ÜBER DEN ABSOLUTEN BETRAG EINER ANALYTISCHEN FUNKTION FÜR GEGEBENE WERTE DES FUNKTIONS-ARGUMENTES.

VON

HENRIK L. SELBERG

in GJÖVIK (Norwegen).

1. Sei G eine offene Punktmenge der komplexen z-Ebene, welche aus einem oder mehreren Gebieten besteht, die sich alle ins Unendliche erstrecken ohne jedoch den Punkt $z = \infty$ als inneren Punkt zu enthalten.

Sei $f(z)$ eine in G definierte eindeutige Funktion, die in G und in jedem endlichen Randpunkt von G analytisch ist. Es sei $1 < |f(z)| < \infty$ in G und $|f(z)| = 1$ in jedem endlichen Randpunkt von G.

Indem Γ_r die Punktmenge bezeichnet, welche ein Kreis $|z| = r$ gemeinsam mit G hat, setzen wir

$$\lambda(r) = \int_{\Gamma_r} \log^2 |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi. \tag{1}$$

In der vorliegenden Arbeit sollen die Beiträge abgeschätzt werden, welche die Grösse $\lambda(r)$ aus den verschiedenen Winkelräumen der Funktionsebene erhält.

2. Wir bezeichnen mit G_r die Teilmenge, welche G gemeinsam mit der Kreisfläche $|z| < r$ hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Rand von G_r für jedes endliche r aus endlich vielen analytischen Kurvenbogen besteht. Schneiden wir G_r längs den Kurven auf, wo $f(z)$ reell und positiv ist, so zerfällt G_r in endlich viele Gebiete $G_r^{(1)}, G_r^{(2)}, \ldots, G_r^{(k)}$. Wir bestimmen jetzt $\log f(z) = u(z) + i v(z)$, so dass $0 \leqq v(z) < 2\pi$. Dann vermittelt $w = \log f(z)$ die umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung jedes Gebietes $G_r^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ auf ein Riemannsches Flächenstück $F^{(\nu)}$, das über dem durch $u > 0$, $0 < v < 2\pi$ definierten Halbstreifen H der $w = u + iv$-Ebene ausgebreitet liegt.

Wir betrachten jetzt die Überdeckung von H durch die Flächenstücke $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(k)}$. Nach dem Vorgang von AHLFORS[1] führen wir die Punktmengen A_n,

[1] L. AHLFORS, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, *Acta math. Bd. 65.*

$n = 1, 2, \ldots, N$, ein, wobei A_n als die Menge derjenigen Punkte von H definiert ist, die von mindestens n Blättern überdeckt werden, N die Höchstzahl der Blätter bedeutet. A_n zerfällt in endlich viele Gebiete $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(k_n)}$. Es bezeichne $R_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_n)$ den Rand von $A_n^{(\nu)}$ relativ zu H. Die Kurvenbogen, worin $R_n^{(\nu)}$ zerfällt, mögen so orientiert sein, dass $A_n^{(\nu)}$ links der Durchlaufsrichtung liegt. $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \ldots, R_n^{(k_n)}$ bilden zusammen den Rand R_n von A_n relativ zu H.

R_n zerfällt offenbar in

1) Kurvenbogen, welche die Linien $v = 0$ und $v = 2\pi$ verbinden,

2) Kurvenbogen, wo die Imaginärteile von Anfangspunkt und Endpunkt um weniger als 2π voneinander abweichen,

3) geschlossene Kurven.

Die in R_n enthaltenen Kurvenbogen vom Typus 1) mögen $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(m_n)}$ sein. Die Bogenlänge von $C_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_n)$ sei $l_n^{(\nu)}$. Durch passende Nummerierung richten wir es so ein, dass das von $C_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_n)$ von H abgeschnittene endliche Gebiet die Kurven $C_n^{(\nu+1)}, \ldots, C_n^{(m_n)}$ enthält.

Ist nun $u_n^{(\nu)}$ die u-Koordinate eines beliebigen Punktes auf $C_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_n)$, so ist der Inhalt des von $C_n^{(\nu)}$ vom Halbstreifen H abgeschnittenen Gebietes gleich $2\pi u_n^{(\nu)} + 2\vartheta\pi l_n^{(\nu)}$, indem ϑ hier und im folgenden eine — nicht immer dieselbe — zwischen -1 und 1 gelegene Zahl bedeutet. Da andererseits der Inhalt des von einer Kurve C vom Typus 2) oder 3) von H abgeschnittenen Gebietes kleiner als die mit 2π multiplizierte Bogenlänge von C ist, so gilt folglich, wenn Ω_n der Inhalt von A_n, L_n die Gesamtlänge von R_n ist,

$$\Omega_n = 2\pi \sum_{\nu=1}^{m_n} (-1)^{\nu+1} u_n^{(\nu)} + 2\pi\vartheta L_n. \tag{2}$$

Sei nun v_0 eine beliebige Zahl des Intervalles $0 < v_0 < 2\pi$ und, indem n gegeben ist, $u_1(v_0) \geqq u_2(v_0) \geqq \cdots \geqq u_{p_{v_0}}(v_0)$ die Schnittpunkte der Gerade $v = v_0$ mit R_n. Wir betrachten die Summe

$$S_n(v_0) = \sum_{\nu=1}^{p_{v_0}} (-1)^{\nu+1} u_\nu(v_0).$$

Der Beitrag einer Kurve $C_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_n)$ zur Summe $S_n(v_0)$ ist, wie eine geometrische Betrachtung lehrt, gleich

$$(-1)^{\nu+1} u_n^{(\nu)} + \vartheta l_n^{(\nu)},$$

wo $u_n^{(\nu)}$ wie früher die u-Koordinate eines beliebigen Punktes auf $C_n^{(\nu)}$ bedeutet. Da der Beitrag einer Randkurve C vom Typus 2) oder 3) dem absoluten Betrage nach kleiner als die Bogenlänge von C ist, so erhalten wir, indem wir v statt v_0 schreiben,

$$S_n(v) = \sum_{\nu=1}^{m_n} (-1)^{\nu+1} u_n^{(\nu)} + \vartheta L_n$$

und somit gemäss (2)

$$S_n(v) = \frac{\Omega_n}{2\pi} + 2\vartheta L_n. \tag{3}$$

3. Setzen wir

$$\Omega = \sum_{n=1}^{N} \Omega_n, \qquad L = \sum_{n=1}^{N} L_n,$$

so erhalten wir aus (3)

$$\sum_{n=1}^{N} S_n(v) = \frac{\Omega}{2\pi} + 2\vartheta L. \tag{4}$$

Offenbar ist

$$\Omega = \int\limits_{G_r} \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 d\omega,$$

wo $d\omega$ das Flächenelement der z Ebene bedeutet, und

$$L \leqq \int\limits_{\Gamma_r} \left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| r\, d\varphi$$

also auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$L^2 \leqq 2\pi r \int\limits_{\Gamma_r} \left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^2 r\, d\varphi = 2\pi \frac{d\Omega}{d\log r}. \tag{5}$$

Sei jetzt $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des Intervalles $0 \leqq v < 2\pi$ vom Mass $h(\mathfrak{M})$ und $\Gamma_r(\mathfrak{M})$ diejenige Teilmenge von Γ_r, wo $\arg f(z) = v(z)$ $(0 \leqq v(z) < 2\pi)$ zur Menge $\mathfrak{M}$ gehört. Durch Integration über $\mathfrak{M}$ folgt dann aus (4)

$$\int\limits_{\Gamma_r(\mathfrak{M})} \log|f(re^{i\varphi})| \frac{\partial \arg f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} d\varphi = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathfrak{M}} S_n(v)\, dv = \frac{h(\mathfrak{M})\,\Omega}{2\pi} + 2\vartheta h(\mathfrak{M}) L.$$

Wegen

$$\frac{\partial \arg f}{\partial\varphi} = \frac{\partial \log|f|}{\partial \log r}$$

kann diese Gleichung geschrieben werden

$$\int\limits_{\Gamma_r(\mathfrak{M})} \log|f(re^{i\varphi})| \frac{\partial \log|f(re^{i\varphi})|}{\partial \log r} d\varphi = \frac{h(\mathfrak{M})\,\Omega}{2\pi} + 2\,\vartheta\, h(\mathfrak{M})\, L. \tag{6}$$

4. Wir wenden uns jetzt an die in (1) eingeführte Grösse $\lambda(r)$. Bedeutet Δ den Laplaceschen Operator, so ist

$$\Delta_w \log^2|w| = 2\,|w|^{-2}$$

also

$$\Delta_z \log^2|f(z)| = 2\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2,$$

und die Gausssche Transformationsformel gibt somit

$$\int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial}{\partial r} \log^2|f(re^{i\varphi})|\, r\, d\varphi = 2\int\limits_{G_r} \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 d\omega.$$

Hiernach ist

$$\frac{d\lambda(r)}{d\log r} = 2\,\Omega \tag{7}$$

und somit gemäss (5)

$$L^2 \leqq \pi \frac{d^2\lambda(r)}{(d\log r)^2}. \tag{8}$$

Von der letzten Ungleichung machen wir sofort eine Anwendung. Für genügend grosse r ist offenbar $L \geqq 2\pi$ und somit wegen (8)

$$\frac{d\lambda(r)}{d\log r} \geqq 4\pi \log r + C_1. \tag{9}$$

Wir betrachten nun das Integral

$$J(r) = \int\limits_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial \log|f(re^{i\varphi})|}{\partial \log r}\right)^2 d\varphi.$$

Offenbar ist

$$J(r) \leqq \int\limits_{\Gamma_r} \left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^2 r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda(r)}{(d\log r)^2}.$$

Nun ist

$$\int\limits_{r=t_0}^{t} \lambda(r) \frac{d^2\lambda(r)}{(d\log r)^2}\left(\frac{d\lambda(r)}{d\log r}\right)^{-2} d\log r = \left(\frac{\lambda(r)}{\frac{d\lambda(r)}{d\log r}}\right)_{r=t_0} - \left(\frac{\lambda(r)}{\frac{d\lambda(r)}{d\log r}}\right)_{r=t} + \log\frac{t}{t_0}$$

$$< \log t + O(1)$$

und demnach

$$\int_{r=t_0}^{t} \lambda(r) J(r) \left(\frac{d\lambda(r)}{d \log r}\right)^{-2} d \log r < \frac{1}{2} \log t + O(1).$$

Wir erhalten hieraus den

Hilfssatz. *Ist δ eine zwischen 0 und 2 gelegene Zahl, und ist $Q_\delta^*(t)$ die Punktmenge im Intervalle $1 < r < t$, wo die Ungleichung*

$$\frac{\left(\frac{d\lambda(r)}{d \log r}\right)^2}{\lambda(r) J(r)} \geqq \delta$$

stattfindet, so ist

$$\int_{Q_\delta^*(t)} d \log r > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \log t - O(1).$$

5. Bevor ich weitergehe erinnere ich an das

Lemma. *Ist $\psi(t) > 0$ für $t \geqq t_0$ und nichtabnehmend mit wachsendem t, und η eine positive Zahl, so gilt*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} < (\psi(t))^{1+\eta} \qquad (t > t_0)$$

höchstens mit Ausnahme einer Wertemenge in t vom Gesamtmass $\leqq \frac{1}{\eta}(\psi(t_0))^{-\eta}$.

Es ist nämlich

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\psi'(t)}{(\psi(t))^{1+\eta}} dt \leqq \frac{1}{\eta}(\psi(t_0))^{-\eta},$$

woraus die Richtigkeit des Lemmas sofort ersichtlich ist.

Da $\frac{d\lambda(r)}{d \log r}$ nach (9) mit wachsendem r gegen ∞ strebt, so gilt hiernach

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\left(\frac{d^2\lambda(r)}{(d \log r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{d\lambda(r)}{d \log r}} = 0 \tag{10}$$

nach Ausschluss einer Intervallfolge P in r, über welche die Variation von $\log r$ beschränkt ist.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns wieder an die Gleichung (6). Berücksichtigen wir (7), (8) und (10), so erhalten wir

$$(11)\qquad \int\limits_{\Gamma_r(\mathfrak{M})} \log|f(re^{i\varphi})|\frac{\partial \log|f(re^{i\varphi})|}{\partial \log r}\,d\varphi = \left(\frac{h(\mathfrak{M})}{4\pi} + o(1)\right)\frac{d\lambda(r)}{d\log r}$$

und diese Gleichung gilt nach Ausschluss der Wertemenge P in r.

Wir setzen nun

$$(12)\qquad \begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_r(\mathfrak{M})} \log^2|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi &= \alpha(r,\mathfrak{M})\,\lambda(r),\\ \int\limits_{\Gamma_r(\mathfrak{M})} \left(\frac{\partial \log|f(re^{i\varphi})|}{\partial \log r}\right)^2 d\varphi &= \beta(r,\mathfrak{M})\,J(r). \end{aligned}$$

Wenden wir auf (11) die Schwarzsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$(13)\qquad \alpha(r,\mathfrak{M})\,\beta(r,\mathfrak{M}) > \left(\frac{h(\mathfrak{M})}{4\pi} + o(1)\right)^2 \frac{\left(\dfrac{d\lambda(r)}{d\log r}\right)^2}{\lambda(r)\,J(r)}$$

also

$$(14)\qquad \alpha(r,\mathfrak{M}) > \left(\frac{h(\mathfrak{M})}{4\pi} + o(1)\right)^2 \frac{\left(\dfrac{d\lambda(r)}{d\log r}\right)^2}{\lambda(r)\,J(r)}.$$

Wenden wir die Ungleichung (13) für die Komplementärmenge[1] von $\mathfrak{M}$ an, und multiplizieren wir das Resultat mit (13), so erhalten wir

$$\alpha(r,\mathfrak{M})(1-\alpha(r,\mathfrak{M}))\,\beta(r,\mathfrak{M})\,(1-\beta(r,\mathfrak{M})) > \left(\frac{h(\mathfrak{M})\,(2\pi - h(\mathfrak{M}))}{16\pi^2} + o(1)\right)^2 \frac{\left(\dfrac{d\lambda(r)}{d\log r}\right)^4}{(\lambda(r)\,J(r))^2}$$

und somit, da $\beta(r,\mathfrak{M})(1-\beta(r,\mathfrak{M})) \leqq \frac{1}{4}$,

$$(15)\qquad \alpha(r,\mathfrak{M})(1-\alpha(r,\mathfrak{M})) > \left(\frac{h(\mathfrak{M})\,(2\pi - h(\mathfrak{M}))}{8\pi^2} + o(1)\right)^2 \frac{\left(\dfrac{d\lambda(r)}{d\log r}\right)^4}{(\lambda(r)\,J(r))^2}.$$

Schätzen wir in (14) und (15) die rechte Seite mit Hilfe des in Nr. 4 bewiesenen Hilfssatzes nach unten ab, so bekommen wir schliesslich den

Satz. *Zu jedem δ, $0 < \delta < 2$, gehört eine unbeschränkte Wertemenge Q_δ in r, derart dass die in (12) definierte Grösse $\alpha(r,\mathfrak{M})$ in Q_δ den Ungleichungen*

[1] In bezug auf das Intervall $0 \leqq v < 2\pi$.

$$\varlimsup_{r \to \infty} \alpha(r, \mathfrak{M}) \geqq \frac{\delta h^2(\mathfrak{M})}{16 \pi^2}$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \alpha(r, \mathfrak{M}) (1 - \alpha(r, \mathfrak{M})) \geqq \frac{\delta^2 h^2(\mathfrak{M}) (2\pi - h(\mathfrak{M}))^2}{64 \pi^4}$$

genügt, wieso die Menge $\mathfrak{M}$ *vom Mass* $h(\mathfrak{M})$ *im Intervalle* $0 \leqq v < 2\pi$ *gelegen ist. Die Variation von* $\log r$ *beträgt in der zwischen* $r = 1$ *und* $r = t > 1$ *gelegenen Teilmenge von* Q_δ *mindestens*

$$\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \log t - O(1).$$