ÜBER EINE VON HERRN ROMANOVSKY BETRACHTETE INTEGRALGLEICHUNG.

Von

RUDOLF IGLISCH.
in Aachen.

Für die Integralgleichung

$$(1) \qquad w(x, y) - \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, w(t, x)\, dt = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ und $\varphi(t, x, y)$ für $a \leqq x, y, t \leqq b$ stetige reelle Funktionen seien, hat Herr Romanovsky[1] durch Entwicklung einer der ursprünglichen Fredholm'schen Theorie nachgebildeten Theorie die Gültigkeit sämtlicher Sätze bewiesen, die nach Fredholm für gewöhnliche lineare Integralgleichungen gelten. Zweck der vorliegenden Note ist es, die wichtigsten dieser Sätze, die sog. determinantenfreien Sätze, durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze in der Theorie der gewöhnlichen Integralgleichungen in kurzer Form herzuleiten, und zwar im Anschluss an eine früher erschienene Arbeit des Verf.[2] Es sind dies die folgenden vier Sätze:

1. *Alternative.* a) *Entweder besitzt die homogene Gleichung*

$$(2) \qquad u_0(x, y) - \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, u_0(t, x)\, dt = 0$$

[1] V. Romanovsky, Sur une classe d'équations intégrales linéaires, Acta math. 59 (1932), S. 99—208.

[2] R. Iglisch, Die determinantenfreien Sätze bei linearen Integralgleichungen, Math. Ann. 110 (1934), S. 223—229. Die Kenntnis dieser Arbeit wird nicht vorausgesetzt.

nur die Lösung $u_0(x, y) \equiv 0$; *dann besitzt die inhomogene Gleichung* (1) *eine und nur eine Lösung;*

b) *oder die homogene Gleichung* (2) *hat eine Lösung* $u_0(x, y) \not\equiv 0$; *dann besitzt* (1) *im allgemeinen keine Lösung.* [In diesem Falle nennen wir λ einen Eigenwert des Kernes $\varphi(t, x, y)$].

2. *Die Eigenwerte häufen sich nicht in der endlichen komplexen* λ*-Ebene.*

3. *Für jeden Wert* λ *ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von* (2) *beschränkt und gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung*

$$v_0(x, y) - \lambda \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v_0(y, t)\, dt = 0. \tag{3}$$

4. *Ist* λ *ein Eigenwert, so ist Gleichung* (1) *dann und nur dann lösbar, wenn* $f(x, y)$ *zu allen Eigenfunktionen von* (3) *orthogonal ist.*

Der Beweis dieser Sätze lässt sich so erbringen:

I. Setzt man den Ausdruck (2) für $u_0(x, y)$ $(n-1)$-mal hintereinander unter dem Integralzeichen in (2) ein, so entsteht

$$u_0(x, y) - \lambda^n \int_a^b \int_a^b \varphi^{(n)}(x, y, s, t)\, u_0(s, t)\, ds\, dt = 0 \tag{4}$$

mit dem sog. n-ten iterierten Kern

$$\varphi^{(n)}(x, y, s, t) = \int_a^b \overset{(n-2)}{\cdots} \int_a^b \varphi(t_1, x, y)\, \varphi(t_2, t_1, x)\, \varphi(t_3, t_2, t_1)\, \varphi(t_4, t_3, t_2) \ldots \\ \varphi(s, t, t_{n-2})\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-2}. \tag{5}$$

Für $n \geqq 2$ ist (4) eine gewöhnliche lineare homogene Integralgleichung. — In gleicher Weise erhalten wir aus (3)

$$v_0(x, y) - \lambda^n \int_a^b \int_a^b \varphi^{(n)}(s, t, x, y)\, v_0(s, t)\, ds\, dt = 0, \tag{6}$$

also gerade die zu (4) adjungierte homogene Integralgleichung.

Jede Eigenfunktion $u_0(x, y)$ von (2) ist Eigenfunktion von (4). Aber auch jede Eigenfunktion $u_\nu(x, y)$ von

$$(7) \qquad u_\nu(x, y) - \varepsilon_n^\nu \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, u_\nu(t, x)\, dt = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

ist Eigenfunktion von (4), wenn $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ gesetzt wird, also $\varepsilon_n^n = 1$. Umgekehrt beweist man nach E. Schmidt[1] leicht, dass jede Eigenfunktion $u(x, y)$ von (4) darstellbar ist als eine Summe

$$(8) \qquad u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu(x, y),$$

wo $u_\nu(x, y)$ Eigenfunktion von (7) ist. Man bilde dazu die Ausdrücke

$$(9) \qquad n\, U_\nu(x, y) = u(x, y) + \varepsilon_n^\nu \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, u(t, x)\, dt +$$

$$+ (\varepsilon_n^\nu \lambda)^2 \int_a^b \int_a^b \varphi^{(2)}(x, y, s, t)\, u(s, t)\, ds\, dt + (\varepsilon_n^\nu \lambda)^3 \int_a^b \int_a^b \varphi^{(3)}(x, y, s, t)\, u(s, t)\, ds\, dt + \cdots +$$

$$+ (\varepsilon_n^\nu \lambda)^{n-1} \int_a^b \int_a^b \varphi^{(n-1)}(x, y, s, t)\, u(s, t)\, ds\, dt$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Summation über ν ergibt

$$(10) \qquad u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} U_\nu(x, y),$$

da alle ε_n^ν Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^n - 1 = 0$ sind, mithin ihre 1., 2., ... $(n-1)$-te Potenzsumme verschwindet, d. h. $\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon_n^{\varrho\nu} = 0$ für $\varrho = 1, 2, \ldots n-1$. Gleichung (10) zeigt, dass nicht alle $U_\nu(x, y)$ identisch verschwinden können. Schreibt man (9) mit den Variablen t, x statt x, y, multipliziert mit $\varepsilon_n^\nu \lambda\, \varphi(t, x, y)\, dt$, integriert und zieht die entstehende Gleichung von (9) ab, so erhält man unter Beachtung von (5)

$$U_\nu(x, y) - \varepsilon_n^\nu \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, U_\nu(t, x)\, dt = 0;$$

[1] Erhard Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I. Teil, Math. Ann. 63 (1907), S. 433—476.

$U_\nu(x, y)$ ist also Eigenfunktion von (7). — In gleicher Weise ist jede Eigenfunktion $v_\nu(x, y)$ von

$$(11)\qquad v_\nu(x, y) - \varepsilon_n^\nu \lambda \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v_\nu(y, t)\, dt = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

auch Eigenfunktion von (6), und jede Eigenfunktion $v(x, y)$ von (6) ist darstellbar in der Form

$$(12)\qquad v(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} v_\nu(x, y).$$

II. Satz 2. beweist sich jetzt einfach so: Wäre λ^* ein Häufungspunkt von Eigenwerten von (2), so wäre λ^{*2} Häufungspunkt von Eigenwerten der Gleichung (4) mit $n = 2$; das geht nicht an, da (4) eine gewöhnliche lineare Integralgleichung ist.

III. In gleicher Weise erledigt sich der erste Teil von Satz 3., dass nämlich die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (2) beschränkt ist. Sei r die Anzahl der unabhängigen Lösungen von (2), ϱ die entsprechende Anzahl für Gleichung (3). Wir müssen dann, um Satz 3. vollständig zu beweisen, nur noch zeigen: $r = \varrho$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r \leqq \varrho$ annehmen und müssen die Gültigkeit des Kleinerzeichens ad absurdum führen. Wäre in der Tat $r < \varrho$, so hätte nach I. Gleichung (6) für jedes n mindestens ϱ linear unabhängige Lösungen, das Gleiche gilt dann auch für die dazu adjungierte Gleichung (4). Da Gleichung (2) nur $r < \varrho$ Eigenfunktionen zu (4) beiträgt, muss also mindestens ein $\varepsilon_n^\nu \lambda$ mit $1 \leqq \nu \leqq n - 1$ Eigenwert von $\varphi(t, x, y)$ sein für jedes n. Lässt man n z. B. die Folge der Primzahlen durchlaufen, so würde man unendlich viele Eigenwerte von $\varphi(t, x, y)$ auf dem Kreis vom Radius $|\lambda|$ finden, was dem schon in II. bewiesenen Satz 2. widerspricht.

IV. Schon Herr Romanovsky hat darauf hingewiesen, dass die durch einmaliges Einsetzen von (1) in sich selbst entstehende Integralgleichung

$$(13)\qquad w(x, y) - \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \varphi^{(2)}(x, y, s, t)\, w(s, t)\, ds\, dt = F(x, y)$$

mit

$$(14)\qquad F(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y) f(t, x)\, dt$$

mit (1) identisch ist, solange λ^2 nicht Eigenwert von $\varphi^{(2)}(x, y, s, t)$ ist. Dass jede Lösung $w(x, y)$ von (1) auch (13) erfüllt, ist trivial. Die Umkehrung folgt am einfachsten so: Man verifiziert durch Einsetzen, dass neben $w(x, y)$ auch die Funktion

$$w^*(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(t, x, y)\, w(t, x)\, dt \tag{15}$$

Lösung von (13) ist. Da λ^2 kein Eigenwert von $\varphi^{(2)}(x, y, s, t)$ ist, folgt mithin $w(x, y) \equiv w^*(x, y)$, d. h. das Erfülltsein von (1).

V. Um Satz 1 a. vollständig zu beweisen, müssen wir noch folgendes zeigen: (2) habe nur die Lösung $u_0(x, y) \equiv 0$, aber $u_1(x, y)$ sei nicht identisch verschwindende Lösung von

$$u_1(x, y) + \lambda \int \varphi(t, x, y)\, u_1(t, x)\, dt = 0; \tag{16}$$

auch dann ist (1) eindeutig lösbar. In diesem Fall ist λ^2 Eigenwert von $\varphi^{(2)}(x, y, s, t)$. Sei $v(x, y)$ beliebige Eigenfunktion von (6) für $n = 2$. Dann ist nach III. $v(x, y)$ Eigenfunktion zu $-\lambda\varphi(x, y, t)$. Daher rechnet sich nach (14)

$$\begin{aligned} \int_a^b\!\!\int_a^b F(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy &= \int_a^b\!\!\int_a^b f(x, y)\, v(x, y)\, dx\, dy + \\ &\quad + \lambda \int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b \varphi(t, x, y) f(t, x)\, v(x, y)\, dt\, dx\, dy = \\ &= \int_a^b\!\!\int_a^b f(x, y) \left\{ v(x, y) + \lambda \int_a^b \varphi(x, y, t)\, v(y, t)\, dt \right\} dx\, dy = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Gleichung (13) besitzt also eine Lösung $w(x, y)$. Bilden wir wieder nach (15) die zugehörige Funktion $w^*(x, y)$, so folgt jetzt

$$w(x, y) - w^*(x, y) = u_1(x, y), \tag{18}$$

wo $u_1(x, y)$ (bekannte) Eigenfunktion von

$$(19)\qquad u_1(x, y) - \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \varphi^{(2)}(x, y, s, t)\, u_1(s, t)\, ds\, dt = 0$$

ist, also auch (16) zu Recht besteht. Nunmehr verifiziert man leicht an (15), dass

$$w(x, y) - \frac{1}{2} u_1(x, y) = \frac{1}{2}(w(x, y) + w^*(x, y))$$

Lösung von (1) ist. Dass die Lösung eindeutig ist, folgt daraus, dass die Differenz zweier Lösungen von (1) der Gleichung (2) genügt.

VI. Der Beweis des einzig noch ausstehenden Satzes 4., der ja 1 b. enthält, verläuft in analoger Weise. (13) ist ja dann und nur dann lösbar, wenn $F(x, y)$ orthogonal ist zu allen Eigenfunktionen $v(x, y)$ von (6) für $n = 2$, d. h. nach I. zu allen Eigenfunktionen $v_\nu(x, y)$ von (11) für $n = 2$ mit $\nu = 0$ und $\nu = 1$. Für $\nu = 1$ folgt die Orthogonalität wie unter V., Gleichung (17). Für $\nu = 0$ wird nach (17)

$$\int_a^b \int_a^b F(x, y)\, v_0(x, y)\, dx\, dy = 2 \int_a^b \int_a^b f(x, y)\, v_0(x, y)\, dx\, dy.$$

Dies verschwindet dann und nur dann, wenn $f(x, y)$ zu jedem $v_0(x, y)$ orthogonal ist. In diesem Falle ist also (13) wieder lösbar. Man gelangt wieder zu (18) und verifiziert durch Einsetzen, dass die mit (15) gebildete Funktion $w^*(x, y) - - w(x, y)$ der Gleichung (16) genügt. Daher findet man wie am Schluss von V., dass

$$w(x, y) - \frac{1}{2} u_1(x, y) = \frac{1}{2}(w(x, y) + w^*(x, y))$$

Lösung von (1) ist; hierzu kann eine beliebige Eigenfunktion $u_0(x, y)$ von (2) hinzugefügt werden.

VII. Es sei noch bemerkt, dass sich in gleicher Weise die auch von Herrn Romanovsky behandelte Gleichung

$$u(x_1, \dots x_m) - \lambda \int_a^b \varphi(t, x_1, \dots x_m)\, u(t, x_1, \dots x_{m-1})\, dt = f(x_1, \dots x_m)$$

erledigt. Nur in den Nummern IV.—VI. hat man statt (13) die Integralgleichung mit dem m-ten iterierten Kern heranzuziehen.[1] Auch Integralgleichungen der Form

$$u(x_1, x_2, x_3) - \lambda \int_a^b \int_a^b \varphi(t_1, t_2, x_1, x_2, x_3)\, u(t_1, t_2, x_1)\, dt_1\, dt_2 = f(x_1, x_2, x_3)$$

und ähnliche Verallgemeinerungen lassen sich auf diesem Wege behandeln. Des weiteren kann man die Annahme der Stetigkeit des Kerns durch weniger einschränkende Annahmen ersetzen, wie sie in der Theorie der gewöhnlichen Integralgleichungen üblich sind; es genügt z. B., erst vom n-ten iterierten Kern Stetigkeit vorauszusetzen.

[1] Vgl. die unter Anm. 2., S. 329 zitierte Arbeit.