KONVEXE LÖSUNG DER FUNKTIONALGLEICHUNG $1/f(x+1) = xf(x)$.

VON

ANTON E. MAYER

in WIEN.

Bei einer geometrischen Anwendung[1] der Funktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

wurde ich gewahr, dass diese übrigens nicht unbekannte Funktion[2] logarithmisch konvex ist und dass sie merkwürdigerweise schon durch die Konvexität weitgehend charakterisiert wird. Wir können nämlich zeigen: Die in der Überschrift verlangten Eigenschaften sind bloss bei der Funktion $F(x)$ vereint (§ 1). Anschliessend soll die Analogie zur Haupt-Funktionalgleichung der Gammafunktion beleuchtet werden (§ 2).

Der Einfachheit halber setzen wir für die hier zu betrachtenden reellen Funktionen stets voraus, dass die Variable $x > 0$ sei.

---

[1] A. E. MAYER, Grösste Polygone mit gegebenen Seitenvektoren, Commentarii mathem. helvetici **10** (1938), S. 288—301.

[2] N. NIELSEN, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, untersucht an mehreren Stellen, besonders S. 44, 45, die Funktionen $B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\, F(x)$ und $B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, S. 115—118, behandelt eingehend $1/F(x)$.

Vgl. auch E. T. WHITTAKER u. G. N. WATSON, A course of modern analysis, 4. Aufl., Cambridge 1927, S. 259, Beispiel 8.

8—38333. *Acta mathematica.* 70. Imprimé le 29 novembre 1938.

§ 1. Konvexität der Funktion $F(x)$ und eine Unitätseigenschaft.

Aus der für die Theorie der Gammafunktion fundamentalen Beziehung

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

folgt augenblicklich

$$\frac{1}{F(x+1)} = x\,F(x). \tag{1}$$

Mithin ist $F(x)$ eine Lösung der im Titel stehenden Funktionalgleichung.

Wir bilden nun die logarithmische Ableitung von $F(x)$, also

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Wird rechts eine wohlbekannte Partialbruchentwicklung für die logarithmische Ableitung der Gammafunktion eingeführt, nämlich[1]

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+x}\right),$$

wobei C die Euler-Mascheronische Konstante bezeichnet, so resultiert[2]

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+x} = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+x)(2\nu+1+x)}. \tag{2}$$

Hieraus ersieht man, dass $F'(x)/F(x) < 0$ und deshalb

$$F'(x) < 0 \tag{3}$$

ist, da ja $F(x) > 0$ definiert war.

Ferner lehrt (2), dass $F'(x)/F(x)$ mit wachsendem x beständig zunimmt. Daher ist $\log F(x)$ eine konvexe Funktion. Weil $F(x)$ positiv ist und monoton abnimmt, wächst mit $F'(x)/F(x) < 0$ zugleich $F'(x)$. Somit ist auch $F(x)$ selbst konvex. Übrigens impliziert die logarithmische Konvexität jeder Funktion deren Konvexität schlechthin; denn aus

---

[1] NIELSEN, l. c., S. 15; NÖRLUND, l. c., S. 102; oder etwa H. v. MANGOLDT—K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik 3, 6. Aufl., Leipzig 1933, S. 484.

[2] Vgl. NIELSEN, l. c., S. 16; NÖRLUND, l. c., S. 100.

$$\log f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\{\log f(x_1) + \log f(x_2)\}$$

folgt wegen der Monotonie des Logarithmus

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \leqq \frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}.$$

Der Umkehrung unserer Ergebnisse schicken wir eine sehr einfache Abschätzung der Funktion $F(x)$ voraus[1].

Gemäss (3) ist

$$F(x) > F(x+1) > F(x+2),$$

infolgedessen

$$F(x)F(x+1) > F^2(x+1) > F(x+1)F(x+2)$$

oder, im Hinblick auf (1),

$$\frac{1}{x} > F^2(x+1) > \frac{1}{x+1}. \tag{4}$$

Nunmehr behaupte ich:

Erfüllt eine für alle $x > 0$ definierte konvexe Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\frac{1}{f(x+1)} = xf(x), \tag{5}$$

so ist die (nie verschwindende) *Funktion $f(x)$ mit $F(x)$ identisch.*

Wegen (1) und (5) genügt die Quotientenfunktion

$$Q(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

der Funktionalgleichung

$$Q(x+1) = \frac{1}{Q(x)}. \tag{6}$$

Wir müssen $Q(x) = 1$ beweisen. Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst, dass $Q^2(x) = 1$ ist.

---

[1] Nicht so elementar, mit Hilfe der Stirlingschen **Reihe** ergibt sich

$$F^2(x) < \frac{2}{2x-1} \quad \text{für} \quad x > \frac{1}{2}.$$

[Vgl. MAYER, l. c., dort (14)]. Die Stirlingsche **Formel** reicht zum Beweise dieser Verschärfung von (4) nicht hin.

Zufolge (6) und (4) ist für ein beliebig fixiertes $x > 0$, wenn vorerst $Q(x) > 0$ angenommen wird,

$$f(x+1) = \frac{1}{Q(x)} F(x+1) < \frac{1}{Q(x)} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$f(x+2) = Q(x) F(x+2) > Q(x) \frac{1}{\sqrt{x+2}},$$

$$f(x+3) = \frac{1}{Q(x)} F(x+3) < \frac{1}{Q(x)} \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

Werden diese Abschätzungen in die Konvexitäts-Ungleichung

$$f(x+2) \leqq \frac{1}{2} \{f(x+1) + f(x+3)\}$$

eingetragen, so hat man

(7) $$Q^2(x) < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right).$$

Vergrösserung des Arguments um 1 liefert, abermals mit Rücksicht auf (6),

(8) $$\frac{1}{Q^2(x)} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x+1}} + 1\right).$$

Da $Q(x)$ gemäss (6) die Periode 2 besitzt, darf in (7) und (8) rechter Hand x durch $x + 2n$ ersetzt werden, wenn n eine natürliche Zahl bedeutet. Wächst dann n über alle Grenzen, so ergeben (7) und (8), zusammengefasst,

$$Q^2(x) = 1$$

und damit zunächst

(9) $$|f(x)| = F(x).$$

Unter der Voraussetzung, dass $Q(x) < 0$ ist, erhält man in analoger Weise

$$Q^2(x) > \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right),$$

$$\frac{1}{Q^2(x)} > \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}\right)$$

und folgert hieraus wiederum (9).

Wir verschaffen uns jetzt Klarheit über das Vorzeichen von $f(x)$.

Falls einem beliebigen $x_0 > 0$ der Funktionswert $f(x_0) = -F(x_0)$ entspräche, wäre für jedes $h > 0$ infolge der Konvexität von $f(x)$ und in Anbetracht von (9)

$$f(x_0 + h) \leqq \frac{1}{2}\{f(x_0) + f(x_0 + 2h)\} \leqq \frac{1}{2}\{-F(x_0) + F(x_0 + 2h)\}.$$

Weil $F(x)$ abnimmt, ist der rechts stehende Ausdruck negativ; nach (9) wäre daher $f(x_0 + h) = -F(x_0 + h)$. Letztere Funktion von h ist aber nicht konvex, denn wir haben oben gesehen, dass $F(x)$ konvex im engeren Sinne ist. Aus allem dem kann geschlossen werden, dass $f(x)$ nie negativ wird, weshalb in (9) das Zeichen des absoluten Betrages wegzulassen ist.

§ 2. Konvexe Lösungen der Funktionalgleichung der Gammafunktion.

Wie E. Artin gezeigt hat, kann die Gammafunktion als reelle Funktion folgendermassen gekennzeichnet werden:

Ist eine Funktion $f(x)$ für alle $x > 0$ definiert, stetig und logarithmisch konvex, genügt sie ferner der Gleichung

$$f(x+1) = xf(x), \tag{10}$$

so gilt identisch $f(x) = a\Gamma(x)$, wobei a eine beliebige positive Konstante ist[1].

Der in § 1 bewiesene Satz über die Funktion $F(x)$ erscheint jetzt als Analogon zu dem eben wiedergegebenen Theorem. Ein Unterschied jedoch soll im nachstehenden herausgearbeitet werden: In dem Theorem von der Gammafunktion darf die logarithmische Konvexität nicht zur blossen Konvexität abgeschwächt werden. Man kann nämlich stetige, konvexe Lösungen von (10) konstruieren, die von der Gammafunktion wesentlich verschieden sind.

Wir gehen von einer unendlichen Folge rationaler Funktionen aus, die bis auf die erste ganz sind:

$$f_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$f_1(x) = 1,$$

[1] E. ARTIN, Einführung in die Theorie der Gammafunktion (Hamburger math. Einzelschr. **11**), Leipzig u. Berlin 1931, S. 12. Die Stetigkeit ist daselbst in die Konvexitätsdefinition aufgenommen.

Implizite findet sich der Inhalt des Satzes [wie auch ARTIN erwähnt] schon bei H. BOHR u. J. MOLLERUP, Lærebog i matematisk Analyse **3**, Kopenhagen 1922, S. 163, 164.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x - 1, \\ &\vdots \\ f_\nu(x) &= (x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1), \\ f_{\nu+1}(x) &= (x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)(x-\nu), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ohne die geringste Schwierigkeit erkennt man ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$):

(11) $$f_\nu(\nu+1) = \nu! = f_{\nu+1}(\nu+1),$$

(12) $$f_\nu''(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > \nu,$$

(13) $$f_{\nu+1}(x+1) = x f_\nu(x).$$

Bedeutet, wie üblich, $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leqq x$, so bilden wir nun die Funktion

$$G(x) = f_{[x]}(x)$$

und konstatieren an Hand von (11), (12) und (13) der Reihe nach:

$G(x)$ ist stetig,

$G(x)$ ist konvex im Inneren des Intervalls zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen,

(14) $$G(x+1) = x\,G(x).$$

Im Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ ist $G(x) = 1 \geqq \Gamma(x)$. Hieraus folgt in Anbetracht von (14) für jedes positive Argument:

$$G(x) \geqq \Gamma(x);$$

Gleichheit besteht gemäss (11) für $x = 1, 2, 3, \ldots$. An diesen Stellen ist daher $G(x)$ konvex, weil ja $\Gamma(x)$ konvex ist[1]. Alles in allem genommen ist $G(x)$ eine der angekündigten stetigen konvexen Lösungen von (10).

Weitere solche Lösungen werden durch

$$\operatorname{Max}\{\Gamma(x),\ b\,G(x)\}$$

dargestellt, falls der Koeffizient b zwischen 1 und dem Minimum von $\Gamma(x)$ gewählt wurde.

---

[1] Ohne auf $\Gamma(x)$ zurückzugreifen resultiert die Konvexität von $G(x)$ an den Stellen $x = 1, 2, 3, \ldots$ daraus, dass die linksseitige logarithmische Ableitung um 1 kleiner als die rechtsseitige ist.