DIE INTEGRALPRINZIPE DER MECHANIK.

Von

F. VON KRBEK

in BERLIN.

Unter einem Prinzip versteht man in der Mechanik eine weitgehende Zusammenfassung ihres Gehaltes in eine prägnante Aussage. Erfolgt das mit Hilfe eines Integrals, so hat man den in der Überschrift angekündigten Fall. Da hierbei die Variationsoperatoren benötigt werden, seien einige Ausführungen über diese vorausgeschickt.

Im folgenden seien alle Funktionen hinreichend oft differenzierbar. Mit einem Punkt wollen wir Ableitungen nach der Zeit bezeichnen. x_1 bis x_n sollen Funktionen von t allein, ferner φ, φ_1 bis φ_n Funktionen von t und eines Parameters ε sein. Differentialquotienten nach diesem Parameter sind durchweg an der Stelle $\varepsilon = 0$ zu bilden. Wir setzen für eine Funktion f der Veränderlichen x_i, $\dot{x}_i$, t

$$\tilde{f} = f(x_i[t+\varphi\{t,\varepsilon\}] + \varphi_i\{t,\varepsilon\},\ \dot{x}_i[t+\varphi\{t,\varepsilon\}] + \dot{\varphi}_i\{t,\varepsilon\},\ t+\varphi\{t,\varepsilon\}) = f(\tilde{x}_i, \tilde{\dot{x}}, \tilde{t}).$$

Insbesondere heisst

$$\tilde{t} = t + \varphi(t,\varepsilon)$$

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(\tilde{t}) + \varphi_i(t,\varepsilon)$$

die variierte Bahn. Der Operator $\varDelta$ sei durch

$$\varDelta f = \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}$$

definiert. Es gilt offenbar

$$\varDelta f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \varDelta x_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \varDelta \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \varDelta t.$$

Die speziellen Variationen in dieser Linearform lassen sich weiter berechnen zu

$$\varDelta t = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$\varDelta x_i = \varepsilon \frac{\partial (x_i [t + \varphi \{t, \varepsilon\}] + \varphi_i \{t, \varepsilon\})}{\partial \varepsilon} = \varepsilon \left(\dot{x}_i \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon} \right) = \dot{x}_i \varDelta t + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon}$$

und ähnlich

$$\varDelta \dot{x}_i = \ddot{x}_i \varDelta t + \varepsilon \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \varepsilon}.$$

Als Vertauschungsrelation erhält man damit

$$\frac{d}{dt} \varDelta x_i = \ddot{x}_i \varDelta t + \dot{x}_i \frac{d \varDelta t}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varepsilon \partial t} = \ddot{x}_i \varDelta t + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial \varepsilon} + \dot{x}_i \frac{d \varDelta t}{dt} = \varDelta \frac{d x_i}{dt} + \dot{x}_i \frac{d \varDelta t}{dt}.$$

Die Operatoren $\varDelta$ und d sind also nicht vertauschbar. Um die Vertauschbarkeit zu erzwingen, hat man $\varDelta$ zu spezialisieren, etwa zu δ, durch die Festsetzung

$$\varphi (t, \varepsilon) \equiv 0,$$

die besagt, dass die Zeit diesmal nicht mitvariiert wird. Dann ist

$$\varDelta t = 0,$$

also gilt symbolisch geschrieben tatsächlich

$$d \delta = \delta d.$$

Mit Hilfe von δ kann man jetzt

$$\varDelta x_i = \dot{x}_i \varDelta t + \delta x_i$$

und

$$\varDelta \dot{x}_i = \ddot{x}_i \varDelta t + \delta \dot{x}_i$$

schreiben.

Die üblichen Ausführungen zu Vorstehendem sind nicht hinreichend genau, um als wirkliche Begründung angesehen werden zu können[1]. Gerade der von Euler stammende Grundgedanke eines Parameters ε fehlt. Bekanntlich hat Euler damit den Variationskalkül von Lagrange gesichert. Die Verwendung dieses Parameters ermöglicht allgemeinere Variationsoperatoren mittels Differentiationen aufzubauen.

---

[1] S. etwa Hdb. d. Physik, Bd V, S. 72 und 79.

Soll nun eine anfangs vorgelegte Kurve x_i in die variierte Schar eingebettet werden, so lasse man φ und φ_i für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Das ist erwünscht, wenn untersucht werden soll, ob die vorgelegte Kurve eine stationäre Lösung liefert. So ist auf den Kurven der Schar das bestimmte Integral

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{f} d\tau$$

eine Funktion des Scharparameters. Das Verschwinden liefert in diesem Fall offenbar einen stationären Wert. Um diese Variation zu berechnen, wende man die Regel über die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter an, wenn die Integrationsgrenzen selbst von diesem Parameter abhängen. Man erhält

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} f dt = \int_{t_1}^{t_2} \Delta f dt + [f \Delta t]_{t_1}^{t_2}.$$

Andererseits das Stieltjesintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} f d\Delta t$$

in ein riemannsches umgeformt und auf letzteres partielle Integration angewandt, folgt

$$[f \Delta t]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} f d\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} \dot{f} \Delta t dt,$$

also endlich

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} f dt = \int_{t_1}^{t_2} \Delta f dt + \int_{t_1}^{t_2} f d\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} \dot{f} \Delta t dt.$$ [1]

Für die δ-Variation gilt nach dieser Formel

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta f dt.$$

[1] Das dritte Glied fehlt in der Literatur, s. ausser dem in voriger Fussnote genannten Handbuchbericht S. 85 beispielsweise C. Schaefer Die Prinzipe der Dynamik S. 55.

Ist weiter x_i selbst Funktion von $q_k(t)$ und t, und wird der Operator $\varDelta$ nunmehr durch Variieren letzterer Funktionen erzeugt, so gilt noch immer ersichtlich

$$\varDelta x_i = \dot{x}_i \varDelta t + \delta x_i.$$

Mittels dieser Entwicklungen lassen sich Beziehungen in der Mechanik aufstellen, aus denen man leicht die Bewegungsgleichungen gewinnt. Es bezeichne T die kinetische Energie eines Massenpunktsystems, $\delta' A$ die virtuelle Arbeit $X_i \delta x_i$ der durchnumerierten eingeprägten Kräfte X_i am System, $m(i)$ die durchnumerierte Masse. Nach längerer Rechnung[1] erhält man die Beziehung

[1] Es erweist sich zweckmässig, in dieser Fussnote die Summationsvorschrift aufzuheben und an Stelle von $m(i)$ wie üblich m_i zu schreiben.

Zuerst werde eine Gleichheit zwischen kinetischer Energie

$$T = \Sigma i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$$

und Lagekoordinaten x_i aufgestellt. Es gilt

$$\varDelta T = \Sigma i \, m_i \dot{x}_i \varDelta \dot{x}_i = \Sigma i \, m_i \dot{x}_i \frac{d \varDelta x_i}{dt} - \Sigma i \, m_i \dot{x}_i^2 \frac{d \varDelta t}{dt},$$

folglich

$$\varDelta T + 2 T \frac{d \varDelta t}{dt} = \Sigma i \, m_i \dot{x}_i \frac{d \varDelta x_i}{dt}$$

und da

$$\dot{x}_i \frac{d \varDelta x_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \varDelta x_i) - \ddot{x}_i \varDelta x_i,$$

weiter

$$\frac{d}{dt} \Sigma i \, m_i \dot{x}_i \varDelta x_i = \varDelta T + 2 T \frac{d \varDelta t}{dt} + \Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \varDelta x_i.$$

Ferner hat man

$$\Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \varDelta x_i = \Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i \varDelta t = \Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \frac{dT}{dt} \varDelta t,$$

im Verein mit der vorigen Gleichheit also

$$\frac{d}{dt} \Sigma i \, m_i \dot{x}_i \varDelta x_i = \varDelta T + 2 T \frac{d \varDelta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \varDelta t + \Sigma i \, m_i \ddot{x}_i \delta x_i.$$

Wir gehen dazu über, die etwaigen holonomen Bindungen zum Herunterdrücken der Anzahl der Koordinaten zu benützen, die dann als Funktionen der allgemeinen Koordinaten aufzufassen sind,

$$x_i = x_i(q_k, t).$$

In den allgemeinen Koordinaten schreibt sich die Bewegungsenergie des Systems

$$2 T = \Sigma ikr \, m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r + 2 \Sigma ik \, m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} \dot{q}_k + \Sigma i \, m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2.$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\varDelta T + 2T\frac{d\varDelta t}{dt} + \dot{T}\varDelta t + \delta' A\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left([X_i - m(i)\ddot{x}_i]\,\delta x_i\right)dt + \left[2T\varDelta t + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Der Integrand auf der rechten Seite stellt die negative virtuelle Arbeit der Zwangskräfte dar und verschwindet, falls keine Reibung auftritt. Die übrigbleibende Gleichheit

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\varDelta T + 2T\frac{d\varDelta t}{dt} + \dot{T}\varDelta t + \delta' A\right)dt = \left[2T\varDelta t + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}$$

ist als Stammformel der Integralprinzipe anzusprechen, da diese durch Spezialisierungen aus ihr hervorgehen.

Um das sogenannte Hamiltonsche Prinzip in engerem Sinne zu erhalten, nehme man an, dass alle Bindungen holonom sind. Dann lassen sich bekanntlich die q_k von einander unabhängig wählen. Zieht man an Stelle von $\varDelta$ die δ-Variation und weiter an den Integrationsgrenzen verschwindende δq_k heran, so vereinfacht sich die Stammformel zu

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta' A)\,dt = 0.$$

Auf Grund von

$$\varDelta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\varDelta q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\varDelta t$$

gilt danach leicht nachweisbar

$$\Sigma^i m_i \dot{x}_i \varDelta x_i = 2T\varDelta t + \Sigma^k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(\varDelta q_k - \dot{q}_k\varDelta t) = 2T\varDelta t + \Sigma^k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k.$$

Differenziert man diese Gleichheit nach der Zeit und setzt für die linke Seite den Wert von weiter oben ein, so erhält man

$$\varDelta T + 2T\frac{d\varDelta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\varDelta t = -\Sigma^i m_i \ddot{x}_i\,\delta x_i + \frac{d}{dt}\left(2T\varDelta t + \Sigma^k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right).$$

Zu dieser Gleichheit addiere man die virtuelle Arbeit

$$\delta' A = \Sigma^i X_i\,\delta x_i$$

und integriere zwischen den Grenzen t_1 und t_2, um endlich die Stammformel zu erhalten.

Haben die eingeprägten Kräfte ein Potential U, so ist

$$\delta' A = X_i\,\delta x_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = -\,\delta U,$$

also für $T - U$ üblicherweise L geschrieben,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0.$$

Dieser Fall kann mit den Mitteln der Variationsrechnung weiter behandelt werden. Man variiere nur die k-te Koordinate durch den Ansatz

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varepsilon\eta(t), \qquad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

Das variierte Integral kann durch eine partielle Integration umgeformt werden. Wendet man dann ein bekanntes elementares Lemma der Variationsrechnung an, so folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

als notwendige Bedingung für das Verschwinden des variierten Integrals. Das sind aber die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Die linken Seiten bestimmen die auf die Funktion L wirkenden Eulerschen Operatoren E_k. Wesentlich war bei dieser Ableitung, dass die Funktionen q_k von einander unabhängig sind. Wollte man L als Funktion der Lagekoordinaten x_i betrachten, so hätte man ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen. Die Eulerschen Differentialgleichungen dieses Variationsproblems sind dann die Lagrangeschen Gleichungen erster Art[1].

Um das allgemeine Hamiltonsche Prinzip aus der Stammformel zu gewinnen, bemerke man, dass ihre linke Seite sich weiter als

$$\int_{t_1}^{t_2}(\Delta T - \dot T\Delta t + \delta' A)\,dt + [2\,T\Delta t]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta' A)\,dt + [2\,T\Delta t]_{t_1}^{t_2}$$

schreiben lässt. So erhält man

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta' A)\,dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}.$$

[1] S. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 555.

Unterwirft man die Variationen in der Stammformel der Randbedingung, dass die rechte Seite verschwinden soll, was etwa durch $\varDelta$-Variationen erreicht wird, die an den Integrationsgrenzen verschwinden, dann bekommt man das von Voss aufgestellte allgemeine Prinzip der kleinsten Wirkung. Um die Erfüllbarkeit dieser Randbedingung zu gewährleisten, machen wir die Annahme, dass für etwa vorhandene beliebige nichtholonome Bindungen F_r gilt[1]

$$\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k = 0.$$

Diese Annahme gelte auch noch für den nächsten Absatz. Engt man die Variationen durch die weitere Forderung

$$\delta' A = \varDelta T + \dot{T}\varDelta t$$

noch mehr ein[2], dann vereinfacht sich dieses Prinzip auf Grund unserer Ausführungen über die Variation eines bestimmten Integrals zum Prinzip der kleinsten Wirkung von Euler-Maupertuis,

$$\varDelta \int_{t_1}^{t_2} T\,dt = 0.$$

Die Bezeichnung Wirkung leitet sich aus dem Umstand her, dass das Integral über die kinetische Energie als Summe von Integralen über die Impulse geschrieben werden kann.

Es gilt jetzt, die Tragfähigkeit der Integralprinzipe zu ergründen. Für das Hamiltonsche Prinzip im engeren Sinn ist das bereits geschehen. Es sei noch für das allgemeine Hamiltonsche Prinzip ausgeführt. Wie bisher bei allen Spezialisierungen, nehmen wir an, dass die holonomen Bindungen dazu benutzt wurden, die Anzahl der Lagekoordinaten x_i herunterzudrücken. Für $\delta' A = Q_k\,\delta q_k$ geschrieben, kann das allgemeine Hamiltonsche Prinzip leicht zu

$$\int_{t_1}^{t_2} ([E_k T - Q_k]\,\delta q_k)\,dt = 0$$

[1] Das bedeutet eine weitere, von der Mechanik geforderte, Einschränkung für die φ_k und ist offenbar mit $\varphi_k(t, 0) \equiv 0$ verträglich.

[2] Die im wiederholt zitierten Handbuchbericht angestrebte energetische Deutung ist danach unhaltbar. Die zu Grunde liegende verfehlte Forderung $\delta' A = \delta T$ tritt bereits, von der Bezeichnung abgesehen, bei Hölder auf, der die Zeitvariation einführte in Gött. Nachr. 1896, S. 132, Gl. 8, ebenso bei Voss ebda 1900, S. 327, Gl. 5, und bildet eine Folge des in unserer zweiten Fussnote berichteten Mangels.

umgeformt werden. Da die δq_k den Bedingungen

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0$$

genügen, setzt man Lagrangesche Multiplikatoren $-\lambda_x$ an und erhält

$$E_k T = Q_k + \lambda_x \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_k}.$$

Links steht die Verallgemeinerung des Produktes aus Masse und Beschleunigung, rechts die Summe der allgemeinen eingeprägten Kräfte und der von glatten nichtholonomen Bindungen erwirkten Zwangskräfte[1].

[1] Damit wird die in der Encykl. d. math. Wiss. IV. 2, S. 516, vertretene Ansicht berichtigt, s. auch meinen Aufsatz im Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 48, S. 185. Enthält eine Bindung als Argumente höhere Differentialquotienten der Lagekoordinaten nach der Zeit, so hat man bei der Bildung der entsprechenden Bedingungsgleichungen offensichtlich nach den höchsten zu differenzieren.