AUSGLEICHUNG NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE BEI GRUPPENWEISER ANORDNUNG DER BEOBACHTUNGEN.

Von

N. E. NÖRLUND

in Kopenhagen.

1. In der Ausgleichungsrechnung begnügt man sich nicht damit, die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_n$ zu bestimmen, sondern man sucht zugleich auch die relative Genauigkeit dieser Grössen zu finden. Oft ist es ausserdem von Bedeutung, den mittleren Fehler μ_F einer Funktion $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ der Unbekannten zu finden. Hierzu dient ein System von n^2 Multiplikatoren Q_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots n)$; sie sind die Elemente der Matrix, welche reziprok zu der aus den Koeffizienten der Normalgleichungen gebildeten quadratischen Matrix ist. Ein Ausgleichungsproblem kann als gelöst angesehen werden, wenn man die dazu gehörenden Multiplikatoren bestimmt hat. Wie bekannt hat man nämlich

$$\mu_F^2 = \mu^2 \sum Q_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_j} \tag{1.1}$$

wo μ der mittlere Fehler einer Beobachtung ist. Hieraus folgt insbesondere, dass der mittlere Fehler μ_{z_i} von z_i aus

$$\mu_{z_i}^2 = \mu^2 Q_{ii} \text{ für } i = 1, 2, \ldots n \tag{1.2}$$

bestimmt wird. Q_{ii} ist also das reziproke Gewicht von z_i, wenn das Gewicht einer Beobachtung gleich 1 gesetzt wird. Weiter gilt

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} P_i \text{ für } j = 1, 2, \ldots n \tag{1.3}$$

wo $P_1, P_2, \ldots P_n$ die linken Seiten in den Normalgleichungen sind. Die numerischen Werte der Grössen Q_{ij} können durch den von Gauss angegebenen Algorithmus bestimmt werden. Dieser führt aber zu weitläufigen und wenig übersichtlichen Rechnungen, und zwar besonders dann, wenn die Anzahl der Unbekannten gross ist. Die verhältnismässig wenigen Fälle, wo man imstande ist, Q_{ij} explizit als Funktion der in ein Ausgleichungsproblem eingehenden Parameter zu bestimmen, sind deshalb von Interesse, wenn man beurteilen will, wie das Gewicht einer Funktion der Unbekannten von diesen Parametern abhängt.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung hat Prof. I. Bonsdorff[1] den Fall betrachtet, wo zur Bestimmung der Differenzen zwischen n Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_n$ n Gruppen von r gleich genauen Beobachtungen $l_{i,1}, l_{i,2}, \ldots l_{i,r}$ vorliegen, die Fehlergleichungen von der Form

$$l_{i,s} + \lambda_{i,s} = k_i + z_{i+s-1} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots r \\ i = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

mit $z_{n+s} = z_n$ geben, und er hat die Frage aufgeworfen, wie das Gewicht der Unbekannten von den ganzen Zahlen n und r abhängt. Die Gruppenkonstanten k_i sind Orientierungsgrössen, die zu bestimmen kein Interesse darbietet; sie werden deshalb vorteilhafterweise eliminiert.

Im folgenden behandeln wir in § 2—12 den allgemeineren Fall, wo n Gruppen von m Beobachtungen $l_{i,1}, l_{i,2}, \ldots l_{i,m}$ vorliegen, die Fehlergleichungen von der Form

$$l_{i,s} + \lambda_{i,s} = k_i + \sum_{\nu=1}^{r} a_{s,\nu} z_{i+\nu-1} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots m \\ i = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

mit $z_{n+s} = z_s$ geben. Indem die Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_n$ so bestimmt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{i,s}^2$$

ein Minimum wird, wollen wir einfache Methoden zur Bestimmung aller Hilfsgrössen Q_{ij} angeben; ausserdem werden wir zeigen, dass sich Q_{ij} für $n \to \infty$ einem Grenzwert nähert. Die Multiplikatoren genügen einer linearen nicht homogenen Differenzengleichung. Wir werden beweisen, dass keine der Nullstellen für die zugehörige charakteristische Funktion $f(z)$ auf dem Rande des

[1] Verhandlungen der in Kaunas abgehaltenen 10. Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission, S. 120, 1938.

Einheitskreises liegt. Diese Eigenschaft setzt uns instand, Q_{ij} durch $f(z)$ auszudrücken.

In § 13—29 behandeln wir dann ausführlicher die Gleichungen (1. 4). Die charakteristische Funktion $f(z)$ hat in diesem Fall eine Nullstelle zweiter Ordnung im Punkte $z = 1$, während alle anderen Nullstellen einfach sind und einen von 1 verschiedenen absoluten Wert haben. Die Multiplikatoren können entweder mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung oder mit Hilfe einer bemerkenswerten Klasse von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten bestimmt werden. Auch werden wir zeigen, dass Q_{ij} durch die Lösungen gewisser linearer homogener Differenzengleichungen mit einfachen Anfangsbedingungen ausgedrückt werden kann.

KAPITEL I.

Herleitung der Gewichtsgleichungen.

2. Wir betrachten die $n \cdot m$ Fehlergleichungen (1. 5), die alle das Gewicht 1 haben sollen. Wir nehmen an, dass $m > r$ und $n > 2r - 2$ sowie dass die aus den Koeffizienten der Fehlergleichungen gebildete Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \tag{2. 1}$$

den Rang $r + 1$ hat. Wir bilden nun zuerst die Normalgleichung für k_i, die nach Division mit m

$$\frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} l_{i,s} = k_i + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu} z_{i+\nu-1}$$

gibt. Mit Hilfe dieser Gleichung eliminieren wir k_i aus den Fehlergleichungen (1. 5) und bekommen dann die reduzierten Fehlergleichungen

$$l_{i,j} + \lambda_{i,j} - \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} l_{i,s} = \sum_{\nu=1}^{r} \left(a_{j\nu} - \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} a_{s\nu} \right) z_{i+\nu-1} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \dots m \\ i = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}.$$

Indem man diese Gleichungen mit $a_{j\nu} - \frac{1}{m} \Sigma a_{s\nu}$ multipliziert und addiert, bekommen wir die partiellen Normalgleichungen. Da wir nur die rechten Seiten der

Gleichungen brauchen, begnügen wir uns damit, diese aufzuschreiben; sie haben folgende Form:

$$\sum_{\mu=1}^{r}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{s\mu}a_{s\nu}-\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} a_{s\mu}\sum_{s=1}^{m} a_{s\nu}\right)z_{i+\mu-1} \qquad \nu=1,2,\ldots r.$$

Wir finden im ganzen n solche Gruppen von r partiellen Normalgleichungen entsprechend $i=1,2,\ldots n$. Zu z_i gehört die 1. Gleichung in der $i$ten Gruppe, die 2. Gleichung in der $(i-1)$ten Gruppe, ... die $r$te Gleichung in der $(i-r+1)$ten Gruppe. Indem man diese r Gleichungen gliedweise addiert, erhält man die Normalgleichung für z_i, wovon die rechte Seite lautet

$$c_r z_i + c_{r-1}(z_{i+1}+z_{i-1}) + c_{r-2}(z_{i+2}+z_{i-2}) + \cdots + c_1(z_{i+r-1}+z_{i-r+1}). \tag{2. 2}$$

Das ganze System von Normalgleichungen erhält man dadurch, dass man i die Werte $1, 2, \ldots n$ gibt und sich daran erinnert, dass $z_{n\pm s}=z_{\pm s}$ ist. Hier haben wir kürzehalber gesetzt

$$c_{r-p}=\sum_{\nu=1}^{r-p}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu}a_{s,\nu+p}-\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu}\sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu+p}\right) \qquad p=0,1,\ldots r-1. \tag{2. 3}$$

Die Gewichtsgleichungen gehen nun aus den Normalgleichungen hervor, indem man deren rechte Seite gleich 0 oder 1 setzt. Aus (2. 2) folgt daher, dass die Gewichtsgleichungen folgende Form haben:

$$\begin{aligned} c_r Q_{i,j} + c_{r-1}(Q_{i+1,j}+Q_{i-1,j}) + c_{r-2}(Q_{i+2,j}+Q_{i-2,j}) + \cdots \\ + c_1(Q_{i+r-1,j}+Q_{i-r+1,j}) = \eta_{i,j} \end{aligned} \tag{2. 4}$$

wo

$$Q_{\pm i,j}=Q_{n\pm i,j} \tag{2. 5}$$

und

$$\eta_{i,j}=\begin{cases} 0 \text{ für } i\neq j \\ 1 \text{ für } i=j. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der n^2 Multiplikatoren Q_{ij} haben wir somit n^2 lineare Gleichungen, die man dadurch erhält, dass man in (2. 4) den Grössen i und j die Werte $1, 2, \ldots n$ gibt. Alle diese Gleichungen können zu den beiden Gleichungen (2. 4) und (2. 5) zusammengefasst werden. Aber (2. 4) ist eine lineare nicht homogene Differenzengleichung, und die Bestimmung der Multiplikatoren ist deshalb darauf reduziert, eine periodische Lösung der Differenzengleichung mit der Periode

n zu finden. Wir werden zur Lösung dieser Differenzengleichung eine sehr einfache Methode angeben, aber zuvor wollen wir einen für das folgende nützlichen Hilfsatz herleiten.

Die charakteristische Gleichung.

3. Unsere Differenzengleichung ist von der Ordnung $2(r-1)$. Aus ihren Koeffizienten bilden wir ein Polynom $f(z)$ vom Grade $2(r-1)$:

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} = \sum_{s=1}^{r-1} c_s(z^{r-s} + z^{-r+s}) + c_r. \tag{3. 1}$$

Wir nennen $f(z)$ die charakteristische Funktion, und die Gleichung

$$f(z) = 0$$

wird als charakteristische Gleichung bezeichnet. Diese ist offenbar eine reziproke Gleichung. Wir wollen beweisen, dass keine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung auf dem Einheitskreis liegt. Setzen wir

$$\alpha_s = a_{s1}x^{r-1} + a_{s2}x^{r-3} + a_{s3}x^{r-5} + \cdots + a_{sr}x^{-(r-1)}$$

$$\beta_s = a_{s1}x^{-(r-1)} + a_{s2}x^{-(r-3)} + a_{s3}x^{-(r-5)} + \cdots + a_{sr}x^{r-1}$$

dann ist

$$\alpha_s\beta_s = \sum_{\nu=1}^{r} a_{s,\nu}^2 + \sum_{\nu=1}^{r-1} a_{s,\nu}a_{s,\nu+1}(x^2 + x^{-2})$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{r-2} a_{s,\nu}a_{s,\nu+2}(x^4 + x^{-4}) + \cdots + a_{s,1}a_{s,r}(x^{2r-2} + x^{-2r+2}).$$

Aus dieser Beziehung in Verbindung mit (2. 3) folgt

$$\frac{f(x^2)}{x^{2(r-1)}} = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s\beta_s - \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} \alpha_s \sum_{s=1}^{m} \beta_s. \tag{3. 2}$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe der Identität[1]

$$m\sum_{s=1}^{m} \alpha_s\beta_s - \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \sum_{s=1}^{m} \beta_s = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}(\alpha_s - \alpha_p)(\beta_s - \beta_p) \tag{3. 3}$$

umgeformt werden.

[1] RAGNAR FRISCH: Sur les semi-invariants et moments employés dans l'étude des distributions statistiques, Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Hist.-Filos. Klasse 1926, No. 3, S. 26.

Setzen wir $x = e^{iw}$, wo w reell ist, und nehmen wir an, dass die Koeffizienten $a_{s\nu}$ in den Fehlergleichungen reell sind, so sind α_s und β_s konjugierte komplexe Zahlen, und wir erhalten

$$2me^{-2(r-1)iw}f(e^{2iw}) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}|\alpha_s - \alpha_p|^2.$$

Diese Summe von Quadraten kann nicht Null werden; denn hierzu wäre erforderlich, dass α_s einen von s unabhängigen konstanten Wert C hätte, das heisst, dass zwischen den Zahlen $a_{s\nu}$ lineare Beziehungen von der Form

$$a_{s1}e^{iw(r-1)} + a_{s2}e^{iw(r-3)} + \cdots + a_{sr}e^{-iw(r-1)} = C \qquad s = 1, 2, \ldots m$$

beständen. Hieraus würde aber folgen, dass der Rang für die Matrix (2. 1) $\leqq r$ wäre, was im Widerspruch zu unserer Voraussetzung steht. Folglich befriedigt die charakteristische Funktion die Ungleichung

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} > 0 \tag{3. 4}$$

auf dem Rande des Einheitskreises.

4. Die Determinante $\varDelta$ der Gewichtsgleichungen kann durch die charakteristische Funktion ausgedrückt werden. Man hat

$$\varDelta = \begin{vmatrix} c_r & c_{r-1} & c_{r-2} & \ldots & c_1 & 0 & 0 & \ldots & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{r-1} \\ c_{r-1} & c_r & c_{r-1} & \ldots & c_2 & c_1 & 0 & \ldots & 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{r-2} \\ c_{r-2} & c_{r-1} & c_r & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 & \ldots & 0 & 0 & c_1 & \ldots & c_{r-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r-1} & c_{r-2} & c_{r-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_r \end{vmatrix}. \tag{4. 1}$$

Alle Elemente in der Hauptdiagonale sind c_r, und jede Zeile geht aus der darüberstehenden durch zyklische Verschiebung der Elemente hervor. Multipliziert man diese Determinante, die von der Ordnung n ist, mit der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \ldots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{4. 2}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n = 1$$

sind, so findet man

$$\Delta D = \begin{vmatrix} \frac{f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} & \frac{\varepsilon_1 f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} & \ldots & \frac{\varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} \\ \frac{f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} & \frac{\varepsilon_2 f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} & \ldots & \frac{\varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{f(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^{r-1}} & \frac{\varepsilon_n f(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^{r-1}} & \ldots & \frac{\varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^{r-1}} \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\Delta = \frac{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)^{r-1}}. \tag{4.3}$$

Da aber

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = (-1)^{n-1}$$

ist, hat man

$$\Delta = (-1)^{(r-1)(n-1)} f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n). \tag{4.4}$$

Da wir nun bewiesen haben, dass die charakteristische Funktion auf dem Einheitskreise nicht verschwinden kann, sieht man, dass Δ für alle Werte von n von 0 verschieden ist. Die Gewichtsgleichungen haben deshalb *eine* und nur *eine* Lösung, und es gibt nur eine Lösung der Differenzengleichung (2.4), die periodisch mit der Periode n ist. Da Δ auch die Determinante der Normalgleichungen ist, folgt hieraus ausserdem, dass diese Gleichungen eine eindeutig bestimmte Lösung z_i haben.

Lösung der Differenzengleichung.

5. Wir wollen nun die Multiplikatoren $Q_{i,j}$ bestimmen. Wir setzen

$$P(Q_i) \equiv c_r Q_i + c_{r-1}(Q_{i+1} + Q_{i-1}) + \cdots + c_1(Q_{i+r-1} + Q_{i-r+1}).$$

Die Gleichungen (2.4) können dann so geschrieben werden:

$$P(Q_{ij}) = \eta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n). \tag{5.1}$$

Es seien wie oben ε_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ die $n$ten Einheitswurzeln. Man hat

$$P(\varepsilon_\nu^{r-1+i-j}) = \varepsilon_\nu^{r-1+i-j}(c_r + c_{r-1}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_\nu^{-1}) + \cdots + c_1(\varepsilon_\nu^{r-1} + \varepsilon_\nu^{-r+1})) = \varepsilon_\nu^{i-j} f(\varepsilon_\nu).$$

Wir wollen zeigen, dass

$$Q_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu^{r-1+i-j}}{f(\varepsilon_\nu)}. \tag{5.2}$$

Dieser Ausdruck kann nie sinnlos werden, weil der Nenner $f(\varepsilon_\nu)$ nach dem, was wir eben gesehen haben, nicht verschwinden kann. Der Ausdruck (5.2) stellt eine periodische Funktion von i mit der Periode n dar, weil $\varepsilon_\nu^n = 1$. Setzt man (5.2) in (5.1) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} P(Q_{ij}) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(\varepsilon_\nu^{r-1+i-j})}{f(\varepsilon_\nu)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^{i-j} = \eta_{ij}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (5.2) befriedigt also die Differenzengleichung. Ausführlicher kann (5.2) so geschrieben werden:

$$Q_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu^{i-j}}{c_r + c_{r-1}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_\nu^{-1}) + \cdots + c_1(\varepsilon_\nu^{r-1} + \varepsilon_\nu^{-r+1})}.$$

Setzt man

$$\varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}$$

und ersetzt ν durch $n - \nu$, so erhält man durch gliedweise Addition der beiden dadurch gefundenen Gleichungen

$$Q_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{2\pi\nu}{n}(i-j)}{c_r + 2c_{r-1}\cos\frac{2\pi\nu}{n} + 2c_{r-2}\cos\frac{4\pi\nu}{n} + \cdots + 2c_1\cos\frac{2(r-1)\pi\nu}{n}}. \tag{5.3}$$

Die n^2 Grössen Q_{ij} sind nicht alle verschieden. Aus dem letzten Ausdruck geht hervor, dass Q_{ij} eine symmetrische Funktion der beiden Variablen i und j ist, die nur von der Differenz $i - j$ abhängt, so dass $Q_{i+j,j}$ von j unabhängig ist; ausserdem ist es eine gerade Funktion von i. Es genügt folglich, einen einzigen Wert von j, z. B. $j = 1$, zu betrachten, und man hat

$$Q_{i+1,1} = Q_{n-i+1,1}.$$

Sämtliche Multiplikatoren Q_{ij} sind also gleich einem der folgenden

$$Q_{1,1}\ Q_{2,1}\ Q_{3,1} \ldots Q_{\frac{n+1}{2},1}$$

wenn n ungerade ist, und gleich einem der folgenden:

$$Q_{1,1}\ Q_{2,1}\ Q_{3,1}\ \ldots\ Q_{\frac{n}{2}+1,1}$$

wenn n gerade ist.

Aus (5.2) folgt

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} = \frac{1}{f(1)} \tag{5.4}$$

weil

$$1 + \varepsilon_\nu + \varepsilon_\nu^2 + \cdots + \varepsilon_\nu^{n-1} = 0$$

wenn ε_ν eine von 1 verschiedene $n$te Einheitswurzel ist.

Setzt man in (5.3) $j = i$, so bekommt man für das reziproke Gewicht Q_{ii} von z_i

$$Q_{ii} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{c_r + 2\,c_{r-1} \cos \frac{2\pi\nu}{n} + \cdots + 2\,c_1 \cos \frac{2\,(r-1)\,\pi\nu}{n}}. \tag{5.5}$$

Wie man erwarten musste, ist diese Grösse positiv, was aus der Ungleichung (3.4) hervorgeht. Sie ist unabhängig von i, so dass alle z_i dasselbe Gewicht haben und

$$Q_{11} = Q_{22} = \cdots = Q_{nn}.$$

Lassen wir $n \to \infty$ gehen, dann konvergiert Q_{ij} gegen einen endlichen Grenzwert. Aus (5.3) bekommt man nämlich

$$\lim_{n\to\infty} Q_{ij} = \int_0^1 \frac{\cos 2\,(i-j)\,\pi x\, dx}{c_r + 2\,c_{r-1} \cos 2\pi x + 2\,c_{r-2} \cos 4\,\pi x + \cdots + 2\,c_1 \cos 2\,(r-1)\,\pi x}. \tag{5.6}$$

Dieses Integral ist konvergent, weil der Nenner im Integranden im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ infolge (3.4) nicht Null werden kann.

6. Der soeben gefundene Ausdruck (5.3) ist zur Berechnung der Grössen Q_{ij} gut geeignet. Man kann jedoch einwenden, dass man hierbei Gebrauch von irrationalen Grössen macht, um eine rationale Funktion der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_r$ in der charakteristischen Gleichung zu finden. Wir wollen deshalb andere Ausdrücke für Q_{ij} herleiten, die explizit die Multiplikatoren in rationaler Form geben. Aus den n^2 linearen Gleichungen, die man dadurch erhält, dass man in (2.4) i und j die Werte $1, 2, \ldots n$ gibt, findet man Q_{ij} als ein Verhältnis zwischen zwei Determinanten. Diese sind aber von so hoher Ordnung, dass sie

unbequem zu benutzen sind. Es liegt nahe, dass man die Ordnung zu reduzieren versucht, und zwar mit Hilfe eines Systems partikulärer Lösungen der zur Differenzengleichung (2. 4) gehörenden homogenen Gleichung mit passend gewählten Anfangsbedingungen, die eine bequeme Berechnung dieser Grössen erlauben.

Die Gleichung (4. 4) zeigt, dass Δ bis auf das Vorzeichen die Resultante von $f(z)$ und $z^n - i$ ist. Die Resultante kann aber auch in der bekannten Sylvesterschen Determinantenform geschrieben werden:

$$\begin{array}{r} n \text{ Zeilen} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right. \\ 2r-2 \text{ Zeilen} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right. \end{array} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_r & \ldots & c_2 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{r-1} & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & \ldots & c_{r-2} & \ldots & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_1 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} . \tag{6.1}$$

Diese Determinante der Ordnung $n + 2r - 2$ ist gleich $f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)$. Wenn man zur $i$ten Spalte die $(n+i)$te Spalte addiert $(i = 1, 2, \ldots 2r-2)$, so entsteht eine Determinante, in welcher alle Elemente in den $2r-2$ letzten Zeilen 0 sind, ausser dem Element in der Hauptdiagonale, das 1 ist. Wir können deshalb die $2r-2$ letzten Zeilen und Spalten streichen und erhalten dadurch eine Determinante der Ordnung n, die sich von Δ nur durch die Reihenfolge der Zeilen und Spalten unterscheidet. Wir können aber die obige Determinante auch auf folgende Weise reduzieren. Es seien $A_\nu^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots 2r-3)$ Zahlen, die der Differenzengleichung

$$c_r A_\nu^{(i)} + \sum_{s=1}^{r-1} c_{r-s} \left(A_{\nu+s}^{(i)} + A_{\nu-s}^{(i)} \right) = 0 \tag{6.2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$A_\nu^{(i)} = \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 0, 1, 2, \ldots 2r-3 \tag{6.3}$$

genügen.

Im folgenden wollen wir $c_1 \neq 0$ annehmen. Unsere Bedingungen bestimmen dann $A_\nu^{(i)}$ eindeutig für alle ν. In der Determinante (6. 1) multiplizieren wir nun die νte Spalte mit $A_{\nu-1}^{(i-1)}$, wo ν die Werte $1, 2, \ldots n + 2r - 2$ annimmt; danach addieren wir zur $i$ten Spalte alle anderen Spalten. Diese Addition wird $2r-2$ mal ausgeführt, indem wir i der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots 2r-2$ geben. In der dadurch entstehenden Determinante sind in den $2r-2$ ersten Spalten alle Elemente Null, ausser denjenigen, die in den $2r-2$ letzten Zeilen stehen. Diese Determinante ist deshalb gleich der aus den letztgenannten Elementen gebildeten Determinante von der Ordnung $2r-2$ multipliziert mit deren algebraischem Komplement, das eine Determinante der Ordnung n ist, worin alle Elemente über der Hauptdiagonale Null sind, während die Elemente in der Hauptdiagonale alle c_1 sind. Die letztgenannte Determinante ist deshalb gleich c_1^n, und wir finden die Gleichung

$$f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n)=c_1^n\begin{vmatrix} A_n^{(0)}-1 & A_n^{(1)} & \ldots & A_n^{(2r-3)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)}-1 & \ldots & A_{n+1}^{(2r-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n+2r-3}^{(0)} & A_{n+2r-3}^{(1)} & \ldots & A_{n+2r-3}^{(2r-3)}-1 \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Da die linke Seite infolge (3. 4) von Null verschieden ist, muss die Determinante auf der rechten Seite ebenfalls von Null verschieden sein. Es sei nun p eine ganze Zahl im Intervall $-(r-2)\leqq p\leqq n+r-2$. Wir wollen zeigen, dass

$$Q_{p+j,j}=-\frac{1}{c_1}\frac{\begin{vmatrix} A_n^{(0)}-1 & A_n^{(1)} & \ldots & A_n^{(2r-4)} & A_n^{(2r-3)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)}-1 & \ldots & A_{n+1}^{(2r-4)} & A_{n+1}^{(2r-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n+2r-4}^{(0)} & A_{n+2r-4}^{(1)} & \ldots & A_{n+2r-4}^{(2r-4)}-1 & A_{n+2r-4}^{(2r-3)} \\ A_{p+r-2}^{(0)} & A_{p+r-2}^{(1)} & \ldots & A_{p+r-2}^{(2r-4)} & A_{p+r-2}^{(2r-3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_n^{(0)}-1 & A_n^{(1)} & \ldots & A_n^{(2r-3)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)}-1 & \ldots & A_{n+1}^{(2r-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n+2r-3}^{(0)} & A_{n+2r-3}^{(1)} & \ldots & A_{n+2r-3}^{(2r-3)}-1 \end{vmatrix}}. \tag{6.5}$$

Wenn p ausserhalb des genannten Intervalls liegt, wird $Q_{p+j,j}$ durch die Periodizitätsbedingung (2. 5) bestimmt. Wenn also z. B. p dem Intervall $-(r-2)-n\leqq p\leqq r-2$ angehört, ist auf der rechten Seite in (6. 5) p durch $p+n$ zu ersetzen. Wir bekommen somit zwei verschiedene Ausdrücke für $Q_{p+j,j}$, sofern $-(r-2)\leqq p\leqq r-2$, aber die Differenz zwischen diesen Ausdrücken ist ein

Bruch von der Form (6. 5), wo im Zähler die Elemente der letzten Zeile zu ersetzen sind durch beziehungsweise

$$A^{(0)}_{n+p+r-2} - A^{(0)}_{p+r-2},\quad A^{(1)}_{n+p+r-2} - A^{(1)}_{p+r-2},\ \ldots\ A^{(2r-3)}_{n+p+r-2} - A^{(2r-3)}_{p+r-2}.$$

Die Determinante im Zähler enthält dann zwei gleiche Zeilen und ist folglich Null.

In $Q_{p+j,j}$ geben wir nun p die Werte $i-j,\ i-j\pm 1, \ldots\ i-j\pm(r-1)$ und setzen die aus (6. 5) hergeleiteten Ausdrücke in die Differenzengleichung (2. 4) ein. Die linke Seite dieser Gleichung kann dann zu einem Bruch von der Form (6. 5) zusammengezogen werden, mit dem Unterschied, dass in der Zählerdeterminante für $i \neq j$ alle Elemente der letzten Zeile durch Null zu ersetzen sind, weil die Zahlen $A^{(i)}_{\nu}$ die Differenzengleichung (6. 2) befriedigen. Wenn dagegen $i=j$, so sind die Elemente der letzten Zeile zu ersetzen durch beziehungsweise

$$c_1(A^{(0)}_{2r-3} - A^{(0)}_{n+2r-3}),\quad c_1(A^{(1)}_{2r-3} - A^{(1)}_{n+2r-3}),\ \ldots\ c_1(A^{(2r-3)}_{2r-3} - A^{(2r-3)}_{n+2r-3})$$

wie man dadurch einsieht, dass man (6. 5) für den einen Wert $p=r-1$ benutzt, und für die übrigen in Betracht kommenden Werte p durch $p+n$ ersetzt. Aber diese Elemente sind beziehungsweise gleich

$$-c_1 A^{(0)}_{n+2r-3},\quad -c_1 A^{(1)}_{n+2r-3},\ \ldots\quad -c_1 A^{(2r-4)}_{n+2r-3},\quad -c_1(A^{(2r-3)}_{n+2r-3} - 1).$$

Die Determinante im Zähler ist somit gleich der Determinante im Nenner multipliziert mit $-c_1$, und wir finden deshalb, dass die linke Seite von (2. 4) gleich 1 ist. Damit ist bewiesen, dass der Ausdruck (6. 5) die Beziehungen (2. 4) und (2. 5) befriedigt, und da wir oben gesehen haben, dass diese Gleichungen nur eine Lösung haben, muss die rechte Seite von (6. 5) in dem angegebenen Intervall $Q_{p+j,j}$ darstellen.

Aus (6. 2) und (6. 3) folgt, dass man zur Bestimmung der Elemente in der letzten Spalte der Determinanten in (6. 5) folgende Gleichungen hat:

$$\begin{aligned} &c_1 A^{(2r-3)}_{2r-2} + c_2 = 0 \\ &c_1 A^{(2r-3)}_{2r-1} + c_2 A^{(2r-3)}_{2r-2} + c_3 = 0 \\ &c_1 A^{(2r-3)}_{2r} + c_2 A^{(2r-3)}_{2r-1} + c_3 A^{(2r-3)}_{2r-2} + c_4 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6. 6}$$

woraus man leicht der Reihe nach alle Zahlen $A^{(2r-3)}_{\nu}$ bestimmen kann, da c_1 infolge Voraussetzung von Null verschieden ist. Die Elemente in den übrigen Spalten befriedigen ähnliche Systeme von Rekursionsformeln. Es ist aber leichter, sie mit Hilfe der Zahlen $A_\nu^{(2r-3)}$ zu berechnen. Aus den Anfangsbedingungen (6. 3) folgt nämlich:

$$c_1 A_n^{(2r-3-i)} = c_1 A_{n+i}^{(2r-3)} + c_2 A_{n+i-1}^{(2r-3)} + \cdots + c_{i+1} A_n^{(2r-3)} \tag{6.7}$$

$$c_1 A_n^{(i)} = - c_1 A_{n-i-1}^{(2r-3)} - c_2 A_{n-i}^{(2r-3)} - \cdots - c_{i+1} A_{n-1}^{(2r-3)} \tag{6.8}$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots r-1$, woraus insbesondere für $i = 0$ hervorgeht

$$A_n^{(0)} = - A_{n-1}^{(2r-3)}. \tag{6.9}$$

Aus der Definition von $A_\nu^{(0)}$ folgt unmittelbar, dass diese Zahlen Koeffizienten in der Reihenentwicklung

$$\frac{c_1}{f(z)} = - \sum_{\nu=2r-2}^{\infty} \frac{A_\nu^{(0)}}{z^\nu} \tag{6.10}$$

sind, die konvergiert, wenn $|z|$ grösser ist als der absolute Wert der absolut grössten Wurzel für die charakteristische Gleichung.

Die Resultante zweier Polynome.

7. Wir wollen einen anderen noch einfacheren Ausdruck für $Q_{p+j,j}$ herleiten. Um ihn zu erhalten, betrachten wir zuerst zwei willkürliche Polynome $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ vom Grade m und n:

$$\psi(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + c_2 z^{m-2} + \cdots + c_m, \qquad c_0 \neq 0$$
$$\varphi(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n, \qquad b_0 \neq 0.$$

Für ihre Resultante $R_{\varphi,\psi}$ hat man den bekannten Determinantenausdruck

$$R_{\varphi,\psi} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \ldots & c_1 & c_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_m & c_{m-1} & \ldots & c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_m & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_2 & c_1 & c_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \text{ Zeilen} \end{array} \tag{7.1}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $c_m \neq 0$, und entwickeln den Bruch $\varphi : \psi$ nach wachsenden Potenzen von z:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu z^\nu. \tag{7.2}$$

Diese Reihe ist konvergent, wenn $|z|$ kleiner ist als der absolute Wert der absolut kleinsten Wurzel von $\psi(z) = 0$. Die Koeffizienten B_ν befriedigen die Differenzengleichung:

$$c_m B_\nu + c_{m-1} B_{\nu-1} + \cdots + c_0 B_{\nu-m} = b_{n-\nu} \tag{7.3}$$

und die Anfangsbedingungen

$$B_{-1} = B_{-2} = \cdots = B_{-m} = 0.$$

Für $\nu > n$ soll $b_{n-\nu}$ Null sein.

Die Determinante (7.1) kann auf folgende Weise reduziert werden. Von der $(n+1)$ten Zeile subtrahieren wir die 1., 2., ... $n$te Zeile multipliziert beziehungsweise mit $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$. Dadurch werden die n ersten Elemente in der $(n+1)$ten Zeile Null. In der ersten Spalte sind dann alle Elemente Null, ausser dem ersten, das gleich c_m ist. Wir können dann die Ordnung dadurch reduzieren, dass wir die 1. Zeile und 1. Spalte streichen und die Determinante mit c_m multiplizieren. Auf die so entstandene Determinante wird dieselbe Operation angewendet: man subtrahiert also von der $(n+1)$ten Zeile die 1., 2., ... $(n-1)$te Zeile, beziehungsweise mit $B_0, B_1, \ldots B_{n-2}$ multipliziert, wonach die Ordnung dadurch reduziert wird, dass man die 1. Zeile und 1. Spalte streicht und mit c_m multipliziert. Diese Operation wird q mal ausgeführt, wo q die kleinste der Zahlen n und m ist. Die rechte Seite von (7.1) wird dadurch reduziert auf c_m^q, multipliziert mit einer Determinante, die von der Ordnung m ist, wenn $n \leqq m$. Wenn aber $n > m$, so ist diese Determinante von der Ordnung n, und sie kann sofort auf eine Determinante der Ordnung m reduziert werden, indem man die 1. Zeile und 1. Spalte $(n-m)$ mal streicht. Die dadurch entstandene Determinante ist gleich dem Produkt der beiden folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} B_n & B_{n-1} & B_{n-2} \ldots B_{n-m+1} \\ B_{n+1} & B_n & B_{n-1} \ldots B_{n-m+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ B_{n+m-1} & B_{n+m-2} & \ldots B_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_m & 0 & 0 \ldots 0 \\ c_{m-1} & c_m & 0 \ldots 0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \ldots c_m \end{vmatrix}.$$

Im letzten Faktor sind alle Elemente über der Hauptdiagonale Null, und er ist deshalb gleich c_m^m. Die Gleichung (7. 1) kann also reduziert werden auf

$$R_{\varphi,\psi} = c_m^{m+n} \begin{vmatrix} B_n & B_{n-1} & B_{n-2} \ldots B_{n-m+1} \\ B_{n+1} & B_n & B_{n-1} \ldots B_{n-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n+n-1} & B_{n+m-2} & \ldots B_n \end{vmatrix}. \tag{7. 4}$$

Man könnte auch von der Voraussetzung über c_m absehen und den Bruch $\varphi:\psi$ nach fallenden Potenzen von z entwickeln:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = z^{n-m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{z^\nu}. \tag{7. 5}$$

Diese Reihe ist konvergent, wenn $|z|$ grösser ist als der absolute Wert der absolut grössten Wurzel von $\psi(z) = 0$. Die Koeffizienten C_ν werden aus den Gleichungen

$$c_0 C_0 = b_0$$
$$c_0 C_1 + c_1 C_0 = b_1$$
$$c_0 C_2 + c_1 C_1 + c_2 C_0 = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

bestimmt, die zusammengefasst werden können zu der einen Gleichung

$$c_0 C_\nu + c_1 C_{\nu-1} + c_2 C_{\nu-2} + \cdots + c_m C_{\nu-m} = b_\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{7. 6}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$C_{-1} = C_{-2} = \cdots = C_{-m} = 0 \tag{7. 7}$$

und mit der Voraussetzung $b_\nu = 0$ für $\nu > n$.

In der Determinante (7. 1) wollen wir nun von der $(n+m)$ten Zeile die $n$te, $(n-1)$te, ... 1. Zeile multipliziert beziehungsweise mit $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$, subtrahieren. Dadurch werden die n letzten Elemente in der $(n+m)$ten Zeile alle Null. In der letzten Spalte sind dann alle Elemente Null ausser dem, das in der $n$ten Zeile steht und gleich c_0 ist. Wir können dann die Ordnung dadurch reduzieren, dass wir die $n$te Zeile und die $(n+m)$te Spalte streichen und die Determinante mit c_0 multiplizieren. Auf die so entstandene Determinante wird dieselbe Operation angewendet; von der $(n+m-2)$ten Zeile subtrahiert man die

$(n-1)$te, $(n-2)$te, ... 1. Zeile, multipliziert beziehungsweise mit $C_0, C_1, \ldots C_{n-2}$, wonach die Ordnung dadurch reduziert wird, dass man die $(n-1)$te Zeile und die $(n+m-1)$te Spalte streicht und mit c_0 multipliziert. So setzt man fort, bis wir eine Determinante der Ordnung m bekommen. Diese ist gleich dem Produkt der beiden folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & C_{n-2} \ldots & C_{n-m+1} \\ C_{n+1} & C_n & C_{n-1} \ldots & C_{n-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \\ C_{n+m-1} & C_{n+m-2} & \ldots\ldots & C_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \ldots & c_{m-1} \\ 0 & c_0 & c_1 \ldots & c_{m-2} \\ 0 & 0 & c_0 \ldots & c_{m-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & c_0 \end{vmatrix}.$$

In der letzten Determinante sind alle Elemente unter der Hauptdiagonale Null; sie ist deshalb gleich c_0^m, und die Gleichung (7. 1) reduziert sich also auf[1]

$$R_{\psi,\varphi} = c_0^{n+m} \begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & C_{n-2} \ldots & C_{n-m+1} \\ C_{n+1} & C_n & C_{n-1} \ldots & C_{n-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+m-1} & C_{n+m-2} & \ldots\ldots & C_n \end{vmatrix}. \tag{7. 8}$$

Diese Determinante ist von der Ordnung m. Wenn $c_m = 0$, kann man die Ordnung auf $m-1$ reduzieren, und wenn $c_m = c_{m-1} = \ldots = c_{m-p+1} = 0$, während $c_{m-p} \neq 0$, findet man bei Anwendung von (7. 6), dass

$$R_{\psi,\varphi} = c_0^{n+m-p}\, b_n^p \begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} \ldots & C_{n-m+p+1} \\ C_{n+1} & C_n \ldots & C_{n-m+p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+m-p-1} & \ldots\ldots & C_n \end{vmatrix}.$$

Man kann die vorhergehende Schlussweise auch umkehren und die Gleichung (7. 8) dadurch beweisen, dass man das Produkt der beiden folgenden Determinanten von der Ordnung $n+m$ bildet

[1] Für den Fall $n < m$ siehe E. NETTO, Vorlesungen über Algebra, Leipzig 1896, Bd. I, S. 166—167. Diese Voraussetzung ist jedoch im folgenden nicht erfüllt.

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+m-1} \\
0 & C_0 & C_1 & \dots & C_{n-2} & C_{n-1} & C_n & \dots & C_{n+m-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-m} & C_{n-m+1} & C_{n-m+2} & \dots & C_n
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & c_m & c_{m-1} & \dots & c_1 & c_0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & c_0
\end{vmatrix}.$$

Diese Produktdeterminante unterscheidet sich von der rechten Seite in (7. 1) nur dadurch, dass die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \dots$ und $c_0, c_1, c_2, \dots$ in umgekehrter Reihenfolge geschrieben sind, und man bestätigt leicht, dass sie gleich dieser Determinante multipliziert mit $(-1)^{mn}$ und damit gleich $R_{\psi,\varphi}$ ist.

Andere Determinantenausdrücke für Q.

8. Setzen wir nun $m = 2(r-1)$ und

$$\psi(z) = f(z) \qquad \varphi(z) = z^n - 1$$

so nehmen die Gleichungen (7. 4) und (7. 8) beide die Form

$$\prod_{\nu=1}^{n} f(\varepsilon_\nu) = c_1^{n+2r-2} \begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & \dots & C_{n-2r+3} \\ C_{n+1} & C_n & \dots & C_{n-2r+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+2r-3} & & \dots & C_n \end{vmatrix} \tag{8. 1}$$

an, wo die Zahlen C_ν für $\nu > -(r-1)$ die Differenzengleichung

$$c_r C_\nu + \sum_{s=1}^{r-1} c_{r-s}(C_{\nu+s} + C_{\nu-s}) = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu \neq n-r+1 \\ -1 \text{ für } \nu = n-r+1 \end{cases} \tag{8. 2}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$C_{-\nu} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \dots 2(r-1) \tag{8. 3}$$

$$C_0 = \frac{1}{c_1}$$

befriedigen. Diese Differenzengleichung gibt uns ein einfaches Mittel zur Berechnung der Zahlen C_ν, die auch aus der damit äquivalenten Gleichung

$$\frac{1-z^n}{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu \tag{8. 4}$$

bestimmt werden können.

Aus der Ungleichung (3. 4) folgt, dass die Determinante auf der rechten Seite in (8. 1) von Null verschieden ist. Die Grössen $Q_{p+j,j}$ können dann durch einen Bruch von der Form

$$Q_{p+j,j} = -\frac{1}{c_1} \frac{\begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & \dots & C_{n-2r+3} \\ C_{n+1} & C_n & \dots & C_{n-2r+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+2r-4} & C_{n+2r-5} & \dots & C_{n-1} \\ C_{p+r-2} & C_{p+r-3} & \dots & C_{p-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & \dots & C_{n-2r+3} \\ C_{n+1} & C_n & \dots & C_{n-2r+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+2r-3} & C_{n+2r-4} & \dots & C_n \end{vmatrix}} \tag{8. 5}$$

dargestellt werden, falls $-(r-2) \leqq p < n-(r-2)$. Da Q die Periode n hat, ist damit Q für alle ganzzahligen Werte von p festgelegt. Die Richtigkeit der letzten Gleichung bestätigt sich leicht dadurch, dass man die rechte Seite in (2. 4) einträgt und ganz wie in § 6 weiterschliesst.

Bei der Herleitung der Ausdrücke (6. 5) und (8. 5) für $Q_{p+j,j}$ haben wir nur benutzt, dass die charakteristische Gleichung vom Grade $2r-2$ ist und dass keine ihrer Wurzeln auf dem Rande des Einheitskreises liegt. Es liegt nahe, daraus Vorteil zu ziehen, dass diese Gleichung eine reziproke Gleichung ist, und diese Tatsache zu benutzen, um die Ordnung für die betreffenden Determinanten durch passende Wahl der Anfangsbedingungen weiter zu reduzieren. Es sei $B_\nu^{(i)}$ $(i = 0, 1, \dots r-2)$ eine gerade Funktion der ganzen Zahl ν, welche die Differenzengleichung

$$c_r B_\nu^{(i)} + \sum_{s=1}^{r-1} c_{r-s} \left(B_{\nu+s}^{(i)} + B_{\nu-s}^{(i)}\right) = 0 \tag{8. 6}$$

und die Anfangsbedingungen

$$B_\nu^{(i)} = \eta_{\nu,i} \qquad \nu, i = 0, 1, 2, \dots r-2 \tag{8. 7}$$

befriedigt, mit der Ausnahme, dass $B_0^{(0)}$ gleich 2 sein soll. Dass ein solches System von Lösungen vorhanden ist, geht daraus hervor, dass die Gleichungen, die für $\nu > 0$ die Grösse $B_\nu^{(i)}$ als Funktion der Anfangswerte bestimmen, mit den Gleichungen übereinstimmen, die $B_{-\nu}^{(i)}$ bestimmen. Aus (8. 6) erhält man speziell für $\nu = 0$

$$B_{r-1}^{(i)} = -\frac{c_{r-i}}{c_1}.$$

$B_\nu^{(i)}$ ist also festgelegt für $2r-2$ aufeinanderfolgende Werte, nämlich für $\nu = 0$, ± 1, ± 2, ... $\pm (r-2)$, $r-1$ und damit für alle Werte von ν. Für die Grössen $Q_{p+j,j}$ hat man nun folgenden Ausdruck

$$Q_{p+j,j} = -\frac{1}{c_1}\frac{\begin{vmatrix} B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & B_{n+1}^{(1)} - B_{n-1}^{(1)} & \dots & B_{n+1}^{(r-2)} - B_{n-1}^{(r-2)} \\ B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & B_{n+2}^{(1)} - B_{n-2}^{(1)} & \dots & B_{n+2}^{(r-2)} - B_{n-2}^{(r-2)} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ B_{n+r-2}^{(0)} - B_{n-r+2}^{(0)} & B_{n+r-2}^{(1)} - B_{n-r+2}^{(1)} & \dots & B_{n+r-2}^{(r-2)} - B_{n-r+2}^{(r-2)} \\ B_{n-p}^{(0)} + B_{p}^{(0)} & B_{n-p}^{(1)} + B_{p}^{(1)} & \dots & B_{n-p}^{(r-2)} + B_{p}^{(r-2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & B_{n+1}^{(1)} - B_{n-1}^{(1)} & \dots & B_{n+1}^{(r-2)} - B_{n-1}^{(r-2)} \\ B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & B_{n+2}^{(1)} - B_{n-2}^{(1)} & \dots & B_{n+2}^{(r-2)} - B_{n-2}^{(r-2)} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ B_{n+r-1}^{(0)} - B_{n-r+1}^{(0)} & B_{n+r-1}^{(1)} - B_{n-r+1}^{(1)} & \dots & B_{n+r-1}^{(r-2)} - B_{n-r+1}^{(r-2)} \end{vmatrix}} \tag{8. 8}$$

wofern $-(r-2) \leqq p \leqq n+r-2$. Da Q eine periodische Funktion von p mit der Periode n ist, ist Q damit für alle ganzzahligen Werte von p festgelegt. Wenn z. B. $-n-(r-2) \leqq p \leqq r-2$, so sind die Elemente der letzten Zeile im Zähler zu ersetzen durch beziehungsweise

$$B_{n+p}^{(0)} + B_p^{(0)},\ B_{n+p}^{(1)} + B_p^{(1)},\ \dots\ B_{n+p}^{(r-2)} + B_p^{(r-2)}.$$

Wir bekommen also zwei verschiedene Ausdrücke für $Q_{p+j,j}$, wenn $-(r-2) \leqq p \leqq r-2$, aber die Differenz zwischen diesen Ausdrücken ist ein Bruch von der Form (8. 8), wo im Zähler die Elemente der letzten Zeile zu ersetzen sind durch beziehungsweise

$$B_{n+p}^{(0)} - B_{n-p}^{(0)},\ B_{n+p}^{(1)} - B_{n-p}^{(1)},\ \dots\ B_{n+p}^{(r-2)} - B_{n-p}^{(r-2)}.$$

Der Zähler ist dann eine Determinante, die entweder zwei gleiche Zeilen hat oder zwei Zeilen, deren Elemente gleich gross sind mit entgegengesetzten Vorzeichen, oder eine Zeile, worin alle Elemente Null sind. Wir werden später zeigen, dass der Nenner von Null verschieden ist.

Die Gleichung (8. 8) geht unmittelbar aus der Definition von $B_\nu^{(i)}$ dadurch hervor, dass die rechte Seite in (2. 4) eingetragen und wie in § 6 geschlossen wird.

Betrachten wir ferner ein anderes System von Lösungen $D_\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots r-1$) der Differenzengleichung

$$c_r D_\nu^{(i)} + \sum_{s=1}^{r-1} c_{r-s}(D_{\nu+s}^{(i)} + D_{\nu-s}^{(i)}) = 0 \tag{8. 9}$$

die durch die Anfangsbedingungen

$$D_{\pm\nu}^{(i)} = \pm\, \eta_{\nu, i} \qquad \nu, i = 1, 2, \ldots r-1 \tag{8. 10}$$

definiert sind. Setzen wir $\nu = 0$ in (8. 9), so erhält man

$$c_r D_0^{(i)} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots r-1. \tag{8. 11}$$

Für c_r haben wir infolge (2. 3) und (3. 3) den Ausdruck

$$c_r = \sum_{\nu=1}^{r}\left[\sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu}^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{s,\nu}\right)^2\right] = \frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}(a_{s,\nu} - a_{p,\nu})^2.$$

Diese Summe von Quadraten kann nicht verschwinden, und c_r ist deshalb immer positiv. Aus der Gleichung (8. 11) folgt deshalb, dass $D_0^{(i)}$ Null ist.

Da die charakteristische Gleichung eine reziproke Gleichung ist, folgt aus den Anfangsbedingungen, dass $D_\nu^{(i)}$ eine ungerade Funktion von ν ist. Für die Grössen $Q_{p+j,j}$ findet man dann leicht folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{\begin{vmatrix} D_{n+1}^{(1)} - D_{n-1}^{(1)} - 2 & D_{n+1}^{(2)} - D_{n-1}^{(2)} & \ldots & D_{n+1}^{(r-2)} - D_{n-1}^{(r-2)} & D_{n+1}^{(r-1)} - D_{n-1}^{(r-1)} \\ D_{n+2}^{(1)} - D_{n-2}^{(1)} & D_{n+2}^{(2)} - D_{n-2}^{(2)} - 2 & \ldots & D_{n+2}^{(r-2)} - D_{n-2}^{(r-2)} & D_{n+2}^{(r-1)} - D_{n-2}^{(r-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n+r-2}^{(1)} - D_{n-r+2}^{(1)} & D_{n+r-2}^{(2)} - D_{n-r+2}^{(2)} & \ldots & D_{n+r-2}^{(r-2)} - D_{n-r+2}^{(r-2)} - 2 & D_{n+r-2}^{(r-1)} - D_{n-r+2}^{(r-1)} \\ D_{n-p}^{(1)} + D_p^{(1)} & D_{n-p}^{(2)} + D_p^{(2)} & \ldots & D_{n-p}^{(r-2)} + D_p^{(r-2)} & D_{n-p}^{(r-1)} + D_p^{(r-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_{n+1}^{(1)} - D_{n-1}^{(1)} - 2 & D_{n+1}^{(2)} - D_{n-1}^{(2)} & \ldots & D_{n+1}^{(r-1)} - D_{n-1}^{(r-1)} \\ D_{n+2}^{(1)} - D_{n-2}^{(1)} & D_{n+2}^{(2)} - D_{n-2}^{(2)} - 2 & \ldots & D_{n+2}^{(r-1)} - D_{n-2}^{(r-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n+r-1}^{(1)} - D_{n-r+1}^{(1)} & D_{n+r-1}^{(2)} - D_{n-r+1}^{(2)} & \ldots & D_{n+r-1}^{(r-1)} - D_{n-r+1}^{(r-1)} - 2 \end{vmatrix}} \tag{8. 12}$$

wofern $-(r-2) \leqq p \leqq n+r-2$. Dies wird dadurch bewiesen, dass man die rechte Seite in (2. 4) einträgt und wie in § 6 schliesst.

9. Zwischen den Funktionen A_ν, B_ν, C_ν und D_ν bestehen verschiedene einfache Relationen. Betrachten wir die Determinante, gebildet aus den Werten der Funktionen $A_\nu^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots 2r-3)$ in $2r-2$ aufeinanderfolgenden Punkten

$$\varDelta(\nu) = \begin{vmatrix} A_\nu^{(0)} & A_\nu^{(1)} & \ldots & A_\nu^{(2r-3)} \\ A_{\nu+1}^{(0)} & A_{\nu+1}^{(1)} & \ldots & A_{\nu+1}^{(2r-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\nu+2r-3}^{(0)} & A_{\nu+2r-3}^{(1)} & \ldots & A_{\nu+2r-3}^{(2r-3)} \end{vmatrix}. \tag{9. 1}$$

Ersetzt man hier ν durch $\nu+1$ und benutzt die Differenzengleichung (6. 2), so sieht man, dass $\varDelta(\nu+1) = \varDelta(\nu)$. Die Determinante (9. 1) hat also einen von der ganzen Zahl ν unabhängigen konstanten Wert. Setzt man $\nu = 0$, so werden alle Elemente in der Hauptdiagonale 1 und alle anderen Elemente Null. Die Determinante ist also gleich 1, und die Funktionen $A_\nu^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots 2r-3)$ bilden daher ein Fundamentalsystem von Lösungen. Jede Lösung von (6. 2) ist deshalb von der Form

$$\sum_{i=0}^{2r-3} k_i A_\nu^{(i)} \tag{9. 2}$$

wo k_0, k_1, k_2, ... unabhängig von ν sind. Es bezeichne μ eine willkürliche ganze Zahl und s eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $2r-3$. Da $A_{\mu+\nu}^{(s)}$ eine Lösung der Differenzengleichung (6. 2) ist, so hat sie die Form (9. 2). Setzt man $\nu = i$, so findet man $k_i = A_{\mu+i}^{(s)}$, woraus folgt, dass

$$A_{\mu+\nu}^{(s)} = \sum_{i=0}^{2r-3} A_{\mu+i}^{(s)} A_\nu^{(i)}. \tag{9. 3}$$

Da die charakteristische Gleichung reziprok ist, so ist $A_{\mu-\nu}^{(s)}$ ebenfalls eine Lösung der Differenzengleichung (6. 2) und deshalb von der Form (9. 2). Bestimmt man in diesem Fall k_i, indem man $\nu = i$ setzt, so findet man

$$A_{\mu-\nu}^{(s)} = \sum_{i=0}^{2r-3} A_{\mu-i}^{(s)} A_\nu^{(i)}. \tag{9. 4}$$

Setzt man $\mu = 2r - 3$, so erhält man hieraus

$$A^{(s)}_{2r-3-\nu} = A^{(2r-3-s)}_{\nu} \tag{9.5}$$

was man auch in der Form schreiben kann

$$A^{(r-1+s)}_{r-1+\nu} = A^{(r-2-s)}_{r-2-\nu} \qquad s = 0, 1, \ldots r-2.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (6.9), so sieht man, dass $A^{(0)}_{r-1+\nu}$ eine ungerade Funktion von ν ist.

Da weiter $D^{(s)}_{\mu+\nu}$ eine Lösung der Differenzengleichung ist, so sieht man auf dieselbe Weise, dass

$$D^{(s)}_{\mu+\nu} = \sum_{i=0}^{2r-3} D^{(s)}_{\mu+i} A^{(i)}_{\nu}. \tag{9.6}$$

Ersetzt man ν durch $\nu - \mu$ und setzt man μ gleich $-(r-1)$ oder $-(r-2)$, so erhält man hieraus für $s = 1, 2, \ldots r-1$

$$\begin{aligned} D^{(s)}_{\nu} &= A^{(r-1+s)}_{r-1+\nu} - A^{(r-1-s)}_{r-1+\nu} \\ &= A^{(r-2+s)}_{r-2+\nu} - A^{(r-2-s)}_{r-2+\nu} \end{aligned} \tag{9.7}$$

und speziell $D^{(r-1)}_{\nu} = - A^{(0)}_{r-1+\nu}$. Auf entsprechende Art beweist man, dass für $s = 0, 1, \ldots r-2$ gilt

$$\begin{aligned} B^{(s)}_{\nu} &= A^{(r-1+s)}_{r-1+\nu} + A^{(r-1-s)}_{r-1+\nu} - \frac{c_{r-s}}{c_1} A^{(0)}_{r-1+\nu} \\ &= A^{(r-2+s)}_{r-2+\nu} + A^{(r-2-s)}_{r-2+\nu} - \frac{c_{r-s}}{c_1} A^{(2r-3)}_{r-2+\nu}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Was die Grössen C_ν betrifft, so erhält man aus den Anfangsbedingungen oder auch durch Vergleich von (6.10) und (8.4)

$$c_1 C_\nu = - A^{(0)}_{\nu+2r-2} \qquad n > \nu \geq 0$$

$$c_1 C_\nu = - A^{(0)}_{\nu+2r-2} + A^{(0)}_{\nu-n+2r-2}. \qquad \nu \geq n$$

10. Nehmen wir an, dass die Wurzeln a_s in der charakteristischen Gleichung einfach und von Null verschieden sind. Wir denken uns die Wurzeln so numeriert, dass

$$|a_s| < 1, \text{ wenn } s < r. \tag{10.1}$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} f(z) &= c_1(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{2r-2}) \\ &= c_1(z-a_1)\ldots(z-a_{r-1})(z-a_1^{-1})\ldots(z-a_{r-1}^{-1}). \end{aligned}$$

Betrachten wir die rationale Funktion

$$\frac{z^q}{f(z)(z^n-1)}$$

wo q eine ganze nicht negative Zahl $\leqq n+2r-4$ ist. Diese Funktion hat einfache Pole in den Punkten a_s und in den $n$ten Einheitswurzeln. Das Residuum im unendlich fernen Punkt ist Null. Drücken wir aus, dass die Summe der Residuen Null ist, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{2r-2} \frac{a_s^q}{f'(a_s)(a_s^n-1)} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu^{q+1}}{f(\varepsilon_\nu)} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Einheitswurzeln aus dem Ausdruck für $Q_{p+j,j}$ eliminieren. Setzt man $q=r-2+p$, so erhält man aus (5.2)

$$Q_{p+j,j} = -\sum_{s=1}^{2r-2} \frac{a_s^{r-2+p}}{f'(a_s)(a_s^n-1)} \quad \text{wenn} \quad -(r-2) \leqq p \leqq n+r-2. \tag{10.2}$$

Da Q die Periode n hat, folgt hieraus wieder

$$Q_{p+j,j} = -\sum_{s=1}^{2r-2} \frac{a_s^{r-2+p+n}}{f'(a_s)(a_s^n-1)} \quad \text{wenn} \quad -(r-2)-n \leqq p \leqq r-2.$$

In dem gemeinsamen Intervall $-(r-2) \leqq p \leqq r-2$ ist die Differenz zwischen diesen beiden Ausdrücken für Q:

$$\sum_{s=1}^{2r-2} \frac{a_s^{r-2+p}}{f'(a_s)} = 0.$$

Da die charakteristische Gleichung eine reziproke Gleichung vom Grade $2r-2$ ist, so gilt

$$\frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} = -\frac{a_s^{-(r-2)}}{f'(a_s^{-1})} \tag{10.3}$$

und (10. 2) kann deshalb reduziert werden auf

$$Q_{p+j,j} = -\sum_{s=1}^{r-1} \frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} \frac{a_s^p + a_s^{n-p}}{a_s^n - 1} \qquad -(r-2) \leqq p \leqq n + r - 2. \quad (10.4)$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, dass $Q_{p+j,j}$ sich nicht ändert, wenn man p durch $n-p$ ersetzt. Weiter sieht man, dass $Q_{p+j,j}$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, wenn $n \to \infty$. Aus (10. 1) und (10. 4) folgt unmittelbar, dass

$$\lim_{n\to\infty} Q_{p+j,j} = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{a_s^{|p|+r-2}}{f'(a_s)}. \quad (10.5)$$

11. Da a_s^ν eine Lösung der Differenzengleichung (6. 2) ist, so ist diese Lösung von der Form (9. 2). Setzt man $\nu = i$, so erhält man $k_i = a_s^i$, woraus folgt, dass für alle ganzzahligen ν gilt

$$a_s^\nu = \sum_{i=0}^{2r-3} a_s^i A_\nu^{(i)} \qquad s = 1, 2, \ldots 2r-2. \quad (11.1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Wurzeln a_s auf der rechten Seite von (10. 2) leicht eliminieren, und man findet dann den Ausdruck (6.5) wieder, den wir oben hergeleitet hatten, ohne vorauszusetzen, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einfach sind. Weiter findet man

$$(x - a_1^n)(x - a_2^n) \ldots (x - a_{2r-2}^n) = \begin{vmatrix} A_n^{(0)} - x & A_n^{(1)} & \ldots A_n^{(2r-3)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)} - x & \ldots A_{n+1}^{(2r-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n+2r-3}^{(0)} & A_{n+2r-3}^{(1)} & \ldots A_{n+2r-3}^{(2r-3)} - x \end{vmatrix} \quad (11.2)$$

was sofort zu ersehen ist, wenn man beide Seiten mit der Determinante der Wurzeln a_s multipliziert. Für $x = 1$ reduziert sich diese Gleichung auf (6. 4).

Jeder Wurzel a_s entspricht eine Wurzel a_s^{-1}, so dass man auch hat

$$a_s^{-\nu} = \sum_{i=0}^{2r-3} a_s^{-i} A_\nu^{(i)}.$$

Wenn man diese Beziehung gliedweise zu (11. 1) addiert oder davon subtrahiert und (9. 7) und (9. 8) benutzt, erhält man für $s = 1, 2, \ldots r-1$

$$a_s^\nu + a_s^{-\nu} = B_\nu^{(0)} + \sum_{i=1}^{r-2} (a_s^i + a_s^{-i})\, B_\nu^{(i)}, \tag{11.3}$$

$$a_s^\nu - a_s^{-\nu} = \sum_{i=1}^{r-1} (a_s^i - a_s^{-i})\, D_\nu^{(i)}. \tag{11.4}$$

Mit Hilfe jeder dieser Gleichungen kann man die Wurzeln a_s im Ausdruck (10.4) für $Q_{p+j,j}$ eliminieren, der als ein Verhältnis zwischen zwei Determinanten geschrieben werden kann

$$Q_{p+j,j} = -\frac{1}{c_1}\,\frac{\left| a_s - a_s^{-1},\ a_s^2 - a_s^{-2}, \ldots a_s^{r-2} - a_s^{-(r-2)},\ \dfrac{a_s^p + a_s^{n-p}}{a_s^n - 1} \right|}{\left| a_s - a_s^{-1},\ a_s^2 - a_s^{-2}, \ldots a_s^{r-1} - a^{-r+1} \right|} \tag{11.5}$$

wo s die Werte $1, 2, \ldots, r-1$ annimmt. Entwickelt man nämlich die Determinante im Zähler nach den Elementen der letzten Spalte, so reduziert sich diese Gleichung auf (10.4). Wenn man in (11.5) im Zähler und Nenner mit $\prod_{s=1}^{r-1} (a_s^n - a_s^{-n})$ multipliziert und (11.3) benutzt, findet man (8.8) wieder. Wenn man dagegen im Zähler und Nenner mit $\prod_{s=1}^{r-1} (a_s^n + a_s^{-n} - 2)$ multipliziert und von der Gleichung (11.4) Gebrauch macht, erhält man die Gleichung (8.12).

Betrachten wir weiter die Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{n+1}^{(1)} - D_{n-1}^{(1)} - x - \dfrac{1}{x} & D_{n+1}^{(2)} - D_{n-1}^{(2)} & \ldots & D_{n+1}^{(r-1)} - D_{n-1}^{(r-1)} \\ D_{n+2}^{(1)} - D_{n-2}^{(1)} & D_{n+2}^{(2)} - D_{n-2}^{(2)} - x - \dfrac{1}{x} & \ldots & D_{n+2}^{(r-1)} - D_{n-2}^{(r-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n+r-1}^{(1)} - D_{n-r+1}^{(1)} & D_{n+r-1}^{(2)} - D_{n-r+1}^{(2)} & \ldots & D_{n+r-1}^{(r-1)} - D_{n-r+1}^{(r-1)} - x - \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} \tag{11.6}$$

und bestimmen wir die Werte von x, für welche sie Null wird. Wenn man mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_1^{-1} & a_1^2 - a_1^{-2} & \ldots a_1^{r-1} - a_1^{-r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1} - a_{r-1}^{-1} & a_{r-1}^2 - a_{r-1}^{-2} & \ldots a_{r-1}^{r-1} - a_{r-1}^{-r+1} \end{vmatrix}$$

multipliziert, so sieht man, dass (11.6) gleich

$$\prod_{s=1}^{r-1}\left(a_s^n + a_s^{-n} - x - \frac{1}{x}\right) = (-x)^{1-r}\prod_{s=1}^{2r-2}(x - a_s^n)$$

ist.

Für $x = 1$ reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$(-1)^{r-1} c_1^{-n} \prod_{\nu=1}^{n} f(\varepsilon_\nu). \tag{11.7}$$

Hieraus folgt, dass der Nenner im Ausdruck (8.12) nicht verschwinden kann.

Auf dieselbe Art beweist man, dass der Nenner im Ausdruck (8.8) gleich dem Produkt

$$\prod_{s=1}^{r-1}(a_s^n - a_s^{-n})(a_s - a_s^{-1})$$

ist. Da keine der Zahlen a_s eine Einheitswurzel ist, so folgt hieraus, dass der Ausdruck (8.8) nicht unbestimmt werden kann, sondern dass der Nenner immer von Null verschieden ist.

Die Zahlen $B_\nu^{(i)}$ und $D_\nu^{(i)}$ sind symmetrische Funktionen der Wurzeln für die charakteristische Gleichung. Wenn man die beiden Systeme von linearen Gleichungen (11.3) und (11.4) nach B_ν und D_ν auflöst, so findet man für $i = 1, 2, \ldots r-1$

$$B_\nu^{(r-i-1)} = \sum_{s=1}^{r-1}\frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)}(a_s^\nu + a_s^{-\nu})[c_1(a_s^i - a_s^{-i}) + c_2(a_s^{i-1} - a_s^{-i+1}) + \cdots + c_i(a_s - a_s^{-1})],$$

$$D_\nu^{(r-i)} = \sum_{s=1}^{r-1}\frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)}(a_s^\nu - a_s^{-\nu})[c_1(a_s^{i-1} + a_s^{-i+1}) + c_2(a_s^{i-2} + a_s^{-i+2}) + \cdots + c_i].$$

Natürlich sind auch die Zahlen $A_\nu^{(i)}$ symmetrische Funktionen der Wurzeln a_s. Durch Auflösen der Gleichungen (11.1) findet man auf dieselbe Weise

$$A_\nu^{(2r-2-i)} = \sum_{s=1}^{2r-2}\frac{a_s^\nu}{f'(a_s)}[c_1 a_s^{i-1} + c_2 a_s^{i-2} + \cdots + c_i] \quad i = 1, 2, \ldots r$$

$$A_\nu^{(i)} = \sum_{s=1}^{2r-2}\frac{a_s^{\nu-1}}{f'(a_s)}[c_1 a_s^{-i} + c_2 a_s^{-i+1} + \cdots + c_{i+1}] \quad i = 0, 1, \ldots r-1.$$

12. Als Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch kurz eine andere Methode zur Bestimmung von Q_{jj} angeben, die mehrere Vorteile darbietet. Wenn man c_r in der Hauptdiagonale der Determinante (4. 1) durch $c_r - x$ ersetzt und die dadurch entstandene Determinante mit $\varDelta(x)$ bezeichnet, so nimmt die Gleichung (4. 3) die Form an

$$\varDelta(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{f(\varepsilon_\nu)}{\varepsilon_\nu^{r-1}} - x \right). \tag{12.1}$$

Durch Differenzieren nach x erhält man

$$\frac{\varDelta'(0)}{\varDelta(0)} = - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu^{r-1}}{f(\varepsilon_\nu)}.$$

Also ist infolge (5. 2)

$$Q_{jj} = - \frac{1}{n} \frac{\varDelta'(0)}{\varDelta(0)}$$

und die Gleichung (12. 1) zeigt, dass $(-1)^{(r-1)(n-1)} \varDelta(x)$ die Resultante von $z^n - 1$ und $f(z) - x z^{r-1}$ ist. Da die charakteristische Gleichung eine reziproke Gleichung ist, kann ihr Grad dadurch reduziert werden, dass man

$$z + \frac{1}{z} = y$$

setzt, und man hat

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} = g(y)$$

wo $g(y)$ ein Polynom in y vom Grade $r-1$ ist, dessen Koeffizienten sich aus den Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_r$ leicht bestimmen lassen. Die Gleichung (12. 1) kann dann in der Form

$$\varDelta(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[g\left(2 \cos \frac{2\pi\nu}{n}\right) - x \right] \tag{12.2}$$

geschrieben werden. Nun ist bekanntlich

$$\cos n w - 1 = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n} \left(\cos w - \cos \frac{2\pi\nu}{n} \right).$$

Es sei $\psi_n(z)$ das Polynom $n$ten Grades in z, das die Nullstellen $2 \cos \frac{2\pi\nu}{n}$

($\nu = 1, 2, \ldots n$) hat. Man bekommt dieses Polynom dadurch, dass man $\cos nw$ nach Potenzen von $\cos w$ entwickelt, und man findet

$$\psi_n(z) = z^n - \frac{n}{1} z^{n-2} + \cdots + (-1)^s \frac{n(n-s-1)(n-s-2)\ldots(n-2s+1)}{s!} z^{n-2s} + \cdots.$$

Die Gleichung (12.2) zeigt, dass $\Delta(x)$ die Resultante von $\psi_n(z)$ und $g(z) - x$ ist. Aber die Resultante zweier Polynomen kann durch fortgesetzte Division nach dem Algorithmus bestimmt werden, der zur Berechnung des grössten gemeinsamen Teilers dient. Dieser Algorithmus gibt uns daher ein einfaches Mittel zur Bestimmung des reziproken Gewichts Q_{jj} allein durch rationale Rechenoperationen.

KAPITEL II.

Beobachtungen, welche die Form von Richtungsmessungen haben.

13. Wir betrachten nunmehr ein System von Fehlergleichungen der Form

$$l_{ij} + \lambda_{ij} = k_i + z_j \tag{13.1}$$

mit dem Gewicht p_{ij}, wo i die Werte $1, 2, \ldots m$ und j die Werte $1, 2, \ldots n$ annimmt. Wir haben somit m Gruppen von n Gleichungen. m und n sind willkürliche ganze Zahlen > 1, und die Gewichte p_{ij} sind willkürliche nicht negative Zahlen. Die Forderung, dass die Fehlerquadratsumme

$$\sum p_{ij} \lambda_{ij}^2$$

ein Minimum werden soll, gibt uns die Normalgleichung für k_i

$$\sum_{s=1}^{n} p_{is} l_{is} = k_i \sum_{s=1}^{n} p_{is} + \sum_{s=1}^{n} p_{is} z_s.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird k_i aus den Fehlergleichungen (13.1) eliminiert, und wir erhalten die reduzierten Fehlergleichungen

$$l_{ij} - \frac{\sum_{s=1}^{n} p_{is} l_{is}}{\sum_{s=1}^{n} p_{is}} + \lambda_{ij} = z_j - \frac{\sum_{s=1}^{n} p_{is} z_s}{\sum_{s=1}^{n} p_{is}}$$

mit dem Gewicht p_{ij}, wo i die Werte 1, 2, ... m und j die Werte 1, 2, ... n annimmt. Hieraus bildet man auf übliche Weise die Normalgleichung für z_ν

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\nu}\left(l_{i\nu} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} p_{is} l_{is}}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_{is}}\right) = \sum_{i=1}^{m} p_{i\nu} z_\nu - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{p_{i\nu} p_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_{is}} z_j. \tag{13.2}$$

Geben wir ν die Werte 1, 2, ... n, so erhält man die Normalgleichungen für $z_1, z_2, \ldots z_n$. Die Determinante dieser Gleichungen ist Null; wenn wir die n Normalgleichungen gliedweise addieren, bekommen wir eine Gleichung, worin die Koeffizienten von $z_1, z_2, \ldots z_n$ alle Null sind und wo auch die linke Seite Null ist. Eine der Gleichungen kann somit aus den anderen hergeleitet werden, und die Normalgleichungen haben unendlich viele Lösungen. Die Fehlergleichungen (13. 1) zeigen auch, dass die erwähnten Beobachtungen relativ sind und nur die Differenzen zwischen den Unbekannten z_j bestimmen, während eine Unbekannte willkürlich gewählt werden kann. Als Beispiel hierzu können relative Schweremessungen oder Messung von Richtungen auf einer trigonometrischen Station genannt werden, wo nur die Differenzen zwischen zwei Richtungen (die Winkel) bestimmte Werte haben. Wenn man in solchen Fällen die wahrscheinlichsten Werte für die Unbekannten durch Ausgleichung bestimmen will, muss eine Bedingungsgleichung hinzugefügt werden. Mit ihrer Hilfe könnte man eine der Unbekannten in den Fehlergleichungen eliminieren, es ist aber vorteilhafter, die Fehlergleichungen unverändert beizubehalten, um die symmetrische Form zu bewahren[1]. Nehmen wir als Bedingungsgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu = 0 \tag{13.3}$$

so bildet diese Gleichung zusammen mit $n-1$ willkürlich gewählten der Gleichungen (13. 2) ein vollständiges System von Normalgleichungen. Bilden wir hiervon die Gewichtsgleichungen unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung, so erhält man durch eine leichte Rechnung

---

[1] Vgl. P. A. HANSEN, Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie, Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Sächsischen Gesellsch. der Wissenschaften Bd. VIII, 1867; F. R. HELMERT, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1907.

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\nu}\, Q_{\nu\mu} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{p_{i\nu}\, p_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_{is}}\, Q_{j\mu} = \eta_{\nu\mu} - \frac{1}{n} \tag{13.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{j\mu} = 0 \tag{13.5}$$

wo ν und μ die Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen.

Wenn wir dagegen als Bedingungsgleichung z. B.

$$z_1 = 0 \tag{13.6}$$

nehmen und in diesem Fall die Unbekannten und Multiplikatoren mit gestrichenen Buchstaben bezeichnen, so erhalten wir die Gewichtsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\nu}\, Q'_{\nu\mu} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{p_{i\nu}\, p_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_{is}}\, Q'_{j\mu} = \begin{cases} \eta_{\nu\mu} - 1 & \nu = 1 \\ \eta_{\nu\mu} & \nu > 1 \end{cases} \tag{13.7}$$

$$Q'_{1\mu} = 0. \tag{13.8}$$

Zwischen z_ν und z'_ν hat man offenbar die Beziehungen

$$z_\nu = z'_\nu - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z'_i \qquad \nu = 1, 2, \ldots n \tag{13.9}$$

$$z'_\nu = z_\nu - z_1 \tag{13.10}$$

und mit Hilfe von (1.1) gewinnt man hieraus

$$Q'_{\nu\nu} = Q_{\nu\nu} + Q_{11} - 2\, Q_{\nu 1} \tag{13.11}$$

$$Q_{\nu\nu} = Q'_{\nu\nu} - \frac{2}{n}\sum_{s=1}^{n} Q'_{s\nu} + \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} Q'_{s\nu}. \tag{13.12}$$

Nehmen wir an, alle Gewichte p_{ij} sind gleich 1, so dass also m volle Sätze beobachtet sind. Die Normalgleichungen (13.2) reduzieren sich dann auf

$$\sum_{i=1}^{m}\left(l_{i\nu} - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} l_{is}\right) = m z_\nu - \frac{m}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j \quad \nu = 1, 2, \ldots n. \tag{13.13}$$

Hieraus erhält man mit Hilfe der Bedingungsgleichung (13. 3)

$$z_\nu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(l_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} l_{is} \right). \tag{13. 14}$$

Wenn wir aber die Bedingungsgleichung (13. 6) benutzen, so bekommt man, wenn wir die erste der Gleichungen von jeder der anderen subtrahieren

$$z'_\nu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (l_{i\nu} - l_{i1}). \tag{13. 15}$$

Die Gewichtsgleichungen sind im ersten Fall

$$m\, Q_{\nu\mu} - \frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{j\mu} = \eta_{\nu\mu} - \frac{1}{n} \tag{13. 16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{j\mu} = 0 \tag{13. 17}$$

mit der Lösung

$$Q_{\nu\nu} = \frac{n-1}{nm} \qquad \nu = 1, 2, \ldots n \tag{13. 18}$$

$$Q_{\nu\mu} = -\frac{1}{nm} \qquad \nu \neq \mu. \tag{13. 19}$$

Das Gewicht von z_ν ist also $\frac{nm}{n-1}$, und das Gewicht von $z_\nu - z_\mu$ ist $\frac{m}{2}$. Im zweiten Fall sind die Gewichtsgleichungen

$$m\, Q'_{\nu\mu} - \frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} Q'_{j\mu} = \begin{cases} \eta_{\nu\mu} - 1 & \nu = 1 \\ \eta_{\nu\mu} & \nu > 1 \end{cases} \tag{13. 20}$$

$$Q'_{1\mu} = 0 \tag{13. 21}$$

mit der Lösung

$$Q'_{11} = 0 \qquad Q'_{\nu\nu} = \frac{2}{m} \qquad \nu = 2, 3, \ldots n \tag{13. 22}$$

$$Q'_{\nu\mu} = \frac{1}{m} \qquad \nu \neq \mu \quad \nu, \mu = 2, 3, \ldots n \tag{13. 23}$$

Das Gewicht von z'_ν ist also $\frac{m}{2}$ und das Gewicht von $z'_\nu - z'_\mu$ ist ebenfalls $\frac{m}{2}$.

14. Betrachten wir danach den Fall, der symmetrisch angeordneten Richtungsbeobachtungen auf einer trigonometrischen Station[1] entspricht. Das Gewicht p_{ij} wollen wir jetzt entweder gleich 1 oder 0 setzen. Es sei r eine ganze positive Zahl $< n$. Unter den n Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_n$ wählen wir auf alle möglichen Arten r aus, die mit einem Satz von Messungen mit dem Gewicht 1 verbunden werden. Jedem solchen Satz entspricht eine Gruppe von r Fehlergleichungen von der Form (13. 1) mit $p_{ij} = 1$. Wir erhalten im ganzen $\binom{n}{r}$ solche Gruppen, also ist $m = \binom{n}{r}$, und die Anzahl der Fehlergleichungen mit dem Gewicht 1 ist mr. Für die übrigen $m(n-r)$ Fehlergleichungen (13. 1) denken wir uns das Gewicht p_{ij} gleich 0 gesetzt. Dann ist offenbar

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = r$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \binom{n-1}{r-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\nu} p_{ij} = \binom{n-2}{r-2} \qquad \nu \gtrless j.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{r}\binom{n-2}{r-2} = \lambda$$

so nimmt die rechte Seite der Normalgleichungen (13. 2) die Form

$$n\lambda z_\nu - \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j$$

an. Durch Vergleich mit (13. 13) sieht man, dass die Gewichtsgleichungen in dem hier behandelten Fall mit denjenigen identisch sind, die wir dadurch erhalten, dass wir m volle Sätze beobachten, wenn $m = n\lambda$. Wir bekommen also in den beiden Fällen dasselbe Gewicht und aus (13. 18) beziehungsweise (13. 22) folgt

$$Q_{\nu\nu} = \frac{n-1}{n^2\lambda} \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

$$Q'_{\nu\nu} = \frac{2}{n\lambda} \qquad \nu = 2, 3, \ldots n.$$

---

[1] Ch. A. Vogler, Zeitschrift für Vermessungswesen 14 (1885), S. 49 und F. R. Helmert, a. a. o., S. 263.

Wenn $r = 2$ und also $\lambda = \frac{1}{2}$, so haben wir den Fall, welcher Winkelmessung in allen Kombinationen entspricht, und man bestätigt, dass das Gewicht eines Winkels z'_ν und das Gewicht eines Winkels $z'_\nu - z'_\mu$ gleich $\frac{n}{4}$ ist, wenn das Gewicht einer ein Mal gemessenen Richtung gleich 1 gesetzt wird.

In diesen einfachen Fällen kann man also fast ohne Rechnung alle Multiplikatoren $Q_{\nu\mu}$ finden, dank der symmetrischen Form der Gleichungen. Wir gehen nun dazu über, einen etwas schwierigeren Fall zu behandeln.

KAPITEL III.

Zyklisch angeordnete differentielle Beobachtungen.

15. Wir betrachten die Fehlergleichungen (1.4), die alle vom Gewicht 1 angenommen werden mögen. Es wird $r > 1$ und $n > 2r - 2$ vorausgesetzt. Nach Elimination der Gruppenkonstanten k_i erhält man die Normalgleichung für z_i, wofür wir uns kürzehalber begnügen, die rechte Seite aufzuschreiben:

$$(r-1)\,z_i - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{r-s}{r}(z_{i+s} + z_{i-s}). \tag{15.1}$$

Gibt man i die Werte $1, 2, \ldots n$, so erhält man die Normalgleichungen für $z_1, z_2, \ldots z_n$. Die Determinante für diese Gleichungen ist Null. Wenn wir die Bedingungsgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \tag{15.2}$$

hinzufügen, so findet man nach Multiplikation mit $-r$ die Gewichtsgleichungen

$$\sum_{s=1}^{r-1} (r-s)(Q_{i+s,j} + Q_{i-s,j}) - r(r-1)\,Q_{i,j} = \frac{r}{n} - r\eta_{ij} \tag{15.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{i,j} = 0 \tag{15.4}$$

wo $i, j = 1, 2, \ldots n$ und man hat ausserdem

$$Q_{\pm i,j} = Q_{n \pm i,j}.$$

Die Bestimmung aller $Q_{i,j}$ ist damit darauf reduziert, eine periodische Lösung mit der Periode n für die Differenzengleichung (15.3) zu finden, welche die Bedingungsgleichung (15.4) befriedigt. Wir setzen

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} = \sum_{s=1}^{r-1} (r-s)(z^s + z^{-s}) - r(r-1). \tag{15.5}$$

$f(z)$ ist ein Polynom vom Grade $2(r-1)$, und die Gleichung

$$f(z) = 0 \tag{15.6}$$

ist die zur Differenzengleichung (15.3) gehörende charakteristische Gleichung.

Es ist zu bemerken, dass die in § 2 aufgestellte Bedingung für die Koeffizienten der Fehlergleichungen in diesem Fall nicht erfüllt ist, so dass die in Kapitel I gewonnenen Ergebnisse nicht ohne weiteres Anwendung finden können. Dies gibt sich u. a. dadurch zu erkennen, dass die charakteristische Gleichung eine auf dem Einheitskreise liegende Wurzel hat, nämlich im Punkt $z = 1$, wie (15.5) unmittelbar zeigt. Durch Differentiation nach z erhält man aus (15.5) für $z = 1$

$$f'(1) + (1-r) f(1) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Nullstelle $z = 1$ für $f(z)$ mindestens von 2. Ordnung ist. Es ist leicht zu sehen, dass diese Nullstelle genau von 2. Ordnung ist, denn durch Division mit $(z-1)^2$ erhält man

$$\frac{f(z)}{z^{r-2}(z-1)^2} = \sum_{s=3}^{r} \frac{s(s-1)(s-2)}{6} (z^{r+1-s} + z^{-r-1+s}) + \frac{r(r^2-1)}{6}.$$

Die rechte Seite kann für $z = 1$ nicht verschwinden, weil alle Koeffizienten positiv sind. Indem man $z = 1$ setzt, bekommt man übrigens

$$\frac{f''(1)}{2} = 2 \sum_{s=3}^{r} \frac{s(s-1)(s-2)}{6} + \frac{r(r^2-1)}{6}$$

und hieraus

$$f''(1) = \frac{r^2(r^2-1)}{6}. \tag{15.7}$$

Die von 1 verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung können ihren absoluten Wert nicht gleich 1 haben; denn setzen wir $z = e^{2i\omega}$, kann man die charakteristische Gleichung so schreiben

$$2\sum_{s=1}^{r-1}(r-s)\cos 2s\omega = r(r-1). \tag{15.8}$$

Wenn ω reell ist, hat man

$$2\left|\sum_{s=1}^{r-1}(r-s)\cos 2s\omega\right| \leqq 2\sum_{s=1}^{r-1}(r-s) = r(r-1)$$

und das Gleichheitszeichen kann nur eintreten, wenn ω von der Form $p\pi$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ist. Für alle anderen reellen Werte von ω ist die linke Seite von (15.8) deshalb kleiner als die rechte. Hieraus folgt aber, dass die charakteristische Gleichung auf dem Kreis $|z| = 1$ keine anderen Wurzeln als $z = 1$ hat.

Wir wollen nun zeigen, dass mit Ausnahme der Doppelwurzel 1 alle anderen Wurzeln der charakteristischen Gleichung einfach sind. Multipliziert man die rechte Seite von (15.5) mit $z + \frac{1}{z} - 2$, so sieht man, dass

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} = \frac{z^r + z^{-r} - 2}{z + z^{-1} - 2} - r^2. \tag{15.9}$$

Die Gleichung

$$z^r + z^{-r} - 2 - r^2(z + z^{-1} - 2) = 0 \tag{15.10}$$

hat deshalb dieselben Wurzeln wie die charakteristische Gleichung, lediglich mit dem Unterschied, dass 1 eine vierfache Wurzel ist. Für die Werte von z, die vielfache Wurzeln sind, muss der Differentialquotient der linken Seite Null werden, woraus folgt, dass

$$z^r - z^{-r} = r(z - z^{-1}).$$

Quadriert man beide Seiten, so erhält man

$$z^{2r} + z^{-2r} - 2 = r^2(z^2 + z^{-2} - 2).$$

Diese Gleichung kann man aber schreiben

$$(z^r + z^{-r} - 2)(z^r + z^{-r} + 2) = r^2(z + z^{-1} - 2)(z + z^{-1} + 2).$$

Reduziert man mittels (15.10), so erhält man

$$z^r + z^{-r} - (z + z^{-1}) = 0.$$

Subtrahiert man gliedweise von (15.10), bekommt man

$$(1 - r^2)(z + z^{-1} - 2) = 0.$$

Da aber $r > 1$, so wird diese Gleichung nur von $z = 1$ befriedigt, was deshalb die einzige Doppelwurzel für die charakteristische Gleichung ist. Wir haben damit für diese Gleichung bewiesen, dass alle Wurzeln einfach sind und ihren absoluten Wert verschieden von 1 haben, mit Ausnahme der Doppelwurzel 1.

16. Wir wenden uns jetzt zu den Gewichtsgleichungen. Da nur $n-1$ der Gleichungen (15. 3) von einander unabhängig sind, betrachten wir die $i = 1, 2, \ldots n-1$ entsprechenden Gleichungen (15. 3) sowie (15. 4). Die Determinante Δ für diese n Gleichungen ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r(r-1) & r-1 & r-2 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 & 3 & \ldots & r-1 \\ r-1 & -r(r-1) & r-1 & \ldots & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & \ldots & r-2 \\ r-2 & r-1 & -r(r-1) & \ldots & 3 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & r-3 \\ r-3 & r-2 & r-1 & \ldots & 4 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & r-4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r-2 & r-3 & r-4 & \ldots & & & & \ldots & 3 & 4 & 5 & \ldots & r-1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (16.1)$$

Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ die von 1 verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$x^n = 1.$$

Wir setzen

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (16.2)$$

Für das Produkt dieser beiden Determinanten der Ordnung n findet man durch die Benutzung von (15. 5)

$$\Delta D = \begin{vmatrix} \dfrac{f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} & \dfrac{\varepsilon_1 f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} & \ldots & \dfrac{\varepsilon_1^{n-2} f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{r-1}} & 0 \\ \dfrac{f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} & \dfrac{\varepsilon_2 f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} & \ldots & \dfrac{\varepsilon_2^{n-2} f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{r-1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{f(\varepsilon_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}^{r-1}} & \dfrac{\varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}^{r-1}} & \ldots & \dfrac{\varepsilon_{n-1}^{n-2} f(\varepsilon_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}^{r-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\Delta D = n \frac{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_{n-1})}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1})^{r-1}} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_1^{n-2} \\ 1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}. \tag{16. 3}$$

Wenn man in der Determinante D von jeder Spalte die nachfolgende abzieht, erhält man

$$D = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon_1 & \varepsilon_1(1-\varepsilon_1) & \ldots & \varepsilon_1^{n-2}(1-\varepsilon_1) & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1-\varepsilon_2 & \varepsilon_2(1-\varepsilon_2) & \ldots & \varepsilon_2^{n-2}(1-\varepsilon_2) & \varepsilon_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}(1-\varepsilon_{n-1}) & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-2}(1-\varepsilon_{n-1}) & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$D = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \ldots (1-\varepsilon_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_1^{n-2} \\ 1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}. \tag{16. 4}$$

Die Gleichung (16. 3) wird dadurch reduziert auf

$$\Delta = \frac{n}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \ldots (1-\varepsilon_{n-1})} \cdot \frac{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_{n-1})}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1})^{r-1}}. \tag{16. 5}$$

Nun ist

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2) \ldots (x-\varepsilon_{n-1}).$$

Differenziert man nach x und setzt $x = 1$, so bekommt man hieraus

$$n = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \ldots (1-\varepsilon_{n-1}) \tag{16. 6}$$

und (16. 5) reduziert sich auf

$$\Delta = (-1)^{(r-1)(n-1)} f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_{n-1}). \tag{16. 7}$$

Da, wie wir eben gesehen haben, $f(z)$ in den Punkten ε_ν nicht verschwinden kann, folgt hieraus, dass Δ für alle n von Null verschieden ist, und die Gewichtsgleichungen haben deshalb *eine* und nur *eine* Lösung. Dasselbe muss dann auch von dem aus (15. 1) und (15. 2) gebildeten System von Normalgleichungen gelten.

Lösung der Differenzengleichung.

17. Wir setzen

$$P(Q_i) = \sum_{s=1}^{r-1} (r-s)(Q_{i+s} + Q_{i-s}) - r(r-1)\, Q_i. \qquad (17.1)$$

Die Gleichungen (15.3) können dann so geschrieben werden

$$P(Q_{ij}) = \frac{r}{n} - r\,\eta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n. \qquad (17.2)$$

Man hat

$$P(\varepsilon_\nu^{r-1+i-j}) = \varepsilon_\nu^{i-j} f(\varepsilon_\nu). \qquad (17.3)$$

Hieraus folgt

$$Q_{ij} = -\frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\nu^{r-1+i-j}}{f(\varepsilon_\nu)} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n. \qquad (17.4)$$

Setzt man nämlich diesen Ausdruck in (17.2) ein, so erhält man

$$P(Q_{ij}) = -\frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{P(\varepsilon_\nu^{r-1+i-j})}{f(\varepsilon_\nu)} = -\frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon_\nu^{i-j}$$

$$= \frac{r}{n} - r\,\eta_{ij}.$$

Der Ausdruck (17.4) befriedigt also die Gleichung (17.2) und auch die Gleichung (15.4), weil

$$\varepsilon_\nu + \varepsilon_\nu^2 + \varepsilon_\nu^3 + \cdots + \varepsilon_\nu^n = 0.$$

Ferner ist Q_{ij} eine periodische Funktion von i mit der Periode n, weil $\varepsilon_\nu^n = 1$. Damit ist bewiesen, dass der Ausdruck (17.4) die Gewichtsgleichungen befriedigt.

Setzt man

$$z = e^{2 i \omega}$$

so erhält man aus (15.9)

$$\frac{f(z)}{z^{r-1}} = \left(\frac{\sin r\,\omega}{\sin \omega}\right)^2 - r^2. \qquad (17.5)$$

Für

$$\varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}$$

reduziert sich deshalb (17.4) auf

$$Q_{ij} = \frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{2\pi\nu}{n}(i-j)}{r^2 - \left(\frac{\sin \frac{\pi r \nu}{n}}{\sin \frac{\pi\nu}{n}}\right)^2}. \tag{17.6}$$

Dieser einfache Ausdruck eignet sich gut zur Berechnung der Grössen Q_{ij} als Funktionen der beiden ganzzahligen Parameter r und n. Speziell erhält man für $i=j$ als reziprokes Gewicht von z_j

$$Q_{jj} = \frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{r^2 - \left(\frac{\sin \frac{\pi r \nu}{n}}{\sin \frac{\pi\nu}{n}}\right)^2}. \tag{17.7}$$

Das Gewicht ist unabhängig von j, wie man wegen der symmetrischen Form der Fehlergleichungen erwarten musste. Aus dem in § 15 Angeführten geht hervor, dass die rechte Seite von (17.7) positiv ist, und dies ist leicht dadurch zu bestätigen, dass man die Gleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} e^{i(r-1-2s)\omega} = \frac{\sin r\omega}{\sin \omega} \tag{17.8}$$

betrachtet. Die Reihe auf der linken Seite enthält r Glieder, die alle den absoluten Wert 1 haben, wenn ω reell ist. Der absolute Wert der linken Seite ist deshalb $\leqq r$, und das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn ω von der Form $p\pi$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ist. Für alle anderen reellen Werte von ω hat man also

$$r^2 > \left(\frac{\sin r\omega}{\sin \omega}\right)^2. \tag{17.9}$$

Elimination der Einheitswurzeln.

18. Wir wollen nun die Einheitswurzeln ε_ν aus dem Ausdruck

$$Q_{p+j,j} = -\frac{r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\nu^{r-1+p}}{f(\varepsilon_\nu)} \tag{18.1}$$

eliminieren. Wir haben gesehen, dass $f(z)$ eine Nullstelle 2. Ordnung in $z = 1$ hat, und dass alle anderen Nullstellen a_s einfach sind und ihren absoluten Wert von 1 verschieden haben. Da $f(z)$ nicht geändert wird, wenn man z durch $\frac{1}{z}$ ersetzt, können wir uns die Zahlen a_s so numeriert denken, dass

$$|a_s| < 1 \quad \text{wenn} \quad s < r - 1. \tag{18.2}$$

Die Funktion $f(z)$ kann man dann in der Form schreiben

$$f(z) = (z-1)^2 \prod_{s=1}^{2r-4} (z - a_s) = (z-1)^2 \prod_{s=1}^{r-2} (z - a_s)(z - a_s^{-1}). \tag{18.3}$$

Entwickelt man $1 : f(z)$ nach wachsenden Potenzen von $z - 1$, so findet man durch eine leichte Rechnung unter Benutzung von (15.9)

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{12}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{12(r-2)}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{z-1} + \frac{2}{5} \frac{(r-2)(14r-17)}{r^2(r^2-1)} + \cdots. \tag{18.4}$$

Es sei q eine ganze nicht negative Zahl. Infolge der Binomialformel ist

$$z^q = 1 + \binom{q}{1}(z-1) + \binom{q}{2}(z-1)^2 + \binom{q}{3}(z-1)^3 + \cdots.$$

Wir multiplizieren diese Reihe mit der vorhergehenden und bekommen dadurch die folgende Entwicklung nach Potenzen von $z - 1$, bei welcher wir uns damit begnügen, die drei ersten Glieder aufzuschreiben

$$\begin{aligned} \frac{z^q}{f(z)} = \frac{12}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{(z-1)^2} &+ \frac{12(q-r+2)}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{z-1} \\ &+ \frac{6(q-r+2)(q-r+1)}{r^2(r^2-1)} - \frac{2}{5} \frac{(r+2)(r-2)}{r^2(r^2-1)} + \cdots. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Wir nehmen nun an, dass $0 \leqq q < 2r - 2$. Da alle von 1 verschiedenen Pole einfach sind, kann $z^q : f(z)$ in Partialbrüche zerlegt werden wie folgt

$$\frac{z^q}{f(z)} = \sum_{s=1}^{2r-4} \frac{a_s^q}{f'(a_s)(z - a_s)} + \frac{12}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{12(q-r+2)}{r^2(r^2-1)} \frac{1}{z-1}. \tag{18.6}$$

Es sei m eine ganze positive Zahl $\leqq n$ und x eine von den $n$ten Einheitswurzeln verschiedene Zahl. Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\nu^m}{x - \varepsilon_\nu} = n \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} - \frac{1}{x-1}. \tag{18.7}$$

Setzen wir $r - 1 + p = q + m$, so erhält man, wenn man in (18. 6) $z = \varepsilon_\nu$ setzt und in (18. 1) einträgt

$$Q_{p+j,j} = -\frac{r}{n}\sum_{s=1}^{2r-4}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{a_s^q \varepsilon_\nu^m}{f'(a_s)(\varepsilon_\nu - a_s)} - \frac{12}{nr(r^2-1)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{(\varepsilon_\nu - 1)^2}$$
$$- \frac{12(q-r+2)}{nr(r^2-1)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{\varepsilon_\nu - 1}. \qquad (18.\ 8)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite kann mit Hilfe der Relation (18. 7) umgeformt werden, worin wir $x = a_s$ setzen, und wir finden dann

$$Q_{p+j,j} = r\sum_{s=1}^{2r-4}\frac{a_s^{r-2+p}}{f'(a_s)(a_s^n - 1)} - \frac{r}{n}\sum_{s=1}^{2r-4}\frac{a_s^q}{f'(a_s)(a_s - 1)}$$
$$- \frac{12}{nr(r^2-1)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{(\varepsilon_\nu - 1)^2} - \frac{12(q-r+2)}{nr(r^2-1)}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{\varepsilon_\nu - 1}. \qquad (18.\ 9)$$

Die drei letzten Glieder der rechten Seite kann man reduzieren, wie wir jetzt zeigen wollen. Wenn man die Reihenentwicklung (18. 5) in die linke Seite von (18. 6) einsetzt, so sieht man, dass das erste Glied auf der rechten Seite von (18. 6) eine Funktion von z ist, die sich im Punkt $z = 1$ regulär verhält. Man findet deshalb, wenn man in der Entwicklung nach wachsenden Potenzen von $z - 1$ den Wert $z = 1$ einsetzt

$$\sum_{s=1}^{2r-4}\frac{a_s^q}{f'(a_s)(1 - a_s)} = \frac{6(q-r+2)(q-r+1)}{r^2(r^2-1)} - \frac{2}{5}\frac{(r+2)(r-2)}{r^2(r^2-1)}. \qquad (18.\ 10)$$

Wird die rechte Seite von (18. 7) nach Potenzen von $x - 1$ entwickelt, so findet man

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{x - \varepsilon_\nu} = \frac{2m-n-1}{2} + \left[\frac{n^2-1}{12} + \frac{(m-1)(m-n-1)}{2}\right](x-1) + \cdots.$$

Lassen wir hier x gegen 1 konvergieren, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\nu^m}{\varepsilon_\nu - 1} = \frac{n+1-2m}{2}. \qquad (18.\ 11)$$

Differenzieren wir nach x und lassen danach x gegen 1 konvergieren, so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\nu^m}{(\varepsilon_\nu - 1)^2} = -\frac{n^2-1}{12} - \frac{(m-1)(m-n-1)}{2}. \qquad (18.\ 12)$$

Durch Eintragen der Ausdrücke (18. 10), (18. 11) und (18. 12) in die rechte Seite der Gleichung (18. 9) findet man

$$Q_{p+j,\,j} = \frac{n^2-1}{n\,r\,(r^2-1)} - \frac{2}{5}\frac{r^2-4}{n\,r\,(r^2-1)} + \frac{6\,p\,(p-n)}{n\,r\,(r^2-1)} + r\sum_{s=1}^{2r-4} \frac{a_s^{r-2+p}}{f'(a_s)(a_s^n-1)}. \qquad (18.\ 13)$$

Aus den Bedingungen, die wir oben den Zahlen m und q auferlegt haben, geht hervor, dass diese Relation für $-(r-2) \leqq p \leqq n+r-2$ gültig ist. Da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung die Relation

$$\frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} = -\frac{a_s^{-(r-2)}}{f'(a_s^{-1})}$$

befriedigen, kann die letzte Gleichung auch in der Form

$$Q_{p+j,\,j} = \frac{n^2-1}{n\,r\,(r^2-1)} - \frac{2}{5}\frac{r^2-4}{n\,r\,(r^2-1)} + \frac{6\,p\,(p-n)}{n\,r\,(r^2-1)}$$
$$+ r\sum_{s=1}^{r-2} \frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} \frac{a_s^p + a_s^{n-p}}{a_s^n - 1} \qquad -(r-2) \leqq p \leqq n+r-2 \qquad (18.\ 14)$$

geschrieben werden.

Da Q eine periodische Funktion von p mit der Periode n ist, folgt hieraus wieder, dass

$$Q_{p+j,\,j} = \frac{n^2-1}{n\,r\,(r^2-1)} - \frac{2}{5}\frac{r^2-4}{n\,r\,(r^2-1)} + \frac{6\,p\,(p+n)}{n\,r\,(r^2-1)}$$
$$+ r\sum_{s=1}^{r-2} \frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} \frac{a_s^{-p} + a_s^{n+p}}{a_s^n - 1} \qquad -n-(r-2) \leqq p \leqq r-2. \qquad (18.\ 15)$$

In dem gemeinsamen Intervall $-(r-2) \leqq p \leqq r-2$ ist die Differenz zwischen diesen beiden Ausdrücken für $Q_{p+j,\,j}$

$$\frac{12\,p}{r\,(r^2-1)} + r\sum_{s=1}^{r-2} \frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)}(a_s^p - a_s^{-p}) \qquad (18.\ 16)$$

Dieser letzte Ausdruck ist die Summe der Residuen für die rationale Funktion

$$\frac{r\, z^{r-2+p}}{f(z)}$$

und deshalb gleich Null.

Aus der Gleichung (18. 14) geht hervor, dass $Q_{p+j,j}$ sich nicht ändert, wenn p durch $n-p$ ersetzt wird. Man hätte diesen Ausdruck auch dadurch finden können, dass man die Funktion

$$\frac{r\, z^{r-2+p}}{f(z)\,(z^n-1)} \qquad -(r-2) \leqq p \leqq n+r-2$$

betrachtet. Der Punkt $z = 1$ ist ein Pol 3. Ordnung mit dem Residuum

$$\frac{n^2-1}{n\, r\,(r^2-1)} - \frac{2}{5}\,\frac{r^2-4}{n\, r\,(r^2-1)} + \frac{6\, p\,(p-n)}{n\, r\,(r^2-1)}.$$

Die Punkte a_s und ε_ν sind einfache Pole. Die Summe der Residuen in den Punkten a_s ist gleich dem letzten Glied auf der rechten Seite von (18. 14). Die Summe der Residuen in den Punkten ε_ν ist gleich der rechten Seite von (18. 1), mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen. Das Residuum im unendlich fernen Punkt ist gleich Null. Drückt man aus, dass die Summe der Residuen Null ist, so sieht man, dass die rechte Seite von (18. 1) gleich der rechten Seite von (18. 14) ist.

Die Funktion $Q_{p+j,j}$ wächst mit n über jede Grenze, aber es ist leicht zu sehen, wie sie sich für sehr grosse Werte von n verhält. Aus der Ungleichheit (18. 2) in Verbindung mit (18. 14) und (18. 15) folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left[Q_{p+j,j} - \frac{n}{r\,(r^2-1)}\right] = -\frac{6\,p}{r\,(r^2-1)} - r\sum_{s=1}^{r-2}\frac{a_s^{r-2+p}}{f'(a_s)} \qquad p \geqq -(r-2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[Q_{p+j,j} - \frac{n}{r\,(r^2-1)}\right] = \frac{6\,p}{r\,(r^2-1)} - r\sum_{s=1}^{r-2}\frac{a_s^{r-2-p}}{f'(a_s)} \qquad p \leqq r-2.$$

19. Betrachten wir einige spezielle Fälle. Für $r = 2$ lautet die charakteristische Funktion $f(z) = (z-1)^2$. Sie hat nur die eine Nullstelle $z = 1$, deshalb verschwindet das letzte Glied in (18. 14) und wir finden

$$Q_{p+j,j} = \frac{n^2-1}{6\,n} + \frac{p\,(p-n)}{n} \qquad n \geqq p \geqq 0. \qquad (19.\ 1)$$

Da $Q_{p+j,j}$ eine gerade Funktion von p ist, gilt diese Gleichung nicht für negative Werte von p, sondern man hat dann

$$Q_{p+j,j} = \frac{n^2 - 1}{6n} + \frac{p(p+n)}{n} \qquad 0 \geqq p \geqq -n. \tag{19. 2}$$

Die Funktion $Q_{p+j,j}$ wird somit durch zwei rationale Funktionen dargestellt.

Für $r = 3$ heisst die charakteristische Funktion

$$f(z) = (z-1)^2(z^2 + 4z + 1).$$

Also ist

$$a_1 = -2 + \sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^2.$$

Für $-1 \leqq p \leqq n + 1$ findet man aus der Gleichung (18. 14)

$$Q_{p+j,j} = \frac{n^2 - 3}{24n} + \frac{p(p-n)}{4n} + \frac{(-2)^{p-2}}{\sqrt{3}} \frac{(1+\sqrt{3})^{n-2p} + (1-\sqrt{3})^{n-2p}}{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}. \tag{19. 3}$$

Wenn $p < -1$ wird, hört die Gültigkeit dieser Gleichung auf, aber da $Q_{p+j,j}$ eine gerade Funktion von p ist, stellt die rechte Seite auch $Q_{j-p,j}$ für die angegebenen Werte von p dar. Insbesondere erhält man für $p = 0$

$$12\, Q_{jj} = \frac{n^2 - 3}{2n} + \sqrt{3} \frac{(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}. \tag{19. 4}$$

Betrachten wir den Kettenbruch

$$1 + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \cdots$$

der konvergent und gleich $\sqrt{3}$ ist. Das letzte Glied auf der rechten Seite von (19. 4) ist der $n$te Näherungsbruch für diesen Kettenbruch, der uns somit ein einfaches Mittel zur Berechnung von Q_{jj} für alle n gibt. Wenn n gross ist, gibt der Ausdruck

$$\frac{n^2 - 3}{2n} + \sqrt{3}$$

eine gute Annäherung an $12\, Q_{jj}$. Zum Beispiel für $n = 10$ ist der Fehler kleiner als 10^{-5}. Man sieht ferner, dass, wenn die Näherungszähler und -nenner für diesen Kettenbruch mit A_n und B_n bezeichnet werden, das letzte Glied der rechten Seite von (19. 3) gleich

$$\frac{(-2)^p}{12}\,\frac{A_{n-2p}}{B_n}$$

für $0 \leqq p \leqq \frac{n}{2}$ ist, und es genügt, diese Werte von p zu betrachten.

Die Polynome $\varphi_{n,r}(x)$ und $\psi_{n,r}(x)$.

20. Die Gleichungen (17. 6) oder (18. 14) geben eine vollständige Lösung unseres Problems. Da aber Q_{ij} eine rationale Zahl ist, die nur von den beiden ganzen Zahlen r und n abhängt, kann es wenig befriedigend erscheinen, von irrationalen Grössen zur Bestimmung von Q_{ij} Gebrauch zu machen, und es liegt nahe, diese zu eliminieren. Wir werden im folgenden Q durch zwei andere einfache Methoden bestimmen, die nicht an diesem Mangel leiden. Setzen wir

$$\varphi_{n,r}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(x - \frac{\sin\frac{r\nu\pi}{n}}{\sin\frac{\nu\pi}{n}}\right) \tag{20. 1}$$

$$\psi_{n,r}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(x^2 - \frac{\sin^2\frac{r\nu\pi}{n}}{\sin^2\frac{\nu\pi}{n}}\right) = (-1)^{n-1}\,\varphi_{n,r}(x)\,\varphi_{n,r}(-x). \tag{20. 2}$$

Die Gleichung (17. 7) kann

$$2\,n\,Q_{jj} = \frac{\varphi'_{n,r}(r)}{\varphi_{n,r}(r)} - \frac{\varphi'_{n,r}(-r)}{\varphi_{n,r}(-r)} = \frac{\psi'_{n,r}(r)}{\psi_{n,r}(r)} \tag{20. 3}$$

geschrieben werden. Die Bestimmung des reziproken Gewichts Q_{jj} kann also auf eine Bestimmung einer der Funktionen $\varphi_{n,r}(x)$ oder $\psi_{n,r}(x)$ zurückgeführt werden, die Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten sind, die nur von n und r abhängen.

Ersetzt man r durch $n-r$, so sieht man, dass $\psi_{n,r}$ die Relation

$$\psi_{n,\,n-r}(x) = \psi_{n,r}(x)$$

befriedigt.

Betrachten wir zuerst den Fall $r = 2$, der

$$\varphi_{n,2}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(x - 2\cos\frac{\nu\pi}{n}\right) \tag{20. 4}$$

gibt. Setzt man $x = 2 \cos \Theta$, so sieht man, dass

$$\varphi_{n,2}(2 \cos \Theta) = \frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}. \tag{20. 5}$$

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von $2 \cos \Theta$, so findet man

$$\varphi_{n,2}(x) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^s \binom{n-s-1}{s} x^{n-2s-1}. \tag{20. 6}$$

Die Gleichung (20. 5) kann in der Form

$$\varphi_{n,2}(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-4})^n - (x - \sqrt{x^2-4})^n}{2^n \sqrt{x^2-4}} \tag{20. 7}$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck zeigt, dass $\varphi_{n,2}(x)$ der $n$te Näherungsnenner und der $(n-1)$te Näherungszähler für den Kettenbruch

$$x - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \frac{1|}{|x} - \cdots$$

ist. Es ist daher leicht, $\varphi_{n,2}(x)$ zu berechnen, was n auch sei.

Es sei zunächst $r = 3$. Die Gleichung (20. 1) reduziert sich auf

$$\varphi_{n,3}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(x - 3 + 4 \sin^2 \frac{\nu\pi}{n}\right).$$

Setzt man $x = 4 \cos^2 \Theta - 1$, so zeigt diese Gleichung, dass

$$\varphi_{n,3}(x) = \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}\right)^2. \tag{20. 8}$$

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von $\cos \Theta$, so findet man

$$\varphi_{n,3}(x-1) = \left[\sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^s \binom{n-s-1}{s} x^{\frac{n-1}{2}-s}\right]^2. \tag{20. 9}$$

Eliminiert man Θ aus der Gleichung (20. 8), so erhält man

$$\varphi_{n,3}(x+1) = \frac{1}{x-2}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n - 2\right]$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^n - (\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^n}{2^n\sqrt{x-2}}\right]^2.$$

21. Betrachten wir ferner den Fall $n = 2r$. Wenn r *gerade* ist, reduziert sich die Gleichung (20. 1) auf

$$\varphi_{2r,r}(x) = x^{r-1}\prod\left(x^2 - \frac{1}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2r}}\right) \qquad \nu = 1, 3, 5, \ldots r-1.$$

Setzen wir

$$x = \frac{1}{\sin\Theta}$$

so folgt hieraus, dass

$$\varphi_{2r,r}(x) = \frac{\cos r\Theta}{(\sin\Theta)^{2r-1}}.$$

Entwickelt man $\cos r\Theta$ nach Potenzen von $\sin\Theta$, so bekommt man

$$\varphi_{2r,r}(x) = x^{r-1}\sum_{s=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^s\frac{r^2(r^2-2^2)\ldots(r^2-(2s-2)^2)}{(2s)!}x^{r-2s}.$$

Auf dieselbe Weise findet man, wenn r *ungerade* ist

$$\psi_{2r,r}(x) = x^{2r-2}(x^2-1)\left[\sum_{s=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^s\frac{(r^2-1^2)(r^2-3^2)\ldots(r^2-(2s-1)^2)}{(2s)!}x^{r-1-2s}\right]^2.$$

22. Wenn n und r willkürlich sind, sind die Koeffizienten der Polynome $\varphi_{n,r}$ und $\psi_{n,r}$ nicht so einfach wie in den soeben behandelten speziellen Fällen. Wir wollen aber jetzt eine sehr bequeme Methode zur Berechnung dieser Koeffizienten angeben. Setzen wir

$$\varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}$$

so kann die Gleichung (20. 1) geschrieben werden

$$(-1)^{\frac{(n-1)(r+1)}{2}}(r-x)\varphi_{n,r}(x) = (r-x)\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\varepsilon_\nu^r-1}{\varepsilon_\nu-1} - x\,\varepsilon_\nu^{\frac{r-1}{2}}\right). \qquad (22.\ 1)$$

Wenn r *ungerade* ist, besagt diese Gleichung, dass das Polynom auf der linken Seite die Resultante von $z^n - 1$ und

$$\frac{z^r - 1}{z - 1} - x z^{\frac{r-1}{2}}$$

ist.

Nehmen wir r *gerade* an, so kann die Gleichung (20. 2)

$$\psi_{n,r}(x) = \prod_{\nu=1}^{2n-1}{}' \left(\frac{\varepsilon_\nu^r - 1}{\varepsilon_\nu - 1} - x \varepsilon_\nu^{\frac{r-1}{2}} \right) \tag{22. 2}$$

geschrieben werden, wo der Strich beim Produktenzeichen bedeutet, dass der Wert $\nu = n$ nicht mitgenommen werden soll. Hieraus folgt, dass für *gerade* Werte von r der Ausdruck $(r^2 - x^2)\psi_{n,r}(x)$ die Resultante von $z^{2n} - 1$ und

$$\frac{z^{2r} - 1}{z^2 - 1} - x z^{r-1}$$

ist.

Auf dieselbe Weise sieht man, dass für willkürliche Werte von n und r der Ausdruck $(-1)^{(n-1)r}(r^2 - x^2)\psi_{n,r}(x)$ die Resultante der Polynome $z^n - 1$ und

$$\left(\frac{z^r - 1}{z - 1}\right)^2 - x^2 z^{r-1}$$

ist.

Aus den Gleichungen (20. 1) und (20. 5) folgt weiter, dass

$$\varphi_{n,r}(x) = (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[\varphi_{r,2}\left(2 \cos \frac{\nu\pi}{n}\right) - x \right]. \tag{22. 3}$$

Da nun $\varphi_{n,2}(x)$ infolge (20. 4) die Nullstellen $2 \cos \frac{\nu\pi}{n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n - 1)$ hat, kann man hieraus schliessen, dass $(-1)^{n-1}\varphi_{n,r}(x)$ die Resultante von $\varphi_{n,2}(z)$ und $\varphi_{r,2}(z) - x$ ist, oder was dasselbe bedeutet, die Resultante von $\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}$ und $\frac{\sin r\Theta}{\sin\Theta} - x$, wenn diese Grössen als Funktionen von $2 \cos \Theta$ betrachtet werden. Von dem Ausdruck (20. 6) für $\varphi_{n,2}$ kann man folglich $\varphi_{n,r}$ für alle r herleiten.

Die Resultante R_{f_0, f_1} von zwei Polynomen $f_0(z)$ und $f_1(z)$ kann man allein durch rationale Rechenoperationen berechnen. Nehmen wir an, dass der Grad für $f_1(z) \leqq$ der Grad für $f_0(z)$ ist. Bei Benutzung des Algorithmus, der zur

Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers dient, bekommt man eine Folge von Polynomen $f_2, f_3, \ldots f_\nu, \ldots$ beständig abnehmenden Grades, und zwar dadurch, dass man $f_\nu(z)$ in $f_{\nu-1}(z)$ hineindividiert, wodurch ein Rest $f_{\nu+1}(z)$ niedrigeren Grades als $f_\nu(z)$ entsteht. Wir bekommen somit folgende Gleichungen

$$f_{\nu-1}(z) = f_\nu(z)\, g_\nu(z) + f_{\nu+1}(z) \qquad \nu = 1, 2, \ldots m-1. \qquad (22.\ 4)$$

Nehmen wir an, dass $f_0(z)$ und $f_1(z)$ keinen gemeinsamen Teiler haben. Nach einer endlichen Anzahl von Divisionen kommt man dann zu einem Rest $f_m(z)$, der eine von Null verschiedene Konstante ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} f_\nu(z) &= c_\nu z^{p_\nu} + c'_\nu z^{p_\nu - 1} + \cdots \\ &= c_\nu (z - \alpha_1^{(\nu)})(z - \alpha_2^{(\nu)}) \ldots \left(z - \alpha_{p_\nu}^{(\nu)}\right) \end{aligned} \qquad (22.\ 5)$$

wo c_ν als von Null verschieden angenommen wird. Dann ist

$$p_0 \geqq p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_m = 0.$$

Aus den Gleichungen (22. 4) erhält man

$$f_{\nu-1}(\alpha_i^{(\nu)}) = f_{\nu+1}(\alpha_i^{(\nu)}) \qquad i = 1, 2, \ldots p_\nu. \qquad (22.\ 6$$

Nun ist die Resultante von f_ν und $f_{\nu+1}$

$$R_{f_\nu, f_{\nu+1}} = c_\nu^{p_{\nu+1}} \prod_{i=1}^{p_\nu} f_{\nu+1}(\alpha_i^{(\nu)})$$

und die Resultante von $f_{\nu-1}$ und f_ν

$$R_{f_{\nu-1}, f_\nu} = (-1)^{p_{\nu-1} p_\nu} c_\nu^{p_{\nu-1}} \prod_{i=1}^{p_\nu} f_{\nu-1}(\alpha_i^{(\nu)}).$$

Aus den Gleichungen (22. 6) folgt deshalb

$$R_{f_{\nu-1}, f_\nu} = (-1)^{p_{\nu-1} p_\nu} c_\nu^{p_{\nu-1} - p_{\nu+1}} R_{f_\nu, f_{\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m-1). \qquad (22.\ 7)$$

Die gesuchte Resultante R_{f_0, f_1} lässt sich also durch die Resultante R_{f_{m-1}, f_m} ausdrücken. Da aber $p_m = 0$, hat man

$$R_{f_{m-1}, f_m} = c_m^{p_{m-1}}.$$

Die Gleichungen (22. 7) geben uns folglich

$$R_{f_0, f_1} = (-1)^{\sum\limits_1^m p_{\nu-1} p_\nu} \prod_{\nu=1}^m c_\nu^{p_{\nu-1} - p_{\nu+1}}. \tag{22. 8}$$

Übrigens kann man die Division unterbrechen, sobald man zu einem Rest f_ν vom 1. oder 2. Grade kommt, indem man hat

$$R_{f(z),\, a-z} = f(\alpha).$$

Die letzte der Gleichungen (22. 4) ist

$$f_{m-2}(z) = f_{m-1}(z)\, g_{m-1}(z) + f_m(z)$$

wo f_m eine von Null verschiedene Konstante c_m ist. Wir können hierzu noch die Gleichung

$$f_{m-1}(z) = f_m(z)\, g_m(z)$$

fügen, die auch

$$f_{m-1}(z) = c_m\, g_m(z)$$

geschrieben werden kann.

$g_\nu(z)$ ist ein Polynom in z, das sich durch Division von $f_\nu(z)$ in $f_{\nu-1}(z)$ ergibt, und da $f_{\nu+1}(z)$ von niedrigerem Grade als $f_\nu(z)$ ist, hat $g_\nu(z)$ den Grad $p_{\nu-1} - p_\nu$. Setzen wir

$$g_\nu(z) = k_\nu z^{p_{\nu-1} - p_\nu} + k'_\nu z^{p_{\nu-1} - p_\nu - 1} + \cdots$$

so ist

$$k_\nu c_\nu = c_{\nu-1} \qquad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

Diese Gleichungen geben

$$c_\nu = \frac{c_0}{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \qquad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

Trägt man diesen Ausdruck in (22. 8) ein, so erhält man die Beziehung

$$R_{f_0, f_1} = (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^m p_{\nu-1} p_\nu} \frac{c_0^{p_0 + p_1}}{\prod\limits_{\nu=1}^m k_\nu^{p_{\nu-1} + p_\nu}}$$

welche die gesuchte Resultante durch die Zahlen k_ν ausdrückt. Mit anderen Worten: Um die Resultante von $f_0(z)$ und $f_1(z)$ zu finden, braucht man nur die eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung

$$\frac{f_0(z)}{f_1(z)} = g_1(z) + \frac{1|}{|g_2(z)} + \frac{1|}{|g_3(z)} + \cdots + \frac{1|}{|g_m(z)}$$

zu bilden.

Aus den Koeffizienten k_ν der höchsten Potenz von z in $g_\nu(z)$ findet man dann sofort die Resultante. Diese Methode ist sehr bequem für die Bestimmung von $\varphi_{n,r}(x)$. Übrigens braucht man das Vorzeichen der Resultante nicht zu berechnen, weil aus der Definition von $\varphi_{n,r}(x)$ hervorgeht, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 1 ist. Man kann deshalb auch nötigenfalls während der Rechnung nach Belieben konstante Faktoren einführen, um Brüche zu vermeiden.

Wenn n keine Primzahl ist, kann $\varphi_{n,2}(z)$ in Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten aufgelöst werden, und es wird dann am einfachsten sein, die Resultante von $\varphi_{r,2}(z) - x$ und jedem dieser Faktoren für sich zu bestimmen. Wenn man zum Beispiel $\varphi_{12,5}(x)$ bestimmen will, berechnet man die Resultante von

$$\varphi_{12,2}(z) = z(z^2-1)(z^2-2)(z^2-3)(z^4-4z^2+1)$$

und

$$\varphi_{5,2}(z) - x = z^4 - 3z^2 + 1 - x.$$

Man braucht dann nur den letzten Faktor von $\varphi_{12,2}(z)$ in $\varphi_{5,2}(z) - x$ hineinzudividieren, wodurch man den Rest $z^2 - x$ erhält, und man findet *beinahe ohne Rechnung*

$$\varphi_{12,5}(x) = (x-1)^3(x+1)^4(x^2-4x+1)^2.$$

Auf diese Weise kann man die immer beschwerliche Auflösung einer grossen Anzahl von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten durch einen Algorithmus ersetzen, der so einfach ist, wie man ihn sich nur denken kann, und beinahe keine Arbeit fordert.

Die Polynome $\varphi_{n,r}(x)$ haben mehrere bemerkenswerte Eigenschaften. Zum Beispiel, wenn $n = pq$ mit teilerfremden p und q, geht aus der Gleichung (20. 1) hervor, dass $\varphi_{n,r}(x)$ durch $\varphi_{p,r}(x)\,\varphi_{q,r}(x)$ teilbar ist.

Wir geben jetzt $\varphi_{n,r}(x)$ für einige spezielle Werte von n und r:

$\varphi_{3,2}(x) = x^2 - 1$

$\varphi_{4,2}(x) = x(x^2-2)$

$\varphi_{5,2}(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

$\varphi_{6,2}(x) = x(x^2-1)(x^2-3)$

$\varphi_{7,2}(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$

$\varphi_{3,3}(x) = x^2$

$\varphi_{4,3}(x) = (x+1)(x-1)^2$

$\varphi_{5,3}(x) = (x^2-x-1)^2$

$\varphi_{6,3}(x) = (x+1)x^2(x-2)^2$

$\varphi_{7,3}(x) = (x^3-2x^2-x+1)^2$

$\varphi_{8,2}(x) = x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)$ $\qquad$ $\varphi_{8,3}(x) = (x+1)(x-1)^2(x^2-2x-1)^2$

$\varphi_{9,2}(x) = (x^2-1)(x^6-6x^4+9x^2-1)$ $\qquad$ $\varphi_{9,3}(x) = x^2(x^3-3x^2+3)^2$

$\varphi_{10,2}(x) = x(x^4-3x^2+1)(x^4-5x^2+5)$ $\qquad$ $\varphi_{10,3}(x) = (x+1)(x^2-x-1)^2(x^2-3x+1)^2$

$\varphi_{12,2}(x) = x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^4-4x^2+1)$

$\varphi_{12,3}(x) = (x+1)x^2(x-1)^2(x-2)^2(x^2-2x-2)^2$

$\varphi_{5,4}(x) = (x^2-1)^2$ $\qquad$ $\varphi_{5,5}(x) = x^4$

$\varphi_{6,4}(x) = x(x^2-1)(x^2-3)$ $\qquad$ $\varphi_{6,5}(x) = (x+1)^2(x-1)^3$

$\varphi_{7,4}(x) = x^6-6x^4+5x^2-1$ $\qquad$ $\varphi_{7,5}(x) = (x^3-x^2-2x+1)^2$

$\varphi_{8,4}(x) = x^3(x^4-8x^2+8)$ $\qquad$ $\varphi_{8,5}(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2-2x-1)^2$

$\varphi_{9,4}(x) = (x^2-1)(x^6-9x^4+6x^2-1)$ $\qquad$ $\varphi_{9,5}(x) = (x+1)^2(x^3-3x^2+1)^2$

$\varphi_{10,4}(x) = x(x^2-1)^2(x^4-10x^2+5)$ $\qquad$ $\varphi_{10,5}(x) = x^4(x-1)(x^2-2x-4)^2$

$\varphi_{12,4}(x) = x^3(x^2-1)(x^2-3)(x^4-12x^2+9)$ $\qquad$ $\varphi_{12,5}(x) = (x+1)^4(x-1)^3(x^2-4x+1)^2$

23. Aus der Gleichung (22. 1) können wir leicht eine Determinantendarstellung für $\varphi_{n,r}(x)$ herleiten, wenn r ungerade ist. Setzt man nämlich in der Gleichung (4. 4)

$$f(z) = \frac{z^r - 1}{z - 1} - x z^{\frac{r-1}{2}} \tag{23. 1}$$

so findet man

$$(-1)^n (x - r)\varphi_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \dots 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & \dots 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix} . \tag{23. 2}$$

Diese Determinante ist von der Ordnung n. In der ersten Zeile ist das erste Element $1 - x$, die $\frac{r-1}{2}$ folgenden Elemente sind alle 1, die $n - r$ folgenden Elemente sind 0, und die $\frac{r-1}{2}$ letzten Elemente sind alle 1. Die anderen Zeilen lassen sich aus der ersten durch zyklische Vertauschung der Elemente herleiten. In der Hauptdiagonale sind also alle Elemente gleich $1 - x$, während die übrigen Elemente entweder 0 oder 1 sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte gibt es r Elemente, die von Null verschieden sind. Wenn man zur letzten Zeile alle übrigen Zeilen addiert, werden alle Elemente in der letzten Zeile $r-x$, und der Faktor $r-x$ kann deshalb wegdividiert werden.

Auf dieselbe Weise sieht man, wenn in der Gleichung (4.4)

$$f(z)=\left(\frac{z^r-1}{z-1}\right)^2-x^2 z^{r-1} \tag{23.3}$$

gesetzt wird, dass $\psi_{n,r}(x)$ für willkürliche Werte von r und n durch eine Determinante von der Ordnung n folgendermassen dargestellt werden kann:

$$(-1)^n(x^2-r^2)\,\psi_{n,r}(x)=\begin{vmatrix} r-x^2 & r-1 & r-2 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 & 3 & \ldots & r-1 \\ r-1 & r-x^2 & r-1 & \ldots & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & \ldots & r-2 \\ r-2 & r-1 & r-x^2 & \ldots & 3 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & r-3 \\ r-3 & r-2 & r-1 & \ldots & 4 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & r-4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r-1 & r-2 & r-3 & \ldots & & & & \ldots & 2 & 3 & 4 & \ldots & r-x^2 \end{vmatrix}.$$

Addiert man die $n-1$ ersten Zeilen zur letzten Zeile, so werden alle Elemente in dieser gleich r^2-x^2, was wegdividiert werden kann, und die Determinante reduziert sich danach für $x=r$ auf die Determinante der Gewichtsgleichungen.

24. Im allgemeinen wird n eine grosse Zahl sein, während r immer viel kleiner als n ist. Es ist deshalb vorteilhaft, die Ordnung dieser Determinanten in folgender Weise zu reduzieren. Wir nehmen zuerst an, dass r ungerade ist, und definieren $A_\nu^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots r-2)$ als diejenigen Lösungen der Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} A_{\nu+s}^{(i)}=x\,A_{\nu+\frac{r-1}{2}}^{(i)} \tag{24.1}$$

welche die Anfangsbedingungen

$$A_\nu^{(i)}=\eta_{\nu i} \qquad \nu, i=0, 1, \ldots r-2 \tag{24.2}$$

befriedigen. Trägt man den Ausdruck (23.1) für $f(z)$ in die Gleichung (6.4) ein, so findet man

$$(-1)^{\frac{(n-1)(r+1)}{2}}\varphi_{n,r}(x)=\frac{1}{r-x}\begin{vmatrix} A_n^{(0)}-1 & A_n^{(1)} & \ldots & A_n^{(r-2)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)}-1 & \ldots & A_{n+1}^{(r-2)} \\ & & & \\ A_{n+r-2}^{(0)} & A_{n+r-2}^{(1)} & \ldots & A_{n+r-2}^{(r-2)}-1 \end{vmatrix}. \tag{24.3}$$

Wenn r gerade ist, so definieren wir $A_\nu^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots 2r-3)$ als diejenigen Lösungen der Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} A_{2\nu+2s}^{(i)} = x A_{2\nu+r-1}^{(i)} \tag{24.4}$$

welche die Anfangsbedingungen

$$A_\nu^{(i)} = \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 0, 1, \ldots 2r-3 \tag{24.5}$$

befriedigen.

Setzt man in der Gleichung (6.4)

$$f(z) = \frac{z^{2r} - 1}{z^2 - 1} - x z^{r-1} \tag{24.6}$$

so findet man

$$\psi_{n,r}(x) = \frac{1}{r^2 - x^2} \begin{vmatrix} A_{2n}^{(0)} - 1 & A_{2n}^{(1)} & \ldots A_{2n}^{(2r-3)} \\ A_{2n+1}^{(0)} & A_{2n+1}^{(1)} - 1 & \ldots A_{2n+1}^{(2r-3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{2n+2r-3}^{(0)} & A_{2n+2r-3}^{(1)} & \ldots A_{2n+2r-3}^{(2r-3)} - 1 \end{vmatrix}. \tag{24.7}$$

Für willkürliche Werte von r findet man weiter durch Eintragen des Ausdruckes (23.3) für $f(z)$

$$(-1)^{(n-1)r} \psi_{n,r}(x) = \frac{1}{r^2 - x^2} \begin{vmatrix} A_n^{(0)} - 1 & A_n^{(1)} & \ldots A_n^{(2r-3)} \\ A_{n+1}^{(0)} & A_{n+1}^{(1)} - 1 & \ldots A_{n+1}^{(2r-3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n+2r-3}^{(0)} & A_{n+2r-3}^{(1)} & \ldots A_{n+2r-3}^{(2r-3)} - 1 \end{vmatrix} \tag{24.8}$$

wo die $A_\nu^{(i)}$ die Differenzengleichung

$$\sum_{s=1}^{r-1} (r-s)\left(A_{\nu+s}^{(i)} + A_{\nu-s}^{(i)}\right) = (x^2 - r^2) A_\nu^{(i)} \tag{24.9}$$

und die Anfangsbedingungen

$$A_\nu^{(i)} = \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 0, 1, \ldots 2r-3 \tag{24.10}$$

befriedigen.

Man kann diese Determinanten durch andere von nur halb so hoher Ordnung ersetzen, indem man anstelle der Lösungen $A_\nu^{(i)}$ andere partikuläre Lösungen derselben Differenzengleichungen wählt. Wir haben nämlich gesehen, dass die

Determinante (11.6) für $x = 1$ gleich dem Produkt (11.7) ist; wenn wir jetzt für $f(z)$ den Ausdruck (23.1) eintragen, erhalten wir, falls r ungerade ist,

$$(-1)^{\frac{n(r+1)}{2}} \varphi_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} D^{(1)}_{n+1} & -D^{(1)}_{n-1} - 2 & D^{(2)}_{n+1} & -D^{(2)}_{n-1} & \ldots & D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n+1} & -D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n-1} \\ D^{(1)}_{n+2} & -D^{(1)}_{n-2} & D^{(2)}_{n+2} & -D^{(2)}_{n-2} - 2 & \ldots & D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n+2} & -D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^{(1)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -D^{(1)}_{n-\frac{r-1}{2}} & D^{(2)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -D^{(2)}_{n-\frac{r-1}{2}} & \ldots & D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -D^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}_{n-\frac{r-1}{2}} - 2 \end{vmatrix} : (x - r)$$

wo die $D^{(i)}_\nu$ die Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} D^{(i)}_{\nu+s} = x D^{(i)}_{\nu+\frac{r-1}{2}} \tag{24.11}$$

und die Anfangsbedingungen

$$D^{(i)}_{\pm\nu} = \pm\, \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 1, 2, \ldots \frac{r-1}{2} \tag{24.12}$$

befriedigen.

Für die Funktion $\psi_{n,r}(x)$ findet man einen ähnlichen Ausdruck. Die Grössen $A^{(i)}_\nu$ und $D^{(i)}_\nu$ sind Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten, die sich mit Hilfe der angeführten Differenzengleichungen leicht berechnen lassen. Diese Differenzengleichungen geben uns daher ein neues, sehr einfaches Mittel zur Berechnung der Polynome $\varphi_{n,r}(x)$ und $\psi_{n,r}(x)$.

Aus dem in § 7 Gesagten folgt weiter, dass man für ungerades r hat

$$(-1)^{\frac{(n-1)(r+1)}{2}} \varphi_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & \ldots & C_{n-r+2} \\ C_{n+1} & C_n & \ldots & C_{n-r+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+r-2} & C_{n+r-3} & \ldots & C_n \end{vmatrix} \tag{24.13}$$

wo die Polynome $C_1, C_2, C_3, \ldots$ durch die Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} C_{\nu-s} - x\, C_{\nu-\frac{r-1}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq n \\ 0 \text{ für } n < \nu \end{cases} \tag{24.14}$$

und die Anfangsbedingungen

$$C_{-\nu} = 0 \qquad\qquad 0 \leqq \nu < r \tag{24.15}$$

festgelegt werden.

Auf dieselbe Weise sieht man, dass für willkürliche Werte von r gilt

$$(-1)^{(n-1)r}\,\psi_{n,r}(x)=\begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} & \dots & C_{n-2r+3} \\ C_{n+1} & C_n & \dots & C_{n-2r+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+2r-3} & C_{n+2r-4} & \dots & C_n \end{vmatrix} \tag{24. 16}$$

wo die Polynome $C_1, C_2, C_3, \dots$ durch die Differenzengleichung

$$\sum_{s=1}^{r-1}(r-s)(C_{\nu+s}+C_{\nu-s})+(r-x^2)\,C_\nu=\begin{cases} 1 \text{ für } -(r-1)<\nu\leqq n-(r-1) \\ 0 \text{ für } n-(r-1)<\nu \end{cases}$$

und die Anfangsbedingungen

$$C_{-\nu}=0 \qquad 0\leqq\nu<2r-1$$

bestimmt werden.

Diese orthosymmetrischen Determinanten befriedigen eine einfache Differenzengleichung. Die Determinante auf der rechten Seite von (24. 13) ist von der Ordnung $r-1$. Bezeichnen wir diese Determinante mit dem Symbol $(n, r-1)$, so folgt aus einem bekannten Determinantensatz[1], dass

$$(n, r+1)(n, r-1)=(n, r)^2-(n+1, r)(n-1, r).$$

Mit Hilfe dieser nicht linearen Differenzengleichung kann die Berechnung von $\varphi_{n,r}(x)$ mit der Berechnung der Grösse $(n, 1)=C_n$, die durch die lineare Differenzengleichung (24. 14) festgelegt wird, verknüpft werden.

Ein Fundamentalsystem von Lösungen.

25. Für $x=r$ erhalten die Ausdrücke (24. 3), (24. 7), (24. 8) usw. die unbestimmte Form $\frac{0}{0}\cdot$ Da es gerade dieser Wert der betreffenden Funktionen ist, der in den Ausdruck (20. 3) für Q_{jj} eingeht, wollen wir die vorhergehende Untersuchung ergänzen, indem wir explizite Ausdrücke für die Funktionen Q_{jj} von ähnlicher Form wie (8. 8) herleiten. Diese können wir entweder durch Differentiation der in § 24 gefundenen Ausdrücke oder durch Elimination der Wurzeln a_s aus der Gleichung (18. 14) erhalten, und wir wollen hier die letzterwähnte

[1] R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Auflage, Leipzig 1881, S. 64—65.

Vorgehensweise benutzen. Zuerst wollen wir aber einige Hilfssätze zur Ergänzung des in § 8—9 Gesagten herleiten.

Betrachten wir eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_s \left(u_{\nu+m-s} + u_{\nu-m+s}\right) + c_m u_\nu = 0 \tag{25.1}$$

wo c_0 und c_m beide als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Die hierzu gehörende charakteristische Gleichung ist

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_s \left(z^{m-s} + z^{-m+s}\right) + c_m = 0.$$

Wir nehmen an, dass die Wurzeln dieser Gleichung alle verschieden sind, und bezeichnen sie mit a_s und a_s^{-1} $(s = 1, 2, \ldots m)$.

Es sei wie in § 8

$$u_\nu = D_\nu^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ein System von Lösungen, die durch die Anfangsbedingungen

$$D_{\pm\nu}^{(i)} = \pm\, \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 1, 2, \ldots m$$

festgelegt werden. Setzt man $\nu = 0$ in der Differenzengleichung (25.1), so sieht man, dass $D_0^{(i)}$ für alle i gleich Null ist. Da die charakteristische Gleichung eine reziproke Gleichung ist, folgt aus den Anfangsbedingungen, dass $D_\nu^{(i)}$ eine ungerade Funktion von ν ist.

Es bezeichne

$$B_\nu^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots m-1$$

ein System von geraden Funktionen von ν, welche die Differenzengleichung (25.1) und die Anfangsbedingungen

$$B_\nu^{(i)} = \eta_{\nu i} \qquad \nu, i = 0, 1, \ldots m-1 \tag{25.2}$$

befriedigen, doch mit der Ausnahme, dass $B_0^{(0)}$ gleich 2 sein soll. Dass es ein solches System von Lösungen gibt, geht daraus hervor, dass diejenigen Gleichungen, welche $B_\nu^{(i)}$ für $\nu > 0$ als Funktion der Anfangsbedingungen bestimmen, mit denjenigen Gleichungen identisch sind, die $B_{-\nu}^{(i)}$ bestimmen. Aus der Gleichung

$$\sum_{s=0}^{m-1} c_s \left(B_{\nu+m-s}^{(i)} + B_{\nu-m+s}^{(i)}\right) + c_m B_\nu^{(i)} = 0 \tag{25.3}$$

folgt speziell für $\nu = 0$, dass

$$B_m^{(i)} = -\frac{c_{m-i}}{c_0}. \tag{25.4}$$

Die Funktionen $D_\nu^{(i)}$ und $B_\nu^{(i)}$ bilden zusammen ein Fundamentalsystem von Lösungen. Dies lässt sich durch Betrachtung der Determinante

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} D_\nu^{(m)} & D_\nu^{(m-1)} & \dots D_\nu^{(1)} & B_\nu^{(m-1)} & B_\nu^{(m-2)} & \dots B_\nu^{(0)} \\ D_{\nu+1}^{(m)} & D_{\nu+1}^{(m-1)} & \dots D_{\nu+1}^{(1)} & B_{\nu+1}^{(m-1)} & B_{\nu+1}^{(m-2)} & \dots B_{\nu+1}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{\nu+2m-1}^{(m)} & D_{\nu+2m-1}^{(m-1)} & \dots D_{\nu+2m-1}^{(1)} & B_{\nu+2m-1}^{(m-1)} & B_{\nu+2m-1}^{(m-2)} & \dots B_{\nu+2m-1}^{(0)} \end{vmatrix}$$

leicht beweisen. Ersetzt man ν durch $\nu + 1$, so sieht man, dass die Differenzengleichung (25.1) bewirkt, dass $\Delta(\nu + 1) = \Delta(\nu)$. Der Wert der Determinante ist also unabhängig von der ganzen Zahl ν. Setzt man $\nu = -m$, so erhält man eine Determinante, wo in der ersten Spalte alle Elemente mit Ausnahme desjenigen in der ersten Zeile Null sind und wo in der $(m + 1)$ten Zeile alle Elemente mit Ausnahme desjenigen in der letzten Spalte Null sind. Wir können daher die erste und die $(m + 1)$te Zeile sowie die erste und die letzte Spalte streichen. In der dadurch entstehenden Determinante wollen wir zur $i$ten Spalte die $(i + m - 1)$te Spalte $(i = 1, 2, \dots m-1)$ addieren. Wir erhalten dann eine Determinante, deren $m - 1$ erste Spalten nur je ein von Null verschiedenes Element enthalten, das gleich 2 ist. Streichen wir die $m-1$ ersten Spalten und die $m-1$ letzten Zeilen, so bleibt eine Determinante von der Ordnung $m-1$ übrig, in der alle Elemente der Hauptdiagonale 1 sind, während alle anderen Elemente 0 sind, und man findet

$$\Delta(\nu) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} 2^m.$$

Die Determinante ist somit verschieden von Null, und jede Lösung kann deshalb linear durch die Funktionen $D_\nu^{(i)}$ und $B_\nu^{(i)}$ ausgedrückt werden. Da a_s^ν eine Lösung der Differenzengleichung (25.1) ist, hat man

$$a_s^\nu = \sum_{i=0}^{m-1} k_i B_\nu^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} k_i' D_\nu^{(i)}$$

wo k_i und k_i' Konstanten sind. Ersetzt man ν durch $-\nu$, so erhält man

$$a_s^{-\nu} = \sum_{i=0}^{m-1} k_i B_\nu^{(i)} - \sum_{i=1}^{m} k_i' D_\nu^{(i)}.$$

Also ist

$$a_s^\nu + a_s^{-\nu} = 2 \sum_{i=0}^{m-1} k_i B_\nu^{(i)}.$$

Gibt man hier ν die Werte 0, 1, ... $m-1$, so folgt aus den Gleichungen (25. 2), dass für $s = 1, 2, \ldots m$ gilt

$$a_s^\nu + a_s^{-\nu} = B_\nu^{(0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_s^i + a_s^{-i}) B_\nu^{(i)}. \tag{25. 5}$$

Auf dieselbe Weise sieht man, dass

$$a_s^\nu - a_s^{-\nu} = \sum_{i=1}^{m} (a_s^i - a_s^{-i}) D_\nu^{(i)}. \tag{25. 6}$$

Aus der Gleichung (25. 5) folgt wiederum, dass für alle ganzzahligen Werte von ν und μ ist

$$(a_s^\nu - a_s^{-\nu})(a_s^\mu - a_s^{-\mu}) = B_{\nu+\mu}^{(0)} - B_{\nu-\mu}^{(0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (a_s^i + a_s^{-i})(B_{\nu+\mu}^{(i)} - B_{\nu-\mu}^{(i)}). \tag{25. 7}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\nu = n$ und gibt μ die Werte 1, 2, ... m, so findet man durch Bildung des Produktes der beiden folgenden Determinanten die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 + a_1^{-1} & \ldots & a_1^{m-1} + a_1^{-m+1} \\ 1 & a_2 + a_2^{-1} & \ldots & a_2^{m-1} + a_2^{-m+1} \\ 1 & a_3 + a_3^{-1} & \ldots & a_3^{m-1} + a_3^{-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_m + a_m^{-1} & \ldots & a_m^{m-1} + a_m^{-m+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & B_{n-p}^{(0)} + B_p^{(0)} & \ldots & B_{n-p}^{(m-1)} + B_p^{(m-1)} \\ 1 & B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & \ldots & B_{n+1}^{(m-1)} - B_{n-1}^{(m-1)} \\ 2 & B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & \ldots & B_{n+2}^{(m-1)} - B_{n-2}^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & B_{n+m}^{(0)} - B_{n-m}^{(0)} & \ldots & B_{n+m}^{(m-1)} - B_{n-m}^{(m-1)} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{s=1}^{m} (a_s^n - a_s^{-n}) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m \\ \dfrac{a_1^{n-p} + a_1^p}{a_1^n - 1} & a_1 - a_1^{-1} & a_1^2 - a_1^{-2} & \ldots & a_1^m - a_1^{-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_m^{n-p} + a_m^p}{a_m^n - 1} & a_m - a_m^{-1} & a_m^2 - a_m^{-2} & \ldots & a_m^m - a_m^{-m} \end{vmatrix}. \tag{25. 8}$$

Weiter hat man

$$\begin{vmatrix} B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & B_{n+1}^{(1)} - B_{n-1}^{(1)} & \ldots & B_{n+1}^{(m-1)} - B_{n-1}^{(m-1)} \\ B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & B_{n+2}^{(1)} - B_{n-2}^{(1)} & \ldots & B_{n+2}^{(m-1)} - B_{n-2}^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n+m}^{(0)} - B_{n-m}^{(0)} & B_{n+m}^{(1)} - B_{n-m}^{(1)} & \ldots & B_{n+m}^{(m-1)} - B_{n-m}^{(m-1)} \end{vmatrix} = \prod_{s=1}^{m} (a_s^n - a_s^{-n})(a_s - a_s^{-1}) \tag{25.9}$$

was man dadurch sieht, dass man beide Seiten mit dem ersten Faktor der linken Seite von (25. 8) multipliziert und die Beziehung (25. 7) benutzt.

Zwischen den Zahlen $B_\nu^{(i)}$ und $D_\nu^{(i)}$ bestehen verschiedene bemerkenswerte Beziehungen. Es sei μ eine willkürliche ganze Zahl. Da $B_{\mu+\nu}^{(s)}$ eine Lösung der Gleichung (25. 1) ist, kann man

$$B_{\mu+\nu}^{(s)} = \sum_{i=0}^{m-1} k_i B_\nu^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} k'_i D_\nu^{(i)}$$

setzen, wo k_i und k'_i Konstanten sind. Ersetzt man ν durch $-\nu$, so erhält man

$$B_{\mu-\nu}^{(s)} = \sum_{i=0}^{m-1} k_i B_\nu^{(i)} - \sum_{i=1}^{m} k'_i D_\nu^{(i)}.$$

Wenn man diese Gleichungen addiert und subtrahiert und die Konstanten aus den Anfangsbedingungen durch die Annahme $\nu = i$ bestimmt, so findet man für $s = 0, 1, \ldots m-1$

$$B_{\mu+\nu}^{(s)} - B_{\mu-\nu}^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} (B_{\mu+i}^{(s)} - B_{\mu-i}^{(s)}) D_\nu^{(i)}$$

$$B_{\mu+\nu}^{(s)} + B_{\mu-\nu}^{(s)} = B_\mu^{(s)} B_\nu^{(0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (B_{\mu+i}^{(s)} + B_{\mu-i}^{(s)}) B_\nu^{(i)}.$$

Auf dieselbe Weise beweist man, dass für $s = 1, 2, \ldots m$ gilt

$$D_{\mu+\nu}^{(s)} - D_{\mu-\nu}^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} (D_{\mu+i}^{(s)} - D_{\mu-i}^{(s)}) D_\nu^{(i)}$$

$$D_{\mu+\nu}^{(s)} + D_{\mu-\nu}^{(s)} = D_\mu^{(s)} B_\nu^{(0)} + \sum_{i=1}^{m-1} (D_{\mu+i}^{(s)} + D_{\mu-i}^{(s)}) B_\nu^{(i)}.$$

Elimination der Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

26. Wir wenden nun zu der Beziehung (18. 14) zurück, die wir in folgender Weise schreiben wollen

$$Q_{p+j,\,j} = \frac{n^2-1}{n\,r\,(r^2-1)} - \frac{2}{5}\,\frac{r^2-4}{n\,r\,(r^2-1)} + \frac{6\,p\,(p-n)}{n\,r\,(r^2-1)} + R(n,p) \qquad (26.\ 1)$$

wo

$$R(n, p) = r \sum_{s=1}^{r-2} \frac{a_s^{r-2}}{f'(a_s)} \frac{a_s^{n-p} + a_s^p}{a_s^n - 1} \tag{26. 2}$$

und wo $-(r-2) \leqq p \leqq n + r - 2$ vorausgesetzt wird. Die charakteristische Funktion $f(z)$ ist von der Form

$$f(z) = (z-1)^2 \prod_{\nu=1}^{r-2} (z - a_\nu)(z - a_\nu^{-1}).$$

Durch Differenzieren nach z erhält man

$$f'(a_s) = a_s^{r-2}\left(a_s - \frac{1}{a_s}\right)\left(a_s + \frac{1}{a_s} - 2\right) \prod_{\nu=1}^{r-2}{}' \left(a_s + \frac{1}{a_s} - a_\nu - \frac{1}{a_\nu}\right)$$

wo der Strich am Produktzeichen bedeutet, dass der Wert $\nu = s$ fortgelassen werden soll. Die Funktion $R(n, p)$ kann als ein Verhältnis zwischen zwei Determinanten auf folgende Weise geschrieben werden:

$$R(n, p) = r \frac{\left| 1,\ a_s + a_s^{-1},\ (a_s + a_s^{-1})^2, \ldots (a_s + a_s^{-1})^{r-4},\ \dfrac{a_s^{n-p} + a_s^p}{(a_s - a_s^{-1})(a_s + a_s^{-1} - 2)(a_s^n - 1)} \right|}{\left| 1,\ a_s + a_s^{-1},\ (a_s + a_s^{-1})^2, \ldots (a_s + a_s^{-1})^{r-3} \right|} \tag{26. 3}$$

wo s die Werte $1, 2, \ldots r-2$ annimmt. Entwickelt man die Determinante im Zähler nach den Elementen der letzten Spalte, so erhält man den Ausdruck (26. 2). Betrachten wir nun folgende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{r-3} & 0 \\ 1 & a_1 + a_1^{-1} & (a_1 + a_1^{-1})^2 & \ldots & (a_1 + a_1^{-1})^{r-3} & \dfrac{a_1^{n-p} + a_1^p}{(a_1 - a_1^{-1})(a_1^n - 1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{r-2} + a_{r-2}^{-1} & (a_{r-2} + a_{r-2}^{-1})^2 & \ldots & (a_{r-2} + a_{r-2}^{-1})^{r-3} & \dfrac{a_{r-2}^{n-p} + a_{r-2}^p}{(a_{r-2} - a_{r-2}^{-1})(a_{r-2}^n - 1)} \end{vmatrix}. \tag{26. 4}$$

Diese kann auf folgende Weise umgeformt werden. Die erste und die letzte Spalte lassen wir unverändert; von jeder der übrigen Spalten subtrahieren wir die vorhergehende, multipliziert mit 2. Wir sehen dann, dass diese Determinante gleich dem Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung (26. 3) ist, multipliziert mit $\prod_{s=1}^{r-2}(a_s + a_s^{-1} - 2)$. Man hat nun

$$\prod_{s=1}^{r-2}(a_s + a_s^{-1} - 2) = (-1)^r \prod_{s=1}^{r-2}(1 - a_s)(1 - a_s^{-1}) = (-1)^r \frac{f''(1)}{2}$$

was infolge (15. 7) gleich

$$(-1)^r \frac{r^2(r^2-1)}{12}$$

ist. Trägt man die Determinante (26. 4) in den Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung (26. 3) ein und multipliziert im Zähler und Nenner mit $\prod_{1}^{r-2}(a_s - a_s^{-1})$, so findet man nach einer einfachen und naheliegenden Umformung des Zählers und Nenners

$$R(n,p) = \frac{12}{r(r^2-1)} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & r-2 \\ \dfrac{a_1^{n-p}+a_1^p}{a_1^n - 1} & a_1 - a_1^{-1} & a_1^2 - a_1^{-2} & \ldots & a_1^{r-2} - a_1^{-r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{r-2}^{n-p}+a_{r-2}^p}{a_{r-2}^n - 1} & a_{r-2} - a_{r-2}^{-1} & a_{r-2}^2 - a_{r-2}^{-2} & \ldots & a_{r-2}^{r-2} - a_{r-2}^{-r+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_1^{-1} & a_1^2 - a_1^{-2} & \ldots & a_1^{r-2} - a_1^{-r+2} \\ a_2 - a_2^{-1} & a_2^2 - a_2^{-2} & \ldots & a_2^{r-2} - a_2^{-r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-2} - a_{r-2}^{-1} & a_{r-2}^2 - a_{r-2}^{-2} & \ldots & a_{r-2}^{r-2} - a_{r-2}^{-r+2} \end{vmatrix}}. \tag{26. 5}$$

Aus diesem Ausdruck eliminieren wir mit Hilfe der Gleichungen (25. 8) und (25. 9) die Wurzeln a_s und finden dadurch folgende bemerkenswerte Beziehung

$$R(n,p) = \frac{12}{r(r^2-1)} \frac{\begin{vmatrix} 0 & B_{n-p}^{(0)} + B_p^{(0)} & B_{n-p}^{(1)} + B_p^{(1)} & \ldots & B_{n-p}^{(m-1)} + B_p^{(m-1)} \\ 1 & B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & B_{n+1}^{(1)} - B_{n-1}^{(1)} & \ldots & B_{n+1}^{(m-1)} - B_{n-1}^{(m-1)} \\ 2 & B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & B_{n+2}^{(1)} - B_{n-2}^{(1)} & \ldots & B_{n+2}^{(m-1)} - B_{n-2}^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & B_{n+m}^{(0)} - B_{n-m}^{(0)} & B_{n+m}^{(1)} - B_{n-m}^{(1)} & \ldots & B_{n+m}^{(m-1)} - B_{n-m}^{(m-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_{n+1}^{(0)} - B_{n-1}^{(0)} & B_{n+1}^{(1)} - B_{n-1}^{(1)} & \ldots & B_{n+1}^{(m-1)} - B_{n-1}^{(m-1)} \\ B_{n+2}^{(0)} - B_{n-2}^{(0)} & B_{n+2}^{(1)} - B_{n-2}^{(1)} & \ldots & B_{n+2}^{(m-1)} - B_{n-2}^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n+m}^{(0)} - B_{n-m}^{(0)} & B_{n+m}^{(1)} - B_{n-m}^{(1)} & \ldots & B_{n+m}^{(m-1)} - B_{n-m}^{(m-1)} \end{vmatrix}} \tag{26. 6}$$

wo $m = r - 2$. Für die charakteristische Funktion $f(z)$ hat man, wie wir in § 15 gesehen haben,

$$\frac{f(z)}{z^{r-2}(z-1)^2} = \sum_{s=0}^{r-3} \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{6}\left(z^{r-2-s} + z^{-r+2+s}\right) + \frac{r(r^2-1)}{6}.$$

Die Zahlen $B_\nu^{(i)}$ sind deshalb durch die Differenzengleichung (25. 3) und die Anfangsbedingungen (25. 2) mit $m = r - 2$ und

$$c_s = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{6}$$

bestimmt.

Da $c_0 = 1$, sind alle Zahlen $B_\nu^{(i)}$ ganze Zahlen.

27. Der soeben gefundene Ausdruck (26. 6) ist gültig für alle[1] $r > 2$. Wir wollen jetzt zeigen, dass er mit Vorteil umgeformt werden kann; aber man erhält verschiedene Ausdrücke je nachdem r gerade oder ungerade ist. Die Gleichung (15. 9) kann folgendermassen geschrieben werden

$$f(z) = \left(\frac{z^r - 1}{z - 1}\right)^2 - r^2 z^{r-1}. \tag{27. 1}$$

Wir nehmen zuerst r als *ungerade* an und setzen

$$f_1(z) = \frac{z^r - 1}{z - 1} - r z^{\frac{r-1}{2}} \tag{27. 2}$$

$$f_2(z) = \frac{z^r - 1}{z - 1} + r z^{\frac{r-1}{2}}. \tag{27. 3}$$

Man hat dann

$$f(z) = f_1(z) f_2(z). \tag{27. 4}$$

Das Polynom $f_1(z)$ hat eine Nullstelle 2. Ordnung in $z = 1$. Die Nullstellen $a_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots r - 2)$ für $f(z)$ können in zwei Gruppen eingeteilt werden, welche Nullstellen für $f_1(z)$, die wir mit α_ν bezeichnen, beziehungsweise Nullstellen für $f_2(z)$, die wir mit β_ν bezeichnen, umfassen. Man hat dann

$$f_1(z) = (z-1)^2 \prod_{\nu=1}^{\frac{r-3}{2}} (z - \alpha_\nu)(z - \alpha_\nu^{-1})$$

[1] Falls $r=2$, ist $R(n, p)=0$, indem die charakteristische Gleichung dann keine anderen Wurzeln als $z=1$ hat.

$$f_2(z) = \prod_{\nu=1}^{\frac{r-1}{2}} (z - \beta_\nu)(z - \beta_\nu^{-1}).$$

Aus den Gleichungen (27. 2) und (27. 3) folgt, dass

$$f_2(\alpha_s) = \quad 2\,r\,\alpha_s^{\frac{r-1}{2}}$$

$$f_1(\beta_s) = -\,2\,r\,\beta_s^{\frac{r-1}{2}}.$$

Da nun

$$f'(z) = f'_1(z) f_2(z) + f'_2(z) f_1(z)$$

so sieht man, dass

$$f'(\alpha_s) = \quad 2\,r\,\alpha_s^{\frac{r-1}{2}} f'_1(\alpha_s)$$

$$f'(\beta_s) = -\,2\,r\,\beta_s^{\frac{r-1}{2}} f'_2(\beta_s).$$

Die durch die Gleichung (26. 2) definierte Funktion $R(n, p)$ wollen wir in zwei Teile R_1 und R_2 zerlegen, die wir durch Erstrecken der Summation über die Wurzeln α_s und β_s erhalten. Man hat dann

$$R(n, p) = R_1(n, p) + R_2(n, p) \tag{27. 5}$$

wo

$$R_1(n, p) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\frac{r-3}{2}} \frac{\alpha_s^{\frac{r-3}{2}}}{f'_1(\alpha_s)} \frac{\alpha_s^{n-p} + \alpha_s^p}{\alpha_s^n - 1} \tag{27. 6}$$

$$R_2(n, p) = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\frac{r-1}{2}} \frac{\beta_s^{\frac{r-3}{2}}}{f'_2(\beta_s)} \frac{\beta_s^{n-p} + \beta_s^q}{\beta_s^n - 1}. \tag{27. 7}$$

Durch Differentiation nach z findet man

$$f'_1(\alpha_s) = \alpha_s^{\frac{r-3}{2}} \left(\alpha_s - \frac{1}{\alpha_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{1}{\alpha_s} - 2\right) \prod_{\nu=1}^{\frac{r-3}{2}}{}' \left(\alpha_s + \frac{1}{\alpha_s} - \alpha_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu}\right)$$

$$f'_2(\beta_s) = \beta_s^{\frac{r-3}{2}} \left(\beta_s - \frac{1}{\beta_s}\right) \prod_{\nu=1}^{\frac{r-1}{2}}{}' \left(\beta_s + \frac{1}{\beta_s} - \beta_\nu - \frac{1}{\beta_\nu}\right).$$

Der Ausdruck (27. 6) für R_1 ist von ganz derselben Form wie der Ausdruck (26. 2) für R. Da nun

$$f_1''(1) = \sum_{s=1}^{r-1} s(s-1) - \frac{r(r-1)(r-3)}{4} = \frac{r(r^2-1)}{12}$$

zeigt die in § 26 verwendete Schlussweise, dass R_1 sich folgendermassen schreiben lässt

$$R_1(n,p) = \frac{12}{r(r^2-1)} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ \frac{\alpha_1^{n-p}+\alpha_1^p}{\alpha_1^n-1} & \alpha_1-\alpha_1^{-1} & \alpha_1^2-\alpha_1^{-2} & \dots & \alpha_1^m-\alpha_1^{-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\alpha_m^{n-p}+\alpha_m^p}{\alpha_m^n-1} & \alpha_m-\alpha_m^{-1} & \alpha_m^2-\alpha_m^{-2} & \dots & \alpha_m^m-\alpha_m^{-m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_1^{-1} & \alpha_1^2-\alpha_1^{-2} & \dots & \alpha_1^m-\alpha_1^{-m} \\ \alpha_2-\alpha_2^{-1} & \alpha_2^2-\alpha_2^{-2} & \dots & \alpha_2^m-\alpha_2^{-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m-\alpha_m^{-1} & \alpha_m^2-\alpha_m^{-2} & \dots & \alpha_m^m-\alpha_m^{-m} \end{vmatrix}}$$

wo $m = \frac{r-3}{2}$. Eliminiert man hieraus die Wurzeln α_s mit Hilfe der Gleichungen (25. 8) und (25. 9), in denen wir uns a_s durch α_s ersetzt denken, so sieht man, dass die rechte Seite der Gleichung (26. 6) $R_1(n,p)$ darstellt[1], wenn wir $m = \frac{r-3}{2}$ setzen. Da

$$\frac{f_1(z)}{z^{\frac{r-3}{2}}(z-1)^2} = \sum_{s=0}^{\frac{r-5}{2}} \frac{(s+1)(s+2)}{2}\left(z^{\frac{r-3}{2}-s} + z^{-\frac{r-3}{2}+s}\right) + \frac{r^2-1}{8}$$

sind in diesem Falle die Zahlen $B_\nu^{(i)}$ durch die Differenzengleichung (25. 3) und die Anfangsbedingungen (25. 2) mit $m = \frac{r-3}{2}$ und

$$c_s = \frac{(s+1)(s+2)}{2}$$

bestimmt.

[1] Falls $r=3$, ist $R_1=0$, indem $f_1(z)$ dann keine anderen Nullstellen als $z=1$ hat, und man hat $R=R_2$.

Aus der Gleichung (25.4) folgt, dass

$$B^{(i)}_{\frac{r-3}{2}} = -\frac{(r-2i)^2-1}{8} \qquad i = 0, 1, \ldots \frac{r-5}{2}. \tag{27.8}$$

Da $f_1(z)$ die zur Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} B^{(i)}_{\nu+s} = r\, B^{(i)}_{\nu+\frac{r-1}{2}} \tag{27.9}$$

gehörende charakteristische Funktion ist, kann man die $B^{(i)}_\nu$ auch im obenerwähnten Ausdruck für $R_1(n,p)$ als ein System von geraden Funktionen von ν definieren, welche die Differenzengleichung (27.9) und die Anfangsbedingungen (25.2) und (27.8) befriedigen.

Nunmehr wollen wir $R_2(n,p)$ betrachten. Diese Funktion lässt sich als ein Verhältnis zwischen zwei Determinanten in folgender Weise schreiben:

$$R_2(n,p) = -\frac{1}{2}\,\frac{\left| 1, \beta_s + \beta_s^{-1}, (\beta_s+\beta_s^{-1})^2, \ldots (\beta_s+\beta_s^{-1})^{\frac{r-5}{2}}, \dfrac{\beta_s^{n-p}+\beta_s^p}{(\beta_s-\beta_s^{-1})(\beta_s^n-1)} \right|}{\left| 1, \beta_s+\beta_s^{-1}, (\beta_s+\beta_s^{-1})^2, \ldots (\beta_s+\beta_s^{-1})^{\frac{r-3}{2}} \right|}$$

wo s die Werte

$$1, 2, \ldots \frac{r-1}{2}$$

annimmt. Entwickelt man die Determinante im Zähler nach den Elementen der letzten Spalte, so erhält man den Ausdruck (27.7). Multipliziert man im Zähler und Nenner mit dem Produkt

$$\prod_{s=1}^{\frac{r-1}{2}} (\beta_s - \beta_s^{-1}),$$

so findet man nach einer leichten Umformung der Determinanten

$$R_2(n,p) = -\frac{1}{2}\,\frac{\left| \beta_s - \beta_s^{-1}, \beta_s^2 - \beta_s^{-2}, \ldots \beta_s^{\frac{r-3}{2}} - \beta_s^{-\frac{r-3}{2}}, \dfrac{\beta_s^{n-p}+\beta_s^p}{\beta_s^n - 1} \right|}{\left| \beta_s - \beta_s^{-1}, \beta_s^2 - \beta_s^{-2}, \ldots \beta_s^{\frac{r-1}{2}} - \beta_s^{-\frac{r-1}{2}} \right|}.$$

Eliminiert man die Wurzeln β_s in entsprechender Weise wie oben, so erhält man

$$R_2(n,p) = -\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} B^{(0)}_{n+1} & -B^{(0)}_{n-1} & B^{(1)}_{n+1} & -B^{(1)}_{n-1} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+1} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-1} \\ B^{(0)}_{n+2} & -B^{(0)}_{n-2} & B^{(1)}_{n+2} & -B^{(1)}_{n-2} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+2} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B^{(0)}_{n+\frac{r-3}{2}} & -B^{(0)}_{n-\frac{r-3}{2}} & B^{(1)}_{n+\frac{r-3}{2}} & -B^{(1)}_{n-\frac{r-3}{2}} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+\frac{r-3}{2}} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-\frac{r-3}{2}} \\ B^{(0)}_{n-p} & +B^{(0)}_{p} & B^{(1)}_{n-p} & +B^{(1)}_{p} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-p} & +B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B^{(0)}_{n+1} & -B^{(0)}_{n-1} & B^{(1)}_{n+1} & -B^{(1)}_{n-1} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+1} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-1} \\ B^{(0)}_{n+2} & -B^{(0)}_{n-2} & B^{(1)}_{n+2} & -B^{(1)}_{n-2} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+2} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B^{(0)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -B^{(0)}_{n-\frac{r-1}{2}} & B^{(1)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -B^{(1)}_{n-\frac{r-1}{2}} & \ldots & B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n+\frac{r-1}{2}} & -B^{\left(\frac{r-3}{2}\right)}_{n-\frac{r-1}{2}} \end{vmatrix}}$$

wo $B^{(i)}_\nu$ ein System von geraden Funktionen von ν ist, welche die Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} B^{(i)}_{\nu+s} = -\,r\,B^{(i)}_{\nu+\frac{r-1}{2}}$$

und die Anfangsbedingungen (25. 2) mit $m = \frac{r-1}{2}$ befriedigen.

28. Nun wollen wir r *gerade* annehmen. Setzt man $z = y^2$ und

$$g(y) = \frac{y^{2r}-1}{y^2-1} - r\,y^{r-1} \tag{28. 1}$$

hat man

$$f(y^2) = g(y)\,g(-y).$$

$g(y)$ hat eine Nullstelle 2. Ordnung im Punkte $y = 1$ und kann in der Form

$$g(y) = (y-1)^2 \prod_{s=1}^{r-2} (y-\alpha_s)(y-\alpha_s^{-1})$$

geschrieben werden, wo $a_s = \alpha_s^2$. Aus (28. 1) leitet man

$$g(-\alpha_s) = 2r\alpha_s^{r-1}$$

her, und hieraus folgt, dass

$$f'(a_s) = r\alpha_s^{r-2}\, g'(\alpha_s).$$

Die Gleichung (26.2) kann deshalb in der Form

$$R(n,p) = \sum_{s=1}^{r-2} \frac{\alpha_s^{r-2}}{g'(\alpha_s)} \frac{\alpha_s^{n-2p} + \alpha_s^{-n+2p}}{\alpha_s^n - \alpha_s^{-n}} \tag{28.2}$$

geschrieben werden, und man hat

$$g'(\alpha_s) = \alpha_s^{r-2}(\alpha_s - \alpha_s^{-1})(\alpha_s + \alpha_s^{-1} - 2)\prod_{\nu=1}^{r-2}{}' (\alpha_s + \alpha_s^{-1} - \alpha_\nu - \alpha_\nu^{-1}).$$

Aus der Gleichung (28.1) erhält man durch zweimalige Differentiation

$$g''(1) = \frac{r(r^2-1)}{3}.$$

Hieraus folgt in derselben Weise wie oben, dass der Ausdruck (28.2) folgendermassen geschrieben werden kann

$$R(n,p) = \frac{6}{r(r^2-1)} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & r-2 \\ \dfrac{\alpha_1^{n-2p} + \alpha_1^{-n+2p}}{\alpha_1^n - \alpha_1^{-n}} & \alpha_1 - \alpha_1^{-1} & \alpha_1^2 - \alpha_1^{-2} & \ldots & \alpha_1^{r-2} - \alpha_1^{-r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\alpha_{r-2}^{n-2p} + \alpha_{r-2}^{-n+2p}}{\alpha_{r-2}^n - \alpha_{r-2}^{-n}} & \alpha_{r-2} - \alpha_{r-2}^{-1} & \alpha_{r-2}^2 - \alpha_{r-2}^{-2} & \ldots & \alpha_{r-2}^{r-2} - \alpha_{r-2}^{-r+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_1^{-1} & \alpha_1^2 - \alpha_1^{-2} & \ldots & \alpha_1^{r-2} - \alpha_1^{-r+2} \\ \alpha_2 - \alpha_2^{-1} & \alpha_2^2 - \alpha_2^{-2} & \ldots & \alpha_2^{r-2} - \alpha_2^{-r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r-2} - \alpha_{r-2}^{-1} & \alpha_{r-2}^2 - \alpha_{r-2}^{-2} & \ldots & \alpha_{r-2}^{r-2} - \alpha_{r-2}^{-r+2} \end{vmatrix}}.$$

Eliminiert man die Wurzeln α_s durch dieselbe Vorgehensweise wie in § 26, so findet man für $R(n,p)$ den Ausdruck

$$\frac{6}{r(r^2-1)}\;\frac{\begin{vmatrix} 0 & B^{(0)}_{n-2p} & B^{(1)}_{n-2p} & \dots & B^{(r-3)}_{n-2p} \\ 1 & B^{(0)}_{n+1}-B^{(0)}_{n-1} & B^{(1)}_{n+1}-B^{(1)}_{n-1} & \dots & B^{(r-3)}_{n+1}-B^{(r-3)}_{n-1} \\ 2 & B^{(0)}_{n+2}-B^{(0)}_{n-2} & B^{(1)}_{n+2}-B^{(1)}_{n-2} & \dots & B^{(r-3)}_{n+2}-B^{(r-3)}_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r-2 & B^{(0)}_{n+r-2}-B^{(0)}_{n-r+2} & B^{(1)}_{n+r-2}-B^{(1)}_{n-r+2} & \dots & B^{(r-3)}_{n+r-2}-B^{(r-3)}_{n-r+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B^{(0)}_{n+1}-B^{(0)}_{n-1} & B^{(1)}_{n+1}-B^{(1)}_{n-1} & \dots & B^{(r-3)}_{n+1}-B^{(r-3)}_{n-1} \\ B^{(0)}_{n+2}-B^{(0)}_{n-2} & B^{(1)}_{n+2}-B^{(1)}_{n-2} & \dots & B^{(r-3)}_{n+2}-B^{(r-3)}_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^{(0)}_{n+r-2}-B^{(0)}_{n-r+2} & B^{(1)}_{n+r-2}-B^{(1)}_{n-r+2} & \dots & B^{(r-3)}_{n+r-2}-B^{(r-3)}_{n-r+2} \end{vmatrix}} \tag{28.3}$$

wo die $B^{(i)}_{\nu}$ aus der Differenzengleichung (25.3) und den Anfangsbedingungen (25.2) mit $m = r - 2$ und

$$c_{2s} = (s+1)^2 \qquad c_{2s-1} = s(s+1)$$

bestimmt werden, indem man

$$\frac{g(y)}{y^{r-2}(y-1)^2} = \sum_{s=0}^{r-3} c_s\left(y^{r-2-s} + y^{-r+2+s}\right) + c_{r-2}$$

hat.

Aus der Gleichung (25.4) geht hervor, dass

$$\left.\begin{aligned} B^{(i)}_{r-2} &= -\left(\frac{r-i}{2}\right)^2 && \text{für gerades } i \\ B^{(i)}_{r-2} &= -\frac{(r-i)^2-1}{4} && \text{» ungerades } i \end{aligned}\right\}. \tag{28.4}$$

Da $g(y)$ die zur Differenzengleichung

$$\sum_{s=0}^{r-1} B^{(i)}_{\nu+2s} = r\,B^{(i)}_{\nu+r-1} \tag{28.5}$$

gehörende charakteristische Funktion ist, kann man die $B^{(i)}_{\nu}$ auch im letzterwähnten Ausdruck für $R(n,p)$ als ein System von geraden Funktionen von ν definieren, welche die Differenzengleichung (28.5) und die Anfangsbedingungen (25.2) und (28.4) befriedigen.

In allen hier betrachteten Fällen sind die Koeffizienten c_s ganze Zahlen, und c_0 ist gleich 1. Die Zahlen $B_\nu^{(i)}$ sind deshalb ebenfalls ganze Zahlen. Mit Hilfe der Gleichung (25.6) kann man $Q_{p+j,j}$ auch durch die Zahlen $D_\nu^{(i)}$ ausdrücken, die ebenfalls ganze Zahlen sind; aber diese Ausdrücke sind äquivalent mit den schon hergeleiteten.

Bestimmung der zur Bedingungsgleichung $z_1 = 0$ gehörenden Gewichte.

29. In § 15 haben wir die Bedingungsgleichung $\Sigma z_i = 0$ eingeführt und dadurch eine symmetrische Verteilung der Gewichte erzielt. Man hätte auch verlangen können, dass eine der Unbekannten verschwinden sollte, dass heisst, man würde alle gesuchten Grössen als Differenzen gegen eine willkürlich gewählte unter ihnen bestimmen. Ersetzt man (15.2) durch die Bedingungsgleichung $z_1 = 0$ und bezeichnet man in diesem Falle die Multiplikatoren mit gestrichenen Buchstaben, so erhalten die Gewichtsgleichungen folgende Form

$$(r-1)\,Q'_{i,j} - \frac{1}{r}\sum_{s=1}^{r-1}(r-s)\left(Q'_{i+s,j} + Q'_{i-s,j}\right) = \begin{cases} \eta_{1,j} - 1 & \text{für } i = 1 \\ \eta_{i,j} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

und ausserdem hat man

$$Q'_{1,j} = 0$$

$$Q'_{\pm i,j} = Q'_{n\pm i,j}$$

für $i, j = 1, 2, \ldots n$. Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ die von 1 verschiedenen $n$ten Einheitswurzeln. Dann lautet die Lösung der Gewichtsgleichungen

$$Q'_{i,j} = -\frac{r}{n}\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{\varepsilon_\nu^{r-1}\left(\varepsilon_\nu^{i-1} - 1\right)\left(\varepsilon_\nu^{1-j} - 1\right)}{f(\varepsilon_\nu)}. \tag{29.1}$$

Setzt man nämlich diesen Ausdruck in die linke Seite der Gewichtsgleichungen ein, so findet man

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\varepsilon_\nu^{i-j} - \varepsilon_\nu^{i-1}\right)$$

und man bestätigt sofort, dass diese Summe gleich $\eta_{i,j}$ ist, wenn $1 < i \leqq n$, und gleich $\eta_{1,j} - 1$, wenn $i = 1$.

Setzt man $\varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}$ und trägt man für f den Ausdruck (17. 5) ein, so sieht man, dass die Gleichung (29. 1) in der Form

$$Q'_{i,j} = \frac{4r}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\cos\frac{\pi\nu}{n}(j-i)\sin\frac{\pi\nu}{n}(j-1)\sin\frac{\pi\nu}{n}(i-1)}{r^2 - \left(\frac{\sin\frac{\pi r\nu}{n}}{\sin\frac{\pi\nu}{n}}\right)^2}$$

geschrieben werden kann, die deutlich zeigt, wie die Multiplikatoren von den ganzzahligen Parametern r und n abhängen. Durch Vergleich mit (17.6) sieht man, dass zwischen den beiden Systemen von Multiplikatoren folgende Beziehung besteht

$$Q'_{i,j} = Q_{i,j} - Q_{1,j} - Q_{i,1} + Q_{1,1}.$$

Insbesondere hat man für die reziproken Gewichte

$$Q'_{i,i} = 2(Q_{1,1} - Q_{1,i}).$$