UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS BORNÉES ET UNIFORMÉMENT CONTINUES SUR L'AXE RÉEL.

PAR

ARNE BEURLING.

à UPSAL.

Le théorème que nous allons établir dans cette Note fait partie d'une théorie spectrale encore inpubliée, et sa démonstration primordiale reposait sur l'usage de la théorie générale des intégrales de Fourier. Même si le théorème en question appartient à cette branche de l'Analyse, on peut l'établir par des méthodes élémentaires et c'est pour cette raison-là que nous le publions ici séparément avec quelques applications immédiates.

Convergence non uniforme des fonctions bornées et continues sur un ensemble ouvert.

Soit O un ensemble ouvert de points, et ψ, ainsi que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions bornées et continues sur O. En désignant d'une manière générale par $\|\psi\|$ la borne supérieure du module $|\psi|$ sur O, la convergence uniforme de la suite φ_n vers ψ se traduit par la condition

$$\lim_{n=\infty} \|\psi - \varphi_n\| = 0.$$

Nous allons dans cette recherche employer une notion particulière de convergence, appellée dans la suite *convergence étroite* et définie ainsi: la suite φ_n sera dite étroitement convergente sur O, si

1° elle converge uniformément sur tout ensemble fermé inclus dans O,

2° $\lim\limits_{n=\infty} \|\varphi_n\| = \|\psi\| < \infty$, où ψ désigne la fonction limite de la suite.

La convergence uniforme implique évidemment la convergence étroite, tandis que la réciproque n'est pas vraie. Citons à cet égard un exemple qui sera actuel plus tard. Si λ_n est une suite de nombres réels tendant vers la limite finie λ, la suite $e^{i\lambda_n x}$ converge étroitement vers $e^{i\lambda x}$ sur l'axe réel $-\infty < x < \infty$, mais la convergence n'est pas uniforme, car on a en effet $\| e^{i\lambda_n x} - e^{i\lambda x} \| = 2$.

Envisageons un ensemble C de fonctions bornées et continues. Par sa fermeture étroite C' nous entendrons l'ensemble C augmenté par les limites des suites étroitement convergentes qu'il contient. On déduit aisément de la condition 2° que la fermeture C' est un ensemble fermé par rapport à la convergence étroite.

Considérons en particulier le cas où O se confond avec l'axe réel, et introduisons comme distance $[f, g]$ des deux fonctions f et g, l'expression

$$[f, g] = \left\| \frac{f(x) - g(x)}{1 + x^2} \right\| + \big| \|f\| - \|g\| \big|.$$

L'écart ainsi défini satisfait visiblement à l'inégalité triangulaire

$$[f, h] \leq [f, g] + [g, h].$$

On reconnaît aussi que la condition

$$\lim_{n=\infty} [\psi, \varphi_n] = 0$$

exprime justement que la suite φ_n converge étroitement vers ψ, et de plus, que

$$\inf_{\varphi \subset C} [\psi, \varphi] = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que ψ appartienne à la fermeture étroite de l'ensemble C. D'après l'inégalité triangulaire, la fermeture C' est donc manifestement fermée relativement à la convergence étroite. Faisons remarquer que cette propriété ne subsiste plus si l'on remplace 2° par la condition moins restrictive que les φ_n soient uniformément bornées.

Sur le spectre d'une fonction bornée et uniformément continue sur l'axe réel.

Nous allons examiner pour $-\infty < x < \infty$ le système continu des fonctions

$$\varphi(x + \tau), \qquad -\infty < \tau < \infty,$$

où φ est une fonction bornée et uniformément continue en ce sens qu'elle possède un module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$$

qui tend vers o avec δ. A cet effet, envisageons l'ensemble T_φ des combinations linéaires

$$\sum_1^n c_\nu \varphi(x + \tau_\nu), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où c_ν sont des nombres complexes et τ_ν des nombres réels quelconques. La fermeture étroite T'_φ de cet ensemble jouit de la propriété remarquable suivante.

Théorème I. *L'ensemble T'_φ contient au moins une fonction de la forme $e^{i\lambda x}$, où λ est un nombre réel, sinon φ est identiquement nulle.*

D'après ce théorème on peut faire associer à φ un certain ensemble de nombres réels, à savoir les nombres λ pour lesquels $e^{i\lambda x} \subset T'_\varphi$. Nous convenons d'appeler cet ensemble *le spectre* de la fonction. Comme nous verrons de suite, le spectre est un ensemble fermé. En effet, si la suite λ_n appartient au spectre et converge vers la limite λ, la suite $e^{i\lambda_n x}$ converge étroitement vers la fonction $e^{i\lambda x}$, qui appartient donc elle aussi à T'_φ, cet ensemble étant fermé par rapport à la convergence étroite. Partant de la notion du spectre ainsi définie le théorème précédent reçoit le caractère d'un théorème d'unicité: *la fonction s'annule identiquement si son spectre est vide.*

Dans cette Note nous ne considérons le spectre que pour les fonctions bornées et uniformément continues, le cas le plus important et le plus simple. Faisons donc remarquer que, en modifiant les définitions employées, on peut étendre le Théorème I ainsi que la définition du spectre, à l'ensemble des fonctions bornées et mesurables, et encore à certaines classes des fonctions sommables sur tout intervalle fini.

Démonstration du Théorème I. Démontrons d'abord que toute fonction de la forme

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - \xi) h(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

appartient à T'_φ, h étant une fonction absolument intégrable sur l'axe réel. En effet, désignant par δ un nombre positif et par $\omega(\delta)$ le module de continuité de φ, on obtient l'inégalité

$$\left| \psi(x) - \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - \nu\delta) \int_{\nu\delta}^{(\nu+1)\delta} h(\xi)\, d\xi \right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\nu\delta}^{(\nu+1)\delta} \{\varphi(x - \xi) - \varphi(x - \nu\delta)\}\, h(\xi)\, d\xi \right| \leq \omega(\delta) \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|\, d\xi.$$

Il s'ensuit qu'on peut déterminer d'abord δ assez petit, et puis un entier N assez grand pour que, dans la série du premier membre la somme partielle étendue entre $-N$ et N diffère de ψ sur tout l'axe réel par une erreur arbitrairement petite, ce qui entraîne que ψ est compris dans T'_φ.

Comme fonction auxiliaire h nous choisirons une fonction entière satisfaisant aux conditions

$$|h(\xi+i\eta)| < \text{const.}\,\frac{e^{c|\eta|}}{\xi^2+\eta^2}, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,d\xi = 1, \tag{3}$$

c étant une constante positive quelconque. Il est permis du supposer que la fonction définie par (1) est $\not\equiv 0$ si $\varphi \not\equiv 0$. En effet, si $\psi \equiv 0$ mais $\varphi \not\equiv 0$ on remplace $h(\xi)$ par $a\,h(a\xi)$, a étant un nombre positif, et on obtiendra ainsi une nouvelle fonction auxiliaire satisfaisant encore aux conditions posées, tandis que la nouvelle fonction ψ,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\,h(a\xi)\,a\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi/a)\,h(\xi)\,d\xi,$$

sera manifestement $\not\equiv 0$ pour a assez grand, car en vertu de (3) on aura

$$|\varphi(x)-\psi(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x)-\varphi(x-\xi/a)\}\,h(\xi)\,d\xi\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{|\xi|}{a}\right)|h(\xi)|\,d\xi,$$

où le second membre tend vers 0 quand a augmente.

En faisant dans (1) le changement de la variable d'intégration $x-\xi=\xi_1$, ψ se présente sous la forme

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1)\,h(x-\xi_1)\,d\xi_1, \tag{4}$$

d'où l'on conclut, en tenant compte de (2), que ψ est une fonction entière satisfaisant à une inégalité de la forme

$$|\psi(x+iy)| < \text{const.}\,e^{c|y|}. \tag{5}$$

Remplaçons maintenant dans l'intégrale ci-dessus x par $x+\alpha+i\beta$, et la variable ξ_1 par $x-\xi$, α et β étant des nombres réels. On obtient alors

$$\psi(x+\alpha+i\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\,h(\xi+\alpha+i\beta)\,d\xi.$$

Cette formule, étant de la forme (1), met en évidence que $\psi(x+\alpha+i\beta)$ appartient à T'_φ quel que soit le nombre complexe $\alpha+i\beta$. Nous allons profiter de ce fait en déterminant une suite infinie de nombres complexes $\alpha_n+i\beta_n$, telle que les fonctions

$$\frac{\psi(x+\alpha_n+i\beta_n)}{\psi(\alpha_n+i\beta_n)}, \qquad n=1,2,\ldots, \tag{6}$$

convergent étroitement sur l'axe réel vers une exponentielle $e^{i\lambda x}$, qui est donc elle-même contenue dans T'_φ.

Dans ce but introduisons la quantité

$$\mu(y)=\sup_{-\infty<x<\infty}\log|\psi(x+iy)|.$$

La fonction $\psi(x+iy)$ étant bornée dans toute bande $-\varrho\leq y\leq\varrho$, et de plus $\not\equiv 0$, on sait par un théorème bien connu de la théorie des fonctions analytiques, que $\mu(y)$ est une fonction convexe de y. Elle possède, conformément à (5), une majorante de la forme $c|y|+\text{const.}$, et sa dérivée μ', étant monotone, reste donc en valeur absolue inférieure à la constante c. Les limites

$$a=\lim_{y=\infty}\mu'(y), \qquad b=\lim_{y=-\infty}\mu'(y),$$

sont par suite finies, et $b\leq a$. La différence $\mu'(y)-a$ tend par définition vers 0 pour $y\to\infty$, d'où résulte par une intégration entre les limites β et $\beta+y$ que l'on a uniformément sur tout intervalle fini $-\varrho\leq y\leq\varrho$,

$$\lim_{\beta=\infty}\{\mu(\beta+y)-\mu(\beta)-ay\}=0. \tag{7}$$

Cela étant, prenons pour β_n des nombres réels quelconques tendant vers $+\infty$, et déterminons ensuite les α_n tels que

$$(1+\varepsilon_n)|\psi(\alpha_n+i\beta_n)|\geq e^{\mu(\beta_n)}, \tag{8}$$

où ε_n sont des nombres positifs qui tendent vers 0. Il s'agit maintenant de montrer que la suite (6) ainsi obtenue converge étroitement vers e^{-iax}, ou, ce qui revient au même, que la suite

$$f_n(x)=e^{iax}\frac{\psi(x+\alpha_n+i\beta_n)}{\psi(\alpha_n+i\beta_n)}$$

converge étroitement vers la constante 1. Selon le choix des α_n on a

$$|f_n(x+iy)|\leq(1+\varepsilon_n)\exp\left(\mu(\beta_n+y)-\mu(\beta_n)-ay\right).$$

D'après cette inégalité et la relation (7) il est possible de déterminer une suite de nombres positifs ϱ_n tendant vers l'infini avec β_n, et tels que, sur la bande $-\varrho_n \leq y \leq \varrho_n$, on ait $|f_n(x+iy)| \leq 2$, $n = 1, 2, \ldots$. En appliquant l'intégrale de Cauchy on obtient pour x réel

$$|f_n'(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-x|=\varrho_n} \frac{f_n(z)}{(z-x)^2} dz \right| \leq \frac{2}{\varrho_n},$$

d'où résulte, en intégrant l'inégalité ci-dessus entre 0 et x, et en notant que $f_n(0) = 1$,

$$\left| \frac{f_n(x) - 1}{1 + x^2} \right| \leq \frac{2|x|}{\varrho_n(1 + x^2)} \leq \frac{1}{\varrho_n}.$$

En remarquant que $1 \leq \|f_n\| \leq 1 + \varepsilon_n$ on obtient enfin $[1, f_n] \leq 1/\varrho_n + \varepsilon_n$, ce qui établit le théorème.

De la même manière on peut construire une suite $\alpha_n + i\beta_n$, avec $\beta_n \to -\infty$, telle que les fonctions (6) convergent étroitement vers e^{-ibx}. Donc, si $a \neq b$, le spectre de φ comprend au moins deux points. On en peut tirer une conclusion intéressante. Si le spectre se réduit à un seul point λ, on a nécessairement $a = b = -\lambda$. La dérivée μ' est par suite constamment égale à $-\lambda$, et en conséquence μ une fonction linéaire de la forme $-\lambda y + \text{const.}$ La fonction entière $e^{-i\lambda x}\psi(x)$ est par suite bornée dans le plan complexe, et se réduit donc à une constante, d'où résulte que ψ est de la forme

$$A\, e^{i\lambda x}. \tag{9}$$

Or, nous avons vu que la fonction auxiliaire h peut être choisie de sorte que la différence $|\varphi - \psi|$ reste arbitrairement petite sur l'axe réel, ce qui entraîne que φ est elle-même une fonction de la forme (9).

En suivant la méthode employée, on démontre aisément, si le spectre consiste des points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, en nombre fini, que φ s'identifie avec un polynome trigonométrique

$$\sum_1^n A_\nu e^{i\lambda_\nu x}, \qquad A_\nu \neq 0, \tag{10}$$

et de plus, si le spectre est dénombrable mais sans point limite à distance finie, que φ est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes trigonométriques de la forme (10).

Application à certaines équations fonctionnelles linéaires.

Considérons une transformation fonctionnelle linéaire $L(\varphi)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $L(\varphi)$ est défini pour toute fonction continue et bornée $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, et $L(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 L(\varphi_1) + a_2 L(\varphi_2)$, a_1 et a_2 étant des constantes.

2° $\varphi(x+\tau)$ est une solution de l'équation homogène $L(\varphi) = 0$ en même temps que $\varphi(x)$, τ étant un nombre réel quelconque.

3° Si la suite φ_n converge uniformément vers 0 sur tout intervalle fini en restant uniformément bornée sur l'axe réel, la suite des fonctions $L(\varphi_n)$ converge vers 0 en tout point fixe.

Nous supposerons aussi, ce qui est sans importance, que la transformée $L(\varphi) = L(\varphi(\xi); x)$ de φ est une fonction définie pour $-\infty < x < \infty$. Une opération de ce genre nous est fourni par l'intégrale de Stieltjes

$$L(\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\, d\mu(\xi), \tag{11}$$

où μ est une fonction à variation totale finie sur $(-\infty, \infty)$. Mais il existe aussi des opérations répondant aux conditions posées, qui ne peuvent pas être ramenées à la forme (11). En effet, si $K(\xi)$ est une fonction mesurable telle que, pour tout τ réel, la différence $K(\xi+\tau) - K(\xi)$, mais non pas la fonction $K(\xi)$ elle-même, soit sommable sur $(-\infty, \infty)$, on constate facilement que

$$L(\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \{K(\xi+x) - K(\xi)\}\, d\xi, \tag{12}$$

satisfait à nos trois conditions. D'autre part, on ne peut pas dans le cas général ramener (12) à la forme (11).

Cela étant, nous allons appliquer le Théorème I à l'équation homogène

$$L(\varphi) = 0. \tag{13}$$

Si φ est une solution bornée et continue, toute somme finie de la forme $\Sigma a_\nu \varphi(x+\tau_\nu)$ l'est également d'après 1° et 2°, ainsi que, en vertu de 3°, toute limite d'une suite étroitement convergente des solutions. Chaque fonction de l'ensemble T'_φ satisfait donc à (13), d'où ce théorème:

Si l'équation $L(\varphi) = 0$ *possède une solution* $\varphi \not\equiv 0$ *bornée et uniformément continue, elle possède au moins une solution de la forme* $e^{i\lambda x}$, *et d'ailleurs toute exponentielle dont la fréquence* λ *appartient au spectre de* φ.

Quand il s'agit de l'équation[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\, d\mu(\xi) = 0, \tag{14}$$

il n'est pas nécessaire de partir d'une solution supposée continue. Si, en effet, φ est une solution bornée et mesurable ne s'annulant pas presque partout, on obtiendra en posant

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(x)\, dx, \qquad h > 0,$$

une solution ayant les propriétés réquises, tandis que φ_h ne peut pas s'annuler identiquement pour toute valeur particulière du paramêtre h.

Appliqué à (14) le théorème précédent conduit à cette proposition:

Si l'équation (14) *est vérifiée par une fonction bornée et uniformément continue* $\varphi \not\equiv 0$, *la transformée de Fourier-Stieltjes*

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\lambda}\, d\mu(\xi)$$

s'annule sur le spectre de φ, *donc en un point au moins.*

Application à la théorie taubérienne de M. Wiener.

Le Théorème I conduit à une démonstration très simple des deux importants théorèmes taubériens que l'on doit à M. Wiener[2]. Considérons d'abord la première variante: «Soit $K(\xi)$ une fonction donnée sommable sur $(-\infty, \infty)$. Pour que l'hypothèse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\, K(\xi)\, d\xi \to A \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi, \qquad x \to \infty, \tag{I}$$

---

[1] Cf.: A. Beurling, *Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle, Neuvième congrès des mathématiciens scandinaves, Helsingfors 1938.*

T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Leçons professées à l'Institut Mittag-Leffler, Upsal 1944.*

[2] Cf.: N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933,* les théorèmes 4 et 5 p. 73.

où φ est une fonction supposée bornée et mesurable, entraîne

$$\text{(II)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi) H(\xi)\, d\xi \to A \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\, d\xi, \qquad x \to \infty,$$

pour toute fonction $H(\xi)$ sommable sur $(-\infty, \infty)$, il faut et il suffit que

$$\text{(III)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\lambda} K(\xi)\, d\xi \neq 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty.\text{»}$$

La condition (III) étant évidemment nécessaire, il suffit de prouver qu'elle est aussi suffisante. En remplaçant d'abord $\varphi(x)$ par $\varphi(x) + A$, et en désignant ensuite par $f(x)$ et $g(x)$ les premiers membres des formules (I) et (II) respectivement, il s'agit de démontrer que $f(x) \to 0$ entraîne $g(x) \to 0$. Les fonctions f et g sont bornées, et, ce qui sera essentiel pour la suite, elle sont uniformément continues. En effet, supposant $|\varphi(x)| \leq M$ et posant $|x_1 - x_2| = \delta$, on obtiendra par un calcul facile,

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |H(\xi+\delta) - H(\xi)|\, d\xi,$$

où l'intégrale tendra vers 0 avec δ conformément à une propriété bien connue des fonctions sommables.

Ceci posé, remarquons cette relation importante entre f et g,

$$(15) \qquad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\eta) H(\eta)\, d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi-\eta) K(\xi) H(\eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi) K(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

obtenue en faisant dans l'intégrale double un changement de l'ordre d'intégration, ce qui est légitime en vertu de la convergence absolue. Démontrons maintenant le théorème par l'absurde, en supposant, qu'il existe une suite de nombres $x_n \to \infty$ tels que $|g(x_n)| \geq \delta > 0$. Pour $x \to \infty$, $f(x-\eta)$ converge par hypothèse vers 0, et la convergence est uniforme dans tout intervalle fini $-\varrho \leq \eta \leq \varrho$, d'où suit que (15) tendra également vers 0, et l'on aura par conséquant pour x fixe

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x + x_n - \xi) K(\xi)\, d\xi = 0.$$

La fonction g étant bornée, on peut, par un procédé classique, extraire de la suite $g_n = g(x+x_n)$ une suite partielle g_{n_ν} qui converge en tout point rationnel x.

Grâce à la continuité uniforme de g, on conclut par un raisonnement bien connu que la suite partielle converge en tout point, et de plus, que la convergence est uniforme sur tout intervalle fini. La fonction limite $\psi(x)$ ainsi obtenue, satisfait manifestement à l'équation intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-\xi) K(\xi) d\xi = 0. \tag{16}$$

Or, ψ étant bornée et uniformément continue et d'ailleurs $\not\equiv 0$, car $|\psi(0)| \geq \delta$ il s'ensuit que l'équation (16) possèdera au moins une solution de la forme $e^{i\lambda x}$, ce qui est contradictoire à la condition (III). Le premier théorème taubérien de M. Wiener est ainsi établi.

En se reportant à l'analyse précédente, on arrivera à cette proposition:

Soit $L(\varphi)$ une transformation fonctionnelle satisfaisant aux conditions posées, et soit φ une fonction quelconque, supposée bornée et uniformément continue. Pour que la relation $\lim\limits_{\tau=\infty} L(\varphi(\xi+\tau); x) = 0$, valable en tout point fixe x, entraîne $\lim\limits_{\tau=\infty} \varphi(\tau) = 0$, il faut et il suffit que l'équation homogène $L(\varphi) = 0$ n'admette aucune solution de la forme $e^{i\lambda x}$.

Sans citer explicitement le second théorème taubérien de M. Wiener, nous faisons remarquer qu'on peut ramener la démonstration à la proposition ci-dessus en opérant exactement comme nous venons de le faire pour la première variante du théorème. Ainsi, on démontre d'abord que les intégrales nouvelles (I) et (II) représentent des fonctions uniformément continues f et g, puis, qu'il est permis d'intervertir l'ordre d'intégration dans l'intégrale double correspondant à (15). Après cela le théorème ci-dessus est directement appliquable.