EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE DARSTELLUNG GANZER ZAHLEN DURCH BINÄRE KUBISCHE FORMEN MIT POSITIVER DISKRIMINANTE.

Von

WILHELM LJUNGGREN.
in Oslo.

§ 1.

Es sei $f(x, y) \equiv ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = f(a, b, c, d) =$ eine irreduzible binäre kubische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und mit der Diskriminante D. Die Aufgabe, sämtliche Lösungen in ganzen Zahlen x und y der unbestimmten Gleichung

$$f(x, y) = 1 \tag{1}$$

zu bestimmen, ist noch nicht vollständig gelöst worden. Im Falle $D < 0$ gilt bekanntlich der folgende Satz von Delaunay [1, 2] und Nagell [1]:[1]

Die Gleichung (1) *hat höchstens drei Lösungen in ganzen Zahlen x und y, die folgenden Fälle ausgenommen: Ist (a, b, c, d) äquivalent* $(1, 0, 1, 1)$ *oder* $(1, -1, 1, 1)$, *so gibt es genau vier Lösungen; ist (a, b, c, d) äquivalent* $(1, 0, -1, 1)$, *so gibt es genau fünf Lösungen. Ist (a, b, c, d) nicht äquivalent einer Form* $(1, p, q, 1)$, *so hat* (1) *höchstens zwei Lösungen.*

Im Falle $D > 0$ gilt dieser Satz nicht. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$f(x, y) \equiv x^3 + px^2y - (p + 1)xy^2 + y^3 = 1$$

wenigstens die fünf Lösungen: $x = 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 1$, $y = p$; $x = -p - 1$, $y = 1$. Hier ist $D = (p^2 + p - 3)^2 - 32 > 0$, falls $p \geqq 3$ oder

[1] Ein Verzeichnis der angeführten Arbeiten findet sich am Ende dieser Abhandlung.

$p \gtreqless -4$ ist. Für spezielle Werten von p gibt es noch weitere Lösungen. Im Falle $p=3$ hat die Gleichung (2) auch die folgenden vier Lösungen $x=-1$, $y=-2$; $x=-2$, $y=-3$; $x=9$, $y=13$; $x=-5$, $y=-14$. Im Falle $p=4$ findet man die weitere Lösung $x=7$, $y=9$.

Zufolge des bekannten Satzes von Thue hat die Gleichung (1) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y. Die Beweismethode gibt leider kein Mittel, um die etwaigen Lösungen wirklich zu bestimmen. Unter Anwendung der Thueschen Methode ist es SIEGEL [1] gelungen, eine Abschätzung der Anzahl der Lösungen zu geben. Es gilt der folgende Satz: *Wenn die Diskriminante der Form $f(x,y)$ eine durch k bestimmte positive Zahl überschreitet, so hat die Gleichung $f(x,y)=k$ höchstens achtzehn Lösungen.*

Eine Behandlung der Gleichung (1) mit $D>0$ auf Grund der Einheitentheorie ist bisher nicht mit Erfolg gemacht worden. Im folgenden betrachten wir nur die Formen mit $a=1$. Die Gleichung $f(x,-1)=0$ hat dann drei reelle Wurzeln η, η' und η'', und hier bedeutet $f(x,y)=1$, dass $x+y\eta$ eine Einheit ist, d. h.

$$x+y\eta = \pm\, \varepsilon_1^m \cdot \varepsilon_2^n \tag{3}$$

Kraft des Dirichletschen Einheitssatzes gibt es in diesem Falle zwei Grundeinheiten ε_1 und ε_2 im Ringe $R(\eta)$, und die einzigen Einheitswurzeln sind $+1$ und -1. Im folgenden bedeuten S Spur und N Norm im Körper $k(\eta)$.

Die Gleichung (3) ist mit der folgenden Exponentialgleichung äquivalent

$$S(\eta'-\eta'')\,\varepsilon_1^m \cdot \varepsilon_2^n = 0. \tag{4}$$

Die Schwierigkeit steckt nun darin, dass man nur *eine* Gleichung hat, worin zwei Exponenten m und n auftreten. TH. SKOLEM [1] hat gezeigt wie man die Lösung jeder Gleichung $f(x,y)=$Konstante auf die Lösung gewisser Gleichungen $F(u,v)=$Konstante zurückführen kann, wo $F(u,v)$ eine Form sechsten Grades ist und $F(u,-1)=0$ nicht ausschliesslich reelle Wurzeln hat. Im allgemeinen bekommt man dann zur Behandlung vier exponentiale Gleichungen mit vier unbestimmten Exponenten. Skolem betrachtet wesentlich als Beispiel die Gleichung

$$x^3-3xy^2-y^3=1, \tag{5}$$

hat aber die nötigen, weitläufigen Rechnungen nicht ausgeführt.

In dieser Abhandlung werde ich zuerst beweisen, dass die Gleichung (5) nur die folgenden sechs Lösungen besitzt:

$$x = 1,\ y = 0;\ x = 0,\ y = -1;\ x = -1,\ y = 1;\ x = 1,\ y = -3;\ x = -3,\ y = 2$$

und $x = 2,\ y = 1$.

Zuletzt zeige ich wie man die Lösung der Gleichung (1) auf die Lösung zwei exponentialer Gleichungen mit zwei unbestimmten Exponenten zurückführen kann. Dieses System kann dann mittelst der bekannten Methode von TH. SKOLEM behandelt werden [2, 3].

§ 2.

In diesem Paragraphen behandeln wir die Gleichung

$$x^3 - 3xy^2 - y^3 = 1.$$

Es seien die Wurzeln der Gleichung $\eta^3 - 3\eta + 1 = 0$ so bestimmt $\eta > \eta' > 0$ und $\eta'' < 0$. Die Form $f(x, y)$ hat die quadratische Diskriminante $D = 81$. Als Grundeinheiten können wir η und η' wählen. Die Exponentialgleichung (4) ist hier

$$(6) \qquad (\eta' - \eta'')\,\eta^m \cdot \eta'^n + (\eta'' - \eta)\,\eta'^m \cdot \eta''^n + (\eta - \eta')\,\eta''^m \cdot \eta^n = 0.$$

Weiter ergibt sich

$$\eta^2 = 2 + \eta',\ \eta'^2 = 2 + \eta'',\ \eta''^2 = 2 + \eta;\ \eta\eta' = \eta - 1,\ \eta'\eta'' = \eta' - 1,\ \eta''\eta = \eta'' - 1.$$

Hieraus wird gefunden

$$\frac{\eta' - \eta''}{\eta - \eta'} = \frac{(\eta^2 - 2) - (\eta'^2 - 2)}{\eta - \eta'} = \eta + \eta' = -\eta''$$

$$\frac{\eta'' - \eta}{\eta - \eta'} = -\frac{\eta' - \eta''}{\eta - \eta'} + \frac{\eta' - \eta}{\eta - \eta'} = \eta'' - 1 = \eta\eta''.$$

Die Exponentialgleichung (6) kann dann so geschrieben werden

$$-\eta^m \cdot \eta'^n \cdot \eta'' + \eta'^m \cdot \eta''^n \cdot \eta\eta'' + \eta''^m \cdot \eta^n = 0$$

oder

$$(7) \qquad \eta^{2m-n-1} \cdot \eta'^{n+m-1} + (-1)^{n+1} \cdot \eta^{m-2n} \cdot \eta'^{2m-n-1} = (-1)^{m+1}.$$

Wir werden nun zuerst zeigen, dass es genügt, diese letzte Gleichung für m gerade und n gerade zu behandeln. Es folgt fast unmittelbar, dass die

Gleichung (7) für m gerade und n ungerade unmöglich ist. Sie kann nämlich dann in der folgenden Weise geschrieben werden

$$\left(\eta^{m-\frac{n+1}{2}}\cdot\eta'^{\frac{m+n-1}{2}}\right)^2+\left(\eta^{\frac{m}{2}-n}\cdot\eta'^{m-\frac{n+1}{2}}\right)^2=-1.$$

Die Lösungen (m, n) können wir in gewissen Gruppen zusammenfassen. Jede Gruppe enthält drei Lösungen. Ist (m, n) ein Lösungspaar, dann sind auch $(-n+1,\ m-n)$ und $(n+1-m,\ -m+1)$ Lösungspaare. Dies folgt sofort aus den zwei konjugierten Gleichungen zur Gleichung (7), indem man η'' mit $-(\eta\eta')^{-1}$ ersetzt. Unter diesen Lösungspaaren gibt es immer eines mit beiden Gliedern gerade.

Die Gleichung nimmt nun die folgende Form an

$$\eta^{2m-n-1}\cdot\eta'^{m+n-1}-\eta^{m-2n}\cdot\eta'^{2m-n-1}=-1.$$

Wird überall mit $\eta\cdot\eta'\cdot\eta''=-1$ multipliziert, so ergibt sich

$$\eta^{2m-n}\cdot\eta'^{n+m}\cdot\eta''-\eta^{m-2n}\cdot\eta'^{2m-n}\cdot\eta\eta''=1$$

oder

$$\left(\eta^{m-\frac{n}{2}}\cdot\eta'^{\frac{n+m}{2}}\right)^2\cdot\eta''-\left(\eta^{\frac{m-2n}{2}}\eta'^{m-\frac{n}{2}}\right)^2\cdot\eta\eta''=1$$

oder

$$M^2\cdot\eta''-N^2\cdot\eta\eta''=1 \tag{8}$$

mit

$$M=\eta^{m-\frac{n}{2}}\cdot\eta'^{\frac{n+m}{2}}\quad\text{und}\quad N=\eta^{\frac{m-2n}{2}}\cdot\eta'^{m-\frac{n}{2}}.$$

Die Zahl

$$(M\sqrt{\eta''}+N\sqrt{\eta\eta''})^2=M^2\eta''+N^2\eta\eta''+2MN\eta''\sqrt{\eta}$$

ist eine Einheit im Körper $K(\sqrt{\eta})$ und hat im Unterkörper $k(\eta)$ die Relativnorm $+1$. Im Körper K gibt es nach Dirichlet vier Grundeinheiten, und aus k kennen wie die unabhängigen Einheiten η und η'. Es ist nun leicht zu beweisen, dass die Einheiten mit der Relativnorm $+1$ durch $\varepsilon_1^h\cdot\varepsilon_2^k$ gegeben sind, wo ε_1 und ε_2 ein Paar Grundeinheiten mit derselben Eigenschaft sind.

Ich habe die Grundeinheiten im Ringe $R(\sqrt{\eta})$ bestimmt und gefunden, dass man als solche

$$\lambda_1=(\sqrt{\eta''}+\sqrt{\eta\eta''})^2\quad\text{und}\quad\lambda_3=\frac{1}{2}(\eta''+\sqrt{\eta})^2$$

wählen kann. (Siehe § 5.)

Überdies merken wir uns die folgenden Einheiten

$$\lambda_2 = (\eta' \sqrt{\eta''} + \eta' \eta'' \sqrt{\eta \eta''})^2 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = (\eta \eta''^2 \sqrt{\eta''} + \eta^2 \eta'' \sqrt{\eta \eta''})^2.$$

Man hat hier die Relationen

$$\lambda_1 \cdot \lambda_4 = \lambda_3^2 \quad \text{und} \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_4 = \lambda_2.$$

Wir bekommen darum

$$(M\sqrt{\eta''} + N\sqrt{\eta\eta''})^2 = \lambda_1^p \cdot \lambda_3^q$$

oder

$$\eta''(M + N\sqrt{\eta})^2 = \eta''^p \cdot (1 + \sqrt{\eta})^{2p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^q \cdot (\eta'' + \sqrt{\eta})^{2q}$$

$$(M + N\sqrt{p})^2 = \eta''^{p-1} \cdot (1 + \sqrt{\eta})^{2p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^q \cdot (\eta'' + \sqrt{\eta})^{2q}.$$

Da weder $\sqrt{2}$, noch $\sqrt{\eta''}$, noch $\sqrt{2\eta''}$ im Ringe $R(\sqrt{\eta})$ vorkommen, schliessen wir hieraus: p ungerade und q gerade, $q = 2q_1$. Es folgt dann weiter,

$$(M\sqrt{\eta''} + N\sqrt{\eta\eta''})^2 = \lambda_1^p \cdot (\lambda_3^2)^{q_1} = \lambda_1^p \cdot (\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2)^{q_1} = \lambda_1^{p-q_1} \cdot \lambda_2^{q_1},$$

ɔ:

$$M\sqrt{\eta''} + N\sqrt{\eta\eta''} = \pm (\sqrt{\eta''} + \sqrt{\eta\eta''})^h \cdot (\eta'\sqrt{\eta''} + \eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''})^k$$

oder

(9) $$M\sqrt{\eta''} + N\sqrt{\eta\eta''} = \pm \varepsilon_1^h \cdot \varepsilon_2^k.$$

Es ist auch leicht einzusehen, dass wir h gerade, k ungerade oder umgekehrt haben müssen.

Wir erhalten nun die folgenden zwei Exponentialgleichungen

(10) $$(\varepsilon_1^h \cdot \varepsilon_2^k + \varepsilon_1'^h \cdot \varepsilon_2'^k) \cdot (\varepsilon_1''^h \cdot \varepsilon_2''^k + \varepsilon_1'''^h \cdot \varepsilon_2'''^k) \cdot (\varepsilon_1^{\mathrm{IV}h} \cdot \varepsilon_2^{\mathrm{IV}k} + \varepsilon_1^{\mathrm{V}h} \cdot \varepsilon_2^{\mathrm{V}k}) = \pm 8i$$

(11) $$(\varepsilon_1^h \cdot \varepsilon_2^k - \varepsilon_1'^h \cdot \varepsilon_2'^k) \cdot (\varepsilon_1''^h \cdot \varepsilon_2''^k - \varepsilon_1'''^h \cdot \varepsilon_2'''^k) \cdot (\varepsilon_1^{\mathrm{IV}h} \cdot \varepsilon_2^{\mathrm{IV}k} - \varepsilon_1^{\mathrm{V}h} \cdot \varepsilon_2^{\mathrm{V}k}) = \pm 8.$$

Die Bezeichnungen sind die folgenden:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\eta''} + \sqrt{\eta\eta''}, \quad \varepsilon_1'' = \sqrt{\eta} + \sqrt{\eta'\eta}, \quad \varepsilon_1^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\eta'} + \sqrt{\eta''\eta'}$$

$$\varepsilon_1' = \sqrt{\eta''} - \sqrt{\eta\eta''}, \quad \varepsilon_1''' = \sqrt{\eta} - \sqrt{\eta'\eta}, \quad \varepsilon_1^{\mathrm{V}} = \sqrt{\eta'} - \sqrt{\eta''\eta'}$$

und die Analogen für ε_2. Die beiden Gleichungen (10) und (11) sind erfüllt für die Werte $h = 1$, $k = 0$ und $h = 0$, $k = 1$. Für die Werte $h = 1$, $k = 2$ gilt die erste Gleichung, die zweite aber nicht. Ist (h, k) ein Lösungspaar, dann ist dies auch mit $(-h, -k)$ der Fall. Dies ist leicht zu bestätigen.

Wir unterscheiden vier Fälle

$$1^\circ \quad h = 4r + 1, \quad k = 4s; \qquad 2^\circ \quad h = 4r + 1, \quad k = 4s + 2$$

$$3^\circ \quad h = 4r, \quad k = 4s + 1; \qquad 4^\circ \quad h = 4r + 2, \quad k = 4s + 1.$$

Hier können r und s auch negativ sein.

Es ergibt sich

$$\varepsilon_1^4 = 1 + 4A = 1 + 4(-\sqrt{\eta''}\cdot\varepsilon_1 + \eta''\,\varepsilon_1^2)$$

$$\varepsilon_1'^4 = 1 + 4A' = 1 + 4(-\sqrt{\eta''}\,\varepsilon'_1 + \eta''\varepsilon_1'^2) \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso

$$\varepsilon_2^4 = 1 + 4B = 1 + 4(-\eta'\sqrt{\eta''}\,\varepsilon_2 + \eta'^2\eta''\,\varepsilon_2^2)$$

$$\varepsilon_2'^4 = 1 + 4B' = 1 + 4(-\eta'\sqrt{\eta''}\,\varepsilon'_2 + \eta'^2\eta''\,\varepsilon_2'^2) \quad \text{u. s. w.}$$

Nach einiger Rechnung findet sich weiter

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta''}} = 1, \quad \frac{A\varepsilon_1 + A'\varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta''}} = 4\eta''^2 - 5\eta'' + 1 = \alpha \equiv 1 - \eta'' \pmod{4}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta\eta''}} = 1, \quad \frac{A\varepsilon_1 - A'\varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta\eta''}} = 4\eta''^2 - 3\eta'' = \alpha_1 \equiv \eta'' \pmod{4}$$

$$\frac{B\varepsilon_1 + B'\varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta''}} = -\eta'^2\eta''^2 - \eta'^5\eta''^3 = \beta \equiv 1 + \eta' + 2\eta'' \pmod{4}$$

$$\frac{B\varepsilon_1 - B'\varepsilon'_1}{2\sqrt{\eta\eta''}} \equiv -1 + \eta'' \pmod{4}.$$

Wir können nun den ersten Fall erledigen.

Die erste Parenthese der Gleichung (10) wird

$$\varepsilon_1 + (1 + 4A)^r\cdot(1 + 4B)^s + \varepsilon'_1(1 + 4A')^r\cdot(1 + 4B')^s =$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + 4\binom{r}{1}(A\varepsilon_1 + A'\varepsilon'_1) + 4\binom{s}{1}(B\varepsilon_1 + B'\varepsilon'_1) + 4^2\binom{r}{2}(A^2\varepsilon_1 + A'^2\varepsilon_1'^2) + \cdots$$

$$= 2\sqrt{\eta''}\cdot(1 + 4r\alpha + 4s\beta + \cdots).$$

Die zu α konjugierten Grössen bezeichnen wir mit α' und α'', ebenso für β. Dann bekommen wir

$$[1 + 4r\alpha + 4s\beta + 4^2(\ ) + \cdots]\cdot[1 + 4r\alpha' + 4s\beta' + 4^2(\ ) + \cdots]\cdot$$

$$\cdot[1 + 4r\alpha'' + 4s\beta'' + 4^2(\ ) + \cdots] = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$1 + 4rS(\alpha) + 4sS(\beta) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 1$$

o:

$$rS(\alpha) + sS(\beta) + 4(\ ) + 4^2(\ ) + \cdots = 0.$$

Hier ist $S(\alpha) = \alpha + \alpha' + \alpha'' \equiv -1 \pmod{4}$ und $S(\beta) = \beta + \beta' + \beta'' \equiv -1 \pmod{4}$. Wir erhalten somit die Reihenentwicklung

$$-r - s + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0.$$

Die sich in der ersten Parenthese befindende Zahl, hat die Gestalt

$$\binom{r}{2} t_1 + \binom{s}{2} t_2 + \binom{r}{1}\binom{s}{1} t_3 + \binom{r}{1}^2 t_4 + \binom{s}{1}^2 t_5,$$

die in der zweiten Parenthese:

$$\binom{r}{3} p_1 + \binom{s}{3} p_2 + \binom{r}{2}\binom{s}{1} p_3 + \binom{r}{1}\binom{s}{2} p_4 + \binom{r}{1}\binom{r}{2} p_5 + \binom{s}{1}\binom{s}{2} p_6$$
$$+ \binom{r}{1}^3 p_7 + \binom{r}{1}^2\binom{s}{1} p_8 + \binom{r}{1}\binom{s}{1}^2 p_9 + \binom{s}{1}^3 p_{10} \quad \text{u. s. w.}$$

Hier sind die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_{10}$ und $t_1, t_2, \ldots t_5$ sämtlich ganze, rationale Zahlen.

Weiter wird die erste Parenthese der Gleichung (11)

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) + 4\binom{r}{1}(A\varepsilon_1 - A'\varepsilon'_1) + 4\binom{s}{1}(B\varepsilon_1 - B'\varepsilon'_1) + \cdots =$$
$$2\sqrt{\eta\eta''}(1 + 4r\alpha_1 + 4s\beta_1 + \cdots).$$

Ähnlich wie früher finden wir

$$[1 + 4r\alpha_1 + 4s\beta_1 + 4^2(\ ) + \cdots]\cdot[1 + 4r\alpha'_1 + 4s\beta'_1 + 4^2(\ ) + \cdots]\cdot$$
$$\cdot[1 + 4r\alpha''_1 + 4s\beta''_1 + 4^2(\ ) + \cdots] = 1.$$

Hieraus folgt

$$rS(\alpha_1) + sS(\beta_1) + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0,$$

$S(\alpha_1) \equiv 0 \pmod{4}$, $S(\beta_1) \equiv 1 \pmod{4}$, und die Reihenentwicklung ist

$$s + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0.$$

Die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von 4 haben die gleiche Gestalt wie im vorigen Falle. Nach einem Satze von Th. Skolem [1, 2, 3] gibt es nur eine Lösung, nämlich $r = s = 0$, indem die Determinante $\begin{vmatrix} -1, & -1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = -1$ ist.

Wir haben also $h = 1$ und $k = 0$.

Man kann dies auch so zeigen. Wir müssen $r \equiv 0 \equiv s \pmod{4}$ haben, und setzen $r = 2^a r_1$, $s = 2^a s_1$ mit $a \geqq 2$ und $(r_1, s_1, 2) = 1$, was sicher möglich ist, wenn nicht $r = s = 0$. Weil $\binom{v}{u} 4^{u-1}$ mit $u \geqq 2$ jedenfalls mit $2^a \cdot 2^{u-1}$ teilbar ist, ergibt sich nach der Kürzung mit 2^a

$$+ r_1 + s_1 \equiv 0 \pmod{2}$$

d. h.

$$s_1 \equiv 0 \pmod{2},$$

$$(r_1, s_1, 2) = 2,$$

was gegen die Voraussetzung streitet. Daraus folgt $r = s = 0$. Auch für nicht abbrechende Reihen bleiben die Teilbarkeitsschlüsse sinnvoll und richtig (Skolem [1]).

2° Zweiter Fall: $h = 4r + 1$, $k = 4s + 2$.

Wir finden

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 = -\eta'^3 \eta''^2 \cdot \sqrt{\eta''} + \eta'^2 \eta'' \cdot (1 + \eta'' + \eta''^2) \sqrt{\eta \eta''}.$$

Es ist in diesem Falle leicht zu beweisen, dass die Gleichung (11) unmöglich ist. Die erste Parenthese kann so geschrieben werden

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \cdot (1 + 4A)^r \cdot (1 + 4B)^s - \varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2 \cdot (1 + 4A')^r \cdot (1 + 4B')^s =$$

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - \varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2) + 4r(A\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - A'\varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2) + 4s(B\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - B'\varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2) + \cdots =$$

$$2\sqrt{\eta\eta''} \cdot \left[\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - \varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2}{2\sqrt{\eta\eta''}} + 4r \cdot \frac{A\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - A'\varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2}{2\sqrt{\eta\eta''}} + 4s \cdot \frac{B\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 - B'\varepsilon'_1 \varepsilon'^2_2}{2\sqrt{\eta\eta''}} + \cdots\right]$$

oder, der Kürze halber

$$2\sqrt{\eta\eta''}(\gamma + 4r\delta + 4s\tau + 4^2(\ ) + \cdots).$$

Man findet

$$\gamma = -\eta'^3 \eta'' \cdot (3\eta'' - 2) \quad \text{und also} \quad \gamma\gamma'\gamma'' = -19.$$

Dies gibt die Reihenentwickelung

$$-19 + 4r\, S(\gamma\gamma'\delta'') + 4s\, S(\gamma\gamma'\tau'') + 4^2(\ ) + \cdots = +1,$$

d. h.

$$(12) \qquad -5 + r \cdot S(\gamma\gamma'\delta'') + s \cdot S(\gamma\gamma'\tau'') + 4(\ ) + \cdots = 0.$$

Hier müssen aber die ganzen, rationalen Zahlen $S(\gamma\gamma'\delta'')$, $S(\gamma\gamma'\tau'')$ u. s. f. durch 3 teilbar sein, ɔ: die Gleichung (12) ist also unmöglich mod. 3. Wir haben zum Beispiel $\gamma\gamma'\delta'' = b_1 + b_2\eta + b_3\eta'$ mit $S(\gamma\gamma'\delta'') = 3\,b_1$.

3°. Dritter Fall: $h = 4r$, $k = 4s + 1$.

Die erste Parenthese der Gleichung (10) wird hier

$$(\varepsilon_2 + \varepsilon'_2) + 4r(A\varepsilon_2 + A'\varepsilon'_2) + 4s(B\varepsilon_2 + B'\varepsilon'_2) + \cdots =$$

$$2\eta'\sqrt{\eta''}\cdot\left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} + 4r\cdot\frac{A\varepsilon_2 + A'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} + 4s\cdot\frac{B\varepsilon_2 + B'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} + \cdots\right).$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} = 1,\quad S\frac{A\varepsilon_2 + A'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} = -12 \text{ und } S\frac{B\varepsilon_2 + B'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} \equiv 1 \pmod{4}.$$

Wir erhalten somit

$$1 + 4r\cdot S\frac{A\varepsilon_2 + A'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} + 4s\cdot S\frac{B\varepsilon_2 + B'\varepsilon'_2}{2\eta'\sqrt{\eta''}} + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 1,$$

ɔ:

$$s + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0.$$

Die erste Parenthese der Gleichung (11) gibt

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon'_2) + 4r(A\varepsilon_2 - A'\varepsilon'_2) + 4s(B\varepsilon_2 - B'\varepsilon'_2) + \cdots =$$

$$\sqrt{\eta\eta''}\cdot 2\eta'\eta''\cdot\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} + 4r\cdot\frac{A\varepsilon_2 - A'\varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} + 4s\cdot\frac{B\varepsilon_2 - B'\varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} + \cdots\right).$$

Die zweite Reihenentwicklung wird nun, indem

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} = 1,\quad S\frac{A\varepsilon_2 - A'\varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} = +9 \text{ und } S\frac{B\varepsilon_2 - B'\varepsilon'_2}{2\eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''}} \equiv 2 \pmod{4}.$$

$$+r + 2s + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \quad = 0.$$

Die Determinante ist hier $\begin{vmatrix} 0, & 1 \\ +1, & 2 \end{vmatrix} = -1$, und folglich gibt es nur die einzige Lösung $r = s = 0$, d. h.

$$h = 0 \text{ und } k = 1.$$

4° Vierter Fall: $h = 4r + 2$, $k = 4s + 1$

Ich schreibe lieber $h = 4r' - 2$, $k = 4s + 1$.

Wir finden

$$\varepsilon_1'^2 \cdot \varepsilon_2 = -\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''} - \eta^2\eta'' \sqrt{\eta\eta''}.$$

Weiter haben wir

$$\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 (1 + 4A)^{r'} \cdot (1 + 4B)^s + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2' (1 + 4A')^{r'} \cdot (1 + 4B')^s =$$

$$(\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2') + 4r'(A\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + A'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2') + 4s(B\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + B'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2') + \cdots =$$

$$2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} + 4r' \cdot \frac{A\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + A'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} + 4s \cdot \frac{B\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + B'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} + \cdots\right).$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$\frac{\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} = -1, \quad S\frac{A\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + A'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} = 0, \quad S\frac{B\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 + B'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta\eta''^2 \sqrt{\eta''}} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Die erste Reihenentwicklung sieht dann so aus

$$-s + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0.$$

Man findet weiter

$$\frac{\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta^2\eta'' \sqrt{\eta\eta''}} = -1, \quad S\frac{A\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 - A'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta^2\eta'' \sqrt{\eta\eta''}} = -15, \quad S\frac{B\varepsilon_1'^2 \varepsilon_2 - B'\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'}{2\eta^2\eta'' \sqrt{\eta\eta''}} \equiv 0 \pmod{4},$$

und die zweite Reihe hat die folgende Form

$$r' + 4(\ ) + 4^2(\ ) + 4^3(\ ) + \cdots = 0.$$

Die Determinante ist hier $\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = +1$, d. h. die einzige Lösung ist $r' = s = 0$, also $h = -2$ und $k = 1$.

Das Resultat der ganzen Untersuchung ist also [Siehe (9)]

$$M\sqrt{\eta''} + N\sqrt{\eta\eta''} = \sqrt{\eta''} + \sqrt{\eta\eta''} \quad \text{oder} \quad = \eta'\sqrt{\eta''} - \eta'\eta''\sqrt{\eta\eta''} =$$

$$\eta'\sqrt{\eta''} + \eta^{-1} \cdot \sqrt{\eta\eta''} \quad \text{oder} \quad = \eta\eta''^2\sqrt{\eta''} - \eta^2\eta''\sqrt{\eta\eta''} = \eta^{-1}\eta'^{-2}\sqrt{\eta''} + \eta\eta'^{-1}\sqrt{\eta\eta''}.$$

Im ersten Falle bekommt man

$$M = \eta^{m-\frac{n}{2}} \cdot \eta'^{\frac{m+n}{2}} = 1$$

und

$$N = \eta^{\frac{m-2n}{2}} \cdot \eta'^{m-\frac{n}{2}} = 1 \qquad \text{ɔ:} \quad m = n = 0.$$

Im zweiten Falle ergibt sich $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{4}{3}$, was unmöglich ist[1]. Im dritten Falle erhalten wir $m = n = -2$.

In der ersten Gruppe haben wir also die Lösungen:

$$x + y\eta = \eta^0 \cdot \eta'^0 = 1 \quad \text{oder} \quad x + y\eta = -\eta^1 \eta'^0 = -\eta \quad \text{oder}$$

$$x + y\eta = \eta \cdot \eta' = \eta - 1 \qquad \text{o: } x = 1,\ y = 0 \quad \text{oder}$$

$$x = 0,\ y = -1 \quad \text{oder} \quad x = -1,\ y = 1.$$

In der zweiten Gruppe finden sich die Lösungen

$$x + y\eta = \eta^{-2} \cdot \eta'^{-2} = \eta''^2 = 2 + \eta \quad \text{oder} \quad x + y\eta = -\eta^3 \eta'^0 = 1 - 3\eta \quad \text{oder}$$

$$x + y\eta = \eta^1 \cdot \eta'^3 = -3 + 2\eta \qquad \text{o: } x = 2,\ y = 1 \quad \text{oder}$$

$$x = 1,\ y = -3 \quad \text{oder} \quad x = -3,\ y = 2.$$

Unsere Behauptung über die Gleichung $x^3 - 3xy^2 - y^3 = 1$ ist damit bewiesen worden.

Anmerkung: T. Nagell [2] hat die folgende Gleichung behandelt

$$x^2 + x + 1 = y^n. \tag{13}$$

Wenn man die trivialen Lösungen $y = 1$, (wenn n gerade ist $y = \pm 1$), $x = -1$, $x = 0$ nicht berücksichtigt, dann ist die Gleichung (13) unmöglich in ganzen Zahlen x, y, falls n keine Potenz von drei ist. Im Falle $n = 3$ wird gezeigt, wie man die Lösung der Gleichung (13) auf die Lösung der folgenden Gleichung in ganzen Zahlen a, b zurückführen kann

$$a^3 - 3ab^2 + b^3 = 1.$$

Unserem Resultate in diesem Paragraphen zufolge können wir nun den folgenden Satz aufstellen:

Wenn man die trivialen Lösungen nicht berücksichtigt, dann ist die Gleichung (13) *unmöglich in ganzen Zahlen x, y, den Fall $n = 3$ ausgenommen, wo zwei Lösungen existieren, nämlich $y = 7$ mit $x = 18$ oder $x = -19$.*

---

[1] Man hat $\frac{1}{3}(2 - \eta)^3 = \eta^2 \eta'^4$, d. h. $(2, -1)$ ist eine Lösung der Gleichung $x^3 - 3xy^2 - y^3 = 3$.

§ 3.

Die in § 2 betrachtete Gleichung $x^3 - 3xy^2 - y^3 = 1$ ist ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Gleichung

$$x^3 - ax^2y - (a+3)xy^2 - y^3 = 1.$$

Die Gleichung $\eta^3 + a\eta^2 - (a+3)\eta + 1 = 0$ hat die quadratische Diskriminante $(a^2 + 3a + 9)^2$. Weiter ergibt sich $\eta\eta' = \eta - 1$, $\eta' = \eta^2 + a\eta - (a+2)$. Weil die Formen mit $a = t$ und $a = -t - 3$ äquivalent sind, genügt es den Fall $a \geqq -1$ zu behandeln. Wir finden $2 > \eta > 1$, $1 > \eta' > 0$ und $\eta'' < 0$. Es kann bewiesen werden, dass man η und η' als Grundeinheiten wählen kann. Man erhält auch hier die Exponentialgleichung (7). Im Ringe $R(\sqrt{\eta})$ kennt man die Einheit $\lambda_1 = (\sqrt{\eta''} + \sqrt{\eta\eta''})^2$. Eine andere unabhängige Einheit kann für jeden speziellen Wert von a gefunden werden. Sonst geht man wie in § 2 vor. Für $a = -1$ wird $D = 49$ und die Gleichung

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 = 1. \tag{14}$$

Die Form

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$$

ist äquivalent mit der in § 1 erwähnten Form

$$x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3.$$

Die Gleichung (14) hat somit wenigstens neun Lösungen. Ich habe die folgenden Einheiten im Ringe $R(\eta)$ gefunden:

$$\lambda_1 = (\sqrt{\eta''} + \sqrt{\eta\eta''})^2, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\eta''(\eta' + \sqrt{\eta})^2, \quad \lambda_2 = (\eta\eta''\sqrt{\eta''} + \eta\sqrt{\eta\eta''})^2$$

$$\lambda_4 = (\eta''\eta'^2 \cdot \sqrt{\eta''} + \eta'\eta''^2\sqrt{\eta\eta''})^2 \quad \text{und} \quad \lambda_5 = (\eta^4\eta''^5\sqrt{\eta''} + \eta^5\eta''\sqrt{\eta\eta''})^2.$$

Die folgenden Relationen bestehen:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_3^2, \quad \lambda_4 = \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_3^2 \quad \text{und} \quad \lambda_5 = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-2} = \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_3^{-4}.$$

Die Rechnungen können weitergeführt werden in ähnlicher Weise wie in § 2. Ich gehe aber hierauf nicht ein.

§ 4.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall:

$$f(x,y) \equiv x^3 + p x^2 y + q x y^2 + r y^3 = 1$$

mit

$$f(\eta) \equiv \eta^3 - p\eta^2 + q\eta - r = 0.$$

Wir haben die drei konjugierten Gleichungen:

$$\begin{aligned} x + y\eta &= \pm\, \varepsilon_1^m \cdot \varepsilon_2^n = \pm\, p_1 \\ x + y\eta' &= \pm\, \varepsilon_1'^m \cdot \varepsilon_2'^n = \pm\, p' \\ x + y\eta'' &= \pm\, \varepsilon_1''^m \cdot \varepsilon_2''^n = \pm\, p''. \end{aligned}$$

Die Exponentialgleichung

$$p_1 \cdot (\eta' - \eta'') + p' \cdot (\eta'' - \eta) + p'' \cdot (\eta - \eta') = 0$$

kann so geschrieben werden

$$\left(\sqrt{p'(\eta'' - \eta)} + i\sqrt{p''(\eta - \eta')}\right) \cdot \left(\sqrt{p'(\eta'' - \eta)} - i\sqrt{p''(\eta - \eta')}\right) = -\, p_1 (\eta' - \eta'').$$

Durch quadrieren folgt hieraus

$$\begin{aligned} &\left[p'(\eta'' - \eta) - p''(\eta - \eta') + 2\sqrt{p' p'' f'(\eta)}\right] \cdot \\ &\qquad \cdot \left[p'(\eta'' - \eta) - p''(\eta - \eta') - 2\sqrt{p' p'' f'(\eta)}\right] = p_1^2 \cdot (\eta' - \eta'')^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &\left[p'^2 p'' \cdot (\eta'' - \eta) - p''^2 p' (\eta - \eta') + 2 p' p'' \sqrt{p' p'' f'(\eta)}\right] \cdot \\ &\qquad \cdot \left[p'^2 p'' \cdot (\eta'' - \eta) - p''^2 p' (\eta - \eta') - 2 p' p'' \sqrt{p' p'' f'(\eta)}\right] = \\ &\qquad (\eta' - \eta'')^2 = -\, 3\eta^2 + 2p\eta + p^2 - 4q. \end{aligned}$$

Wir müssen nun vier Fälle unterscheiden:

Erster Fall: m und n gerade.

Wir setzen $p_1 = Q^2$. Die letzte Gleichung wird dann

$$\begin{aligned} &\left[Q'^4 Q''^2 (\eta'' - \eta) - Q''^4 Q'^2 (\eta - \eta') + 2 Q'^3 Q''^3 \sqrt{f'(\eta)}\right] \cdot \\ &\qquad \cdot \left[Q'^4 Q''^2 (\eta'' - \eta) - Q''^4 Q'^2 (\eta - \eta') - 2 Q'^3 Q''^3 \sqrt{f'(\eta)}\right] \\ &\qquad = \tau \cdot \tau' = -\, 3\eta^2 + 2p\eta + p^2 - 4q. \end{aligned}$$

Hieraus folgt dass im Körper $K(\sqrt{f'(\eta)})$ τ eine ganze Zahl mit der Relativnorm $-3\eta^2+2p\eta+p^2-4q$ ist.

Man hat $f'(\eta)\cdot f'(\eta')\cdot f'(\eta'')=-D<0$, d. h. die konjugierten Körper sind nicht alle reell. Wählt man die Wurzeln so: $\eta>\eta'>\eta''$, dann bekommt man $f'(\eta)>0$, $f'(\eta')<0$ und $f'(\eta'')>0$. Im Körper $K(\sqrt{f'(\eta)})$ gibt es folglich vier Grundeinheiten. Wir schliessen deshalb

$$\tau=\pm\,\xi\cdot\lambda_1^h\cdot\lambda_2^k.$$

Hier sind λ_1 und λ_2 Einheiten im Körper $K(\sqrt{f'(\eta)})$, die nicht im Unterkörper $k(\eta)$ auftreten, und deren Relativnormen in bezug auf $k(\eta)$ gleich 1 sind. Für die Zahl ξ mit der Relativnorm $-3\eta^2+2p\eta+p^2-4q$ bestehen nur endlich viele Möglichkeiten. Man kann übrigens leicht zeigen dass alle ξ mit der folgenden Grösse assoziiert sind

$$(\sqrt{\eta''-\eta}+i\sqrt{\eta-\eta'})^2=p-3\eta+2\sqrt{f'(\eta)}.$$

Es ergibt sich nämlich

$$(Q'^2Q''\sqrt{\eta''-\eta}+i\,Q'Q''^2\sqrt{\eta-\eta'})\cdot(\sqrt{\eta''-\eta}-i\sqrt{\eta-\eta'})=(\eta'-\eta'')(\alpha+\beta\sqrt{f'(\eta)}).$$

Hier sind α und β ganze Zahlen im Körper $k(\eta)$, und folglich ist $\alpha+\beta\sqrt{f'(\eta)}$ eine Einheit im Körper $K(\sqrt{f'(\eta)})$ mit der Relativnorm 1.

Einheiten mit der Relativnorm -1 findet sich nicht, weil wir

$$\alpha'^2-f'(\eta')\beta'^2>0$$

haben, indem $f'(\eta')<0$ ist. Wir bekommen nun schliesslich

$$Q'^2Q''\sqrt{\eta''-\eta}+i\,Q'Q''^2\cdot\sqrt{\eta-\eta'}=\pm(\sqrt{\eta''-\eta}+i\sqrt{\eta-\eta'})\cdot\lambda_1^h\cdot\lambda_2^k=\pm\,\varkappa\,\lambda_1^h\cdot\lambda_2^k.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\pm\,2\,Q'^2Q''\cdot\sqrt{\eta''-\eta}&=\varkappa\cdot\lambda_1^h\cdot\lambda_2^k+\varkappa'\cdot\lambda_1'^h\cdot\lambda_2'^k=\gamma\\
\pm\,2\,Q''^2Q\cdot\sqrt{\eta-\eta'}&=\varkappa''\cdot\lambda_1''^h\cdot\lambda_2''^k+\varkappa'''\cdot\lambda_1'''^h\cdot\lambda_2'''^k=\gamma'\\
\pm\,2\,Q^2Q'\cdot\sqrt{\eta'-\eta''}&=\varkappa^{\mathrm{IV}}\cdot\lambda_1^{\mathrm{IV}h}\cdot\lambda_2^{\mathrm{IV}k}+\varkappa^{\mathrm{V}}\cdot\lambda_1^{\mathrm{V}h}\cdot\lambda_2^{\mathrm{V}k}=\gamma''
\end{aligned}$$

und weiter die Exponentialgleichung

$$\gamma\cdot\gamma'\cdot\gamma''=\pm\,8\sqrt{-\sqrt{D}}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\pm 2\, Q' Q''^2 i \sqrt{\eta - \eta'} = \varkappa \lambda_1^h \cdot \lambda_2^k - \varkappa' \cdot \lambda_1'^h \cdot \lambda_2'^k = \delta \qquad \text{u. s. w.}$$

Die zweite Exponentialgleichung wird

$$\delta \cdot \delta' \cdot \delta'' = \pm\, 8\, i \sqrt{-\sqrt{D}} = \pm\, 8 \sqrt[4]{D}.$$

Zur weiteren Behandlung liegen also nun zwei Exponentialgleichungen mit zwei unbestimmten Exponenten h und k vor.

Zweiter Fall: m ungerade, n gerade:

Wir setzen $p_1 = \varepsilon_1 Q^2$. Die Aufgabe wird nun, alle ganze Zahlen ξ zu bestimmen, die im Körper $K(\sqrt{\varepsilon_1' \varepsilon_1'' f'(\eta)})$ die Relativnorm $(\eta' - \eta'')^2$ haben. Wir haben in $k(\eta)$ die Norm $N(\varepsilon_1' \varepsilon_1'' \cdot f'(\eta)) < 0$, weil $N(\varepsilon_1' \varepsilon_1'')$ gleich 1 ist, während $N(f'(\eta)) = -D < 0$ ist. Die drei konjugierten Körper können sämtlich nicht reell sein. Da im Unterkörper $k(\eta)$ schon zwei unabhängige Einheiten vorhanden sind, können sich alle auch nicht imaginär sein. Nehmen wir an, es sei $\varepsilon_1' \varepsilon_1'' f'(\eta) > 0$, dann existiert im Körper $K(\sqrt{\varepsilon_1' \varepsilon_1'' f'(\eta)})$ vier Grundeinheiten und zwei Einheiten λ_1 und λ_2 mit denselben Eigenschaften wie im vorigen Falle.

Wir bekommen also

$$\left(Q' \sqrt{\varepsilon_1'(\eta'' - \eta)} + i\, Q'' \sqrt{\varepsilon_1''(\eta - \eta')}\right)^2 = \xi \cdot \lambda_1^h \cdot \lambda_2^k,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\left(2\, Q' \cdot \sqrt{\varepsilon_1'(\eta'' - \eta)}\right)^2 &= \xi \cdot \lambda_1^h \cdot \lambda_2^k + \xi' \cdot \lambda_1'^h \cdot \lambda_2'^k + 2\, \xi \cdot \xi' = \gamma \\
\left(2\, Q'' \cdot \sqrt{\varepsilon_1''(\eta - \eta')}\right)^2 &= \xi'' \cdot \lambda_1''^h \cdot \lambda_2''^k + \xi''' \cdot \lambda_1'''^h \cdot \lambda_2'''^k + 2\, \xi'' \cdot \xi''' = \gamma' \\
\left(2\, Q \cdot \sqrt{\varepsilon_1(\eta' - \eta'')}\right)^2 &= \xi^{\mathrm{IV}} \cdot \lambda_1^{\mathrm{IV}\,h} \cdot \lambda_2^{\mathrm{IV}\,k} + \xi^{\mathrm{V}} \cdot \lambda_1^{\mathrm{V}\,h} \cdot \lambda_2^{\mathrm{V}\,k} + 2\, \xi^{\mathrm{IV}} \cdot \xi^{\mathrm{V}} = \gamma''.
\end{aligned}$$

Die erste Exponentialgleichung bekommt die Gestalt

$$\gamma \cdot \gamma' \cdot \gamma'' = \pm\, 64 \sqrt{D}.$$

Ebenso erhalten wir

$$\left(2\, Q'' i \sqrt{\varepsilon_1''(\eta - \eta')}\right)^2 = \xi \cdot \lambda_1^h \cdot \lambda_2^k + \xi' \lambda_1'^h \cdot \lambda_2'^k - 2\, \xi \xi' = \delta \qquad \text{u. s. w.,}$$

d. h. die andere Gleichung sieht so aus

$$\delta \cdot \delta' \cdot \delta'' = \pm\, 64 \sqrt{D}.$$

Wir haben also wiederum zwei exponentielle Gleichungen mit zwei unbestimmten Exponenten.

Dritter Fall: m gerade, n ungerade.

Wir gehen vor wie im vorigen Falle, nun aber im Körper $K(\sqrt{\varepsilon_2' \varepsilon_2'' f'(\eta)})$.

Vierter Fall: m und n ungerade.

Genau wie im zweiten Falle, nun aber im Körper $K(\sqrt{(\varepsilon_1' \varepsilon_1'')(\varepsilon_2' \varepsilon_2'') f'(\eta)})$.

§ 5.

Wir werden nun beweisen, dass die im zweiten Paragraphen erwähnten Einheiten λ und λ_3, ein System von Grundeinheiten im Ringe $R(\sqrt{\eta})$ bilden. Wir betrachten nur Einheiten, die im Unterkörper nicht auftreten, und deren Relativnormen in bezug auf $k(\eta)$ gleich 1 sind. Zuerst zeigen wir, dass λ_3 keine Potenz einer anderen Einheit ist. Es sei angenommen:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(\eta'' + \sqrt{\eta})^2 = E^m, \quad E = \alpha + \beta\sqrt{\eta}, \quad E' = \alpha - \beta\sqrt{\eta}.$$

Wir haben $\alpha^2 - \beta^2 \cdot \eta = +1$ und $m \geqq 3$, indem $m = 2$ augenscheinlich ausgeschlossen ist. Es folgt nun die beiden Gleichungen

$$N\left(\frac{E^m - E'^m}{2\sqrt{\eta}}\right) = -1, \qquad N\left(\frac{E^m + E'^m}{2}\right) = N(1 + \eta) = -3.$$

Es ergibt sich nun leicht

$$N\left(\frac{E - E'}{2\sqrt{\eta}}\right) = \pm 1 \quad \text{und} \quad N\left(\frac{E + E'}{2}\right) = \pm 3 \text{ oder } \pm 1.$$

Die Grössen

$$\frac{E^m - E'^m}{E - E'} \quad \text{und} \quad \frac{E^m + E'^m}{E + E'}$$

sind nämlich ganze Zahlen im Ringe $R(\eta)$. Man bestätigt einfach, dass

$$N\left(\frac{E^m + E'^m}{E + E'}\right) \equiv 1 \pmod 4 \text{ ist}, \qquad \text{o}: \; N(\alpha) = -3 \text{ oder } +1.$$

Weiter hat man

$$(\alpha^2 - 1)(\alpha'^2 - 1)(\alpha''^2 - 1) = \beta^2 \beta'^2 \beta''^2 \eta \eta' \eta'' = -1$$

oder

$$N(1 + \alpha) \cdot N(1 - \alpha) = 1, \quad \text{o}:$$

$$1 + S(\alpha) + S(\alpha\alpha') + N(\alpha) = \pm 1$$

$$1 - S(\alpha) + S(\alpha\alpha') - N(\alpha) = \pm 1.$$

Hieraus schliesst man

$$2\,S(\alpha) + 2\,N(\alpha) = 0, \qquad \text{ɔ:}\ S(\alpha) = +\,3 \ \text{ und } \ N(\alpha) = -\,3.$$

$S(\alpha)$ ist nämlich durch 3 teilbar, ebenso auch $S(\alpha\alpha')$. Weiter erhält man

$$-\,2 + 3 + S(\alpha\alpha') = \pm\,1, \qquad \text{ɔ:}\ S(\alpha\alpha') = 0.$$

Die Zahl α ist folglich eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 3\,x^2 + 3 = 0$. Die Wurzeln hier sind aber $1 + \eta$, $1 + \eta'$ und $1 + \eta''$. Hieraus folgt leicht $m = 1$, der Voraussetzung zuwieder.

Danach beweisen wir, dass man λ_3 als die eine der beiden Grundeinheiten wählen kann. Es seien τ_1 und τ_2 zwei Grundeinheiten. Wir haben dann

$$\lambda_3 = \pm\,\tau_1^x \cdot \tau_2^y.$$

Hier ist $(x, y) = 1$, d. h. wir können zwei solche ganze Zahlen bestimmen, m und n, dass wir haben $mx - ny = 1$. Dies gibt

$$\lambda_3^{mx} \cdot \tau_1^{-x} = \pm\,\lambda_3^{ny} \cdot \tau_2^y$$

oder

$$(\lambda_3^m \cdot \tau_1^{-1})^x = \pm\,(\lambda_3^n \cdot \tau_2^{+1})^y.$$

Hieraus folgt

$$\lambda_3^m \cdot \tau_1^{-1} = \varkappa^y \ \text{ und } \ \lambda_3^n \cdot \tau_2 = \varkappa^x, \qquad \text{ɔ:}\ \tau_1 = \lambda_3^m \varkappa^{-y} \ \text{ und } \ \tau_2 = \lambda_3^{-n} \cdot \varkappa^x.$$

Unsere Behauptung ist damit bewiesen worden.

Wir haben also $\lambda\lambda_3^x = \varkappa^y$. Wir werden zeigen, dass die Einheiten $\lambda\lambda_3^x$ mit beliebigem Exponenten x nie Potenzen von $\varkappa$ sind. Wir können $y \geqq 3$ annehmen, da der Fall $y = 2$ ausgeschlossen ist. Weiter können wir $\frac{y}{2} \geqq |x| \geqq 0$ wählen

Erster Fall: $x \geqq 0$. Wir setzen

$$\varkappa = u + v\eta + w\eta' + \sqrt{\eta} \cdot (p + q\eta + r\eta') \ \text{ mit } \ \varkappa \cdot \varkappa' = +\,1.$$

Dies gibt

$$6\,u = \varkappa + \varkappa' + \varkappa'' + \varkappa''' + \varkappa^{\mathrm{IV}} + \varkappa^{\mathrm{V}}$$

$$18\,v = (\varkappa + \varkappa')(\eta - \eta'') + (\varkappa'' + \varkappa''')(\eta' - \eta) + (\varkappa^{\mathrm{IV}} + \varkappa^{\mathrm{V}})(\eta'' - \eta') \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus folgt, indem wir der Kürze halber

$$|\varkappa| + |\varkappa'| = H, \ |\varkappa''| + |\varkappa'''| = K \ \text{ und } \ |\varkappa^{\mathrm{IV}}| + |\varkappa^{\mathrm{V}}| = L$$

setzen:

$$6\,|u| < H + K + L$$

$$18\,|v| < H\,|\eta - \eta''| + K\,|\eta' - \eta| + L\,|\eta'' - \eta'|$$

$$18\,|w| < H\,|\eta' - \eta''| + K\,|\eta'' - \eta| + L\,|\eta - \eta'|$$

$$6\,|p| < \frac{H}{\sqrt{\eta}} + \frac{K}{\sqrt{\eta'}} + \left|\frac{L}{\sqrt{\eta''}}\right|$$

$$18\,|q| < \frac{H}{\sqrt{\eta}}|\eta - \eta''| + \frac{K}{\sqrt{\eta'}}|\eta' - \eta| + \left|\frac{L}{\sqrt{\eta''}}\right||\eta'' - \eta'|$$

$$18\,|r| < \frac{H}{\sqrt{\eta}}|\eta' - \eta''| + \frac{K}{\sqrt{\eta'}}|\eta'' - \eta| + \left|\frac{L}{\sqrt{\eta''}}\right||\eta - \eta'|.$$

Eine kleine Rechnung zeigt:

$$1{,}6 > \eta > 1{,}5; \quad \frac{2}{3} > \eta' > \frac{1}{3}, \quad -1{,}8 > \eta'' > -1{,}9,$$

$$|\eta' - \eta''| < 2{,}3, \quad |\eta'' - \eta| < 3{,}5, \quad |\eta - \eta'| < 1{,}3$$

$$|\lambda| < 10, \quad |\lambda''| < 4{,}2, \quad |\lambda^{\mathrm{IV}}| = 1; \quad |\lambda_3| < 1, \quad |\lambda_3''| < 2{,}4, \quad |\lambda_3^{\mathrm{IV}}| = 1$$

$$|\lambda'| < 1, \quad |\lambda'''| < 1, \quad |\lambda^{\mathrm{V}}| = 1; \quad |\lambda_3'| < 5, \quad |\lambda_3'''| < 1, \quad |\lambda_3^{\mathrm{V}}| = 1$$

$$|\varkappa| = |\lambda^{\frac{1}{y}}|\;|\lambda_3|^{\frac{x}{y}} \text{ mit } y \geqq 3 \text{ und } \frac{1}{2} > \frac{x}{y} > 0.$$

Dies gibt

$$6\,|u| < (\sqrt[3]{10} + \sqrt{5}) + (\sqrt[3]{4{,}2} \cdot \sqrt{2{,}4} + 1) + 2 < 4{,}4 + 3{,}5 + 2 < 9{,}9$$

und ähnlich

$$18\,|v| < 25 \quad \text{und} \quad 18\,|w| < 26$$

$$6\,|p| < \frac{4{,}4}{1{,}2} + 3{,}5\sqrt{3} + \frac{2}{1{,}3} < 3{,}7 + 6{,}1 + 1{,}6 = 11{,}4$$

und ähnlich

$$18\,|q| < 25 \quad \text{und} \quad 18\,|r| < 32.$$

Also können u, v, w, p, q und r nur die Werte $-1, 0, +1$ haben

Zweiter Fall $x = -x_1,\ x_1 > 0$

$$\lambda\,\lambda_3'^{x_1} = \varkappa_1^y.$$

Eine kleine Rechnung gibt dasselbe Resultat wie im ersten Falle. Weil $\varkappa \cdot \varkappa' = +1$ ist, müssen wir die folgenden Gleichungen haben:

$$u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2vw + q^2 + r^2 - 4pq + 2pr - 4qr = 1 \tag{15}$$

$$-w^2 + 2uv + 2vw - p^2 - 3q^2 - r^2 - 2pr + 2qr = 0 \tag{16}$$

$$-w^2 + 2uw + v^2 + r^2 - 2pq - 2qr = 0. \tag{17}$$

Wir behandeln zuerst den Fall $r = 0$. Die Gleichung (15) kann dann so geschrieben werden:

$$2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 + 2q^2 = 2 + 8pq. \tag{15'}$$

Hieraus folgt sofort $pq \neq -1$. Die Möglichkeiten

$$u = v = w = 0, \qquad p = q = r = 0$$

und $u = \pm 1$, $v = w = 0$ sind offenbar ausgeschlossen. Im Falle $p \neq 0$ können wir $p = +1$ setzen, und falls $p = 0$ und $q = \pm 1$, können wir $q = +1$ annehmen. Die folgenden Möglichkeiten bleiben dann übrig:

$$1^\circ \;\; p = 1,\; q = 1; \qquad 2^\circ \;\; p = 1,\; q = 0; \qquad 3^\circ \;\; p = 0,\; q = 1.$$

Im ersten Falle bekommen wir $2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 8$, woraus folgt $u = \pm 2$, $v = w = 0$, was unmöglich ist. Im zweiten Falle wird erhalten

$$2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 2,$$

woraus folgt $u = \pm 1$, $v = w = 0$, was ebenso unmöglich ist. Im letzten Falle ergibt sich $2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 0$, d. h. $u = v = w = 0$, unmöglich.

Wir werden danach den Fall $r = \pm 1$ erledigen. Offenbar können wir $r = +1$ setzen. Die Gleichung (15) gibt dann

$$2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 + 2q^2 = 4(p + 1)(2q - 1) + 4. \tag{15''}$$

Die Möglichkeiten $p = 0$, $q = -1$; $p = 1$, $q = -1$; $p = 1$, $q = 0$ sind sofort auszuschliessen. Im Falle $u \neq 0$ können wir augenscheinlich $u = +1$ annehmen. Die folgenden Fälle müssen nun näher untersucht werden:

$$p = q = 1; \qquad p = -1,\;\; q = \pm 1; \qquad p = q = 0;$$

$$p = -1,\;\; q = 0 \qquad \text{und} \qquad p = 0,\;\; q = 1.$$

1° $p = q = 1$. Die Gleichung $(15'')$ gibt $2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 10$,
unmöglich

2° $p = -1$, $q = \pm 1$ $\quad 2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 2 \quad$ ɔ: $u = 1$, $v = w = 0$,
unmöglich

3° $p = q = 0$ $\quad 2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 0 \quad$ ɔ: $u = v = w = 0$,
unmöglich

4° $p = -1$, $q = 0$ $\quad 2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 4 \quad$ ɔ: $u = 0$ und $v^2 - vw + w^2 = 1$.

Werden die Werte $p = -1$, $q = u = 0$ in den Gleichungen (16) und (17) eingesetzt, so ergibt sich

$$-w^2 + 2v + 2vw = 0$$

und

$$-w^2 + v^2 + 1 = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $v = w = 0$. Diese Werte sind aber nicht Lösungen der beiden anderen Gleichungen in v und w.

5° $p = 0$, $q = 1$ $\quad 2u^2 + (2v - w)^2 + 3w^2 = 6 \quad$ ɔ: $u = +1$ und

$$v^2 - vw + w^2 = 1..$$

Werden hier die Werte $p = 0$, $q = u = 1$ in den Gleichungen (16) und (17) eingeführt, so ergibt sich zuerst

$$-w^2 + 2v + 2vw = 2, \qquad \text{ɔ: } w = 0 \quad \text{und} \quad v = 1,$$

und weiter

$$-w^2 + 2w + v^2 - 1 = 0.$$

Die Werte $w = 0$ und $v = 1$ sind auch Lösungen der beiden anderen Gleichungen in v und w. Es ergibt sich also als die einzige Möglichkeit

$$\varkappa = 1 + \eta + (\eta + \eta')\sqrt{\eta} = 1 + \eta - \eta''\sqrt{\eta} = \frac{1}{2}[\eta'' - \sqrt{\eta}]^2 = \lambda'_3, \quad \text{d. h.}$$

$$\lambda \cdot \lambda_3^x = \lambda'_3 \quad \text{oder} \quad = \lambda_3,$$

Dies ist aber unmöglich, und damit ist also bewiesen, dass wir λ und λ_3 als Grundeinheten wählen können.

DELAUNAY, B. *[1]:* Sur les formes binaires cubiques à discriminant négatif. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 178 (1924) S. 1460; *[2]:* Ueber die Darstellung der Zahlen durch binäre kubische Formen von negativer Diskriminante. Math. Z. Bd. 31 (1929).

NAGELL, T. *[1]:* Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Math. Z. Bd. 28 (1928) S. 10 bis 29; *[2]:* Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$. Norsk matematisk forenings skrifter. Serie I Nr. 2 (1921).

SIEGEL, C. *[1]:* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math.-kl. 1929 Nr. 1.

SKOLEM, TH. *[1]:* Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. Oslo Vid. akad. Skrifter I 1933 Nr. 6; *[2]:* Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen. 8de Skand. mat. Kongr. förh. Stockholm 1934 S. 163—188; *[3]:* Einige Sätze über p-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen. Math. Ann. Bd. 111 (1935) S. 399—424.