MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE IN STRUKTUREN.

Von

J. RIDDER

in Groningen.

Einleitung.

Die von C. Carathéodory[1] aufgestellte, formale Messbarkeitstheorie fasst jedes äussere Mass als Mengenfunktion $\mu^*(A)$ der Mengen (A) des n-dimensionalen Euklidischen Raumes auf; es wird weiter charakterisiert durch vier-, jedes reguläre äussere Mass durch fünf Axiome. Mittels eines regulären äusseren Masses lässt sich für die Mengen (A) ein zugehöriges reguläres inneres Mass definieren[2], das zu den obengenannten fünf Axiomen analoge Eigenschaften hat. Diese Eigenschaften genügen jedoch nicht zur vollständigen Charakterisierung des regulären inneren Masses. Die Unstimmigkeit wird hervorgerufen durch das dritte Carathéodorysche Axiom, welches lautet: »Ist $V = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$, so ist stets $\mu^*(V) \leqq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \cdots + \mu^*(A_n) + \cdots$« und zu welchem beim inneren Masse $\mu_*(A)$ analog ist die Eigenschaft: »Ist $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$, mit $A_j \cdot A_k$ leer für jedes Paar (j, k) von ungleichen natürlichen Zahlen, so ist stets $\mu_*(S) \geqq \mu_*(A_1) + \mu_*(A_2) + \cdots + \mu_*(A_n) + \cdots$«. Ein von Carathéodory herrürendes Beispiel[3] zeigt, dass, obwohl schon aus den zwei ersten Eigenschaften des regulären inneren Masses hervorgeht, dass die mittels des inneren Masses charakterisierten messbaren Mengen einen Körper bilden, diese dennoch nicht immer einen σ-Körper zu bilden brauchen, sogar dann nicht, wenn alle fünf Eigenschaften erfüllt sind. A. Rosenthal hat darum das Carathéodorysche Axiomensystem für das reguläre äussere Masse ein völlig äquivalentes System an die

---

[1] Siehe C. Carathéodory, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, S. 404—420; Vorlesungen über reelle Funktionen, 2e Aufl. (1927), Kap. 5 u. 6.

[2] Ein gewöhnliches inneres Mass wird von Carathéodory nicht eingeführt.

[3] Siehe loc. cit. 1, zweites Zitat, S. 367—369.

Seite gestellt[1]; welches jenes dritte Axiom nicht mehr enthält, daneben jedoch die Möglichkeit bietet das reguläre innere Mass selbständig durch ein analog gebautes Axiomensystem zu charakterisieren.

In den Kapiteln 1 und 2 wird man zur selbständigen Charakterisierung der äusseren und der inneren Masse neue, analog gebildete Axiomensysteme finden, welche, wie es uns scheint, gegenüber den Rosenthalschen Systemen die folgenden Vorteile besitzen:

1^0 die Axiome I—IV und V für das äussere Mass und ebenso die Axiome I—IV und V′ für das innere Mass führen zu einem beschränkt additiven Masse; alle aus den Axiomen I—IV ableitbaren Eigenschaften gelten somit für äusseres und für inneres Mass beide; zu jeder aus den Axiomen I—IV und V ableitbaren Eigenschaft gibt es eine aus den Axiomen I—IV und V′ ableitbare, zugeordnete Eigenschaft (die Beweise beider Eigenschaften lassen sich in analoger Weise führen oder man kann bisweilen die eine Eigenschaft in einfacher Weise aus dem schon bewiesenen, zugeordneten Eigenschaft ableiten); zu jedem äusseren [inneren] Masse ist ein inneres [äusseres] Mass derartig adjungiert, dass beide zu demselben Körper von messbaren Mengen führen, wobei dann die Masszahlen einander gleich sind;

2^0 die Axiome I—VII für das äussere und ebenso die Axiome I—IV, V′, VI und VII′ für das innere Mass führen zu einem total-additiven Masse; alle aus den Axiomen I—IV und VI ableitbaren Eigenschaften gelten somit für äusseres und inneres Mass; zu jeder aus den Axiomen I—VII ableitbaren Eigenschaft gibt es eine aus den Axiomen I—IV. V′, VI und VII′ ableitbare, zugeordnete Eigenschaft (für die Beweise gilt eine gleichartige Bemerkung wie für die Beweise der einander unter 1^0 zugeordneten Eigenschaften); zu jedem äusseren [inneren] Masse ist ein inneres [äusseres] Mass derartig adjungiert, dass beide zu demselben σ-Körper von messbaren Mengen führen, wobei wieder die Masszahlen einander gleich sind;

3^0 das letzte Axiom (VIII) ist in beiden Axiomensystemen dasselbe; es wird am letzten eingeführt, da es die bisher betrachtete Analogie in den Axiomensystemen und den beiden Gruppen von abgeleiteten Sätzen aufhören lässt; denn neben: »aus $A_1 < A_2 \cdots < A_n \cdots$, jedes A_k messbar, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu^*(A_k) = \infty$ folgt $\mu^*(A) = \infty$» für das äussere Mass würde man als achtes Axiom für das innere Mass erwarten dürfen: »aus $B_1 > B_2 \cdots > B_n \cdots$, jedes B_k messbar,

[1] Siehe A. Rosenthal, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1916, S. 305—321.

$\lim_{k\to\infty} B_k = B$, $\lim_{k\to\infty} \mu_*(B_k) = \infty$ folgt $\mu_*(B) = \infty$ », eine Eigenschaft, welche jedoch schon dem Lebesgueschen inneren Mass nicht mehr zukommt.[1] [2]

Ausserdem bemerken wir:

4^0 das bei Carathéodory und Rosenthal nicht vorkommende Axiom IV ermöglicht es den Zusammenhang zwischen äusserem und innerem Masse in anderer Weise zu definieren als in den Arbeiten dieser beiden Autoren; das bringt u. a. mit sich, dass äusseres und inneres Mass hier immer gleichzeitig unendlich sind.

Die Darstellung beschränkt sich nicht auf Masse, definiert für die Teilmengen eines Euklidischen oder eines abstrakten metrischen Raumes, sondern sie betrachtet Masse, definiert für die Elemente, neuerdings von Carathéodory Somen genannt[3], von (durch Axiome näher festgelegten) allgemeinen Strukturen.[4]

Schliesslich erweitern wir, in Kapitel 3, die Riemann-Stieltjessche Integrationstheorie auf den Fall von abstrakten, auf Somen definierten Ortsfunktionen, und geben kurz an wie sich diese Theorie in eine Theorie des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals abändern lässt, abweichend von der in Fussn. 3 genannten Darstellung. Bemerkenswert ist hierbei, dass das Riemann-Stieltjessche Integral sich, im Gegensatze zum Lebesgue-Stieltjesschen, schon in verhältnismässig einfachen Strukturen (diejenigen, welche unsere Axiome 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b erfüllen) und bei Benutzung von ganz einfachen Massfunktionen (welche nur die Axiome I^b, II und III zu erfüllen brauchen) übertragen lässt.

KAPITEL 1.

Theorie des beschränkt additiven Masses.

§ 1. Definitionen und Eigenschaften von Strukturen.

A. Alle im folgenden betrachteten *Strukturen* genügen den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0; jede Struktur ist aufgebaut aus Elementen, *Somen* genannt, die immer mit

[1] Wie ROSENTHAL, loc. cit. 1 S. 132, § 5 (Fussn.) bemerkt, ist eine völlige Analogie im Aufbau nicht möglich.

[2] Jedes den drei ersten Carathéodoryschen Axiomen genügendes äusseres Mass erfüllt dadurch auch die Axiome I—III, VI und VIII.

[3] Siehe C. CARATHÉODORY, Sitz. ber. Bayer. Akad. Wiss. 1938, S. 27—69; daneben auch CARATHÉODORY, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 8 (1939), S. 105—130. In diesen Arbeiten erweitert der Autor seine abstrakte Masstheorie auf Somen; ausserdem gibt er eine Theorie des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals von auf Somen definierten, abstrakten Ortsfunktionen.

[4] Siehe V. GLIVENKO, Théorie générale des structures, Act. sci. Paris 1938. — Sind die Strukturen Räume, in welchen die offenen Mengen definiert sind, so lässt sich noch als letztes Axiom die Messbarkeit dieser Mengenklasse fordern.

kleinen Buchstaben angedeutet werden. Der einzige Grundbegriff ist der Begriff »Teil von», angedeutet durch das Zeichen $<$.

Axiom 1^0: α) $a < a$;

β) aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$; die Somen sind *teilweise geordnet*.

Definition. $a = b$, falls $a < b$ und $b < a$.

Satz 1. $a = a$ (die *Gleichheitsrelation* ist *reflexiv*).

Satz 2. Aus $a = b$ folgt $b = a$ (die Relation ist *symmetrisch*).

Satz 3. Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$ (die Relation ist *transitiv*).

Definition. Ein Soma ab wird *Produkt* des geordneten Somenpaares a, b genannt, falls: α) $ab < a$; β) $ab < b$; γ) aus $c < a$ und $c < b$ immer folgt $c < ab$.

Satz 4. Hat das geordnete Somenpaar a, b ein Produkt, so ist dieses eindeutig bestimmt, d. h. zwischen zwei Somen, deren jedes, gemäss letzter Definition, als Produkt von a und b betrachtet werden kann, gilt immer die Relation der Gleichheit.

Axiom 2^0: Für jedes geordnete Somenpaar a, b gibt es ein Produkt ab.[1]

Definition. Ein Soma $a + b$ wird *Summe* des geordneten Somenpaares a, b genannt, falls: α) $a < a + b$; β) $b < a + b$; γ) aus $a < c$ und $b < c$ immer folgt $a + b < c$.

Satz 5. Hat ein geordnetes Somenpaar eine Summe, so ist diese eindeutig bestimmt.

Axiom 3^0: Für jedes geordnete Somenpaar a, b gibt es eine Summe $a + b$.[2]

---

[1] Axiom 2^0 ist unabhängig von Axiom 1^0. Beispiel: die Somen sind die offenen Kreise der Euklidischen Ebene; $a < b$ falls die Punkte von a zu b gehören; Axiom 1^0 ist erfüllt, dagegen nicht Axiom 2^0.

[2] Eine Struktur sei aufgebaut aus den reellen Zahlen (x) mit $-1 \leqq x < 0$ und den drei Zeichen a, b, c. Es sei $x_1 < x_2$ in den folgenden Fällen: 1^0) $-1 \leqq x_1 \leqq x_2 < 0$; 2^0) $-1 \leqq x_1 < 0$ und $x_2 \equiv a$ oder b oder c; 3^0) $x_1 \equiv a$, $x_2 \equiv a$ oder c; 4^0) $x_1 \equiv b$, $x_2 \equiv b$ oder c; 5^0) x_1 und $x_2 \equiv c$. Zwischen a und b soll keine Ordnungsrelation bestehen. Es gibt für je zwei Somen immer eine Summe; dagegen haben die Somen a und b, deren Summe c ist, kein Produkt. Das Axiom 2^0 ist somit unabhängig von den Axiomen 1^0 und 3^0. Dass Axiom 3^0 nicht von den Axiomen 1^0, 2^0 abhängt, folgt aus einem Beispiel, welches aus dem vorigen einfach dadurch hervorgeht, dass man in allen Fällen 1^0—5^0 die Relation $x_2 < x_1$ zwischen x_1 und x_2, daneben wieder keine Relation zwischen a und b annimmt.

Erstes Dualitätsprinzip. Zu jedem Theorem P, hervorgehend aus den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0, gibt es ein duales, das man erhält, wenn in dem Theorem P überall: α) $x < y$ durch $y < x$, und somit: β) $x y$ durch $x + y$, und umgekehrt, ersetzt wird.

Auch die Sätze 4 und 5 stehen einander dual gegenüber. Zwei derartig zusammenhängende Sätze sind im folgenden durch dieselbe arabische Ziffer, ohne bzw. mit Akzent, angedeutet.

Satz 6. Aus $a = b$ folgt immer $a c = b c$.

Satz 6'. Aus $a = b$ folgt immer $a + c = b + c$.

Satz 7. $(a b) c = a (b c)$.

Satz 7'. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Satz 8, 8'. $a b = b a$; $a + b = b + a$.

Satz 9, 9'. $a a = a$; $a + a = a$.

Satz 10. Aus $a < b$ folgt $a b = a$, und umgekehrt.

Satz 10'. Aus $b < a$ folgt $a + b = a$, und umgekehrt.

Satz 11. Aus $a < b$ folgt die Existenz eines a_1 mit $a + a_1 = b$, und umgekehrt.

Satz 11'. Aus $b < a$ folgt die Existenz eines a_2 mit $a a_2 = b$, und umgekehrt.

B. **Definition.** Eine Struktur S besitzt ein kleinstes Soma, *leeres Soma* genannt und angedeutet durch o, falls $o < a$ für jedes Soma a von S.

Satz 12. Gibt es ein leeres Soma, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Nehmen wir als Somen alle offenen, linearen Intervalle mit einem festen Mittelpunkt und betrachten wir $a < b$, falls alle Punkte von a auch zu b gehören, so sind die Axiome 1^0, 2^0, 3^0 erfüllt; es gibt kein kleinstes Soma.

Dennoch beweist man leicht den

Satz 13. Enthält eine den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0 genügende Struktur S kein kleinstes Soma, so entsteht eine neue, diesen Axiomen genügende Struktur Σ, falls man zu den Somen von S ein einziges Soma o hinzufügt und: α) für je zwei Elemente a, b von S mit $a < b$ diese Relation umgeändert beibehält, β) daneben für jedes Soma a von Σ $o < a$ annimmt. In Σ ist dann immer $a \cdot o = o \cdot a = o$ und $a + o = o + a = a$; für je zwei zu S gehörende Somen a, b ist das Soma $a + b$, ebenso wie das Soma $a \cdot b$, in S und in Σ dasselbe.

Axiom 4^0: Es gibt ein kleinstes (leeres) Soma o.

Definition. Zwei Somen a, b heissen *einander fremd*, falls $ab = 0$.

Satz 14. Ist $a < b$ und sind a und b einander fremd, so ist $a = 0$.

Satz 15. Ist $c < b$ und sind a und b einander fremd, so sind auch a und c einander fremd.

Definition. Eine Struktur S besitzt *ein grösstes Soma*, angedeutet durch 1, falls $a < 1$ für jedes Soma a von S.

Obiges Beispiel zeigt ebenfalls, dass eine den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0 genügende Struktur nicht immer ein grösstes Soma enthält.

Setzt man die Somen o und 1 einander dual gegenüber, so folgt aus den Sätzen 12 und 13:

Satz 12'. Gibt es ein grösstes Soma, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Satz 13'. Enthält eine den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0 genügende Struktur S kein grösstes Soma, so entsteht eine neue, diesen Axiomen genügende Struktur Σ, falls man zu den Somen von S ein einziges Soma 1 hinzufügt und: α) für je zwei Somen a, b von S mit $a < b$ diese Relation ungeändert beibehält, β) daneben für jedes Soma a von Σ $a < 1$ annimmt. In Σ ist dann immer $a + 1 = 1 + a = 1$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; für je zwei zu S gehörende Somen a, b ist das Soma $a \cdot b$, ebenso wie das Soma $a + b$, in S und in Σ dasselbe.

Axiom 5^0: Es gibt ein grösstes Soma 1.

Jedes der Axiome 2^0—5^0 ist von den übrigen und Axiom 1^0 unabhängig.

Zweites Dualitätsprinzip. Zu jedem Theorem P, hervorgehend aus den Axiomen 1^0—5^0, gibt es ein duales, das man erhält, wenn man in dem Theorem P, neben den schon im ersten Dualitätsprinzip angegebenen Ersetzungen, die Ersetzung von o durch 1, und umgekehrt, überall durchführt.

Definition. Zwei Somen a, b heissen *einander ergänzend*, falls $a + b = 1$.

Satz 14'. Ist $b < a$ und ergänzen a und b einander, so ist $a = 1$.

Satz 15'. Ist $b < c$ und ergänzen a und b einander, so tun dies auch a und c.

Definition. Ist $a < b$, so wird *komplementäres Soma erster Art* genannt und angedeutet durch $b - a$ jedes zu a fremde Element x mit

$$a + x = b.$$

Definition. Ist $b < a$, so wird *komplementäres Soma zweiter Art*[1] genannt und angedeutet durch $b:a$ jedes a ergänzende Element y mit

$$a\,y = b.$$

Wir bemerken, dass die letzte Definition sich auch geben lässt, falls es kein leeres Soma gibt; die vorletzte auch dann, falls es kein grösstes Soma gibt.

Sind die Somen einer Struktur die Teilmengen eines abstrakten Raumes, die leere Menge und den Raum einbegriffen, so existieren die komplementären Somen beider Arten immer und sind daneben eindeutig bestimmt; $a < b$ soll dabei bedeuten, dass a eine Teilmenge von b ist.

Satz 16, 16′. Jedes Soma $1 - c$ ist auch ein Soma $0:c$; und umgekehrt.

Definition. Ein Soma $1 - c = 0:c$ wird *Komplement von c* genannt und durch c' angedeutet.

C. Eine Struktur, deren Somen die offenen Intervalle eines Euklidischen Raumes sind, die leere Menge und den ganzen Raum einbegriffen, und bei welcher $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b», genügt den Axiomen 1^0—5^0, jedoch nicht dem

Axiom 6_a^0: $a\,c + b\,c = (a + b)\,c$.[2]

Aus den Axiomen 1^0—3^0, 6_a^0 lässt sich ableiten[3] die Relation

$$(a + c)(b + c) = a\,b + c.$$

Umgekehrt folgt[3] aus dieser Relation und den Axiomen 1^0—3^0 wieder das Axiom 6_a^0. Dadurch haben wir:

Das erste Dualitätsprinzip gilt auch für alle aus den Axiomen 1^0—3^0, 6_a^0 ableitbaren Sätze, das zweite für alle aus den Axiomen 1^0—5^0, 6_a^0 ableitbaren Sätze.

Die Sätze 13, 13′ behalten ihre Gültigkeit, wenn man den Axiomen 1^0—3^0 das Axiom 6_a^0 hinzufügt.

Jedes der Axiome 4^0, 5^0 ist von dem andern und den Axiomen 1^0—3^0, 6_a^0, 6_b^0 unabhängig.

---

[1] Dieser Begriff rührt von G. BERGMANN her. Siehe BERGMANN, Monatsh. für Math. u. Phys. 36 (1929), S. 269—284; auch GLIVENKO, loc. cit. 4 S. 133, S. 14—16.

[2] Auch nicht das weiter unten folgende Axiom 6_b^0. Durch Erweiterung dieses Beispiels erhält man Beispiele, welche ausser den Axiomen 6_a^0, 6_b^0 auch die Axiome 4^0, 5^0 oder eines von beiden nicht erfüllen, dagegen wohl die Axiome 1^0—3^0.

[3] Siehe loc. cit. 4 S. 133, S. 32.

Eine Struktur, deren Somen die abgeschlossenen Mengen eines Euklidischen Raumes sind, die leere Menge und den Raum einbegriffen, und bei welcher $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b», genügt den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, jedoch nicht dem

Axiom 7^0_a: Zu jedem Soma c gibt es ein Komplement $c' = 1 - c = 0 : c$; und auch nicht dem

Axiom 7^0_b: Zu jedem Paar von Somen, a und b, mit $a < b$, gibt es ein komplementäres Soma erster Art, $b - a$.[1]

Das zweite Dualitätsprinzip gilt für alle aus den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a *und* 7^0_a *ableitbaren Sätze* (d. h. in einer sogenannten Algebra von Boole).

Satz 17, 17'. In jeder den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a und 7^0_a genügenden Struktur folgt aus $a < b$ die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der komplementären Somen beider Arten, und zwar ist

$$b - a = a' b \quad \text{und} \quad a : b = a + b'.$$[2]

Umgekehrt folgt aus den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a und 7^0_b auch Axiom 7^0_a; man nehme nur in Axiom 7^0_b $a = c$ und $b = 1$.

Die Axiomensysteme 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a *und* 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_b *sind somit äquivalent.*

Axiom 6^0_b: Aus $a_1 b = 0$ und $a_2 b = 0$ folgt $(a_1 + a_2) b = 0$.

Satz 18. In einer Struktur mit den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b und 7^0_b folgt aus $c < a + b$, und c und b einander fremd, dass $c < a$.[3]

Die Axiomensysteme 1^0—4^0, 6^0_a, 7^0_b *und* 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b *sind äquivalent; somit auch die aus diesen durch Hinzufügung von Axiom* 5^0 *entstehenden Systeme.*

Beweis. Betrachten wir eine Struktur, in welcher die Axiome 1^0—4^0 und 7^*_b gelten. Es ist unmittelbar klar, dass dann Axiom 6^0_b erfüllt ist, sobald dies mit Axiom 6^0_a der Fall ist.

Nehmen wir umgekehrt an, dass Axiom 6^0_b erfüllt sei. Für die willkürlich gewählten Somen a, b und c ist dann

---

[1] Ein Beispiel von GLIVENKO, loc. cit. S. 4 133, S. 16, erfüllt die Axiome 1^0—5^0, 7^0_a und das weiter unten folgende Axiom 6^0_b, dagegen nicht die Axiome 6^0_a und 7^0_b. Der projektive Raum (siehe GLIVENKO, loc. cit., S. 7, 14 u. 33) liefert ein Beispiel einer Struktur, welche die Axiome 1^0—5^0 und 7^0_b, dagegen nicht die Axiome 6^0_a und 6^0_b erfüllt. Jedes der Axiome 5^0, 6^0_b, 7^0_b ist von den andern und den Axiomen 1^0—4^0 unabhängig.

[2] Siehe loc. cit. S. 4 133, S. 24, 34, 35. Die eindeutige Bestimmtheit von $b-a$, falls es ein derartiges Soma gibt, folgt schon aus den Axiomen 1^0—4^0 und 6^0_a.

[3] Zum Beweise vergleiche man loc. cit. S. 3 133, erstes Zitat, S. 37.

$$a c < a < a + b \quad \text{und} \quad b c < b < a + b,$$

somit auch

(1) $$a c + b c < a + b.$$

Daneben ist

$$a c < c \quad \text{und} \quad b c < c,$$

somit auch

(2) $$a c + b c < c.$$

Aus (1) und (2) folgt

(3) $$a c + b c < (a + b) c.$$

Nach Axiom 7^0_b gibt es Somen $a - a c$ und $b - b c$, und es ist

(4) $$a c + b c + (a - a c) + (b - b c) = a + b.$$

$a - a c$ ist fremd zu $a c$, somit $(a - a c) a c = 0$ oder auch $\{(a - a c) a\} c = (a - a c) c = 0$. Da ebenso $(b - b c) c = 0$ ist, folgt mit Axiom 6^0_b

(5) $$\{(a - a c) + (b - b c)\} c = 0.$$

Aus (5) und $(a + b) c < c$ folgt nach Satz 15

(6) $$\{(a - a c) + (b - b c)\} \cdot (a + b) c = 0.$$

Da $(a + b) c < a + b$, folgt, nach Satz 18, aus (4) und (6)

(7) $$(a + b) c < a c + b c.$$

(3) und (7) liefern die in Axiom 6^0_a enthaltene Behauptung.

Satz 18'. In einer Struktur mit den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a folgt aus $a b < c$, und c und b einander ergänzend, dass $a < c$.

Satz 19, 19'. In einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a genügenden Struktur ist immer $(c')' = c$.

Satz 20, 20'. In einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a genügenden Struktur folgt aus $a < b$ immer $b' < a'$.

Satz 21, 21'. In einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a genügenden Struktur gilt für jedes Somenpaar a, b:

$$(a + b)' = a' b' \quad \text{und} \quad (a b)' = a' + b'.$$

Satz 22. Genügt eine Struktur S den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b (oder 6^0_a), 7^0_b, jedoch nicht den Axiom 5^0,[1] so lässt sich diese Struktur durch Hinzufügung

[1] Beispiel: Die Struktur, deren Somen die leere Menge und die aus endlich vielen Punkten aufgebauten Teilmengen eines unendlich viele Punkte enthaltenden, abstrakten Raumes sind und in welcher $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b».

von Somen derartig erweitern zu einer den Axiomen 1^0—4^0, 5^0, 6^0_b, 7^0_b oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Axiomen 1^0—4^0, 5^0, 6^0_a, 7^0_a genügenden Struktur Σ, dass dabei die Relationen zwischen den ursprünglichen Somen ungeändert bleiben.

Beweis. Jedem Soma c von S füge man das neue Soma $\bar c$ hinzu; statt $\bar 0$ schreibe man 1. Es sei $a < \bar c$ dann und nur dann, wenn in S $a c = 0$ ist; es sei $\bar c_1 < \bar c_2$ dann und nur dann, wenn in S $c_2 < c_1$ gilt; $\bar c < a$ soll nicht vorkommen. Insbesondere ist nun $0 < \bar c < 1$ und $0 < c < 1$. Das Axiom 1^0 ist erfüllt[1]; ebenso die Axiome 4^0 und 5^0.

Es ist immer möglich Produkte und Summen, in welchen die neuen Somen vorkommen, derartig einzuführen, dass auch die Axiome 2^0 und 3^0 in Σ erfüllt sind; man wähle: $a \bar b = \bar b a = a - a b$; $\bar a \bar b = \overline{a + b}$; daneben $a + \bar b = \bar b + a = \overline{b - a b}$; $\bar a + \bar b = \overline{a b}$.[2]

Für Somen a und b, welche zu S gehören und mit $a < b$, sei $b - a$ dasselbe Some wie in der Struktur S; weiter sei in Σ $\bar b - a = \overline{a + b}$, falls $a < \bar b$, und $\bar b - \bar a = a - b$, falls $\bar a < \bar b$; $\bar a < b$ kann, nach Annahme, nicht vorkommen; das Axiom 7^0_b ist in Σ erfüllt.

Schliesslich lässt sich die Gültigkeit von Axiom 6^0_b beweisen; sechs Fälle lassen sich dabei unterscheiden.[3] Nehmen wir z. B. den Fall: $\bar a_1 b = 0$, $a_2 b = 0$. Dann ist

$$(\bar a_1 + a_2) b = \overline{a_1 - a_1 a_2} \cdot b = b - b (a_1 - a_1 a_2). \tag{8}$$

Aus $\bar a_1 b = 0$ folgt $b - a_1 b = 0$; also ist

$$(b - a_1 b) + a_1 b = b \text{ oder } a_1 b = b \text{ oder } b < a_1 = a_1 a_2 + (a_1 - a_1 a_2).$$

Aus $a_2 b = 0$ folgt

$$(a_1 a_2) b = 0.$$

Nach Satz 18 ist somit

$$b < a_1 - a_1 a_2 \quad \text{oder} \quad b (a_1 - a_1 a_2) = b.$$

Aus (8) folgt dadurch

$$(\bar a_1 + a_2) b = b - b = 0.$$

---

[1] Die Relation $a < b$ zwischen zwei Somen von S bleibe in Σ ungeändert.

[2] Für zwei Somen a und b von S sei $a + b$ dasselbe Soma in S und in Σ; das gleiche gelte für $a b$.

[3] Von diesen fallen die beiden: $\bar a_1 \bar b = a_2 \bar b = 0$ und $\bar a_1 \bar b = \bar a_2 \bar b = 0$ fort. Denn dann müsste $\overline{a_1 + b} = 0$, also ein neues Soma gleich einem Soma von S sein, was nicht der Fall ist (siehe den Anfang des Beweises).

§ 2. Definition und Eigenschaften des beschränkt additiven Masses.

Wir betrachten *eine Struktur S, welche den Axiomen* 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b *genügt*. Für jedes Soma x von S sei *eine (reellwertige) Somenfunktion* $m^0(x)$ definiert.

Definition. Ein Soma a heisse $m^0(x)$*-messbar oder messbar in bezug auf* $m^0(x)$, wenn für jedes Soma w, mit $m^0(w)$ endlich

$$m^0(w) = m^0(w\,a) + m^0(w - w\,a)$$

ist.

Die Bedingung impliziert die Endlichkeit von $m^0(w\,a)$ und von $m^0(w - w\,a)$.

Wäre immer $m^0(x) = +\infty$ oder $-\infty$, so folgte daraus Messbarkeit eines jeden Somas, ohne dass es möglich wäre etwas weiteres zu finden; wir schliessen darum diesen Fall aus. Ebenso den Fall, in welchem immer $m^0(x) = 0$ wäre; auch dann folgte die Messbarkeit eines jeden Somas. Also:

Axiom I^a. *Nicht immer ist* $m^0(x) = 0$; *nicht immer ist* $m^0(x) = +\infty$ *oder* $-\infty$.

Auch nehmen wir an:

Axiom II. *Das leere Soma ist* $m^0(x)$*-messbar.*

Satz 23. $m^0(0) = 0$.

Umgekehrt folgt das Axiom II aus dem postulierten Satz 23.

Es liegt auf der Hand zu fordern:

Axiom III. *Aus* $a < b$ *folgt immer* $m^0(a) \leqq m^0(b)$.

Satz 24. *Für jedes Soma* a *ist* $m^0(a) \geqq 0$.

Es wäre nun noch möglich, dass $m^0(x)$ entweder Null oder $+\infty$ wäre ohne identisch Null oder identisch $+\infty$ zu sein; auch dann wäre jedes Soma messbar. Um diesen Fall auszuschliessen ändern wir das Axiom I^a ab und fordern:

Axiom I^b. *Es gibt ein Soma* w *mit* $m^0(w)$ *endlich und* $\neq 0$.

Jedes der Axiome I^b, II und III ist von den übrigen unabhängig.

Satz 25. *Die* $m^0(x)$*-messbaren Somen einer den Axiomen* 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b *genügenden Struktur bilden einen Ring*, d. h. Summe und Produkt von je zwei $m^0(x)$-messbaren Somen sind $m^0(x)$-messbar.

Beweis. a und b seien $m^0(x)$-messbar. Aus der $m^0(x)$-Messbarkeit von a folgt bei willkürlich gewähltem Soma w, mit $m^0(w)$ endlich:

$$m^0\{w(a+b)\} = m^0\{w(a+b)\,a\} + m^0\{w(a+b) - w(a+b)\,a\}. \tag{9}$$

Da

$$a + b = a + \{a\,b + (b - a\,b)\}$$

ist, lässt sich schreiben:

$$(10)\qquad w(a+b) = w\,a\,a + w\,a\,b + w(b - a\,b) = w\,a(a+b) + w(b - a\,b).$$

Daneben ist

$$(11)\qquad w\,a(a+b) \times w(b - a\,b) = w\,a \times w\,b(b - a\,b) = w \times a\,b(b - a\,b) = 0.$$

Aus (10) und (11) folgt

$$w(a+b) - w(a+b)\,a = w(b - a\,b),$$

wodurch (9) sich ändern lässt in:

$$(12)\qquad m^0\{w(a+b)\} = m^0(w\,a) + m^0\{w(b - a\,b)\}.$$

Wegen der $m^0(x)$-Messbarkeit von b ist

$$(13)\qquad m^0(w - w\,a) = m^0\{(w - w\,a)\,b\} + m^0\{(w - w\,a) - (w - w\,a)\,b\}.$$

Es ist

$$w\,b = w\,a\,b + (w - w\,a)\,b \quad \text{und} \quad w\,a\,b \cdot (w - w\,a)\,b = 0,$$

also

$$w\,b - w\,a\,b = (w - w\,a)\,b,$$

und somit auch

$$w\,b - w\,a\,b = (b - a\,b)\,w.$$

Wir erhalten

$$(14)\qquad (w - w\,a)\,b = (b - a\,b)\,w.$$

Weiter ist

$$w = w(a+b) + \{w - w(a+b)\} = w\,a + w\,b + \{w - w(a+b)\}$$

$$= w\,a + w\,a\,b + (w\,b - w\,a\,b) + \{w - w(a+b)\},$$

oder

$$w = w\,a + w(b - a\,b) + \{w - w(a+b)\}.$$

$w\,a$ ist fremd zu jeder der beiden letzten Somen, also auch zu ihrer Summe. Dadurch folgt:

$$(15)\qquad w - w\,a = w(b - a\,b) + \{w - w(a+b)\}.$$

In (15) sind die beiden letzten Somen einander fremd, wodurch

$$(16)\qquad (w - w\,a) - w(b - a\,b) = w - w(a+b)$$

ist.

Aus (13), (14) und (16) folgt

$$(17)\qquad m^0(w - w\,a) = m^0\{w(b - a\,b)\} + m^0\{w - w(a+b)\}.$$

Substitution des aus (17) folgenden Wertes von $m^0\{w(b-ab)\}$ in (12) liefert

$$m^0\{w(a+b)\} = m^0(wa) + m^0(w-wa) - m^0\{w-w(a+b)\}$$

oder, wegen der $m^0(x)$-Messbarkeit von a,

$$m^0(w) = m^0\{w(a+b)\} + m^0\{w-w(a+b)\}.$$

Auch $a+b$ ist somit $m^0(x)$-messbar.

Ebenso lässt sich beweisen, dass ab $m^0(x)$-messbar ist.[1]

Satz 26. *Die $m^0(x)$-messbaren Somen einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_b, 7^0_b genügenden Struktur bilden einen Körper;* das soll heissen: für je zwei $m^0(x)$-messbaren Somen, a und b, sind ihre Summe und ihr Produkt $m^0(x)$-messbar, und, falls $a<b$ oder $b<a$, auch ihre komplementären Somen beider Arten.

Beweis. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass aus $a<b$ und der $m^0(x)$-Messbarkeit von a und b folgt, dass $b-a$ und $a:b$ $m^0(x)$-messbar sind. Es ist

$$b-a = b(1-a) \quad \text{und} \quad a:b = (0:b)+a.$$

Somit wird es genügen zu zeigen, dass $a' = 1-a = 0:a$ $m^0(x)$-messbar ist. Dazu muss für jedes w, mit $m^0(w)$ endlich,

$$m^0(w) = m^0(wa') + m^0(w-wa')$$

oder, in anderer Form[2],

$$m^0(w) = m^0(w-wa) + m^0(wa)$$

sein; aber das ist die Bedingung für die $m^0(x)$-Massbarkeit von a selbst.

Korollar. *In einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_b, 7^0_b genügenden Struktur ist das grösste Soma 1 $m^0(x)$-messbar.*

Denn nach Axiom II ist das leere Soma $m^0(x)$-messbar, und es ist $0'=1$.

Für die Gruppe der Sätze, welche sich ausschliesslich aus den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_b, 7^0_b und Satz 26 ableiten lassen, gilt wieder das zweite Dualitätsprinzip.

Satz 27. *Für die Somen einer Struktur S, welche den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b genügt, sei eine Somenfunktion $m^0(x)$ definiert, welche die Axiome I^b, II, III erfüllt. Es ist möglich die Struktur S durch Hinzufügung von Somen derartig zu*

---

[1] Vergl. loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 248, 249.

[2] Es ist $wa' = w(1-a) = w\cdot 1 - wa$, und $w-wa' = w-w(1-a) = w-(w-wa) = wa$.

erweitern zu einer den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_b, 7^0_b *genügenden Struktur* Σ *und dabei für die neuen Somen* $m^0(x)$ *derartig zu definieren, dass:* α) *die Strukturrelationen zwischen den ursprünglichen Somen ungeändert bleiben,* β) $m^0(x)$ *in* Σ *die Axiome* I^b, *II, III erfüllt, und:* γ) *die zu* S *gehörenden und in der neuen Struktur* Σ $m^0(x)$*-messbaren Somen zusammenfallen mit den zu* S *gehörenden und in* S $m^0(x)$*-messbaren Somen.*

Beweis. Die im Beweise von Satz 22 eingeführte Erweiterung Σ von S genügt schon der Bedingung α). Wir werden zeigen, dass auch β) und γ) erfüllt sind, wenn man für jedes Soma c von S

$$m^0(\bar{c}) = \text{obere Grenze von } m^0(a) \text{ für alle } a \in S, \text{ mit } a < \bar{c}\,^1$$

nimmt. Ohne Mühe lässt sich beweisen[2], dass $m^0(x)$ in Σ die Axiome I^b, II, III erfüllt.

Es sei $a \in S$ und a $m^0(x)$-messbar in S. Dann wird a auch in Σ $m^0(x)$-messbar sein, wenn für jedes $\bar{c}$, mit $m^0(\bar{c})$ endlich,

$$m^0(\bar{c}) = m^0(\bar{c}\,a) + m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a) \tag{18}$$

ist.

Bei willkürlich positivem η gibt es ein $w_1 \in S$, mit

$$w_1 < \bar{c} \quad \text{und} \quad 0 \leqq m^0(\bar{c}) - m^0(w_1) < \eta.$$

a ist $m^0(x)$-messbar in S; also ist

$$m^0(w_1) = m^0(w_1\,a) + m^0(w_1 - w_1\,a).$$

Wir finden

$$m^0(\bar{c}) - \eta < m^0(w_1) \leqq m^0(\bar{c}\,a) + m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a)$$

oder, da η willkürlich positiv ist,

$$m^0(\bar{c}) \leqq m^0(\bar{c}\,a) + m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a). \tag{19}$$

Bei positivem η gibt es auch Somen w_2, $w_3 \in S$ mit

$$w_2 = \bar{c}\,a,\ w_3 < \bar{c} - \bar{c}\,a \quad \text{und} \quad m^0(w_2) = m^0(\bar{c}\,a),\ 0 \leqq m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a) - m^0(w_3) < \eta.$$

Da $\bar{c}\,a$ und $\bar{c} - \bar{c}\,a$ einander fremd sind, ist auch

$$w_2\,w_3 = 0.$$

Ausserdem gilt

$$w_2 + w_3 < \bar{c}.$$

[1] Siehe die Einführung von $\bar{c}$ im Beweise des Satzes 22.
[2] Siehe dabei den ersten Absatz des Beweises von Satz 22.

Da weiter a in S $m^0(x)$-messbar und $w_3 a < (\bar{c} - \bar{c}\,a)\,a = (\bar{c} - \bar{c}\,a) \cdot \bar{c}\,a = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} m^0(\bar{c}) \geqq m^0(w_2 + w_3) &= m^0\{(w_2 + w_3)\,a\} + m^0\{(w_2 + w_3) - (w_2 + w_3)\,a\} \\ &= m^0(w_2\,a) + m^0\{(w_2 + w_3) - w_2\,a\} \\ &= m^0(w_2) + m^0(w_3) \\ &> m^0(\bar{c}\,a) + m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a) - \eta, \end{aligned}$$

oder, bei $\eta \to 0$,

$$m^0(\bar{c}) \geqq m^0(\bar{c}\,a) + m^0(\bar{c} - \bar{c}\,a). \tag{20}$$

(19) und (20) liefern (18).

Da es sofort klar ist, dass aus $m^0(x)$-Messbarkeit von a in Σ folgt $m^0(x)$-Messbarkeit von a in S, ist auch die Behauptung γ) bewiesen.

Aus den Sätzen 26 und 27 folgt eine Erweiterung von Satz 25:

Satz 28. *Für die Somen einer Struktur S, welche den Axiomen 1^0—4^0, $6^0_{\mathfrak{b}}$, $7^0_{\mathfrak{b}}$ genügt, sei eine Somenfunktion $m^0(x)$ definiert, welche die Axiome I^b, II, III erfüllt. Dann bilden die $m^0(x)$-messbaren Somen von S einen Körper;* das soll heissen: für je zwei $m^0(x)$-messbaren Somen, a und b, sind ihre Summe und ihr Produkt $m^0(x)$-messbar, und, falls $a < b$ oder $b < a$, auch ihr komplementäres Soma erster Art, $b - a$ bzw. $a - b$.

§ 3. **Satz 29.** *S genüge den Axiomen 1^0—4^0, $6^0_{\mathfrak{b}}$, $7^0_{\mathfrak{b}}$; die Somenfunktion $m^0(x)$ genüge in S den Axiomen I^b, II, III. Ist dann a ein $m^0(x)$-messbares und b ein beliebiges Soma, mit $m^0(a+b)$ endlich, so genügt $m^0(x)$ der Relation*

$$m^0(a + b) = m^0(a) + m^0(b) - m^0(a\,b).$$

Der Beweis verläuft wie beim Jordanschen Mass in einem Euklidischen Raume.

Korollar. *S, $m^0(x)$ seien definiert wie in Satz 29. Sind a und b, mit $a < b$, $m^0(x)$-messbar und ist $m^0(b)$ endlich, so gilt*

$$m^0(b - a) = m^0(b) - m^0(a).\text{[1]}$$

[1] In der Euklidischen Ebene bilden die beschränkten Teilmengen (x) eine den Axiomen 1^0—4^0, $6^0_{\mathfrak{b}}$, $7^0_{\mathfrak{b}}$ genügende Struktur S, falls $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b». Bei willkürlich positivem ε und einem Soma x von S betrachten wir eine endliche Anzahl von geradlinigen Segmenten $[P_j, Q_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, mit den Endpunkten (P_j), (Q_j), zu deren jedem eine positive Zahl $\varrho_j < \varepsilon$ gehört, derart, dass es zu jedem Punkte R des Somas x ein Segment $[P_{j(R)}, Q_{j(R)}]$ gibt, das einen Punkt enthält mit Abstand zu R kleiner als $\varrho_{j(R)}$. Bilden wir dann die Summe $\sum_{j=1}^{n}(\overline{P_j Q_j} + 2\varrho_j)$, wobei $\overline{P_j Q_j}$ der Abstand von P_j und Q_j ist, und nehmen wir bei festem ε die

§ 4. **Definition.** Für jedes Soma a, mit $m^0(a)$ endlich, zu welchem es ein $m^0(x)$-messbares Soma b mit $a < b$ und $m^0(b)$ endlich gibt, lege man *der zu* $m^0(x)$ *adjungierten Funktion* $m_0(x)$ den Wert

(21) $$m^0(b) - m^0(b - a)$$

bei. Für jedes Soma a mit $m^0(a) = +\infty$ sei auch $m_0(a) = +\infty$.

Satz 30. *Durch obige Definition ist in einer den Axiomen* 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b *genügenden Struktur* S *die zu einer Somenfunktion* $m^0(x)$, *welche die Axiome* I^b, *II, III erfüllt, adjungierte Funktion* $m_0(x)$ *eindeutig bestimmt für alle Somen, für die sie existiert.*

Beweis. Ist $m_0(a)$ endlich und gibt es mehrere Somen (b) wie in obiger Definition, so muss bewiesen werden, dass (21) nicht von der Wahl von b abhängt. Es wird genügen dies zu tun für zwei derartige Somen b_1, b_2 mit $b_1 < b_2$. Anwendung von Satz 29 und des zugehörigen Korollars liefert

$$m^0(b_2) - m^0(b_2 - a) = \{m^0(b_2 - b_1) + m^0(b_1)\} - \{m^0(b_2 - b_1) + m^0(b_1 - a)\};$$

daraus folgt die Behauptung.

Axiom IV. *Zu jedem Soma* a *mit* $m^0(a)$ *endlich gibt es ein* $m^0(x)$*-messbares Soma* b *mit* $a < b$ *und* $m^0(b)$ *ebenfalls endlich.*

Axiom II ist eine Folgerung aus den Axiomen I^b *und IV.* Denn nach Axiom I^b gibt es ein Soma c mit $m^0(c)$ endlich und $\neq 0$. Nach Axiom IV gibt es somit auch ein $m^0(x)$-messbares Soma d mit $m^0(d)$ endlich. Dadurch muss

$$m^0(d) = m^0(d\,d) + m^0(d - d\,d),$$

also

$$m^0(0) = 0$$

sein; die leere Menge 0 ist $m^0(x)$-messbar.

untere Grenze $g(x; \varepsilon)$ aller derartigen Summen, so definiere der (immer existierende) endliche oder unendliche Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0} g(x; \varepsilon)$ die Somenfunktion $m^0(x)$. Diese erfüllt dann die Axiome I^b, II, III und führt somit zu einem Körper von $m^0(x)$-messbaren Mengen. Obgleich für jedes Segment $[P, Q]$ $m^0\{[P, Q]\} = \overline{PQ}$ ist, ist schon eine solche Menge nicht mehr $m^0(x)$-messbar. Nimmt man dagegen die von allen Teilmengen der Ebene gebildete Struktur und hat dabei $a < b$ die gleiche Bedeutung wie oben, so erfüllt diese Struktur die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b (siehe § 7). Ändert man daneben die Definition von $m^0(x)$ dadurch ab, dass auch Summen $\sum_{(j)} (\overline{P_j Q_j} + 2\varrho_j)$ mit abzählbar unendlich vielen Gliedern zugelassen werden, so erhält man einen σ-Körper von $m^0(x)$-messbaren Mengen, welche die Klasse der rektifizierbaren Jordan-Kurven umfasst; die Länge einer derartigen Kurve fällt mit ihrem $m^0(x)$-Masse zusammen. Siehe § 9; man vergleiche auch S. Saks, Theory of the integral, 2e Aufl. (1937), S. 53 u. 52.

Dagegen ist jedes der Axiome I^b, III und IV von den übrigen unabhängig.

Die Struktur S, deren Somen die Teilmengen des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$ sind, genügt den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b. E sei eine Teilmenge von $[0, 1]$, nicht messbar im Lebesgueschen Sinne. Für jede Teilmenge H von $[0, 1]$, welche E nicht ganz umfasst, sei $m^0(H)$ gleich ihrem äusseren Lebesgueschen Mass; auch $m^0(E)$ sei gleich dem äusseren Lebesgueschen Mass von E; für alle übrigen Teilmengen (X) sei $m^0(X) = \infty$. Dann ist E auch nicht $m^0(X)$-messbar; das Axiom IV ist nicht erfüllt (jede E umfassende, $m^0(X)$-messbare Menge hat das $m^0(X)$-Mass ∞), dagegen wohl die Axiome I^b, (II) und III.

Wir betrachten ein zweites Beispiel. $m^0(X)$ sei gleich dem äusseren Lebesgueschen Mass von X, falls X zum abgeschlossenen Intervall $I_1\,[0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}]$ gehört, und gleich dem entgegengesetzten Werte des äusseren Lebesgueschen Masses von X, falls X zum halboffenen Intervall $I_2\,[\frac{1}{2} < x \leqq 1]$, gehört; schliesslich sei $m^0(0) = 0$ und sei $m^0(X)$ gleich $m^0(X \cdot I_1) + m^0(X \cdot I_2)$, falls X sowohl mit I_1 wie mit I_2 Punkte gemein hat. Dann genügt $m^0(X)$ den Axiomen I^b und IV, jedoch nicht dem Axiom III.[1]

Gibt man schliesslich $m^0(X)$ für alle Teilmengen von $[0, 1]$ den Wert Null, so sind die Axiome III und IV erfüllt, dagegen nicht das Axiom I^b.

Satz 31. *S genüge den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b, $m^0(x)$ den Axiomen I^b, III, IV. Dann genügt die zu $m^0(x)$ adjungierte Somenfunktion $m_0(x)$ ebenfalls den Axiomen I^b, III und IV. Jedes $m^0(x)$-messbare Soma ist auch $m_0(x)$-messbar, und umgekehrt; für jedes derartige Soma a ist $m^0(a) = m_0(a)$. Die zu $m_0(x)$ adjungierte Funktion $(m_0)_0(x)$ fällt mit $m^0(x)$ zusammen;* wir können somit sagen: $m^0(x)$ und $m_0(x)$ sind zueinander adjungiert.

Beweis. Man zeigt leicht, dass $m_0(x)$ die Axiome I^b, II und III erfüllt.

Ist a $m^0(x)$-messbar, so ist für jedes Soma w mit $m^0(w)$ endlich

$$m^0(w) = m^0(w\,a) + m^0(w - w\,a). \tag{22}$$

a wird $m_0(x)$-messbar sein, falls für jedes v mit $m_0(v)$ endlich

$$m_0(v) = m_0(v\,a) + m_0(v - v\,a) \tag{23}$$

ist. Aus $m_0(v)$ endlich folgt die Existenz eines $m^0(x)$-messbaren Somas u mit $v < u$, $m^0(u)$ endlich und

$$m_0(v) = m^0(u) - m^0(u - v). \tag{24}$$

---

[1] Siehe auch das in § 5 gegebene Beispiel.

Es sind auch $u a$ und $u - u a$ $m^0(x)$-messbar, wodurch

$$m_0(v a) = m^0(u a) - m^0(u a - v a)$$

und

$$m_0(v - v a) = m^0(u - u a) - m^0\{(u - u a) - (v - v a)\}$$

ist. Statt (23) lässt sich somit schreiben

$$m^0(u) - m^0(u - v) = m^0(u a) - m^0(u a - v a) + m^0(u - u a) - m^0\{(u - u a) - (v - v a)\}$$

oder auch, wegen der $m^0(x)$-Messbarkeit von a und u,

$$m^0(u - v) = m^0\{(u - v) a\} + m^0\{(u - v) - (u - v) a\}.$$

Dies folgt jedoch aus (22) mit $w = u - v$; a ist auch $m_0(x)$-messbar.

Ist ausserdem $m_0(a)$ endlich, so lässt sich in (24) $v = u = a$ nehmen, und man erhält

$$m_0(a) = m^0(a); \tag{25}$$

ist $m_0(a)$ unendlich, so gilt dasselbe von $m^0(a)$, und man hat wieder (25).

Die zu $m_0(x)$ adjungierte Funktion $(m_0)_0(x)$ lässt sich für jedes Soma eindeutig bestimmen. Ist $m_0(c)$ endlich für das Soma c, so gibt es ein $m^0(x)$-messbares Soma d mit $c < d$ und $m^0(d)$ endlich, und es ist

$$m_0(c) = m^0(d) - m^0(d - c).$$

Aus dem schon Bewiesenen folgt, dass d auch $m_0(x)$-messbar ist, mit

$$m_0(d) = m^0(d).$$

($m_0(x)$ erfüllt das Axiom IV). Somit liefert die Definition der adjungierten Funktion

$$\begin{aligned}(m_0)_0(c) &= m_0(d) - m_0(d - c)\\ &= m^0(d) - \{m^0(d) - m^0(c)\} = m^0(c).\end{aligned}$$

Ist $m_0(c) = \infty$, so ist nach jener Definition $(m_0)_0(c) = \infty$. Auch $m^0(c)$ ist gleich ∞, und man hat wieder

$$(m_0)_0(c) = m^0(c).$$

Da $(m_0)_0(x)$ mit $m^0(x)$ zusammenfällt, ist jedes $m_0(x)$-messbare Soma auch $m^0(x)$-messbar.

Das äussere Jordansche Mass der Teilmengen eines Intervalles im Euklidischen Raume ist sowohl eine Funktion $m^0(x)$ wie eine adjungierte Funktion $m_0(x)$ (des inneren Jordanschen Masses); eine analoge Bemerkung gilt für das innere Jordansche Mass jener Mengen. Setzt man für die nicht beschränkten Teilmengen eines Euklidischen Raumes sowohl äussers wie inneres Jordansches Mass gleich $+\infty$, so sind auch die so erweiterten äusseren und inneren Masse adjungierte Funktionen voneinander.

§ 5. **Axiom V.** *Für jedes Soma a mit $m^0(a)$ endlich ist $m^0(a)$ gleich der unteren Grenze der Werte $m^0(\bar{x})$ für alle $m^0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $a < \bar{x}$.*

Das Axiom V ist unabhängig von den Axiomen I^b, III und IV, wie aus einem Beispiel von Carathéodory hervorgeht.[1]

Axiom IV folgt aus Axiom V.

Jedes der Axiome I^b, III und V ist von den übrigen unabhängig, wie aus dem ersten und dem dritten Beispiel von § 4 und folgendem Beispiel folgt. Ein Raum enthalte nur zwei Punkte A, B, und es sei $m^0(0) = 0$, $m^0((A)) = \infty$, $m^0((B)) = m^0((A + B)) = 1$. In diesem Beispiel sind die Axiome I^b und V erfüllt, dagegen nicht das Axiom III.

Satz 32. *In einer den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b genügenden Struktur S erfülle eine Somenfunktion $m^0(x)$ die Axiome I^b, III und V. Dann ist für jedes Soma a, mit einem endlichen Werte der zu $m^0(x)$ adjungierten Funktion $m_0(x)$, dieser endliche Wert $m_0(a)$ gleich der oberen Grenze der Werte $m_0(\bar{x})$ für alle $m_0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $\bar{x} < a$.*

Beweis. Aus $m_0(a)$ endlich folgt die Existenz eines $m^0(x)$-messbaren Somas b, mit $a < b$ und $m^0(b)$ endlich; dabei ist

$$m_0(a) = m^0(b) - m^0(b - a). \tag{26}$$

Nach Axiom V ist

$m^0(b - a) =$ untere Grenze aller $m^0(\bar{x})$-Werte derjenigen $m^0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$, für die $b - a < \bar{x}$,

oder auch, nach Axiom III und Satz 28,

$=$ untere Grenze aller $m^0(\bar{x})$-Werte derjenigen $m^0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$, für die $b - a < \bar{x} < b$.

Daraus und aus Satz 31 und dem Korollar von § 3 folgt, dass sich statt (26) schreiben lässt

---

[1] Siehe loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 363, 364; zu jeder Menge A, mit $\nu_5(A)$ endlich, gibt es eine A umfassende, offene und somit ν_5-messbare Menge B mit $\nu_5(B)$ endlich.

(27) $m_0(a) =$ obere Grenze von $m_0(b - \bar{x})$ für alle $m_0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $b - a < \bar{x} < b$.

Aus $b - a < \bar{x}$ und $(b - \bar{x}) \cdot \bar{x} = 0$ folgt, nach Satz 15,

$$(b - a) \cdot (b - \bar{x}) = 0.$$

Dies und $b - \bar{x} < b$, $b = (b - a) + a$ liefern, nach Satz 18,

$$b - \bar{x} < a.$$

Dadurch lässt sich statt (27) schreiben:

$m_0(a) =$ obere Grenze aller $m_0(\bar{y})$-Werte derjenigen $m_0(y)$-messbaren Somen $(\bar{y})$ mit $\bar{y} < a$.

§ 6. **Axiom V'.** *Für jedes Soma a mit $m^0(a)$ endlich ist $m^0(a)$ gleich der oberen Grenze der Werte $m^0(\bar{x})$ für alle $m^0(x)$-messbaren Somen $(\bar{x})$ mit $\bar{x} < a$.*

Definition. In einer den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b genügenden Struktur S soll eine Somenfunktion *eine äussere* bzw. *eine innere Somenfunktion* genannt werden, wenn sie die Axiome I^b, III, (IV) und V bzw. die Axiome I^b, III, IV und V' erfüllt.

Satz 33. *In einer den Axiomen 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b genügenden Struktur S ist die adjungierte Funktion einer äusseren Somenfunktion eine innere Somenfunktion, und umgekehrt.*

Die erste Hälfte ist eine unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 31 und 32; der Beweis der zweiten Hälfte ist nun evident.

Das Axiom V' ist unabhängig von den Axiomen I^b, III und IV. Das zeigt die in Fussn. 1 S. 149 genannte, von Carathéodory konstruierte Funktion $\nu_5(A)$. Die zu $\nu_5(A)$ adjungierte Funktion erfüllt, nach Satz 31, die Axiome I^b, III und IV; sie kann jedoch das Axiom V' nicht erfüllen, da dann ihre adjungierte Funktion, d. h., nach Satz 31, $\nu_5(A)$ selbst, das Axiom V erfüllen müsste, wie aus Satz 33 hervorgeht. Das ist dennoch nicht der Fall.

Das Axiom IV ist unabhängig von den Axiomen I^b, III und V'. Ändert man das erste Beispiel von § 4 derartig ab, dass überall »inneres Lebesguesches Mass» statt »äusseres Lebesguesches Mass» gelesen wird, so sind die Axiome I^b, II, III und V' erfüllt, dagegen nicht das Axiom IV.

Das Axiom III ist unabhängig von den Axiomen I^b, IV und V'. Man erhält ein Beispiel, wenn man das Beispiel von § 5 in folgender Weise abändert: $m^0(0) = 0$, $m^0((A)) = \infty$, $m^0((B)) = 0$, $m^0((A + B)) = 1$.

Schliesslich zeigt das dritte Beispiel von § 4, *dass das Axiom I^b unabhängig ist von den Axiomen III, IV und V'.*

Die in § 4 betrachteten, erweiterten äusseren und inneren Jordanschen Masse sind äussere und innere Somenfunktionen, welche zueinander adjungiert sind.

Zu den Eigenschaften der äusseren Somenfunktionen lassen sich Analoga für die inneren Somenfunktionen formulieren (und umgekehrt); ist ein derartiges Analogon ebenfalls beweisbar, so verläuft sein Beweis analog an dem Beweise der ursprünglichen Eigenschaft oder es ist möglich das Analogon in einfacher Weise aus der ursprünglichen Eigenschaft abzuleiten.

Satz 34, 34'. *Ist für die äussere Somenfunktion $m^0(x)$ $m^0(a+b)$ endlich, so gilt*

$$m^0(a+b) \leqq m^0(a) + m^0(b);$$

ist für die innere Somenfunktion $m_0(x)$ $m_0(a+b)$ endlich[1] *und ist $ab = 0$, so gilt*

$$m_0(a+b) \geqq m_0(a) + m_0(b).$$

Beweis. Ist $m^0(a+b)$ endlich, so gibt es, nach den Axiomen III und V und Satz 28, Folgen von $m^0(x)$-messbaren Somen, $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$, mit $a < x_n$, $b < y_n$, $m^0(x_n + y_n)$ endlich, $m^0(x_n) \to m^0(a)$ und $m^0(y_n) \to m^0(b)$ für $n \to \infty$. Aus $a + b < x_n + y_n$ und $m^0(x_n + y_n)$ endlich folgt, nach Axiom III und Satz 29,

$$m^0(a+b) \leqq m^0(x_n + y_n) = m^0(x_n) + m^0(y_n) - m^0(x_n y_n),$$

und daraus und aus Satz 24

$$m^0(a+b) \leqq m^0(x_n) + m^0(y_n).$$

Dies wird für $n \to \infty$:

$$m^0(a+b) \leqq m^0(a) + m^0(b).$$

Der Beweis der zweiten Behauptung ergibt sich durch Umbildung des Vorigen.

Satz 35. *Für zwei zueinander adjungierte, äussere und innere Somenfunktionen, $m^0(x)$ bzw. $m_0(x)$, gilt für jedes Soma a mit $m^0(a)$ — oder,* was auf dasselbe hinauskommt, *mit $m_0(a)$ endlich die Relation*

$$m_0(a) \leqq m^0(a). \tag{28}$$

Ist $m_0(a) = \infty$ oder ist $m^0(a) = \infty$, so sind beide Somenfunktionen für a unendlich.

---

[1] Diese Bedingung darf weggelassen werden.

Beweis. Aus der Endlichkeit von $m^0(a)$ oder $m_0(a)$ folgt, nach Axiom IV und Satz 31, die Existenz eines $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbaren Somas w mit $m^0(w) = m_0(w)$ endlich. Dabei ist

$$m_0(a) = m^0(w) - m^0(w - a). \tag{29}$$

Der vorige Satz gibt

$$m^0(w) \leqq m^0(a) + m^0(w - a). \tag{30}$$

Aus (29) und (30) folgt (28).

Satz 36. *Sind $m^0(x)$ und $m_0(x)$ zueinander adjungierte, äussere bzw. innere Somenfunktion, so ist notwendig und hinreichend, damit das Soma a, mit $m^0(a)$ oder $m_0(a)$ endlich, $m^0(x)$- oder,* was auf dasselbe hinauskommt, *$m_0(x)$-messbar sei, dass*

$$m^0(a) = m_0(a)$$

sei.[1]

Beweis. Die Notwendigkeit folgt aus Satz 31.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Nach den Axiomen III, V und V′ gibt es $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbare Somen (a_k) und (b_k), $k = 1, 2, \ldots$, derart dass

$$b_k < a < a_k,\ b_k < b_{k+1},\ a_{k+1} < a_k, \text{ und } \lim_{k\to\infty} m^0(a_k) = \lim_{k\to\infty} m^0(b_k) = m^0(a) = m_0(a) \tag{31}$$

ist; $m^0(a_k)$ und $m^0(b_k)$ dürfen dabei für jedes k endlich angenommen werden.

Bei willkürlichem w mit $m^0(w)$ endlich ist dann für jedes k:

$$m^0(w) = m^0(w\,a_k) + m^0(w - w\,a_k) = m^0(w\,b_k) + m^0(w - w\,b_k). \tag{32}$$

Auch ist, nach Axiom III, Satz 34 und dem Korollar zu Satz 29, für jedes k:

$$0 \leqq m^0(w\,a_k) - m^0(w\,b_k) \leqq m^0\{w(a_k - b_k)\} \leqq m^0(a_k - b_k) = m^0(a_k) - m^0(b_k). \tag{33}$$

Aus (31) und (33) folgt:

$$\lim_{k\to\infty} m^0(w\,a_k) = \lim_{k\to\infty} m^0(w\,b_k) = m^0(w\,a), \tag{34}$$

und damit aus (32) und (31):

$$\lim_{k\to\infty} m^0(w - w\,a_k) = \lim_{k\to\infty} m^0(w - w\,b_k) = m^0(w - w\,a). \tag{35}$$

(32), (34) und (35) liefern schliesslich

---

[1] Jedes Soma a mit $m^0(a) = 0$ ist somit $m^0(x)$-messbar; dies braucht nicht mehr wahr zu sein, wenn $m^0(x)$ zwar die Axiome $\mathrm{I^b}$, III und IV, jedoch nicht das Axiom V erfüllt.

$$m^0(w) = m^0(w\,a) + m^0(w - w\,a),$$

d. h. die $m^0(x)$-Messbarkeit von a.

Wir fügen noch die folgenden Sätze hinzu[1]:

Satz 37, 37′. *Ist für die zueinander adjungierten, äussere und innere Somenfunktionen $m^0(x)$, $m_0(x)$ und für die einander fremden Somen a und b $m^0(a+b)$ oder $m_0(a+b)$ endlich so gilt:*

$$m_0(a+b) \leqq m_0(a) + m^0(b) \leqq m^0(a+b).$$

Satz 38, 38′. *Ist für die zueinander adjungierten, äussere und innere Somenfunktionen $m^0(x), m_0(x)$ die Summe $a+b$ von einander fremden Somen a, b $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbar und ist $m^0(a+b)$ oder $m_0(a+b)$ endlich, so ist für die $m^0(x)$- und $m_0(x)$-Messbarkeit von a und b notwendig und hinreichend, dass eine der beiden Gleichungen*

$$m^0(a+b) = m^0(a) + m^0(b)$$

und

$$m_0(a+b) = m_0(a) + m_0(b)$$

erfüllt sei.

Satz 39, 39′. *Sind $m^0(x), m_0(x)$ zueinander adjungierte, äussere bzw. innere Somenfunktionen, so ist es zur $m^0(x)$- und $m_0(x)$-Messbarkeit eines Somas a notwendig und hinreichend, dass entweder für jedes $m^0(x)$-messbare Soma w mit $m^0(w)$ endlich*

$$m^0(w) = m^0(w\,a) + m^0(w - w\,a), \tag{36}$$

oder für jedes $m_0(x)$-messbare Soma w mit $m_0(w)$ endlich

$$m_0(w) = m_0(w\,a) + m_0(w - w\,a) \tag{37}$$

sei.[2]

Satz 40. *Jedes nicht $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbare Soma a enthält ein Teilsoma b mit $m^0(b)$ (und $m_0(b)$) e n d l i c h, das nicht $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbar ist.*

Satz 41, 41′. *Sind die Somen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ einander fremd und $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbar, wobei $m^0(x)$, $m_0(x)$ zueinander adjungierte, äussere bzw.*

---

[1] Zum Beweise vergleiche man loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 263—268, 273, 274.

[2] Man sieht sofort ein, dass (36) und (37) einander aequivalent sind; es genügt somit den Beweis für eine von beiden Bedingungen zu liefern.

innere Somenfunktionen sind, ist weiter $a_k < b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *und ist* $m^0(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ *oder* $m_0(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ *endlich, so gilt*

$$m^0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = m^0(a_1) + m^0(a_2) + \cdots + m^0(a_n)$$

und

$$m_0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = m_0(a_1) + m_0(a_2) + \cdots + m_0(a_n).$$ [1]

§ 7. Definitionen und Eigenschaften von Strukturen (Fortsetzung).

Definition. Ein Soma $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ wird *Summe der Somenfolge* $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ genannt, falls: α) jedes $a_j < \sum_{j=1}^{\infty} a_j$; β) aus $a_j < b$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < b$.

Satz 42. Haben die Somen der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ eine Summe, so ist diese eindeutig bestimmt.

Axiom $\bar{3}^0$: Zu jedem geordneten Somenpaar gibt es eine Summe; für jede Folge von Somen: $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ gibt es eine Summe $\sum_{(j)} a_j$.[2]

Die Struktur, deren Somen die Elemente des projektiven Raumes sind, ein leeres Element und den Raum einbegriffen, und bei der $a < b$ bedeutet »a ist in b enthalten»,[3] genügt den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 7^0_a und 7^0_b, dagegen nicht den Axiomen 6^0_a, 6^0_b und umsomehr nicht

Axiom $\bar{6}^0_a$: $\sum_{j=1}^{\infty} (a_j b) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\} \cdot b$,[4]

und

Axiom $\bar{6}^0_b$: Aus $a_j b = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\} \cdot b = 0$.

---

[1] Auch die Theorie des beschränkt- (ebenso wie die des total-) additiven Masses, in welcher das Mass auch negative Werte haben kann, lässt sich auf Strukturen übertragen. Vergleiche J. Ridder, Fund. Math. 24 (1935), S. 73—87; die loc. cit. behandelten Theorieen lassen sich sogar in solcher Weise übertragen, dass sie sich in ihrer neuen Form den Betrachtungen unserer jetzigen Arbeit unterordnen.

[2] Das Axiom $\bar{3}^0$ ist unabhängig von den Axiomen 1^0—5^0, 6^0_a, 7^0_a wie hervorgeht aus einem Beispiel, das man erhält durch Erweiterung gemäss Satz 22 eines bei O. Haupt, Differential- und Integralrechnung, 1938, Band III, S. 8 betrachteten Mengenkörpers.

[3] Siehe loc. cit. 4 S. 133, S. 7, 14 u. 33.

[4] Es wird deutlich sein wie man die Sätze 13, 13′ abzuändern hat bei Betrachtung von Strukturen und Erweiterungen dieser Strukturen, welche den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$ und $\bar{6}^0_a$ genügen bzw. genügen sollen.

Eine Struktur, deren Somen die offenen Mengen eines Euklidischen Raumes sind, die leere Menge und den Raum einbegriffen, und bei welcher $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b», genügt den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_a$ und $\bar{6}^0_b$, jedoch nicht den Axiomen 7^0_a und 7^0_b.

Aus einem Satze von § 1 folgt:

Die Axiomensysteme 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_a$, 7^0_a *und* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_a$, 7^0_b *sind aequivalent.*

Wie ein analoger Satz in § 1 lässt sich beweisen:

Die Axiomensysteme 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_a$, 7^0_b *und* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b *sind aequivalent; somit auch die aus diesen durch Hinzufügung von Axiom* 5^0 *entstehenden Systeme.*

Definition. Ein Soma $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ wird *Produkt der Somenfolge* $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ genannt, falls: α) $\prod_{j=1}^{\infty} a_j < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; β) aus $b < a_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $b < \prod_{j=1}^{\infty} a_j$.

Satz 43. Haben die Somen der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ ein Produkt, so ist dies eindeutig bestimmt.

Satz 44. In einer den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_a$ oder $\bar{6}_b$, 7^0_b genügenden Struktur hat jede Folge von Somen ein Produkt.[1]

Sats 45. In einer den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b genügenden Struktur S gilt

$$\prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b) = \prod_{j=1}^{\infty} a_j + b.$$

Das Axiom 7^0_b darf hier nicht ohnemehr fortgelassen werden, wie die oben betrachtete Struktur von offenen Mengen zeigt. Zwar gibt es für jede Folge $\{a_j\}$ ein Produkt $\prod_{(j)} a_j$ (gleich dem offenen Kern der Produktmenge von $a_1, a_2, \ldots$); das Axiom 7^0_b ist jedoch nicht erfüllt und die Eigenschaft $\prod_{(j)} (a_j + b) = \prod_{(j)} a_j + b$ gilt nicht, sogar nicht der Spezialfall »aus $a_j + b = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ folgt $\prod_{(j)} (a_j + b) = 1$.»

[1] Siehe z. B. loc. cit. 3 S. 133, erstes Zitat, S. 40, 41.

Beweis. Wir betrachten erstens den Spezialfall, in welchem für jedes j $a_j + b = t$ ist. Beschränken wir uns dann auf diejenigen Somen (c), für die $c < t$, und lassen wir die Bedeutung des Zeichens $<$ zwischen zwei dieser Somen ungeändert, so entsteht eine Teilstruktur Σ von S, in welcher die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0 (es ist $1 = t$), $\bar{6}^0_a$, 7^0_b erfüllt sind und alle Relationen, die zwischen ihren Somen in der ursprünglichen Struktur S gelten, ungeändert erhalten bleiben. Beim Beweise des vorangehenden Satzes wird als allgemein geltende Formel gefunden:

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 - \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_1 - \prod_{k=1}^{j} a_k\right). \tag{38}$$

Wir schreiben:

$$p_j = \prod_{k=1}^{j} a_k, \quad q_j = a_1 - p_j \quad (j = 1, 2, \ldots);$$

und

$$p = \prod_{j=1}^{\infty} a_j, \quad q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j.$$

Nacheinander lässt sich zeigen, dass in Σ:

$1 - b < a_j$, also auch $1 - b < p_j$; $(1 - b)\, q_j = 0$, also $q_j < b$ und $q < b$;

$(1 - b)\, q = 0$, $1 - b < a_1$ und $p = a_1 - q$, also $1 - b < p$ und $1 < b + p$.

Da auch umgekehrt $b + p < 1$, folgt

$$b + p \text{ oder } b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j = 1.$$

In S ist somit

$$b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j = t.$$

Im allgemeinen Fall sei

$$t = b + \sum_{j=1}^{\infty} a_j;$$

wir beschränken uns auf die Somen (c), für die $c < t$, wodurch wieder eine Teilstruktur Σ von gleicher Art wie oben erhalten wird. Aus $\prod_{j=1}^{\infty} a_j < a_j < a_j +$ $+ b$ folgt

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j < \prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b).$$

Aus $b < a_j + b$ folgt

$$b < \prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b).$$

Somit gilt

$$b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j < \prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b). \tag{39}$$

Es ist in Σ

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = \prod_{j=1}^{\infty} [(a_j + b) \cdot \{a_j : (a_j + b)\}] = \prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b) \times \prod_{j=1}^{\infty} \{a_j : (a_j + b)\}. \tag{40}$$

Da

$$\{a_j : (a_j + b)\} + b = 1$$

ist, folgt aus dem soeben bewiesenen Spezialfall

$$b + \prod_{j=1}^{\infty} \{a_j : (a_j + b)\} = 1,$$

somit auch

$$\left(b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j\right) + \prod_{j=1}^{\infty} \{a_j : (a_j + b)\} = 1. \tag{41}$$

Aus (40) folgt

$$\prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b) \times \prod_{j=1}^{\infty} \{a_j : (a_j + b)\} < b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j, \tag{42}$$

und, nach Satz 18′, aus (41) und (42)

$$\prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b) < b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j. \tag{43}$$

(39) und (43) liefern schliesslich in Σ und dadurch auch in S:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (a_j + b) = b + \prod_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Aus den Sätzen 44 und 45 und den Definitionen der Summe und des Produktes von abzählbar vielen Somen folgt:

Das zweite Dualitätsprinzip gilt für alle aus den Axiomen $1^0, 2^0, \bar{3}^0, 4^0, 5^0, \bar{6}^0_a, 7^0_a$ *ableitbaren Sätze*; $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ stehen einander dual gegenüber.

Satz 46. Genügt eine Struktur S den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\dot{6}^0_b$ (oder 6^0_a), 7^0_b, jedoch nicht dem Axiom 5^0,[1] so lässt sich diese Struktur durch Hinzufügung von neuen Somen derartig erweitern zu einer den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_a$ (und $\bar{6}^0_b$), 7^0_a (und 7^0_b) genügenden Struktur Σ, dass dabei die Relationen zwischen den ursprünglichen Somen ungeändert bleiben.

Beweis. Wir fügen wie im Beweise von Satz 22 neue Somen $(\bar{c})$ zu den ursprünglichen Somen (c) und nehmen dabei die gleichen Ordnungsrelationen an wie dort. Dann genügt das neue System Σ den Axiomen 1^0, 2^0, 4^0, 5^0, 7^0_a und 7^0_b.

Dass in Σ endlich viele Somen eine Summe haben, folgt schon aus dem Beweise von Satz 22. Haben wir eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, so sind zwei Fälle möglich: entweder alle Somen gehören zu S, und es gibt somit eine Summe in S, welche zugleich Summe in Σ ist, wie sich leicht aus den angenommenen Ordnungsrelationen ableiten lässt, oder: es gibt unter den Somen der Folge mindestens ein neues Soma. Wenn $a_\varkappa$ das am ersten auftretende Soma dieser Art ist, sind alle Partialsummen

$$\sum_{j=1}^{\varkappa+p} a_j \, (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

neu hinzugefügte Somen:[2]

$$\bar{s}_{\varkappa+p},$$

und es ist

$$\bar{s}_\varkappa < \bar{s}_{\varkappa+1} \ldots < \bar{s}_{\varkappa+p} \ldots,$$

somit

$$s_\varkappa > s_{\varkappa+1} \ldots > s_{\varkappa+p} \ldots .^{3}$$

Nach Satz 44 existiert nun in S und in Σ

$$\prod_{p=0}^{\infty} s_{\varkappa+p} = s,$$

woraus hervorgeht: 1^0 $s < s_{\varkappa+p}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, also $\bar{s}_{\varkappa+p} < \bar{s}$, und dadurch $a_j < \bar{s}$ $(j = 1, 2, \ldots)$; 2^0 die Annahme »$a_j <$ ein neues Soma $\bar{b}$[4] $(j = 1, 2, \ldots)$», aus welcher folgt $\bar{s}_{\varkappa+p} < \bar{b}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, und somit auch $b < s_{\varkappa+p}$, impliziert

[1] Beispiel: Die Struktur, deren Somen die leere Menge und die aus höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten aufgebauten Teilmengen eines unabzählbar unendlich viele Punkte enthaltenden, abstrakten Raumes sind und in welcher $a < b$ bedeutet »a ist Teilmenge von b.»

[2] Siehe den Beweis von Satz 22.

[3] $a > b$ ist nur eine andere Schreibweise von $b < a$.

[4] »$a_j <$ ein Soma c von S $(j = 1, 2, \ldots)$» ist unmöglich. Siehe loc. cit. 2.

$b < s$, also $\bar{s} < \bar{b}$. Die Definition der Summe einer Folge von Somen zeigt, dass in Σ

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ existiert und } = \bar{s}$$

ist. Das Axiom $\bar{3}^0$ ist in Σ erfüllt.

Es genügt nur noch zu zeigen, dass die Struktur Σ auch dem Axiom $\bar{6}_{\mathrm{b}}^0$ genügt. Da nach Satz 22 das Axiom 6_{b}^0 schon erfüllt ist, folgt aus $a_j b = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ jedenfalls

$$c_n b = 0 \text{ mit } c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Drei Fälle sind hier möglich: 1^0. alle c_n nebst b sind Somen von S; dann ist $c = \sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ auch ein Soma von S, und $c\,b = 0$, weil das Axiom $\bar{6}_{\mathrm{b}}^0$ schon in S gilt; 2^0. b gehört zu S, für $n \geqq$ ein festes ν gehören die Somen (c_n) nur zu Σ; es ist somit $c_{\nu+p} = \bar{d}_{\nu+p}$, wobei $d_{\nu+p}$ zu S gehört $(p = 0, 1, 2, \ldots)$; $\bar{d}_{\nu+p} b = 0$ oder $b - b\,d_{\nu+p} = 0$ oder $b\,d_{\nu+p} = b$, woraus folgt $b \prod_{p=0}^{\infty} d_{\nu+p} = b$ oder, mit $\prod_{p=0}^{\infty} d_{\nu+p} = c$, $b\,c = b$, somit $b - b\,c = 0$ oder $\bar{c}\,b = 0$. Daneben ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{p=0}^{\infty} c_{\nu+p} = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{d}_{\nu+p} = \prod_{p=0}^{\infty} d_{\nu+p}$[1] $= \bar{c}$; $3^0 \cdot b$ gehört nur zu Σ, also $b = \bar{f}$ mit $f \in S$, alle c_n gehören zu S; für jedes n ist $c_n \bar{f} = 0$ oder $c_n - c_n f = 0$, $c_n f = c_n$ oder $c_n < f$, somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c < f$ oder $f c = c$, $c - f c = 0$ oder $c \bar{f} = 0$, $c\,b = 0$.

§ 8. *Die Struktur S genüge den Axiomen* $1^0 - 4^0$, 6_{b}^0, 7_{b}^0. Für jedes Soma a von S sei *eine den Axiomen I^{b}, II, III* (von § 2) *genügende Somenfunktion $m^0(x)$ definiert.*

Definition. Für die den Körper K bildenden, $m^0(x)$-messbaren Somen (x) heisse

$$\mu(x) = m^0(x)$$

ein beschränkt additives Mass.

[1] Siehe den zweiten Absatz des Beweises.

Definition. Das für die Somen des Körpers K definierte, (beschränkt) additive Mass $\mu(x)$ heisse *totaladditiv**, falls aus $a_1 < a_2 \ldots < a_n \ldots, \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a$, jedes $a_j \in K$, $a \in K$ und $\mu(a)$ endlich immer folgt

$$\lim_{j \to \infty} \mu(a_j) = \mu(a).$$

Satz 47. *Damit in einer den Axiomen* $1^0, 2^0, \bar{3}^0, 4^0, \bar{6}^0_b, 7^0_b$ *genügenden Struktur* S *das oben eingeführte, beschränkt additive Mass* $\mu(x)$ *totaladditiv* sei, ist notwendig und hinreichend, dass aus*

$$(44) \qquad b_1 > b_2 \ldots > b_n \ldots, \prod_{j=1}^{\infty} b_j = 0, \text{ jedes } b_j \in K \text{ und } \mu(b_1) \text{ endlich}$$

immer folge

$$(45) \qquad \lim_{j \to \infty} \mu(b_j) = 0.$$

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Aus (38) folgt bei $a_1 < a_2 \ldots < a_n \ldots, \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a$:

$$a \prod_{j=1}^{\infty} (a - a_j) = a - \sum_{j=1}^{\infty} \{a - (a - a_j)\}$$

oder

$$\prod_{j=1}^{\infty} (a - a_j) = a - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ oder } = 0.$$

Nimmt man $a - a_j = b_j \, (j = 1, 2, \ldots)$, so ist

$$b_1 > b_2 \ldots > b_n \ldots \text{ und } \prod_{j=1}^{\infty} b_j = 0.$$

Ist ausserdem jedes $a_j \in K$, $a \in K$ und $\mu(a)$ endlich, so folgt mit (45)

$$\lim_{j \to \infty} \mu(a - a_j) = 0 \text{ oder } \mu(a) = \lim_{j \to \infty} \mu(a_j).$$

In analoger Weise findet man, dass die Bedingung notwendig ist.

Satz 48. *Die Struktur* S *genüge den Axiomen* $1^0, 2^0, \bar{3}^0, 4^0, \bar{6}^0_b, 7^0_b$; *für einen Teilkörper* K *von* S *sei ein totaladditives* Mass* $\mu(x)$ *definiert. Dann lässt sich* K *erweitern zu einem* σ*-Körper* K_1 (d. h. ein Körper, welcher auch die Summe von je abzählbar vielen seiner Somen enthält) *und* $\mu(x)$ *für die neu hinzugekommenen Somen derartig definieren, dass* $\mu(x)$ *auch in* K_1 *totaladditiv**

ist;[1] letzteres soll heissen: 1^0 aus $a, b \in K_1$, $\mu(a+b)$ endlich folgt immer $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b) - \mu(ab)$, 2^0 aus $a_1 < a_2 \ldots < a_n \ldots$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a$, jedes $a_j \in K_1$, $\mu(a)$ endlich folgt immer $\lim_{j \to \infty} \mu(a_j) = \mu(a)$.

KAPITEL 2.

Theorie des totaladditiven Masses.

§ 9. Wir betrachten in diesem Paragraphen *eine Struktur S, welche den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0 *genügt.* Für jedes Soma von S sei *eine Somenfunktion* $m^0(x)$ definiert, welche ausser den Axiomen I^b, II und III auch dem folgenden Axiom (VI) genügen soll.

Axiom VI. *Die Summe von abzählbar vielen, $m^0(x)$-messbaren Somen ist $m^0(x)$-messbar.*

Jedes der Axiome I^b, II, III und VI ist von den übrigen unabhängig.[2]

Die Sätze 28 und 29 (nebst Korollar) bleiben gelten für die hier betrachteten Strukturen und Somenfunktionen.

Definition. Ein Körper von Somen heisse *σ-Körper*, wenn die Summe von abzählbar vielen seiner Somen immer zu ihm gehört; er heisse *δ-Körper*, wenn das gleiche von dem Produkte von abzählbar vielen seiner Somen gilt.

Aus Axiom VI, Satz 28 und Formel (38) folgt:

Satz 49. *Für die Somen einer Struktur S, welche den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0 *genügt, sei eine Somenfunktion $m^0(x)$ definiert, welche die Axiome*

---

[1] Für den Beweis vergleiche man HAUPT, loc. cit. 2 S. 154, S. 16—19, wo ein gleichartiger Satz für Mengen eines abstrakten Raumes abgeleitet wird.

[2] Die Teilmengen des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$ bilden eine Struktur, welche die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0 erfüllt, falls $P < Q$ bedeutet »P ist Teilmenge von Q«. Definieren wir für die leere Menge 0 $m^0(0) = 1$, daneben $m^0\{(A)\} = 2$ und für alle von der leeren Menge und der aus dem festgewählten Punkt A aufgebauten Menge (A) verschiedenen Teilmengen $\{P\}$ von $[0, 1]$ $m^0(P) = 3$, so sind die Axiome I^b, III und VI erfüllt, dagegen nicht das Axiom II. Wird $m^0(P)$ gleich dem äusseren Lebesgueschen Mass von P gewählt für alle Teilmengen von $[0, 1]$ mit Ausnahme der Menge (A), für die $m^0\{(A)\} = 1$ sein soll, so sind die Axiome I^b, II und VI erfüllt, dagegen nicht Axiom III. Nimmt man $m^0(P) = 0$ für alle Teilmengen $\{P\}$, so sind die Axiome II, III und VI erfüllt, nicht das Axiom I^b. Schliesslich liefert das äussere Jordansche Mass ein Beispiel, in welchem die Axiome I^b, II und III erfüllt sind, nicht das Axiom VI.

I^b, II, III und VI erfüllt.[1] *Dann bilden die $m^0(x)$-messbaren Somen von S sowohl einen σ- wie einen δ-Körper.*[2]

Ebenso wie Satz 27 lässt sich beweisen[3] der

Satz 50. *Für die Somen einer Struktur S, welche den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b, genügt, sei eine Somenfunktion $m^0(x)$ definiert, welche die Axiome I^b, II, III und VI erfüllt. Es ist möglich die Struktur S durch Hinzufügung von Somen zu erweitern zu einer den Axiomen 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b genügenden Struktur Σ und dabei $m^0(x)$ für die neuen Somen derartig zu definieren, dass $m^0(x)$ in Σ wieder die Axiome I^b, II, III und VI erfüllt, und dass auch α) und γ) von Satz 27 sich dabei wörtlich übertragen lassen.*

Für die Gruppe von Sätzen, welche sich ausschliesslich aus den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 5^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b und Satz 49 ableiten lassen, gilt wieder das zweite Dualitätsprinzip.

Da Axiom II, nach § 4, eine Folgerung aus den Axiomen I^b und IV ist, können wir es fortlassen, wenn Axiom IV neu hinzugefügt wird.

Jedes der Axiome I^b, III, IV und VI ist von den andern unabhängig.[4]

Die zu $m^0(x)$ adjungierte Funktion $m_0(x)$ sei definiert wie in § 4. Für sie gilt Satz 30.

Satz 51. *Die Struktur S genüge den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b und die in ihr definierte Somenfunktion $m^0(x)$ den Axiomen I^b, III, IV und VI. Dann genügt die zu $m^0(x)$ adjungierte Somenfunktion $m_0(x)$ ebenfalls den Axiomen I^b, III, IV und VI. Jedes $m^0(x)$-messbare Soma ist auch $m_0(x)$-messbar, und umgekehrt; für jedes derartige Soma a ist $m^0(a) = m_0(a)$. Die zu $m_0(x)$ adjungierte Funktion $(m_0)_0(x)$ fällt mit $m^0(x)$ zusammen.*

Der Satz folgt sofort aus Satz 31.

Die äusseren und inneren Lebesgueschen Masse der Teilmengen eines In-

[1] Die von CARATHÉODORY, loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 238 u. f. eingeführten »Massfunktionen» gehören zu den hier betrachteten Somenfunktionen. Vergl. auch loc. cit. 3 S. 133, erstes Zitat, S. 48 u. f.

[2] Limes superior und Limes inferior von Folgen von Somen: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ lassen sich einführen wie bei Folgen von Punktmengen; es sei $\limsup_{n\to\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} a_{n+k}$. Auch diese sind unter den Annahmen von Satz 49 $m^0(x)$-messbar, wenn alle Somen der betrachteten Folge es sind.

[3] Siehe auch den Beweis von Satz 46.

[4] Dies folgt aus den drei Beispielen von § 4, erste Hälfte und dem letzten Beispiel von Fussn. 2 S. 161.

tervalls im Euklidischen Raume sind sowohl Funktionen $m^0(x)$ wie $m_0(x)$; sie sind adjungierte Funktionen voneinander.

§ 10. **Axiom VII.** *Für jede Folge von Somen* $a_1 < a_2 \ldots < a_n \ldots$ *mit* $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *und* $m^0(a)$ *endlich ist*

$$\lim_{j\to\infty} m^0(a_j) = m^0(a).$$

Axiom VII′. *Für jede Folge von Somen* $b_1 > b_2 \ldots > b_n \ldots$ *mit* $b = \prod_{j=1}^{\infty} b_j$ *und mit* $m^0(b_1)$ *oder*, was auf dasselbe hinauskommt, $\lim_{j\to\infty} m^0(b_j)$ *endlich ist*

$$\lim_{j\to\infty} m^0(b_j) = m^0(b).$$

Dass *die Axiome VII und VII′ von den Axiomen I^b, (II), III, IV und VI unabhängig* sind, zeigt das innere bzw. das äussere Lebesguesche Mass der Teilmengen eines linearen Intervalls.[1]

Satz 51 lässt sich erweitern zu:

Satz 52. *Die Struktur S genüge den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0 *und die in ihr definierte Somenfunktion* $m^0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII. Dann genügt die zu* $m^0(x)$ *adjungierte Funktion* $m_0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII′. Dies bleibt wahr, wenn man VII mit VII′ vertauscht.*

In beiden Fällen ist jedes $m^0(x)$*-messbare Soma auch* $m_0(x)$*-messbar, und umgekehrt; für jedes derartige Soma a ist dann* $m^0(a) = m_0(a)$; *die zu* $m_0(x)$ *adjungierte Funktion* $(m_0)_0(x)$ *fällt mit* $m^0(x)$ *zusammen.*

Der Satz 52 liefert die Möglichkeit die wichtigsten Eigenschaften von Somenfunktionen, welche den Axiomen I^b, III, IV, VI und VII′ genügen, durch Übergang zu der adjungierten Funktion aus analogen Eigenschaften von Somenfunktionen, welche die Axiome I^b, III, IV, VI und VII erfüllen, abzuleiten; oder umgekehrt.

Satz 53. *S genüge den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0, $m^0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII. Ist dann* $m^0(a_1)$ *endlich*, $a_1 > a_2 \ldots > a_n \ldots$ *mit* $a = \prod_{j=1}^{\infty} a_j$ *und jedes* a_j $m^0(x)$*-messbar, so ist*

$$\lim_{j\to\infty} m^0(a_j) = m^0(a).$$

---

[1] Siehe F. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 419.

Beweis. Nach Satz 52 erfüllt die zu $m^0(x)$ adjungierte Funktion $m_0(x)$ das Axiom VII'. Daraus folgt

$$\lim_{j \to \infty} m_0(a_j) = m_0(a),$$

also auch

$$\lim_{j \to \infty} m^0(a_j) = m^0(a).$$

Satz 53'. *S genüge den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0, $m^0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII'. Ist dann* $a_1 < a_2 \ldots < a_n \ldots$ *mit* $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *und* $m^0(a)$ *endlich, und ist jedes* a_j $m^0(x)$*-messbar, so ist*

$$\lim_{j \to \infty} m^0(a_j) = m^0(a).$$

Satz 54, 54'. *S genüge den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b$, 7_b^0, $m^0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII oder VII'. Ist dann* $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *mit* $a_j a_k = 0$ *für* $j \neq k$ *und* $m^0(a)$ *endlich, und ist jedes* a_j $m^0(x)$*-messbar, so ist*

$$m^0(a) = \sum_{j=1}^{\infty} m^0(a_j).\text{[1]}$$

Hat man dies bewiesen in dem Falle dass Axiom VII gilt, so folgt mit Satz 52 unmittelbar, dass die Behauptung auch gilt, wenn man Axiom VII durch Axiom VII' ersetzt.

Satz 55, 55'. *S genüge den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}_b^0$, 7_b^0, $m^0(x)$ *den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII oder VII'. Ist dann* $\underline{a} = \liminf_{k \to \infty} a_k$[2] *mit jedem* a_k $m^0(x)$*-messbar und* $m^0(\underline{a})$ *endlich, so ist*

$$m^0(\underline{a}) \leqq \liminf_{k \to \infty} m^0(a_k). \tag{46}$$

Ist $\bar{a} = \limsup_{k \to \infty} a_k$[2] *mit jedem* a_k $m^0(x)$*-messbar und* $\lim_{j \to \infty} m^0(a_j + a_{j+1} + \cdots + a_{j+k} + \cdots)$ *endlich, so ist*

$$m^0(\bar{a}) \geqq \limsup_{k \to \infty} m^0(a_k).\text{[3]} \tag{47}$$

---

[1] In dem Fall, dass Axiom VII gilt, darf Axiom IV auch fortgelassen werden.

[2] Siehe die Definition in Fussn. 2 S. 162.

[3] In dem Falle, dass Axiom VII gilt, braucht man für (46) und in dem Falle, dass Axiom VII' gilt, für (47) die $m^0(x)$-Messbarkeit der Somen (a_k) nicht zu fordern.

Existiert $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \liminf\limits_{k\to\infty} a_k = \limsup\limits_{k\to\infty} a_k$ *mit jedem* a_k $m^0(x)$-*messbar und* $\lim\limits_{j\to\infty} m^0(a_j + + a_{j+1} + \cdots + a_{j+k} + \cdots)$ *endlich, so ist*

$$m^0(\lim_{k\to\infty} a_k) = \lim_{k\to\infty} m^0(a_k).$$

§ 11. *Das Axiom V ist von den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII unabhängig*, wie aus einem schon eher zitierten Beispiel von Carathéodory[1] folgt.

Ebenso ist *das Axiom V′ von den Axiomen* I^b, *III, IV, VI und VII′ unabhängig*, wie aus dem gleichen Beispiel folgt. Die zu der Funktion $\nu_5(A)$ des Beispiels adjungierte Funktion erfüllt, nach Satz 52, die Axiome I^b, III, IV, VI und VII′; sie kann das Axiom V′ nicht erfüllen, da dann, nach den Sätzen 33 und 52, $\nu_5(A)$ selbst das Axiom V erfüllen müsste.

Definition. In einer den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b genügenden Struktur S soll eine Somenfunktion *eine reguläre äussere* bzw. *eine reguläre innere Somenfunktion* genannt werden, wenn sie die Axiome I^b, III, (IV), V, VI und VII bzw. die Axiome I^b, III, IV, V′, VI und VII′ erfüllt.[2]

Aus den Sätzen 33 und 52 folgt:

Satz 56. *In einer den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0 $\bar{6}^0_b$, 7^0_b *genügenden Struktur* S *ist die adjungierte Funktion einer regulären äusseren Somenfunktion eine reguläre innere Somenfunktion, und umgekehrt.*

Über die Beweise der nachfolgenden Sätze lässt sich eine gleichartige Bemerkung machen wie in § 6 über die dort betrachtete Satzgruppe.

Wie die Sätze 34, 34′ beweist man:

Satz 57, 57′. *Ist für die reguläre äussere Somenfunktion* $m^0(x)$ $m^0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$ *endlich, so gilt*

$$m^0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} m^0(a_j);$$

ist für die reguläre innere Somenfunktion $m_0(x)$ $m_0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$ *endlich*[3] *und immer* $a_j a_k = 0$ *für* $j \neq k$, *so gilt*

$$m_0(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots) \geqq \sum_{j=1}^{\infty} m_0(a_j).$$

---

[1] Siehe die Fussnote 1 S. 149.

[2] Während das Axiom IV aus Axiom V folgt, ist es von den sämtlichen Axiomen I^b, III, V′, VI und VII′ unabhängig, wie aus einem in § 6 gegebenen Beispiel folgt.

[3] Diese Bedingung darf auch fortbleiben.

Satz 58, 58'. *Ist für die reguläre äussere Somenfunktion $m^0(x)$ und das Soma a $m^0(a)$ endlich*[1], *so gibt es ein $m^0(x)$-messbares Soma $\bar{a}$ mit $a < \bar{a}$ und*

$$m^0(a) = m_0(\bar{a});$$

ist für die reguläre innere Somenfunktion $m_0(x)$ und das Soma a $m_0(a)$ endlich, so gibt es ein $m_0(x)$-messbares Soma $\underline{a}$ mit $\underline{a} < a$ und

$$m_0(\underline{a}) = m_0(a).$$

Beweis. Die Existenz von $\bar{a}$ bzw. $\underline{a}$ folgt mit Hilfe der Axiome III, V und der Sätze 49, 53 bzw. der Axiome III, V' und der Sätze 49, 53'.

Natürlich behalten die Sätze 35 bzw. 41' ihre Gültigkeit, wenn die äusseren und inneren Somenfunktionen regulär sind.

Satz 59. *Es sei $a_1 > a_2 \ldots > a_n \ldots$, $a = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$, jedes $a_k = b\,c_k$, wobei c_k für die reguläre äussere Somenfunktion $m^0(x)$ $m^0(x)$-messbar und $m^0(b)$ endlich sei. Dann ist $\lim_{k \to \infty} m^0(a_k) = m^0(a)$.*[2]

Satz 59'. *Es sei $\bar{a}_1 < \bar{a}_2 \ldots < \bar{a}_n \ldots$, $\bar{a} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k$, jedes $\bar{a}_k = \bar{b}\,\bar{c}_k$, wobei jedes $\bar{c}_k$ für die reguläre innere Somenfunktion $m_0(x)$ $m_0(x)$-messbar und $m_0(\bar{b})$ endlich sei. Dann ist $\lim_{k \to \infty} m_0(\bar{a}_k) = m^0(\bar{a})$.*

Satz 60, 60'. *Sind die Somen $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ einander fremd und sind sie $m^0(x)$- und $m_0(x)$-messbar, wobei $m^0(x)$, $m_0(x)$ zueinander adjungierte, reguläre äussere und innere Somenfunktionen sind, ist weiter $a_n < b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), und ist $m^0\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ oder $m_0\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ endlich, so gilt*

$$m^0\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^0(a_n)$$

und

$$m_0\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_0(a_n).$$ [2]

§ 12. Die Axiome, welche der regulären äusseren Somenfunktion (und damit auch diejenigen, welche der regulären inneren Somenfunktion) auferlegt wurden,

[1] Gibt es ein grösstes Soma, ist somit Axiom 5^0 ebenfalls erfüllt, so darf $m^0(a)$ auch ∞ sein.

[2] Zum Beweise vergleiche man loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 272, 273, 274. — Die Sätze 59, 59' hätten schon früher gebracht werden können (für nicht notwendig reguläre Somenfunktionen), da ihr Beweis von den Axiomen V, V' unabhängig ist.

garantieren noch keine völlige Totaladditivität für die Masszahlen der messbaren Somen. In den Sätzen 54 und 54′ wurde Endlichkeit der (zugehörigen) Masszahl der Somensumme $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ angenommen. Dass diese Annahme nicht fortgelassen werden darf, zeigt folgendes Beispiel. Für die echten Teilmengen (x) des offenen Intervalls $(0, 1)$, die leere Menge einbegriffen, sei $m^0(x)$ gleich dem äusseren und $m_0(x)$ gleich dem inneren Lebesgueschen Mass von x; für $(0, 1)$ selbst seien beide Funktionen gleich ∞. Dann sind $m^0(x)$ und $m_0(x)$ zueinander adjungierte, reguläre äussere und innere Somenfunktionen; für die Teilmengen $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} m^0(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m_0(x_n) = 1$, somit $\neq m^0((0, 1))$ und $\neq m_0((0, 1))$.

Axiom VIII. *Sind für eine Somenfunktion $m^0(x)$ die einander fremden Somen $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ $m^0(x)$-messbar und ist $m^0\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right) = \infty$, so ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} m^0(a_j) = \infty$.*

Mit Hilfe der Sätze 52 und 56 findet man sofort:

Satz 61. *Die Struktur S genüge den Axiomen 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b. Die adjungierte Funktion $m_0(x)$ einer in S definierten, regulären äusseren Somenfunktion $m^0(x)$, welche Axiom VIII genügt, ist eine reguläre innere Somenfunktion, welche Axiom VIII genügt, und umgekehrt. Jedes $m^0(x)$-messbare Soma a ist auch $m_0(x)$-messbar, und umgekehrt; dabei ist dann stets $m^0(a) = m_0(a)$.*

Es ist weiter ein leichtes zu zeigen, dass in Satz 57 die Endlichkeit von $m^0(a_1 + \cdots + a_n + \cdots)$ nicht mehr angenommen zu werden braucht, falls $m^0(x)$ dem Axiom VIII genügt.[1]

Damit lässt sich nun folgern, *dass unser Axiomensystem I^b, II bis VIII in einer Struktur, welche die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0 5^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b erfüllt, dem um das vierte Axiom verringerte Axiomensystem der Carathéodoryschen regulären äusseren Massfunktionen[2] völlig aequivalent ist.* Die wenigen Sätze und Erweiterungen von Sätzen, welche sich mit Hilfe von Axiom VIII noch hinzufügen lassen, können wir übergehen; die Ableitung ist wie in dem mehrmals zitierten Buche.[3]

---

[1] Vergl. ROSENTHAL, loc. cit. 1 S. 132, § 4. Das im Texte betrachtete Beispiel zeigt, dass Axiom VIII beim Beweise nicht entbehrt werden kann.

[2] Siehe CARATHÉODORY loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 238 u. 258.

[3] Nur wollen wir bemerken, dass u. a. die Behauptung von Satz 58′ nicht immer gilt bei $m_0(a)$ unendlich. Dies zeigt z. B. die im Euklidischen Raume zu dem äusseren Lebesgueschen Masse adjungierte Funktion, welche stets ∞ ist, sobald das äussere Lebesguesche Mass ∞ ist, und welche somit nicht mit dem inneren Lebesgueschen Masse im üblichen Sinne identisch ist.

§ 13. **Reduktion der Axiomensysteme und Unabhängigkeitsbeweise.** Der in Fussn. 1 S. 167 zitierte Beweis, der sich auf Somen, welche die im Anfang von § 9 genannten Axiome erfüllen, übertragen lässt, benutzt unsere Axiome I^b, (II), III, V, VII und VIII, jedoch nicht das Axiom VI. Da dieses sich aus Satz 57, erweitert auf den Fall, dass $m^0(a_1 + \cdots + a_n + \cdots)$ auch unendlich sein darf, und den Axiomen I^b, (II), III und V ableiten lässt[1], ist *Axiom VI eine Folgerung aus dem Axiomensystem I^b, III, V, VII und VIII.*

Genügt eine Somenfunktion den Axiomen I^b, (II), III, IV, V′, VII′, VIII, so erfüllt die adjungierte Somenfunktion die Axiome I^b, (II), III, (IV), V, VII und VIII und dadurch, nach dem soeben Bewiesenen, auch Axiom VI. Die ursprüngliche Somenfunktion erfüllt somit dieses Axiom ebenfalls; *Axiom VI ist eine Folgerung aus dem Axiomensystem I^b, III, IV, V′, VII′ und VIII.*

Die beiden Axiomensysteme, welchen die in Satz 61 vorkommenden Somenfunktionen genügen sollten, lassen sich somit *reduzieren zu den Axiomensystemen I^b, III, V* (welches IV enthält), *VII, VIII bzw. I^b, III, IV, V′, VII′, VIII. In beiden Systemen ist jedes Axiom von den übrigen und von den Strukturaxiomen unabhängig; die betrachteten Strukturen sollen dabei immer die Axiome* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, 6^0_b, 7^0_b *erfüllen.*[2]

Dass in der ersten Gruppe Axiom I^b von den übrigen Axiomen unabhängig ist, zeigt das dritte Beispiel von § 4. Dasselbe für das Axiom III folgt aus dem in § 5 gegebenen Beispiel eines aus zwei Punkten aufgebauten Raumes. Dass das Axiom V von den Axiomen I^b, III, IV, VII, VIII (und den Strukturaxiomen) unabhängig ist, folgt aus dem schon mehrfach zitierten Beispiel von Carathéodory[3]; auch aus dem Beispiel eines aus zwei Punkten A, B aufgebauten Raumes mit $m^0(0) = 0$, $m^0((A)) = m^0((B)) = 1$, $m^0((A + B)) = 3$. Das innere Lebesguesche Mass der Teilmengen des Intervalls (0, 1) zeigt, dass das Axiom VII von den übrigen Axiomen der ersten Gruppe unabhängig ist.[4] Schliesslich folgt das gleiche für das Axiom VIII aus dem in § 12 gegebenen Beispiel.

In allen diesen Beispielen, das erste und das zweite ausgenommen, gelten die Axiome I^b, III und IV. Übergang zur adjungierten Funktion führt somit zu Beispielen, aus welchen folgt, dass jedes der Axiome V′, VII′ und VIII von den übrigen Axiomen des zweiten Systems unabhängig ist (siehe die Sätze

---

[1] Man vergleiche loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 249—251.

[2] Auch Axion 5^0 ist in allen Beispielen erfüllt.

[3] Siehe die Fussnote 1 S. 149.

[4] Siehe die Fussnote 1 S. 163.

30, 31, 33, 61). Dass das gleiche für die Axiome I^b und III gilt, folgt aus dem dritten Beispiel von § 4 bzw. dem dritten Beispiel von § 6.

Auch Axiom IV ist von den übrigen Axiomen des zweiten Systems unabhängig. Das zeigt das innere Lebesguesche Mass der Teilmengen eines Euklidischen Raumes. Die Axiome I^b, III, V′, VII′ und VIII sind erfüllt. Dagegen ist für eine in einem solchen Raume, von Carathéodory, konstruierte Menge Ω^1, deren inneres Mass Null und deren äusseres Mass ∞ ist, das Axiom IV nicht erfüllt.[2]

KAPITEL 3.

Integration in Strukturen.

§ 14. Von Carathéodory wurden, loc. cit. 3 S. 133, erstes Zitat, S. 61 u. f., als Erweiterung der Punktfunktionen in den abstrakten Räumen, für die Somen einer Struktur abstrakte Ortsfunktionen eingeführt.

Definition. *Die Struktur S genüge den Axiomen* 1^0—4^0, 6^0_b, 7^0_b; sie enthalte das Soma $a \neq 0$. Dann wird *eine auf a definierte abstrakte Ortsfunktion f* durch zwei Somenfunktionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ gegeben, die beide auf jedem vom leeren Soma verschiedenen Soma $x < a$ definiert sind und folgende Eigenschaften haben:

1. es gibt zwei endliche oder unendliche Zahlen λ_1, λ_2, so dass für jedes Soma $x < a$ und $\neq 0$
$$\lambda_1 \leqq \alpha(x) \leqq \beta(x) \leqq \lambda_2$$
ist;

2. $\alpha(x)$ ist monoton abnehmend, $\beta(x)$ monoton zunehmend;

3. ist $\lambda_1 < \lambda_2$, so gibt es mindestens eine im offenen Intervall (λ_1, λ_2) überall dicht liegende Folge von Zahlen $\{y_k\}$, denen die Somen $\{x_k\}$, mit jedem $x_k < a$, eindeutig zugeordnet sind, so dass erstens $\alpha(x_k) \geqq y_k$ und dass zweitens $\beta(a - x_k) \leqq y_k$ ist.

Auch für die hier betrachteten Strukturen lässt sich der Carathéodorysche Satz beweisen:

Sind die Zahlen $\{y_k\}$ in einem offenen Intervall (λ_1, λ_2) beliebig gegeben, doch so, dass sie in diesem Intervall überall dicht liegen und paarweise voneinander verschieden sind, und wird jeder dieser Zahlen y_k ein Soma $x_k < a$ eindeutig zuge-

---

[1] Siehe loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 352 u. 353.

[2] Äusseres und inneres Lebesguesches Mass werden in einem Euklidischen Raume zueinander adjungierte, reguläre äussere und innere Somenfunktionen, welche das Axiom VIII erfüllen, durch Abänderung des inneren Masses in der am Ende von § 9 angegebenen Weise.

ordnet, so wird hierdurch auf a eine abstrakte Ortsfunktion f eindeutig bestimmt, wenn nur immer aus $y_k < y_m$ *die Relation* $x_k > x_m$ *folgt.*

Definition A. In S sei $m^0(x)$ *eine den Axiomen* I^b, *II und III genügende Somenfunktion*, für die *das Soma* $a \neq 0$, auf welchem die Ortsfunktion f definiert sei, $m^0(x)$*-messbar* sei, mit $m^0(a)$ *endlich*. Daneben sei f *auf a beschränkt*, was heissen soll, dass die Werte der zu f gehörigen Somenfunktionen $\alpha(x)$, $\beta(x)$ für die Menge der Somen (x) mit $x < a$ und $\neq 0$ eine beschränkte Zahlenmenge bilden. Dann ist *das* (erste) *obere* bzw. *das* (erste) *untere Riemann-Stieltjes Integral von f über a in bezug auf* $m^0(x)$ gleich der unteren Grenze aller Summen $\sum_{j=1}^{n} m^0(x_j) \times \beta(x_j)$ bzw. gleich der oberen Grenze aller Summen $\sum_{j=1}^{n} m^0(x_j) \times \alpha(x_j)$, von endlich vielen Gliedern, wenn die (x_j) einer solchen Summe einander fremde, $m^0(x)$-messbare Somen mit $a = \sum_{j=1}^{n} x_j$ sind. Gibt es einen gemeinsamen Wert von oberem und unterem Integral, so ist dieser *das* (erste) *Riemann-Stieltjes Integral*, $\int_a (RS) f\, d\, m^0(x)$, *von f über a in bezug auf* $m^0(x)$.

Satz 62. *Zur Existenz des in der vorigen Definition eingeführten Integrals* $\int_a (RS) f\, d\, m^0(x)$ *ist notwendig und hinreichend, dass es bei willkürlich vorgegebenen positiven Zahlen* ε, δ *eine Zerlegung von a in endlich viele,* $m^0(x)$*-messbare (einander fremde) Somen* (x_j) *gebe, bei der für diejenigen Somen unter den* (x_j), *für deren jeden* $\beta(x)$ *und* $\alpha(x)$ *eine Differenz* $> \varepsilon$ *haben, die Summe ihrer* $m^0(x)$*-Masse* $< \delta$ *sei.*

§ 15. Zu *einer den Axiomen* 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b *genügenden Struktur* gehöre das Soma a, auf welchem *eine abstrakte Ortsfunktion f* definiert sei. Dann kann man, ähnlich wie bei Punktfunktionen[1], für reelles λ Teilsomen $x(f \leqq \lambda)$ und $x(f \geqq \lambda)$ bestimmen; $x(f \geqq \lambda)$ ist das (immer existierende) grösste Teilsoma[2] von a mit $\alpha \geqq \lambda$, und ebenso $x(f \leqq \lambda)$ das (immer existierende) grösste Teilsoma[2] von a mit $\beta \leqq \lambda$.[3]

---

[1] Vergl. loc. cit. 1 S. 131, zweites Zitat, S. 372 u. f. Angenommen wird, dass das leere Soma immer die Ungleichungen $\alpha \geqq \lambda$ und $\beta \leqq \lambda$ erfüllt.

[2] Das soll heissen: alle Somen mit derselben Eigenschaft werden von diesem Soma umfasst.

[3] Für das komplementäre Soma $a - x(f \geqq \lambda)$ ist $\beta \leqq \lambda$; ebenso ist für $a - x(f \leqq \lambda)$ $\alpha \geqq \lambda$.

Definition B. S, $m^0(x)$, f, a mögen *die gleichen Eigenschaften* haben *wie in* § 14; ausserdem sei *für jedes Soma* $x < a$ *die zu* f *gehörende Somenfunktion* $\alpha(x) \geqq 0$, und $m^0(x)$ *genüge ebenfalls dem Axiom V.* Dann ist *das* (zweite) *obere Riemann-Stieltjes Integral von* f *über* a *in bezug auf* $m^0(x)$ gleich der unteren Grenze aller Summen

$$\sum_{j=1}^{n} m^0(x_j) \times \{y_j^{(2)} - y_j^{(1)}\},$$

bei deren jeder: 1^0 $\sum_{j=1}^{n} x_j > a$; 2^0 für jedes j $y_j^{(2)} > y_j^{(1)}$ ist; 3^0 es eine Zerlegung von a in endlich viele, einander fremde Somen (ξ_k), $k = 1, 2, \ldots, m$, gibt derart, dass die zu einem ξ_k gehörenden Somen (x_j) mit $x_j > \xi_k$ die Eigenschaft haben, dass die Summe der zugehörigen, abgeschlossenen Intervalle $[y_j^{(1)}, y_j^{(2)}]$ das Intervall $[0, \beta(\xi_k)]$ enthält.

Das (zweite) *untere Riemann-Stieltjes Integral von* f *über* a *in bezug auf* $m^0(x)$ ist gleich der oberen Grenze aller Summen

$$\sum_{j=1}^{n} m_0(\bar{x}_j) \times \{\bar{y}_j^{(2)} - \bar{y}_j^{(1)}\}$$

($m_0(x)$ sei die zu $m^0(x)$ adjungierte Somenfunktion), bei deren jeder: 1^0 $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j < a$; 2^0_a für jedes j $\bar{y}_j^{(2)} > \bar{y}_j^{(1)}$ ist; 2^0_b für je zwei Somen $\bar{x}_{j_1}$, $\bar{x}_{j_2}$ mit $\bar{x}_{j_1} \cdot \bar{x}_{j_2} \neq 0$ die zugehörigen Intervalle $[\bar{y}_{j_1}^{(1)}, \bar{y}_{j_1}^{(2)}]$, $[\bar{y}_{j_2}^{(1)}, \bar{y}_{j_2}^{(2)}]$ keine inneren Punkte gemein haben; 3^0 zu jedem $\bar{x}_j$ ein Soma $\bar{\xi}_j$ gehört mit $a > \bar{\xi}_j > \bar{x}_j$ und einem derartigen Werte von $\alpha(\bar{\xi}_j)$, dass $[\bar{y}_j^{(1)}, \bar{y}_j^{(2)}]$ im abgeschlossenen Intervall $[0, \alpha(\bar{\xi}_j)]$ liegt.

Lemma.[1] S sei eine Struktur, welche die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b erfüllt. $m^0(x)$, f, a sollen die gleichen Eigenschaften wie in Definition B haben. Dann ist das obere Riemann-Stieltjes Integral von f über a in bezug auf $m^0(x)$, im Sinne der Definition B, gleich

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} m^0 [a - x(f \leqq y_{j-1})] \times \{y_j - y_{j-1}\},$$

während das untere Riemann-Stieltjes Integral von f über a in bezug auf $m^0(x)$, im Sinne derselben Definition, gleich

[1] Vergl. RIDDER, loc. cit. 1 S. 154, S. 99 (Lemma B).

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} m_0 [x(f \geqq y_j)] \times \{y_j - y_{j-1}\}$$

ist; hierbei ist δ das Maximum der Differenzen $(y_j - y_{j-1})$, gehörend zu einer Zerlegung $0 = y_0 < y_1 \cdots < y_n = G$ des Intervalles $[0, G]$, wobei die α- und β-Werte für alle Teilsomen von a kleiner als die (übrigens willkürliche) fest gewählte Konstante G sind.

Definition C. S sei eine Struktur, welche die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b erfüllt. $m^0(x)$, f, a sollen die gleichen Eigenschaften wie in Definition B haben. Dann heisse *f $m^0(x)$-messbar auf dem Soma a*, wenn für alle reellen y-Werte, eine höchstens abzählbar unendliche Menge E ausgenommen, die Somen $x(f \leqq y)$ und $x(f \geqq y)$ $m^0(x)$-messbar sind, und wenn daneben für diese y-Werte

$$m^0\{a - x(f \leqq y)\} = m^0\{x(f \geqq y)\}$$

ist.[1]

Satz 63.[2] *Wenn S, $m^0(x)$, f, a die am Anfang der Definition C angegebenen Eigenschaften haben, so ist es zur Existenz des Riemann-Stieltjesschen Integrals von f über a im Sinne der Definition B und in bezug auf $m^0(x)$ notwendig und hinreichend, dass f auf a $m^0(x)$-messbar sei.*

Ist für die Teilsomen x von a die zu f gehörige obere Somenfunktion $\beta < G$ und wählt man die y_j-Werte $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ der Zerlegung: $0 = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n = G$ immer derartig, dass die zugehörigen Somen $x(f \geqq y_j)$ bzw. $x(f \leqq y_j)$ $m^0(x)$-messbar sind, so lässt sich für das Riemann-Stieltjessche Integral schreiben

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} y_j \cdot m^0 [x(f \geqq y_j) - x(f \geqq y_{j+1})] \tag{48}$$

bzw.

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=2}^{n-1} y_j \cdot m_0 [x(f \leqq y_j) - x(f \leqq y_{j-1})];$$

hierbei ist δ das Maximum der Differenzen $(y_j - y_{j-1})$ der Zerlegung von $[0, G]$.

Da für jedes in (48) auftretende Soma $x(f \geqq y_j) - x(f \geqq y_{j+1})$ gilt $y_j \leqq \alpha \leqq \beta \leqq y_{j+1}$, und für das zugehörige Soma $a - x(f \geqq y_1)$ gilt $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq y_1$, lässt sich aus den Definitionen A, B und Satz 63 leicht ableiten der

[1] *Aus der $m^0(x)$-Messbarkeit von $x(f \geqq y)$ für alle y, abzählbar viele Werte ausgenommen, lassen sich die beiden übrigen, in Definition C enthaltenen Bedingungen ableiten.* Dazu genügt eine leichte Erweiterung des (angedeuteten) Beweises von Satz 63; man benutze dabei die in Fussn. 3 S. 170 enthaltene Bemerkung.

[2] Zum Beweise vergleiche man loc. cit. 1 S. 154, S. 101 u. 102.

Satz 64. *Wenn S, $m^0(x)$, f, a die gleichen Bedingungen wie in Definition C erfüllen, existieren die Riemann-Stieltjesschen Integrale von f über a in bezug auf $m^0(x)$ im Sinne der Definitionen A und B immer gleichzeitig, und haben sodann denselben Wert.*

Die Betrachtungen dieses Paragraphen lassen sich unschwer auf den Fall übertragen, dass die unteren und oberen Somenfunktionen, α und β, von f zwar beschränkt, jedoch nicht immer $\geqq 0$ zu sein brauchen. Schliesslich führt das bekannte Verfahren von de la Vallée Poussin zu (absolut konvergenten) uneigentlichen Riemann-Stieltjes Integralen über Somen.

Die Integrale besitzen die gewöhnlichen elementaren Integraleigenschaften.

§ 16. Fordert man von der Somenfunktion $m^0(x)$, dass sie neben den Axiomen I^b, III, V auch noch den Axiomen VI und VII genügt, und lässt man den Wortlaut der Definitionen A, B und C übrigens ungeändert (nur muss dabei natürlich angenommen werden, dass die Struktur S in allen Definitionen die Axiome 1^0, 2^0, $\bar{3}^0$, 4^0, $\bar{6}^0_b$, 7^0_b erfüllt), so bleiben die Sätze 63 und 64 gelten[1]; die in Definition C zugelassene Ausnahmemenge E wird dann doch immer leer sein. Die so erhaltenen Integrale haben die Eigenschaften von Lebesgue-Stieltjesschen Integralen und können darum besser *Lebesgue-Stieltjessche Integrale über Somen* genannt werden. Ihre Erweiterung auf Ortsfunktionen, deren zugehörige Somenfunktionen α und β nicht $\geqq 0$ und nicht beschränkt zu sein brauchen, ist evident.[2]

---

[1] Auch die in Fussn. 1, S. 172 gemachte Bemerkung behält ihre Gültigkeit.

[2] Vergleiche die Einführung des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals über Somen bei CARATHÉODORY, loc. cit. 3 S. 133, erstes Zitat, S. 63–68.