

SOLUTION DU PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE DES CLASSES DE FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES.

PAR

H. CARTAN et S. MANDELBROJT
à STRASBOURG. à PARIS.

Introduction.

Soit une suite de quantités A_n positives (finies ou infinies, non nulles; $n = 1, 2, \dots$). Nous disons qu'une fonction réelle de la variable réelle x , définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle I (ouvert ou fermé, fini ou infini), appartient à la classe $\{A_n\}_I$ si à chaque $x_0 \in I$ on peut associer un voisinage $V(x_0)$ et un nombre fini $\lambda > 0$, de manière que les dérivées successives de f satisfassent aux inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n A_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

pour tout x qui appartient à I et à $V(x_0)$. Dans le cas où I est *compact* (c'est-à-dire borné fermé), cette définition coïncide avec la définition classique de Hadamard-Denjoy: existence d'un λ tel que les inégalités ci-dessus aient lieu pour tout $x \in I$. Dans le cas d'un intervalle quelconque I , une fonction f appartient à la classe $\{A_n\}_I$ si elle appartient à la classe $\{A_n\}_{I'}$ sur tout intervalle compact I' contenu dans I .

Chaque suite $\{A_n\}$ définit, sur chaque intervalle, une classe de fonctions. Le problème d'équivalence posé par Carleman¹ consiste à chercher à quelles conditions deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ définissent, sur tel ou tel intervalle, la même classe; plus généralement:

Etant donné un intervalle I , à quelles conditions doivent satisfaire deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$?

¹ Voir CARLEMAN, Fonctions quasi-analytiques (*Collection Borel*, Paris 1926), p. 76.

Nous avons résolu ce problème dans le cas d'un intervalle *fini* quelconque.¹ Mais la condition à imposer aux deux suites n'est pas la même, suivant que I est *ouvert*, ou au contraire *fermé* ou *semi-ouvert*. Il importe donc bien de remarquer que la solution du problème dépend essentiellement de la nature de l'intervalle considéré.²

D'ailleurs il est clair que la solution est la même pour deux intervalles semblables, car une transformation linéaire sur la variable x ne change pas la classe d'une fonction $f(x)$. De plus, si une classe $\{A_n\}_I$ est contenue dans une classe $\{A'_n\}_I$ pour un intervalle *compact* I , il est clair qu'il en sera de même pour *tout* intervalle; de sorte que la condition d'inclusion pour un intervalle *compact* sera plus forte que pour un intervalle *ouvert* ou *semi-ouvert*.

Une solution partielle du problème de Carleman était déjà connue, grâce à un théorème de S. Mandelbrojt³:

Pour qu'une classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{n!\}_I$ de toutes les fonctions analytiques, il faut et il suffit, quel que soit l'intervalle fini I , que l'on ait

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^0}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty;$$

la suite $\{A_n^0\}$ désigne la suite «régularisée exponentielle» de la suite $\{A_n\}$. Le procédé de *régularisation exponentielle* a précisément été introduit et étudié par Mandelbrojt⁴ dans le but de résoudre le problème de Carleman. Nous rappellerons plus loin en quoi il consiste, et quelles sont ses principales propriétés.

Il est remarquable que la régularisation exponentielle permette de résoudre le problème de la comparaison de deux classes $\{A_n\}_I$ et $\{A'_n\}_I$ non seulement lorsque $A'_n = n!$, mais lorsque la suite $\{A'_n\}$ est *quelconque*, au moins lorsqu'il s'agit de classes sur un intervalle *ouvert*. C'est ce que nous montrerons dans ce travail, en établissant que la condition

$$(I) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^0}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty$$

¹ Les résultats ont été publiés dans deux Notes aux *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris* (208, 1939, p. 555 et p. 716).

² L'un de nous avait déjà mis ce fait en évidence. Voir H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives (à paraître aux Actualités scientifiques, chez Hermann à Paris).

³ Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions (*Collection Borel*, Paris 1935), p. 97. Voir aussi: Classes quasi-analytiques de fonctions (en langue russe, Leningrad 1937), p. 60.

⁴ Voir le livre cité en (3), p. 95—96. Au sujet des modes de régularisation en général, voir S. MANDELBJOJT, La régularisation des fonctions (*Actualités scientifiques*, N° 733, Hermann, Paris 1938).

est nécessaire et suffisante pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, quand I est un intervalle ouvert fini.

Mais, contrairement à ce qui a lieu pour $A'_n = n!$, la condition (1) n'est pas suffisante, en général, pour l'inclusion de la classe $\{A_n\}_I$ dans la classe $\{A'_n\}_I$ lorsque I est semi-ouvert ou fermé. Il faut une condition plus forte, que l'on obtient en introduisant un autre mode de régularisation. Ce procédé sera étudié au § 1; il fait correspondre à toute suite $\{A_n\}$ une suite $\{A'_n\}$, et la condition

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A'_n}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty$$

est nécessaire et suffisante pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, lorsque l'intervalle fini I est semi-ouvert ou fermé. Dans le cas particulier où $A'_n = n!$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

Disons quelques mots du principe de la démonstration, dans chaque cas. On démontre que la condition (1) est *suffisante* en prouvant que, sur tout intervalle ouvert I , les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A_n^0\}_I$ sont identiques; de même on montre que (2) est *suffisante* en prouvant que, sur un intervalle quelconque I , les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A'_n\}_I$ sont identiques. Le principe des deux démonstrations est le même: on s'appuie sur des inégalités qui bornent supérieurement la dérivée k^e d'une fonction à l'aide d'une borne supérieure de la fonction elle-même et de sa dérivée p^e ($k < p$). Voici ces inégalités¹ dans le cas où l'intervalle considéré est l'intervalle fermé $[-1, +1]$: si l'on a, sur cet intervalle,

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f^{(p)}(x)| \leq M_p,$$

on a, au milieu de l'intervalle,

$$(I) \quad |f^{(k)}(0)| < \max \left[2 e^k M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}, 2 (ep)^k M_0 \right],^2$$

et, sur tout l'intervalle,

$$(II) \quad |f^{(k)}(x)| < \max \left[2 \left(\frac{e^2 p}{k} \right)^k M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}, 2 \left(\frac{e^2 p^2}{2k} \right)^k M_0 \right].$$

¹ Pour leur démonstration, voir H. CARTAN, loc. cit. en (2), p. 32.

² $\max(a, b)$ désigne la plus grande de deux quantités a et b ; la lettre c désigne, dans tout ce qui suit, la base des logarithmes népériens.

C'est l'inégalité (I) qui permet de montrer que la condition (1) est suffisante, et l'inégalité (II) qui permet de démontrer que la condition (2) est suffisante.

Pour montrer que les conditions (1) et (2) sont *nécessaires*, on suppose que l'une (ou l'autre) ne soit pas remplie, et on construit, dans chaque cas, une fonction $f(x)$ qui appartient à la classe $\{A_n\}$ sans appartenir à la classe $\{A'_n\}$; la fonction $f(x)$ est définie par une série de polynômes de Tchebycheff. Le procédé est analogue à celui déjà utilisé par Mandelbrojt¹.

Pour terminer, signalons que notre solution du problème de Carleman fournit immédiatement une condition *pour que les dérivées des fonctions d'une classe $\{A_n\}_I$ appartiennent à la même classe*. Pour cela, *il faut et il suffit*² *que la classe $\{A_{n+1}\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A_n\}_I$, ce qui s'exprimera, dans le cas où I est ouvert fini, par la condition*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n+1}^0}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty,$$

et, dans le cas où I est semi-ouvert fini ou compact, par la condition

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n+1}^f}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty.$$

I. Les deux modes de régularisation.

Soit A_n ($n = 1, 2, \dots$) une suite de nombres positifs, finis ou infinis, mais non nuls. Nous supposons, dans tout ce qui suit, *qu'il existe une infinité de A_n finis*. Dans le cas où les A_n seraient tous infinis à partir d'un certain rang, la classe $\{A_n\}_I$ serait celle de *toutes* les fonctions indéfiniment dérivables sur un intervalle I ; comme la solution du problème de Carleman est triviale pour une telle classe, nous pouvons bien exclure désormais cette éventualité.

De plus, il est évident que si deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A'_n\}_I$ sont identiques. Nous

¹ Voir le livre cité en (3), p. 32, p. 94 et 98.

² En effet, la condition est *nécessaire*: si toute fonction f de la classe $\{A_n\}_I$ est telle que f' appartienne à $\{A_n\}_I$, toute fonction g de la classe $\{A_{n+1}\}_I$ appartient à la classe $\{A_n\}_I$, car il existe f telle que $f' = g$, et f appartient à $\{A_n\}_I$. La condition est *suffisante*: supposons la classe $\{A_{n+1}\}_I$ contenue dans la classe $\{A_n\}_I$; alors si f appartient à la classe $\{A_n\}_I$, f' appartient à la classe $\{A_{n+1}\}_I$, donc à la classe $\{A_n\}_I$.

pourrons donc toujours supposer A_1 fini; c'est ce que nous ferons désormais, pour éviter des difficultés accessoires et sans intérêt.

Cela posé, définissons, à partir de la suite A_n , deux fonctions $S(r)$ et $U(r)$ de la variable réelle r ($r \geq 1$). Nous posons, pour $r \geq 1$,

$$(3) \quad S(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^n}{A_n}, \quad U(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n A_n}.$$

$S(r)$ et $U(r)$ sont évidemment des fonctions strictement croissantes de r . On remarquera d'ailleurs l'inégalité évidente

$$S(r) \leq U(r).$$

Nous définissons les deux suites régularisées A_n^o et A_n^f de la manière suivante

$$(4) \quad A_n^o = \overline{\text{borne}}_{r \geq n} \frac{r^n}{S(r)}, \quad n^n A_n^f = \overline{\text{borne}}_{r \geq n} \frac{r^{2n}}{U(r)}.$$

Puisque, d'après (3), on a $\frac{r^n}{S(r)} \leq A_n$ pour tout $n \leq r$, on a

$$(5) \quad A_n^o \leq A_n;$$

et, de même,

$$(5)' \quad A_n^f \leq A_n.$$

Les quantités A_n^o et A_n^f sont finies quel que soit n , car on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^n}{S(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{U(r)} = 0.$$

Démontrons par exemple la première relation. Pour cela, choisissons un entier $p > n$, tel que A_p soit fini; on a, pour $r \geq p$,

$$\frac{r^p}{S(r)} \leq A_p,$$

d'où

$$\frac{r^n}{S(r)} \leq \frac{A_p}{r^{p-n}};$$

p étant fixe, le second nombre tend vers zéro quand $r \rightarrow \infty$. C. Q. F. D.

Théorème I. *On a les égalités*

$$(6) \quad S(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^n}{A_n^0}, \quad U(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n A_n^f}.$$

Autrement dit, la suite régularisée A_n^0 donne naissance à la même fonction $S(r)$ que la suite initiale A_n ; de même, la suite A_n^f donne naissance à la même fonction $U(r)$ que la suite A_n .

Démontrons par exemple la première des relations (6). De (5) résulte

$$\frac{r^n}{A_n^0} \geq \frac{r^n}{A_n},$$

d'où, d'après la définition (3) de $S(r)$,

$$\max_{n \leq r} \frac{r^n}{A_n^0} \geq S(r).$$

Mais d'après (4), on a

$$\frac{r^n}{A_n^0} \leq S(r) \text{ pour } n \leq r,$$

et par suite

$$\max_{n \leq r} \frac{r^n}{A_n^0} \leq S(r).$$

D'où la conclusion.

Corollaire. La régularisée (suivant le premier mode) de la suite A_n^0 est cette suite elle-même; de même, la régularisée (suivant le deuxième mode) de la suite A_n^f est la suite A_n^f . Nous écrirons cela ainsi

$$(A_n^0)^0 = A_n^0, \quad (A_n^f)^f = A_n^f.$$

Comparaison des régularisées de deux suites.

Considérons une deuxième suite A'_n ; désignons par $A_n'^0$ et $A_n'^f$ ses régularisées, par $S'(r)$ et $U'(r)$ les fonctions correspondantes.

Théorème II⁰. *Les trois conditions*

$$(\alpha) \quad A_n^0 \leq A'_n \text{ pour tout } n,$$

$$(\alpha_1) \quad A_n^0 \leq A_n'^0 \text{ pour tout } n,$$

$$(\beta) \quad S(r) \geq S'(r) \text{ pour tout } r$$

sont deux à deux équivalentes.

Il suffit de montrer l'équivalence de (α) et de (β) ; car alors, pour la même raison, (α_1) et (β) seront équivalentes, puisque la fonction $S'(r)$ relative à la suite A'_n est la même que celle relative à la suite A''_n .

(α) entraîne (β) , car il existe $n \leq r$ tel que

$$S'(r) = \frac{r^n}{A'} \leq \frac{r^n}{A''_n},$$

et, d'après (4),

$$\frac{r^n}{A''_n} \leq S(r).$$

(β) entraîne (α) , car, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $r \geq n$ tel que

$$A''_n \leq \frac{r^n}{S(r)} + \varepsilon \leq \frac{r^n}{S'(r)} + \varepsilon,$$

et, d'après (3) appliqué à la suite A'_n ,

$$\frac{r^n}{S'(r)} \leq A'_n.$$

On démontrerait de même le théorème:

Théorème II^f. *Les trois conditions*

$$A''_n \leq A'_n \text{ pour tout } n,$$

$$A''_n \leq A''_n \text{ pour tout } n,$$

$$U(r) \geq U'(r) \text{ pour tout } r$$

sont deux à deux équivalentes.

Interprétation géométrique du premier mode de régularisation
(régularisation exponentielle).

Posons $\log r = t$ ($t \geq 0$). Il vient, d'après (3) et (4),

$$(7) \quad -\log S(e^t) = \min_{n \leq e^t} (\log A_n - nt),$$

$$(8) \quad \log A''_n = \overline{\text{borne}}_{t \geq \log n} (nt - \log S(e^t)).$$

Prenons deux axes de coordonnées Ox , Oy dans un plan, et marquons les points P_1, \dots, P_n, \dots , le point P_n étant défini par les coordonnées

$$x_n = n, \quad y_n = \log A_n.$$

$t \geq 0$ étant donné, considérons les droites, de coefficient angulaire t , qui passent respectivement par les points P_n dont l'abscisse n est $\leq e^t$. La plus basse de ces droites a pour ordonnée à l'origine $-\log S(e^t)$, d'après (7). Soit $D(t)$ le segment de droite correspondant, limité aux points d'abscisses 0 et e^t .

Considérons l'ensemble $\{n_i\}$ des indices n tels que P_n soit situé sur au moins un segment de droite $D(t)$ ($t \geq \log n$). Je dis que *cet ensemble est infini*; autrement dit, quel que soit n_i , il existe un $n_{i+1} > n_i$. Sinon, pour tout t assez grand, le segment de droite $D(t)$ passerait par le point P_{n_i} , ce qui obligerait A_n à être infini pour $n > n_i$; or ceci est contraire à l'hypothèse faite sur la suite A_n .

Considérons la suite croissante des entiers n_i

$$n_1 < n_2 < \dots < n_i < n_{i+1} < \dots.$$

Pour chacun d'eux, soit n_i , considérons la borne supérieure τ_i des valeurs de t pour lesquelles le segment de droite $D(t)$ passe par le point P_{n_i} ; elle est finie, et l'on a évidemment

$$n_{i+1} \leq e^{\tau_i}.$$

Le segment de droite, de pente τ_i , qui passe par P_{n_i} , coupe le droite $x = n_{i+1}$ en un point $P'_{n_{i+1}}$ dont l'ordonnée est au moins égale à celle de $P_{n_{i+1}}$. Quant au point P_n^0 (de coordonnées n et $\log A_n^0$), la relation (8) montre que pour $n_i \leq n < n_{i+1}$, il est aligné avec P_{n_i} et $P'_{n_{i+1}}$. Les points P_n^0 correspondant à la suite régularisée se répartissent donc successivement sur des segments de droite de pentes croissantes, en nombre infini.

Il résulte de cette étude que l'on a, pour $n_i \leq n < n_{i+1}$,

$$(9) \quad A_{n_i} \leq \frac{A_n^0}{n_{i+1}^{n-n_i}}, \quad A_{n_i}^{\frac{n_{i+1}-n}{n_i+1-n_i}} A_{n_{i+1}}^{\frac{n-n_i}{n_{i+1}-n_i}} \leq A_n^0.$$

Ce sont ces inégalités que nous allons utiliser. On remarquera que, lorsque n est égal à l'un des n_i , on a $A_n = A_n^0$.

2. Identité des classes $\{A_n\}_I$ et $\{A_n^0\}_I$ sur tout intervalle ouvert.

Il est évident, d'après (5), que la classe $\{A_n^0\}_I$ est contenue dans la classe $\{A_n\}_I$. Il faut démontrer la réciproque pour un intervalle *ouvert*, et pour cela il suffit de démontrer ceci:

Si I est un intervalle fini fermé, et si une $f(x)$ appartient à la classe $\{A_n\}_I$, il existe λ fini > 0 tel que l'on ait, au milieu de l'intervalle I ,

$$(10) \quad |f^{(n)}| \leq \lambda^n A_n^0 \text{ pour tout } n.$$

On peut supposer que I est l'intervalle $-1 \leq x \leq +1$. Par hypothèse, il existe μ fini > 0 tel que l'on ait, sur tout l'intervalle, $|f^{(n)}| \leq \mu^n A_n$ pour tout n . Or, n étant donné, il existe i tel que

$$n_i \leq n < n_{i+1}$$

(la suite n_i étant celle dont il a été question au § 1). Appliquons l'inégalité (I) de l'Introduction à la fonction $f^{(n_i)}$ et à ses dérivées d'ordres $n - n_i$ et $n_{i+1} - n_i$ (donc pour $k = n - n_i$, $p = n_{i+1} - n_i$, $M_0 = \mu^{n_i} A_{n_i}$, $M_p = \mu^{n_{i+1}} A_{n_{i+1}}$). Il vient

$$|f^{(n)}(0)| < \max \left[2 e^{n-n_i} \mu^n A_{n_i}^{\frac{n_{i+1}-n}{n_{i+1}-n_i}} A_{n_{i+1}}^{\frac{n-n_i}{n_{i+1}-n_i}}, \quad 2 e^{n-n_i} \mu^{n_i} A_{n_i} (n_{i+1} - n_i)^{n-n_i} \right].$$

Tenons compte de (9); il vient immédiatement

$$|f^{(n)}(0)| < 2 e^{n-n_i} \mu^n A_n^0;$$

par suite (10) est vérifiée avec $\lambda = 2 e \mu$. C. Q. F. D.

3. Identité des classes $\{A_n\}_I$ et $\{A_n^f\}_I$ sur tout intervalle

Ici encore, en vertu de (5)', il suffit de montrer que toute fonction de la classe $\{A_n\}_I$ appartient à la classe $\{A_n^f\}_I$. D'après la remarque faite au début de l'Introduction, il suffit de faire la démonstration pour un intervalle fermé fini, qu'on peut supposer être $[-1, +1]$.

Remarquons d'abord que le procédé de régularisation qui conduit à A_n^f se ramène au procédé dit exponentiel de la manière suivante: on pose

$$\sqrt[n^n]{A_n} = B_n,$$

on prend la régularisée exponentielle de la suite B_n , soit B_n^0 , et on a

$$\sqrt[n^n]{A_n^f} = B_n^0.$$

En désignant cette fois par $\{n_i\}$ la suite des entiers qui s'introduisent dans la

régularisation exponentielle de la suite B_n , et en appliquant les relations (9) à la suite B_n , on trouve, pour $n_i \leq n < n_{i+1}$,

$$(9)' \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n_i} \leq A_n^f \frac{n^n}{n_i^{n_i} n_{i+1}^{2(n-n_i)}}, \\ A_{n_i}^{\frac{n_{i+1}-n}{n_i}} A_{n_{i+1}}^{\frac{n-n_i}{n_{i+1}}} \leq A_n^f \frac{n^n}{n_i^{\frac{n_i(n_i+1-n)}{n_{i+1}-n_i}} n_{i+1}^{\frac{n_{i+1}(n-n_i)}{n_{i+1}-n_i}}}. \end{array} \right.$$

Cela posé, soit I l'intervalle fermé $[-1, +1]$, et soit $f(x)$ une fonction de la classe $\{A_n\}_I$. Nous allons montrer qu'elle appartient à la classe $\{A_n^f\}_I$. Par hypothèse, il existe $\mu > 0$ tel que l'on ait

$$|f^{(n)}(x)| \leq \mu^n A_n \text{ pour tout } n.$$

n étant donné, d'ailleurs quelconque, il existe i tel que

$$n_i \leq n < n_{i+1};$$

appliquons l'inégalité (II) de l'Introduction à la fonction $f^{(n)}$ et à ses dérivées d'ordres $n - n_i$ et $n_{i+1} - n_i$ (donc pour $k = n - n_i$, $p = n_{i+1} - n_i$, $M_0 = \mu^{n_i} A_{n_i}$, $M_p = \mu^{n_{i+1}} A_{n_{i+1}}$). On trouve que l'une au moins des deux inégalités suivantes est vérifiée:

$$(11) \quad |f^{(n)}(x)| < 2 \left(\frac{e^2 p}{k}\right)^k \mu^n A_{n_i}^{\frac{n_{i+1}-n}{n_i}} A_{n_{i+1}}^{\frac{n-n_i}{n_{i+1}}},$$

$$(12) \quad |f^{(n)}(x)| < 2 \left(\frac{e^2 p^2}{2k}\right)^k \mu^{n_i} A_{n_i}.$$

Étudions successivement ces deux cas. Si (11) a lieu, on en déduit, en tenant compte de (9)',

$$(11)' \quad |f^{(n)}(x)| < 2 e^{2k} \left(\frac{p}{k}\right)^k \frac{n^n}{n_i^{\frac{n_i(n_i+1-n)}{n_{i+1}-n_i}} n_{i+1}^{\frac{n_{i+1}(n-n_i)}{n_{i+1}-n_i}}} \mu^n A_n^f;$$

et si c'est (12) qui a lieu, on a, toujours en vertu de (9)',

$$(12)' \quad |f^{(n)}(x)| < 2 \left(\frac{e^2}{2}\right)^k \left(\frac{p^2}{k}\right)^k \frac{n^n}{n_i^{n_i} n_{i+1}^{2(n-n_i)}} \mu^n A_n^f.$$

Posons $\frac{n_{i+1}}{n_i} = u$ ($u > 1$); alors $p = (u - 1)n_i$, et (11)' et (12)' prennent la forme

$$(11)'' \quad |f^{(n)}(x)| < 2 \frac{n^n}{n_i^{n_i} (n - n_i)^{n - n_i}} \left[e^2 (u - 1) u^{-\frac{u}{u-1}} \right]^k \mu^n A_n^f;$$

$$(12)'' \quad |f^{(n)}(x)| < 2 \frac{n^n}{n_i^{n_i} (n - n_i)^{n - n_i}} \left[\frac{e^2}{2} \left(1 - \frac{1}{u} \right)^2 \right]^k \mu^n A_n^f.$$

Or on a

$$\frac{n^n}{n_i^{n_i} (n - n_i)^{n - n_i}} < e^n \frac{n!}{n_i! n - n_i!} = e^n \frac{n!}{k! n - k!};$$

$$(u - 1) u^{-\frac{u}{u-1}} < 1 \text{ quel que soit } u > 1;$$

$$1 - \frac{1}{u} < 1.$$

Dans le cas (11)'' comme dans le cas (12)'', on a donc

$$|f^{(n)}(x)| < 2 (e\mu)^n \frac{n!}{k! n - k!} e^{2k} A_n^f.$$

Cette inégalité a donc lieu dans tous les cas. Or

$$\frac{n!}{k! n - k!} e^{2k}$$

est un terme du développement de $(1 + e^2)^n$, et on a par suite

$$(13) \quad |f^{(n)}(x)| < 2 [e\mu(1 + e^2)]^n A_n^f.$$

Cette inégalité est valable pour tout entier n ; elle prouve que la fonction $f(x)$ appartient à la classe $\{A_n^f\}_I$. C. Q. F. D.

4. Le problème de Carleman sur un intervalle ouvert fini.

Pour qu'une classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans une classe $\{A'_n\}_I$, il suffit, lorsque l'intervalle I est ouvert, que l'on ait (cf. l'Introduction)

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty.$$

En effet, si cette condition est remplie, la classe $\{A_n^0\}_I$ est évidemment contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, et comme les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A_n^0\}_I$ sont identiques (§ 2), la proposition s'ensuit.

Nous allons voir maintenant que la condition (I) est *nécessaire* dans le cas d'un intervalle *fini*. Il en résultera qu'elle est nécessaire et suffisante pour un intervalle qui est à la fois ouvert et fini.

Avant d'aborder la démonstration, remarquons que la condition (I) exprime l'existence d'un λ fini > 0 tel que l'on ait

$$A_n^0 \leq \lambda^n A'_n \text{ pour tout } n;$$

si l'on pose

$$S'_\lambda(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^n}{\lambda^n A'_n},$$

cette condition est équivalente (théorème II⁰) à

$$(I)' \quad S(r) \geq S'_\lambda(r).$$

Ainsi (I) exprime l'existence d'un λ tel que (I)' ait lieu, et, réciproquement (I)' entraîne (I). On remarquera que $S'_\lambda(r)$ est, pour chaque valeur de r , une fonction décroissante de λ .

Nous allons précisément démontrer notre théorème sous la forme suivante:

Théorème III⁰. *Soit I un intervalle fini quelconque; si la classe $\{A_n\}_I$ est contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, il existe un λ fini > 0 tel que l'on ait*

$$(I)' \quad S(r) \geq S'_\lambda(r).$$

Pour cela, nous montrerons le

Lemme. *De toute suite infinie croissante d'entiers on peut extraire une suite $\{n_i\}$ pour laquelle existe un μ fini > 0 tel que l'on ait*

$$(I4) \quad S(n_i) \geq S'_\mu(n_i) \text{ pour tout indice } i.$$

Le théorème en résultera; en effet, il existera tout d'abord un λ tel que (I)' ait lieu pour toutes les valeurs *entières* de r , sinon on pourrait définir une suite croissante d'entiers pour laquelle le lemme serait en défaut. Cela étant, si l'on a

$$S(r) \geq S'_\lambda(r)$$

pour les valeurs entières de r , on a, pour r quelconque,

$$S(r) \geq S'_{2\lambda}(r),^1$$

ce qui démontre le théorème.

Il nous reste donc à établir le lemme. Soit donnée une suite infinie croissante σ d'entiers, et soit à montrer l'existence d'une suite partielle $\{n_i\}$ et d'une quantité μ telles que les inégalités (14) soient satisfaites. Nous définissons la suite $\{n_i\}$ par récurrence sur l'indice i ($i = 0, 1, 2, \dots$), en prenant pour n_0 le plus petit entier de la suite σ , et pour n_{i+1} le plus petit entier de σ qui soit $> n_i$ et satisfasse aux conditions

$$(15) \quad n_{i+1} > \max \left(\frac{A_{n_i+1}}{A_p}, \frac{A'_{n_i+1}}{A'_p} \right) \text{ pour tout } p \leq n_i.$$

Avant d'aller plus loin, établissons quelques propriétés de cette suite $\{n_i\}$. Tout d'abord, si dans la relation (3) on remplace r par n_{i+1} , et n par $n_i + 1$, on trouve

$$S(n_{i+1}) \geq \frac{n_{i+1}^{n_i+1}}{A_{n_i+1}},$$

d'où, en tenant compte de (15),

$$\frac{n_{i+1}^{n_i}}{S(n_{i+1})} \leq \min(A_p, A'_p) \text{ pour tout } p \leq n_i.$$

Changeons i en $i - 1$ dans cette inégalité; il vient, pour $i \geq 1$,

$$(16) \quad \frac{n_i^{n_i-1}}{S(n_i)} \leq \min(A_p, A'_p) \text{ pour } p \leq n_{i-1}.$$

Soit maintenant j un indice fixe ≥ 0 ; si $p \leq n_j$, on a

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^p}{S(n_i)} = \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^{n_i-1}}{S(n_i)} \frac{1}{n_i^{n_i-1-p}} \leq \left(\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{n_i-1-p}} \right) \cdot \min(A_p, A'_p) \leq 2 \min(A_p, A'_p).$$

Nous avons donc

$$(17) \quad \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^p}{S(n_i)} \leq 2 \min(A_p, A'_p) \text{ pour } p \leq n_j,$$

et d'autre part, en vertu de (16),

¹ En effet, soit $n \leq r < n + 1$; on a

$$S(r) \geq S(n) \geq S'_\lambda(n) \geq S'_{2\lambda}(r).$$

$$(18) \quad \frac{n_i^p}{S(n_i)} \leq \min(A_p, A'_p) \text{ pour } p \leq n_{i-1}.$$

Ces préliminaires étant posés, nous allons construire une fonction $f(x)$ qui appartient à la classe $\{A_n\}_I$; si la classe $\{A_n\}_I$ est contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, $f(x)$ doit aussi appartenir à cette dernière; or ceci nous conduira précisément à l'inégalité (14) à démontrer.

Tout d'abord, l'intervalle I étant fini, on peut supposer qu'il est contenu dans l'intervalle ouvert $(-1, +1)$, et qu'il contient l'origine $x = 0$. Cela étant, définissons, sur l'intervalle $(-1, +1)$ (et a fortiori sur I) la fonction $f(x)$ que voici: $T_n(x)$ désignant le polynome

$$\cos(n \operatorname{arc} \cos x),$$

posons, pour chaque valeur de l'indice $i \geq 1$,

$$Z_i(x) = \frac{1}{2} [T_{n_{i-1}}(x) + T_{n_i}(x)].$$

(n_i désigne le terme général de la suite définie plus haut), et prenons

$$(19) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_i(x)}{S(n_i)}.$$

Avant d'étudier cette fonction, disons qu'en vertu des propriétés connues de la fonction $T_n(x)$, la dérivée p^e de la fonction $Z_i(x)$ satisfait, pour $p \leq n_i$, aux inégalités

$$(20) \quad \left(\frac{n_i}{e}\right)^p \leq |Z_i^{(p)}(0)| \leq n_i^p,$$

et

$$(21) \quad |Z_i^{(p)}(x)| \leq K^p n_i^p$$

pour x dans un intervalle fermé I' contenu dans $(-1, +1)$, K dépendant de cet intervalle I' qui est d'ailleurs arbitraire.

De ces inégalités résulte en particulier la convergence uniforme, sur I' , de la série (19) et de toutes ses dérivées. D'une façon précise, on a, en désignant par j le plus petit des indices i tels que $n_i \geq p$,

$$|f^{(p)}(x)| \leq K^p \left[\frac{n_j^p}{S(n_j)} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^p}{S(n_i)} \right].$$

Or, d'après (3) appliquée pour $r = n_j$ et $n = p$, on a

$$\frac{n_j^p}{S(n_j)} \leq A_p;$$

en tenant compte, d'autre part, de (17), on trouve

$$|f^{(p)}(x)| \leq 3 K^p A_p.$$

Une telle inégalité ayant lieu pour tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle $(-1, +1)$, on en conclut que $f(x)$ appartient à la classe $\{A_n\}_I$ sur l'intervalle $(-1, +1)$, et a fortiori sur l'intervalle donné I .

Mais alors $f(x)$ appartient à la classe $\{A'_n\}_I$, d'après l'hypothèse faite sur les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A'_n\}_I$. En particulier, il existe un α fini > 0 tel que

$$(22) \quad |f^{(p)}(0)| \leq \alpha^p A'_p \text{ pour tout } p.$$

Cette inégalité va nous conduire au but. En effet, soit j un indice quelconque ≥ 1 . Considérons les valeurs de p qui satisfont à

$$n_{j-1} < p \leq n_j;$$

on a, d'après (20),

$$|Z_j^{(p)}(0)| \geq \left(\frac{n_j}{e}\right)^p, \text{ et, pour } i \geq j + 1, |Z_i^{(p)}(0)| \leq n_i^p.$$

D'où

$$|f^{(p)}(0)| \geq \frac{1}{e^p} \frac{n_j^p}{S(n_j)} - \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^p}{S(n_i)},$$

ce qui, combiné d'une part avec (17), d'autre part avec (22), donne

$$\frac{n_j^p}{S(n_j)} \leq e^p (\alpha^p + 2) A'_p.$$

Donc il existe $\mu > 1$ tel que

$$(23) \quad \frac{n_j^p}{S(n_j)} \leq \mu^p A'_p.$$

Cette inégalité vient d'être démontrée pour $n_{j-1} < p \leq n_j$; mais, d'après (18), elle a lieu aussi pour $p \leq n_{j-1}$. Finalement (23) a lieu pour tout $p \leq n_j$. On en déduit

$$S'_\mu(n_j) = \max_{p \leq n_j} \frac{n_j^p}{\mu^p A'_p} \leq S(n_j),$$

et ceci est précisément l'inégalité (14) qu'il fallait établir. Ainsi le lemme, et par suite le théorème III⁰, est complètement démontré.

5. Le problème de Carleman sur un intervalle fini, fermé ou semi-ouvert.

Il va être résolu par une méthode parallèle à celle qui a été suivie pour le cas de l'intervalle ouvert fini. Il nous suffira d'indiquer un schéma.

La condition

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A'_n}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty$$

est *suffisante* pour qu'une classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans une classe $\{A'_n\}_I$, *quel que soit l'intervalle I*. Cela résulte du § 3.

On va montrer qu'elle est *nécessaire* dans le cas où l'intervalle I , supposé *fini*, est *semi-ouvert* ou *fermé*.

Pour cela, on pose

$$U'_\lambda(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n \lambda^n A'_n},$$

et on démontre:

Théorème III^f. *Soit I un intervalle fini, semi-ouvert ou fermé. Si la classe $\{A_n\}_I$ est contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$, il existe un λ fini > 0 tel que l'on ait*

$$(2)' \quad U(r) \geq U'_\lambda(r).$$

Tout revient à démontrer un lemme analogue à celui utilisé pour le théorème III⁰. Étant donné une suite infinie croissante σ d'entiers, on définit une suite partielle $\{n_i\}$ par la condition: n_{i+1} est le premier entier de σ qui soit $> n_i$ et satisfasse aux conditions

$$(24) \quad n_{i+1} > \max \left(\frac{B_{n_i+1}}{B_p}, \frac{B'_{n_i+1}}{B'_p} \right) \text{ pour tout } p \leq n_i;$$

on a posé $B_n = \sqrt[n]{n^n A_n}$, $B'_n = \sqrt[n]{n^n A'_n}$.

De là on déduit, comme plus haut,

$$(25) \quad \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{n_i^{2p}}{U(n_i)} \leq 2 \min(p^p A_p, p^p A'_p) \text{ pour } p \leq n_j,$$

$$(26) \quad \frac{n_i^{2p}}{U(n_i)} \leq \min(p^p A_p, p^p A'_p) \text{ pour } p \leq n_{i-1}.$$

On suppose que l'intervalle I est contenu dans l'intervalle fermé $[-1, +1]$, et qu'il a en commun avec lui l'extrémité $x = +1$. On définit, sur l'intervalle $[-1, +1]$, et en particulier sur I , la fonction

$$(27) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T_{n_i}(x)}{U(n_i)},$$

et on étudie cette fonction en utilisant les inégalités connues, relatives aux polynomes de Tchebycheff,

$$(28) \quad p^p |T_n^{(p)}(x)| \leq \left(\frac{e}{2}\right)^p n^{2p} \text{ pour } -1 \leq x \leq +1 \text{ (} p \leq n),$$

$$(29) \quad p |T_n^{(p)}(1)| \geq \left(\frac{1}{2e}\right)^p n^{2p} \quad (p \leq n).$$

De la première on déduit

$$p^p |f^{(p)}(x)| \leq \left(\frac{e}{2}\right)^p \cdot 3 p^p A_p,$$

ce qui prouve que $f(x)$ appartient à la classe $\{A_n\}_I$.

Mais alors, d'après l'hypothèse, $f(x)$ appartient à la classe $\{A'_n\}_I$, ce qui entraîne l'existence d'un α tel que

$$(30) \quad |f^{(p)}(1)| \leq \alpha^p A'_p.$$

Or, soit j un indice quelconque ≥ 1 , et soit p tel que

$$n_{j-1} < p \leq n_j.$$

De (28), (29) et (26) on déduit

$$p^p |f^{(p)}(1)| \geq \frac{n_j^{2p}}{U(n_j)} - 2 \left(\frac{e}{2}\right)^p p^p A'_p,$$

ce qui, combiné avec (30), donne

$$(31) \quad \frac{n_j^{2p}}{U(n_j)} \leq \mu^p p^p A'_p,$$

μ étant un nombre convenable qu'on peut supposer > 1 . L'inégalité (31), valable pour $n_{j-1} < p \leq n_j$, est aussi valable pour $p \leq n_{j-1}$ d'après (26). Elle est donc valable pour $p \leq n_j$, ce qui entraîne

$$U'_\mu(n_j) = \max_{p \leq n_j} \frac{n_j^{2p}}{p^p \mu^p A'_p} \leq U(n_j). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Résumé des résultats.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans l'énoncé suivant.

Théorème fondamental. *Soit I un intervalle fini. Pour qu'une classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans une classe $\{A'_n\}_I$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^o}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty \text{ lorsque } I \text{ est ouvert,}$$

et

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^f}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty \text{ lorsque } I \text{ est semi-ouvert ou fermé.}$$

La condition (1) équivaut à

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^o}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty,$$

et la condition (2) à

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^f}{A'_n} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty.$$

Puisque les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A_n^f\}_I$ sont identiques sur tout intervalle, il en est ainsi en particulier pour un *ouvert*, et on peut appliquer (1) au cas où $A'_n = A_n^f$; il vient

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^o}{A_n^f} \right)^{\frac{1}{n}} < + \infty.$$

Ceci prouve que la condition (2) est plus forte que la condition (1), comme on pouvait s'y attendre (voir l'Introduction). Nous allons montrer que dans le cas où $A'_n = n!$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes (cf. le théorème de Mandelbrojt cité dans l'Introduction), mais qu'il est des cas où elles ne le sont pas.

Supposons $A'_n = n!$, ou plutôt, ce qui est aussi commode et revient au même, $A'_n = n^n$. On a alors

$$S'_\lambda(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^n}{\lambda^n n^n}, \quad U'_\lambda(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{\lambda^n n^{2n}}.$$

On a donc

$$e^{\alpha_1 r} \leq S'_\lambda(r) \leq e^{\alpha_2 r},$$

α_1 et α_2 étant des constantes positives qui dépendent de λ ; de même,

$$e^{\beta_1 r} \leq U'_\lambda(r) \leq e^{\beta_2 r}.$$

Cela posé, la condition (1) équivaut à $S(r) \geq S'_\lambda(r)$, c'est-à-dire à l'existence d'un α tel que

$$S(r) \geq e^{\alpha r};$$

de même (2) équivaut à l'existence d'un β tel que

$$U(r) \geq e^{\beta r}.$$

Or on a vu (§ 1) que $S(r) \leq U(r)$; donc (1) entraîne (2). Comme d'autre part (2) entraîne toujours (1), on voit que les conditions (1) et (2) sont équivalentes dans le cas $A'_n = n^n$.

Par ailleurs, l'un de nous¹ a donné l'exemple de deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ telles que les classes $\{A_n\}_I$ et $\{A'_n\}_I$ soient identiques sur tout intervalle ouvert, mais pas sur l'intervalle fermé $[-1, +1]$. Pour ces classes, la condition (1) est donc remplie, et la condition (2) ne l'est pas.

Terminons par la remarque suivante: pour qu'une classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans une classe $\{A'_n\}_I$ sur un intervalle *fermé* fini, il faut et il suffit que la classe $\{\sqrt[n]{A_n}\}_I$ soit contenue dans la classe $\{\sqrt[n]{A'_n}\}_I$ sur un intervalle *ouvert* fini. Pour que les fonctions d'une classe $\{A_n\}_I$ soient toutes analytiques, il faut et il suffit que les fonctions de la classe $\{\sqrt[n]{A_n}\}_I$ soient toutes analytiques.

¹ Voir H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives (à paraître aux Actualités scientifiques, chez Hermann à Paris); voir le § 6 de ce travail.