I ausreicht.

2) Die verschiedenen Möglichkeiten, die durch eine U-Transformation entstandene A-Reihe als BZ-Reihe aufzufassen, liefern verschiedene Möglichkeiten, den Graphen auf einer Kugelfläche zu realisieren, falls diese verschiedenen BZ-Reihen nicht durch BZ-Transformationen auseinander hervorgehen.

c) Wir wollen noch zwei *Beispiele* für den U-Prozess geben. Zuerst nehmen wir den zum Tetraeder gehörenden t-Graphen mit dem T-Schema

$$a\ b\ c\ d$$
$$b\ e\ d\ f$$
$$e\ a\ f\ c.$$

Wir hängen die dritte Reihe etwa in dem dem Schema entsprechenden Durchlaufungssinn bei a in die erste Reihe ein und erhalten das Schema

$$a\ f\ c\ e\ a\ b\ c\ d$$
$$b\ e\ d\ f.$$

Wir hängen die untere Reihe in die obere Reihe bei b ein und erhalten die Reihe

$$a\ f\ c\ e\ a\ b\ e\ d\ f\ b\ c\ d.$$

Wir spiegeln jetzt einen Abschnitt zwischen den beiden c und erhalten

$$a\ d\ c\ e\ a\ b\ e\ d\ f\ a\ c\ f.$$

Die Spiegelung in Bezug auf e liefert

$$a\ d\ c\ e\ b\ a\ e\ d\ f\ b\ c\ f.$$

Spiegeln wir in Bezug auf d und f, so erhalten wir

$$a\ d\ e\ a\ b\ e\ c\ d\ f\ c\ b\ f.$$

Bezeichnen wir a, b, c, mit z_3, z_2, z_1, ferner d, e, f, mit b_2, b_3, b_1, so erhalten wir die BZ-Reihe

$$z_3\ b_2\ b_3\ z_3\ z_2\ b_3\ z_1\ b_2\ b_1\ z_1\ z_2\ b_1.$$

Diese BZ-Reihe stimmt abgesehen von zyklischer Umstellung mit der zweiten für das Tetraeder gegebenen BZ-Reihe überein. Lassen wir die Bezeichnung ungeändert und bilden nach unserem Verfahren das zugehörige T-Schema, so erhalten wir das ursprünglich gegebene dreireihige Schema zurück.

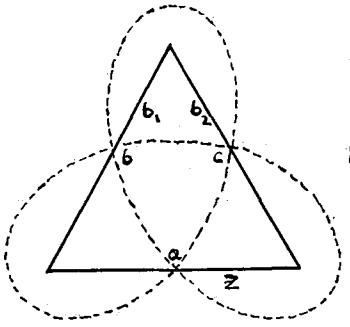


Fig. 29.

Als besonders einfaches Beispiel behandeln wir noch den Graphen mit dem Schema

$$a\ b\ c\ a\ b\ c.$$

Spiegelung an a ergibt

$$a\ c\ b\ a\ b\ c.$$

Jetzt haben die Spiegelungen an b und an c keine Wirkung mehr. Wir bezeichnen a mit z, b und c mit b_1 und b_2 und erhalten die BZ-Reihe

$$z\ b_2\ b_1\ z\ b_1\ b_2,$$

die dem aus zwei Dreiecken bestehenden Dieder entspricht. Der zugehörige t-Graph ist der Kleeblattschlingenzug (s. Fig. 29).

II. a) *Die Algebra der Graphen.* Die verschiedenen U-Transformationen entsprechen den verschiedenen Auflösungen des Graphen. Sie entstehen durch verschiedene Wahl und Reihenfolge für die auszuführenden Operationen. Diese bilden ein merkwürdiges System, dessen Eigentümlichkeiten einmal den speziellen Graphen, andererseits überhaupt ganz allgemein die Art der topologischen Gebilde charakterisieren. Wir wollen sie etwas näher betrachten, aber uns dabei auf Schemata, die aus einer einzigen Reihe bestehen, beschränken. Zur besseren Veranschaulichung stellen wir die $2n$ Symbole, deren Aufeinanderfolge den Trakt charakterisiert, durch die Aufeinanderfolge der Ecken eines regulären $2n$-Ecks dar. Dann liefert das Schema die paarweise Beziehung der Ecken aufeinander und eine Operation besteht darin, dass der *eine* von den beiden Teilen des regulären Polygons zwischen zwei gleich bezeichneten Ecken, etwa a_1 und a_1, an der Symmetriegeraden für $a_1 a_1$ gespiegelt wird. Dadurch geht das Polygon in sich über, die Paare gleichbezeichneter Ecken in andere Paare gleichbezeichneter Ecken. Spiegelt man den anderen zwischen a_1 und a_1 gelegenen Teil des Polygons, so kommt dieselbe Verteilung der Paare gleichbezeichneter Ecken heraus, nur *(insgesamt)* an der Symmetriegeraden gespiegelt. Wir wollen deswegen diese beiden Operationen nicht unterscheiden und bezeichnen sie mit A_1, ebenso die für die beiden gleichbezeichneten Ecken a_2 ausgeführten mit A_2 usw. Wir erhalten so *erzeugende Operationen* $A_1 A_2 \ldots A_n$. Wir können sie in beliebiger Reihenfolge hintereinander anwenden und erhalten so immer eine bestimmte Eckenkonfiguration und entsprechend einen Zug mit Selbstberührungs- und Durchkreuzungspunkten. Aber diese erzeugenden Operationen bilden durch diese Zusammensetzung *keine* Gruppe. Denn die Operationen sind *Transformationen eines Bereiches, dessen Eigenschaften durch jede Operation verändert werden.* Z. B. kann die Operation $A_l \ldots A_k A_i$ (das bedeutet in üblicher Weise, es soll zuerst A_i ausgeübt werden, dann A_k usw. endlich A_l) bewirken, dass zwischen a_1 und a_1 nur ein Eckpunkt liegt, dann wird A_1, wenn man es nach all diesen Operationen ausführt, die Figur unverändert lassen, es wird $A_1 A_l \ldots A_k A_i = A_l \ldots A_k A_i$ sein. Aber A_1 wird darum doch, ausgeübt auf die ursprüngliche Konfiguration, diese verändern können (vgl. das oben gegebene Schema für den Kleeblattschlingenzug).

Wir müssen also stets die ursprüngliche Stellung der gleichbezeichneten Ecken haben, dann erst hat ein solches »*Wort*» $W \equiv A_l \ldots A_k A_i$ einen Sinn. Andererseits gibt es »*Relationen*». Es sei etwa $W \equiv A_l \ldots A_k A_i = A_{l'} \ldots . A_{k'} A_{i'} \equiv W'$, d. h. die Operationen W und W' ergeben von der gegebenen Anfangsstellung aus dieselbe Endstellung. Ist dann der *Anfang* eines dritten Wortes W'' (der Anfang wird immer von rechts genommen) gleich W, dann kann man diesen durch W' ersetzen, nicht aber wenn in der Mitte oder am Ende von W'' die Aufeinanderfolge von W vorkommt. Nur die Worte $A_i A_i$ kann man überall in den aus $A_1 A_2 \ldots$ gebildeten Worten weglassen, oder hinzufügen. Als Bezeichnung für solche Systeme schlagen wir »*Spiel*» vor. In der Tat sind die meisten Spiele dadurch charakterisiert, dass ganz bestimmte Operationen vorhanden sind, »Züge», die eine gegebene »Stellung» oder »Verteilung» in eine andere überführen, und ebenso wie bei unseren Systemen hat es bei diesen Spielen keinen Sinn, von einer bestimmten Operation zu sprechen, ohne gleichzeitig die Situation anzugeben, in der diese Operation ausgeführt wird. Das Operieren mit den Spielregeln führt sehr viel schwieriger zu allgemeinen Resultaten als das Operieren mit den eine Gruppe definierenden Relationen. Aber die topologischen Gebilde sind wohl doch charakterisiert durch solche als Spiele bezeichneten Systeme von Transformationen eines Symbolschemas, und es ist zu vermuten, dass man die dadurch entstehende Schwierigkeit bei dem Bestreben, zu schönen Einzelresultaten zu kommen oder wohlgeformte, reich gegliederte allgemeine Theorien aufzustellen, kaum wird vermeiden können.

Gewisse Hinweise auf mögliche Untersuchungen in der Theorie der Spiele gibt der von uns durch geometrische Betrachtungen gefundene Zusammenhang zwischen dem Graphenschema und der BZ-Reihe und ihren Transformationen: eine vollständige Auflösung eines einzügigen Graphen, eines Traktes, wird wie wir gesehen haben, dargestellt durch irgendein Wort, das aus sämtlichen Buchstaben des Auflösungsspieles, jeder nur einmal benutzt, gebildet wird. Der Übergang von einem solchen Wort zu einem andern geschieht durch Vertauschung der Reihenfolge der Buchstaben. Andererseits entspricht einer solchen vollständigen Auflösung, *falls der Graph auf einer Kugel realisierbar ist*, eine BZ-Reihe. Durch EBZ-Transformationen kann diese BZ-Reihe in eine solche übergeführt werden, die einer beliebigen anderen Auflösung des Graphen, also einem beliebigen anderen aus allen Buchstaben gebildeten Wort entspricht, und umgekehrt, jeder Reihenfolge von BZ-Transformationen entspricht der Übergang von einem solchen Wort zu einem anderen Wort. Kann aber der Graph in verschiedener

Weise auf einer Kugel realisiert werden, so gibt es andere BZ-Reihen und andere Systeme von BZ-Transformationen, die den aus allen Buchstaben des Auflösungsspieles gebildeten Worten entsprechen.

Andere Möglichkeiten für die Entwicklung des Kalküls bei den topologischen Spielen wird die Darstellung der zahlreichen topologischen Untersuchungen über Polyeder durch unsere Symbolgebilde liefern.

b) Wir wollen auch noch ein *Beispiel* für ein besonders einfaches Spiel betrachten, das zu den Konstellationen eines Sechsecks mit paarweise gleichbezeichneten Ecken gehört. Auf einem Sechseck bezeichnen wir gegenüberliegende Ecken mit gleichen Buchstaben, etwa mit a, b und c. Wir haben damit als »Anfangsstellung» unseres Spieles die Reihe $a\,b\,c\,a\,b\,c$, die übrigens als Graph betrachtet den Kleeblattschlingenzug darstellt. Die Inversion eines Abschnitts zwischen a und a bezeichnen wir mit A, die eines Abschnitts zwischen b und b resp. c und c mit B resp. C. Dann ergibt der Zug A die Stellung $a\ c\ b\ a\ b\ c$, und die Züge B oder C von dieser Stellung aus gemacht ergeben keine Änderung dieser Stellung. Analoges gilt, wenn die Züge B und C von der Anfangsstellung aus gemacht werden. Unser Spiel hat also nur vier Stellungen: die Ausgangsstellung, etwa mit S_0 bezeichnet, ferner die Stellungen $A(S_0)$, $B(S_0)$, $C(S_0)$ und unser Spiel ist abstrakt eindeutig dargestellt durch folgende Angaben:

3 erzeugende Züge:

$$A,\ B,\ C.$$

7 Relationen:

$$\begin{cases} A^2 = B^2 = C^2 = E, \\ BA = CA = A, \\ CB = AB = B, \\ AC = BC = C, \end{cases}$$

wo E das Nicht-Ziehen, die Operation der identischen Umformung, bezeichnet. — Dieses Spiel charakterisiert die verschiedenen Möglichkeiten, den Kleeblattschlingenzug aufzulösen.

Wir können auch, ebenso wie bei den Gruppen durch das Gruppenbild, eine anschauliche Übersicht über die Verknüpfung der verschiedenen Stellungen durch einen bezeichneten Graphen sechster Ordnung mit vier Ecken geben.

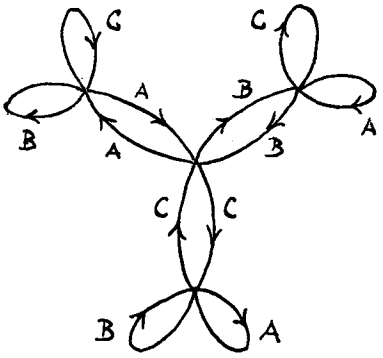


Fig. 30.

Dieses »Spielbild» wird durch die Figur 30 dargestellt. Allgemein werden die Spiele dargestellt durch Graphen $2n$ter Ordnung, bei denen von jeder Ecke die $2n$ Strecken $A_1 A_1^{-1} \ldots A_n A_n^{-1}$ ausgehen, wo $A_1 \ldots A_n$ die erzeugenden Operationen oder Züge sind. Die Gruppen dagegen werden durch ganz spezielle solche Graphen dargestellt, nämlich durch bezeichnete Graphen, bei denen alle Ecken topologisch mit Bezeichnung äquivalent sind, endlich die multiplikativen Verknüpfungen der ganzen Zahlen nach einem Modul m durch den noch spezielleren Graphen, der aus einem Polygon mit $m - 1$ Seiten besteht.

§ 4.

Orientierbare Flächen von höherem Geschlecht.

Die vorstehenden Untersuchungen über die Darstellung gewöhnlicher Polyeder lassen sich zum grössten Teil auf *Polyeder von höherem Zusammenhang ausdehnen.* Wir wollen dies nur ganz in Kürze für die *orientierbaren* Polyeder ausführen.

a) *Baum, Zwiebel und BZ-Reihe.* In ein beliebiges orientierbares Polyeder legen wir einen Baum durch alle Ecken und bezeichnen seine Strecken mit b_k. Wir ziehen dann den Baum auf einen Punkt zusammen und erhalten ein Polyeder mit einer einzigen Ecke von der $2(\alpha_1 - \alpha_0 + 1)$ Strahlen ausgehen, die sich zu $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ Strecken zusammenschliessen. Wir wollen diese Strecken zunächst alle mit $z_i, z_k, \ldots$ bezeichnen. Dann liefert ihre Aufeinanderfolge wieder eine Reihe $z_i z_{i+1} \ldots$, in der jedes der $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ Symbole zweimal vorkommt. In diese Z-Reihe fügen wir wieder wie oben successive die b-Symbole ein und erhalten so eine *BZ-Reihe*, die das Polyeder vollständig bestimmt. Denn wir erhalten aus der Reihe genau durch denselben Prozess wie bei den gewöhnlichen Polyedern die Teilflächen: auf z_i möge in bestimmter Richtung in der Reihe $b_k b_{k+1} \ldots b_{k+\lambda} z_l$ folgen; auf das andere Symbol z_l möge in derselben Richtung $b_s b_{s+1} \ldots b_{s+\mu} z_m$ folgen usw., dann bilden $z_i b_k b_{k+1} \ldots b_{k+\lambda} z_l b_s b_{s+1} \ldots b_{s+\mu} z_m$ usw. die Berandung einer Fläche. Durch dasselbe Verfahren mit Vertauschung von

z und b erhalten wir die Eckenzyklen. Damit ist natürlich das Polyeder vollständig gegeben.

Die BZ-Reihe erhält man aus dem Polyeder genau in derselben Weise wie bei den gewöhnlichen Polyedern direkt durch abwechselnde Umlaufung der Ecken und Teilflächen.

Beispiel: ein topologisch reguläres Polyeder vom Geschlecht 1 mit sechs Dreiecken, neun Kanten und drei sechsstrahligen Ecken, s. Fig. 31. In der Figur ist ein Teil der Umlaufungskurve eingezeichnet.

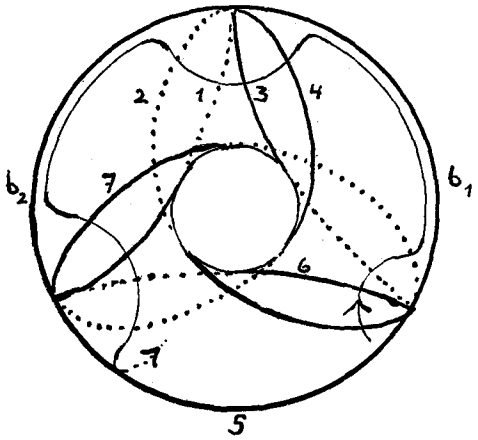


Fig. 31.

BZ-Reihe: $6\ b_1\ 4\ 3\ b_2\ 7\ 1\ 5\ 4\ 6\ b_2\ 2\ 1\ b_1\ 7\ 3\ 5\ 2.$

Z-Reihe: $\underline{2}\ \underline{6}\ \underline{4}\ \underline{\underline{3}}\ \underline{7}\ \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{5}}\quad \underline{4}\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{\underline{1}}\ \underline{7}\ \underline{\underline{3}}\ \underline{\underline{5}}.$

Hierbei ist allemal anstelle von z_i der Index i geschrieben. Aus der BZ-Reihe erhalten wir z. B. die Dreiecke $6\ b_1\ 4$ oder $b_1\ 7\ 1$ usw. und die Eckenzyklen $6\ b_1\ 7\ 3\ 5\ 2$ usw.

b) *Gerüst.* Aus der Anzahl der der BZ-Reihe entnommenen Flächen und Ecken ergibt sich das Geschlecht der dargestellten Fläche. Es gibt aber ein sehr einfaches Kennzeichen dafür, dass das dargestellte Polyeder ein von Null verschiedenes Geschlecht hat. Lassen wir nämlich aus der BZ-Reihe alle b weg, so erhalten wir die Z-Reihe. Auf dieser streichen wir nun zunächst jedes Paar aufeinanderfolgender gleicher Symbole $z_i z_i$, dann in der neuen Symbolreihe wieder alle Paare aufeinanderfolgender gleicher Symbole usw., bis wir zu einer

Symbolreihe kommen, wir wollen sie *G-Reihe* nennen, in der jedes Symbol zweimal vorkommt, aber keine zwei gleichen Symbole neben einander stehen. Die Symbole dieser Reihe wollen wir im Gegensatz zu den gewöhnlichen z-Symbolen, die wir weggeschafft haben, *Gerüstsymbole* nennen und durch den oben hinzugefügten Buchstaben g kennzeichnen, also z_k^g schreiben. Ist kein g-Symbol vorhanden, dann liefert uns die Z-Reihe eine gewöhnliche Zwiebel und die BZ-Reihe ein Polyeder vom Geschlecht Null. *Die G-Reihe charakterisiert das Geschlecht.*

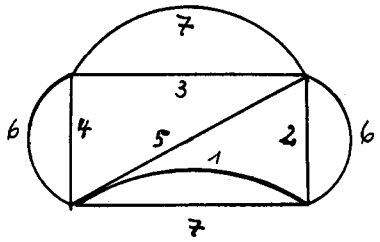


Fig. 32.

Die Symbole der G-Reihe gliedern sich in Paare von Abschnitten oder Abteilungen, in jedem Abschnitt kommt ein Symbol nur einmal vor, ein Paar von zusammengehörigen Abschnitten enthält jedes Symbol zweimal, die Paare von gleichen Symbolen in den Abschnitten, die zusammengehören, trennen sich nicht. Alle Symbolpaare eines Abteilungspaares entsprechen isotopen, nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren (zerstückelnden oder nicht zerstückelnden) Flächenkurven. Im Falle, dass das Geschlecht der Fläche gleich 1 ist haben wir zwei oder drei solcher Abteilungspaare. Im obigen Beispiel sind Z-Reihe und G-Reihe identisch, die G-Reihe zerfällt in drei Abteilungspaare, die wir durch Unterstreichung unterschieden haben. Die Figur 32 stellt die Gerüststrecken auf dem längs zweier Rückkehrkurven aufgeschnittenen Polyeder der Figur 31 dar.

c) Die durch andere Wahl des Baumes hervorgerufenen *Transformationen* setzen sich aus Elementartransformationen zusammen, die ein Paar gleicher b-Symbole mit einem trennenden Paar gleicher z-Symbole vertauschen. Diese Elementartransformationen werden genau so mit den allgemeinen BZ-Reihen ausgeführt wie mit den speziellen, zu den gewöhnlichen Polyedern gehörenden. Durch diese Transformation kann die Anzahl der Gerüststrecken und die Anzahl der Abteilungen sich ändern. Z. B.: BZ-Reihe:

$$b\,\underline{z_1^g}\,\underline{z_2^g}\,\underline{\underline{z_3^g}}\,b\,\underline{\underline{z_4^g}}\,\underline{\underline{z_5^g}}\,\underline{z_2^g}\,\underline{z_1^g}\,\underline{z_6^g}\,\underline{\underline{z_3^g}}\,\underline{\underline{z_5^g}}\,\underline{\underline{z_4^g}}\,\underline{z_6^g} \qquad \text{(3 Gerüstabteilungen).}$$

Die Vertauschung von b und z_1^g ergibt:

$$\underline{z'^g}\ \underline{\underline{z_4^g}}\ \underline{\underline{z_5^g}}\ z_2\ b_1'\ z_2\ \underline{\underline{z_8^g}}\ \underline{z'}\ b_1'\ \underline{z_6^g}\ \underline{\underline{z_8^g}}\ \underline{\underline{z_5^g}}\ \underline{\underline{z_4^g}}\ \underline{z_6^g},$$

z_2 ist keine Gerüststrecke, denn nach Wegnahme von b stehen die beiden Symbole z_2 nebeneinander. Die übrigen z-Symbole gliedern sich in zwei Abteilungen (s. Fig. 33).

Der t-Graph und T-Schema werden für ein allgemeines Polyeder genau so

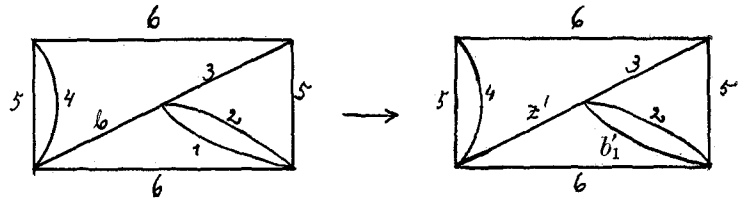


Fig. 33.

aus der BZ-Reihe gewonnen wie für die gewöhnlichen Polyeder. Für das obige reguläre Polyeder ergibt sich so das T-Schema

$$\begin{cases} 6\ b_1\ 1\ 5\ 3\ b_2 \\ b_1\ 4\ 5\ 2\ b_2\ 7 \\ 4\ 3\ 7\ 1\ 2\ 6. \end{cases}$$

Der t-Graph des Polyeders besteht also aus drei doppelpunktslosen Zügen, die sich in neun Punkten durchsetzen.

d) Jetzt können wir auch das *Gaussische Traktproblem* für Flächen von höherem Geschlecht behandeln: Sei irgend ein Graphenschema gegeben, dann bilden wir genau so wie früher aus ihm eine Auflösungsreihe A durch Ineinanderhängen der Reihen und Spiegelungen von Abschnitten zwischen gleichen Symbolen. Bezeichnen wir in der so erhaltenen A-Reihe irgendeine Anzahl von Symbolpaaren, die sich gegenseitig in der Reihe nicht trennen als b-Symbole, die andern als z-Symbole, dann ergeben unsere Vorschriften eindeutig die Konstruktion eines Polyeders, etwa vom Geschlecht p. Ist das zu dem Polyeder gehörende T-Schema identisch mit dem gegebenen Graphenschema, dann ist gezeigt, dass das Schema des Graphen sich auf einer Fläche vom Geschlecht p realisieren lässt. Durch diesen Prozess wird also stets in einer endlichen Anzahl von Schritten, die in Symboloperationen bestehen, entschieden werden kön-

nen, welches das kleinste Geschlecht für eine Fläche ist, auf der sich ein gegebenes Graphenschema realisieren lässt. Aber im allgemeinen wird die Auswahl der b-Symbole auf sehr viel verschiedene Weisen möglich sein und dementsprechend die Entscheidung über das Minimalgeschlecht nur durch langwieriges Probieren herbeizuführen sein. Ausserdem ist wesentlich zu berücksichtigen, dass hierbei nur diejenigen Graphen erfasst werden, die als t-Graphen von Polyedern aufgefasst werden können.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass in den BZ-Reihen für *nicht-orientierbare* Polyeder die z-Symbole mit Vorzeichen zu versehen sind.

Berichtigung.

In der Arbeit von Ingeborg Ginzel: Die konforme Abbildung durch die Gammafunktion Acta math. Bd. 56, 1931 ist folgendes zu berichtigen:

S. 320. Das 4. und das 8. Glied in der 2. Formel 90 b) sind dort zu streichen und einschliesslich Vorzeichen in der 1. Formel 90 b) anzufügen.

S. 321. 3. Zeile von unten: das η hat das Vorzeichen $-$.

S. 346. Alle Zahlen der Tabelle rechts von $x = 2$ also von $x = \frac{5}{2}$ ab bis einschliesslich $x = \frac{17}{2}$ müssen einen Platz tiefer stehen, gehören also zu einem k, das um eine Einheit höher ist. Die 1. Zahl $x = \frac{5}{2}$, $y = 9{,}45408$ gehört also zu $k = -6$, die letzte $x = \frac{17}{2}$, $y = 1{,}41587$ zu $k = 6$.