ADDITION À NOTRE MÉMOIRE: ›RECHERCHES SUR LA MÉTHODE DE GRAEFFE ET LES ZÉROS DES POLYNÔMES ET DES SÉRIES DE LAURENT‹.

(Acta mathematica, 72, 1940/41).

PAR

ALEXANDRE OSTROWSKI

à BÂLE.

1. Grace à l'obligeance de M. San Juan, notre attention vient d'être attirée sur trois travaux concernant la méthode de Graeffe, qui nous avaient échappé pendant la rédaction de notre mémoire:

(a) J. Rey Pastor: Lecciones de Álgebra 2ª. edicion, Madrid, 1935, pp. 89/105.

(b) R. San Juan: Compléments à la méthode de Gräffe pour la résolution des équations algébriques (Bulletin des Sciences Mathématiques, (2) LIX (Avril 1935)).

(c) R. San Juan: Complementos al método de Gräffe para la resolución de ecuaciones algébricas (Revista Matemática Hispano-Americana, serie (3). I (1939)).

2. L'exposé de la méthode de Graeffe que donne M. Rey Pastor dans (a) est très intéressant et accompagné d'exemples très instructifs. Malheureusement, les considérations théoriques de cet exposé s'appuient essentiellement sur le résultat suivant:

A) *Si les racines des deux équations*

$$f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n = 0, \quad f(x) = \delta, \quad (a_0 \neq 0)$$

sont désignées dans l'ordre convenablement choisi par $x_1, \ldots, x_n$ *et* $x_1', \ldots, x_n'$, *l'on a:*

$$(\mathrm{A}_1) \qquad |x_i' - x_i| \leqq \sqrt[n]{\left|\frac{\delta}{a_0}\right|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Or, ce résultat est faux, comme nous l'avons montré au N° 70 (pp. 210—211) de notre mémoire, sur l'exemple d'une équation numérique du troisième degré. En fait, M. Rey Pastor a seulement démontré qu'à chaque racine x_i' correspond une racine x_{ν_i}, et à chaque racine x_i correspond une racine x'_{μ_i} telle que l'on ait:

$$(\mathrm{A}_2) \qquad |x_i' - x_{\nu_i}| \leqq \sqrt[n]{\left|\frac{\delta}{a_0}\right|}, \quad |x_i - x'_{\mu_i}| \leqq \sqrt[n]{\left|\frac{\delta}{a_0}\right|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ce qui est évidemment moins que (A_1).

D'ailleurs, (A_2) est un cas spécial d'un résultat donné au commencement du N° 70 de notre mémoire.

Or, puisque la démonstration d'un »théorème de décomposition» que M. Rey Pastor a tentée aux N$^{\text{os}}$ 93/94 de son livre repose en première ligne sur le théorème A), cette démonstration doit être considérée comme insuffisante si l'on ne veut pas restreindre très considérablement la porté du théorème en question.

3. Quant au mémoire (c) (la note (b) ne contient que l'énoncé des résultats de ce mémoire), l'auteur y retrouve — indépendamment et sous une forme différente — les résultats de MM. Hadamard et Valiron mentionnés dans la note p. 107 de notre mémoire. Mais, en cherchant à en tirer un »théorème de décomposition», il utilise, lui aussi, le théorème A de M. Rey Pastor, ce qui rend la démonstration de son résultat final insuffisante, du moins si l'on ne veut pas le comprendre dans un sens très restrictif.

D'un autre côté, la dernière partie de ce mémoire contient un résultat qui rentre dans l'ordre d'idées de notre second théorème fondamental. En utilisant les notions introduites dans notre mémoire, le résultat de M. San Juan peut être énoncé de la manière suivante:

Supposons que pour la μ^e transformée de Graeffe de l'équation $x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, toutes les déviations du diagramme de Newton soient $\leqq 9$, alors on a

$$\mathrm{B}) \qquad \left|\left|\frac{\sqrt[n]{a_n}}{x_\nu}\right| - 1\right| < \left\{12\binom{n}{[\frac{1}{2}n]}^2\right\}^{\frac{n-1}{2^{\mu+1}}} - 1.$$

Il est à peine nécessaire de dire que l'on peut remplacer l'inégalité B) par une autre de beaucoup plus serrée, en partant du deuxième théorème fondamental de notre mémoire.

4. Quant aux autres observations et résultats contenus dans (c), nous renvoyons le lecteur à ce mémoire, puisque, bien qu'ils soient intéressants, ils ne présentent que peu de points de contact avec les résultats de notre mémoire.

5. Nous profitons de cette occasion pour réparer une omission dans la démonstration du théorème XII, pp. 148/49 de notre mémoire. Pour compléter cette démonstration, il faut modifier le texte de la manière suivante:

p. 148, 2e l. d'en bas, au lieu de »à la forme», lire »à l'une des quatre formes».

p. 148, après l'équation (28, 5), ajouter:

$$t z^3 + z^2 + \varepsilon z + 1 = 0, \quad |\varepsilon| \leqq 1, \quad |t| \leqq 1, \tag{28, 5^a}$$

$$z^3 + \varepsilon z^2 + z + t = 0, \quad |\varepsilon| \leqq 1, \quad |t| \leqq 1, \tag{28, 5^b}$$

$$z^3 + \varepsilon z^2 + t z + 1 = 0, \quad |\varepsilon| \leqq 1, \quad |t| \leqq 1. \tag{28, 5^c}$$

p. 149, 3e ligne d'en haut, intercaler après »alors»: »dans le cas (28, 5)».

p. 149, ajouter au bas de la page:

»Dans le cas (28, 5^a), on a l'identité:

$$\varepsilon + \frac{1}{\zeta_2} + \frac{1}{\zeta_3} = -\zeta_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{\zeta_3} + \frac{1}{\zeta_3^2}\right). \tag{28, 8}$$

En effet, l'expression de droite est ici égale, d'après (28, 5^a), à $-\zeta_2(-t\zeta_3) = -\frac{1}{\zeta_1}$, et la relation $\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} + \frac{1}{\zeta_3} = -\varepsilon$ se vérifie immédiatement de (28, 5^a). Or, d'après (28, 6), le module de l'expression de droite dans (28, 8) est $\geqq 3\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{3}$, tandis que le module de l'expression de gauche est $\leqq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Donc il résulte de (28, 6):

$$1 + \frac{\varepsilon}{\zeta_3} + \frac{1}{\zeta_3^2} = \frac{5}{9}, \quad \frac{1}{\zeta_3^2} = \frac{1}{9}, \quad \zeta_3 = \zeta_2 = \pm 3.$$

Mais alors, le signe de l'expression de gauche est celui de ζ_2, tandis que celui de droite est contraire à celui de ζ_2. Donc (28, 6) est impossible dans le cas de (28, 5^a).

Dans les cas (28, 5^b) et (28, 5^c), on obtient de ces équations respectivement:

$$\zeta_3 = -\left(\varepsilon + \frac{1}{\zeta_3} + \frac{t}{\zeta_3^2}\right), \quad \zeta_3 = -\left(\varepsilon + \frac{t}{\zeta_3} + \frac{1}{\zeta_3^2}\right).$$

Mais ici, dans l'hypothèse (28, 6), le module de l'expression de droite est dans chaque cas $\leqq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$, donc (28, 6) est impossible dans ces cas.»

6. Enfin, signalons les errata suivants qui se sont glissés dans le texte de notre mémoire.

Page		Au lieu de:	Lire:
143	formule (24, 3)	$\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{n-p+1}}$	$\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n-p+1}}}$
144	1e l. d'en haut	ζ_n	ζ_{n_1}
»	» »	$\lvert\zeta_1\rvert^{n_1}$	$\lvert\zeta_1\rvert^{-n_1}$
147	5e l. d'en haut	$-r\lvert\zeta_2\rvert$	$-2r\lvert\zeta_2\rvert$
150	1e l. d'en haut	$\geqq$	$\leqq$
158	formule (33, 4)	z	$\lvert z\rvert$
162	4e l. d'en bas	$\nu \geqq 0$	$\nu \leqq 0$
210	formule (69, 3)	$a_\nu - b_\nu$	$a_{n-\nu} - b_{n-\nu}$
210	formule (69, 4)	$a_\nu - b_\nu$	$a_{n-\nu} - b_{n-\nu}$
210	formule (69, 7)	$\lvert y\rvert$	γ
210	11e l. d'en haut	$\lvert y\rvert$	γ
212	1e l. d'en haut	$U_\nu^{(t)}$	$U_\lambda^{(t)}$
243	formule (89, 2)	z	z_ν.