LES FAMILLES DE CÔNES DE MÊME SOMMET QUI POSSÈDENT DES HARMONIQUES.

Par

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

J'ai montré dans un article antérieur[1] que les familles orthogonales de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques sont les cyclides de révolution, et que les équations différentielles qui fournissent ces harmoniques sont des équations de Bessel, de Legendre et de Lamé. Lorsqu'on se pose la même question pour les cylindres parallèles, ou pour les cônes de même sommet, on ne trouve aucune famille qui ne soit classique; ainsi, les seules familles de cylindres parallèles possédant des harmoniques sont les familles orthogonales de plans parallèles, de cylindres coaxiaux circulaires associés à leurs plans diamétraux, de cylindres paraboliques homofocaux, avec l'équation de Weber, et les cylindres elliptiques et hyperboliques homofocaux, avec l'équation de Mathieu. On ne trouve également que les cônes homofocaux, mais ce problème offre la particularité intéressante de conduire à la résolution d'une équation différentielle elliptique analogue à celle dont dépendent les familles de surfaces de révolution; la détermination de ces cônes résulte, en effet, de la résolution de l'équation

$$\left(\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right)^2 = a\,u^4 + 4\,b\,u^3 + 6\,c u^2 + 4\,d u + e,$$

la seule différence résidant dans la nature des coefficients constants a, b, c, d, e, qui sont assujettis à la seule condition d'être réels pour les harmoniques de révolution[2], tandis qu'ils sont assujettis ici aux conditions $e = \bar{a}$, $d = -\bar{b}$, c réel. Ces conditions sont d'ailleurs invariantes dans toute rotation autour de l'origine, ce qui permet de simplifier l'équation, et, en particulier, d'annuler les coefficients

[1] «Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques», Acta mathematica, t. 71, 1939, p. 283—315.

[2] Loc. cit. p. 292.

extrêmes a et e et de supposer que b, c, d sont réels comme pour les surfaces de révolution.

1. Considérons une famille de cônes dont le sommet commun o est pris pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z. Soit

$$\xi(x, y, z) = C^{\text{te}}$$

l'équation de cette famille, et

$$\eta(x, y, z) = C^{\text{te}}$$

celle des cônes orthogonaux. Les coordonnées polaires r, θ, φ, de pôle o, d'un point de l'espace par lequel passe un cône et un seul de chaque famille, sont des fonctions uniformes de ξ, η, r,

$$\theta = \theta(\xi, \eta), \qquad \varphi = \varphi(\xi, \eta), \qquad r = r.$$

La condition d'orthogonalité des deux familles de cônes est

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \tag{1}$$

c'est à dire qu'il existe une fonction $\lambda(\xi, \eta)$ telle que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\xi} &= \lambda\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},\\ \frac{\partial\theta}{\partial\eta} &= -\frac{\sin\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Rapporté aux paramètres ξ, η, r, le ds^2 de l'espace est

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2\right]\left(d\xi^2 + \frac{1}{\lambda^2}d\eta^2\right),$$

de sorte que l'équation de Laplace $\Delta V(\xi, \eta, r) = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0. \tag{3}$$

On se propose de rechercher dans quels cas cette équation possède des intégrales primitives, de la forme

$$V = f(\xi, \eta, r)\, M(\xi)\, N(\eta)\, R(r), \tag{4}$$

où f est une fonction déterminée, tandis que les autres facteurs dépendent chacun d'un ou de plusieurs paramètres. En posant

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2\right],$$

la substitution de l'expression (4) dans (3) donne l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{f}{\lambda M}\left[\frac{d^2M}{d\xi^2} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\log\frac{f^2}{\lambda}\right)\frac{dM}{d\xi}\right] + \frac{\lambda f}{N}\left[\frac{d^2N}{d\eta^2} + \frac{\partial}{\partial\eta}(\log\lambda f^2)\frac{dN}{d\eta}\right] + \\ (5) \qquad &+ g(\xi,\eta)\frac{r^2 f}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\partial}{\partial r}(\log r^2 f^2)\frac{dR}{dr}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) + \\ &+ g(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0, \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement que $\log(r^2 f^2)$ doit être la somme d'une fonction de r et d'une fonction de ξ, η; mais alors f est le produit d'une fonction de r et d'une fonction de ξ, η, de sorte qu'en associant ce premier facteur à $R(r)$, on peut supposer que f ne dépend que de ξ et η, ce que nous ferons. Il faut en outre que $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\log\frac{f^2}{\lambda}\right)$ soit indépendant de η, et que $\frac{\partial}{\partial\eta}(\log\lambda f^2)$ soit indépendant de ξ, donc que $\frac{f^2}{\lambda}$ et λf^2 soient tous deux le produit d'une fonction de ξ par une fonction de η; cette double condition équivaut à la condition que f et λ soient eux-mêmes le produit d'une fonction de ξ par une fonction de η.

Or l'égalité $\lambda = \frac{p(\xi)}{q(\eta)}$ donne aux équations (2) la forme

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p(\xi)}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{q(\eta)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \\ \dfrac{1}{q(\eta)}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{1}{p(\xi)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \end{cases}$$

donc il suffit de substituer à ξ, η les variables $\int p(\xi)\,d\xi$ et $\int q(\eta)\,d\eta$ pour être ramené au cas $\lambda = 1$. On peut ainsi, sans restriction de la généralité, se borner à considérer les familles de cônes $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ pour lesquelles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \end{cases}$$

c'est à dire telles que $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ *et* φ *soient deux fonctions harmoniques conjugées des variables* ξ, η.

Enfin les deux facteurs de ξ et de η respectivement dont se compose f peuvent entrer dans M et N, ce qui permet de faire $f = 1$; l'équation (5) prend ainsi la forme simple

$$\frac{1}{M}\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{1}{N}\frac{d^2 N}{d\eta^2} + \frac{r^2 \varDelta_1 \theta}{R}\left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] = 0, \tag{6}$$

et se décompose tout de suite en les deux équations

$$r^2\frac{d^2 R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - kR = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{M}\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{1}{N}\frac{d^2 N}{d\xi^2} + k\varDelta_1\theta = 0, \tag{8}$$

où k représente une constante complexe quelconque. (7) est une équation d'Euler, admettant les intégrales particulières $R = r^\alpha$, où α est fourni par l'équation caractéristique $\alpha(\alpha + 1) = k$. En posant $k = m(m + 1)$, où m est un paramètre complexe quelconque, l'intégrale générale de (7) est

$$R = C_1 r^m + C_2 r^{-m-1}. \tag{9}$$

Il faut ensuite que (8) soit résoluble quel que soit ce paramètre k, donc que $\varDelta_1\theta$ soit la somme d'une fonction de ξ et d'une fonction de η, soit

$$\varDelta_1\theta = g(\xi) + h(\eta). \tag{10}$$

Cela suffit, car (8) se décompose alors en les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 M}{d\xi^2} + [m(m+1)g(\xi) + C]M = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} + [m(m+1)h(\eta) - C]N = 0, \end{cases} \tag{11}$$

où C est une constante quelconque. On peut d'ailleurs annuler C, sauf pour $k = 0$, car on a encore

$$\varDelta_1\theta = \left[g(\xi) + \frac{C}{k}\right] + \left[h(\eta) - \frac{C}{k}\right].$$

Nous avons ainsi démontré le

Théorème. *Les cônes orthogonaux, de sommet* o, $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$, *pour lesquels l'équation* $\Delta V = 0$ *admet des intégrales primitives de la forme*

$$V = f(\xi, \eta, r)\, M(\xi)\, N(\eta)\, R(r),$$

où f *est une fonction convenable, et* M, N, R *des intégrales d'équations différentielles linéaires, sont ceux pour lesquels* $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ *est une fonction harmonique de* ξ, η, *telle que*

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta} \Delta_1 \theta = 0.$$

$\varphi(\xi, \eta)$ *est une fonction harmonique conjuguée de* $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. *On peut supposer* $f = 1$, *et, si*

$$\Delta_1 \theta = g(\xi) + h(\eta),$$

les harmoniques primitifs sont de la forme

$$V = M(\xi)\, N(\eta)\, {r^m \atop r^{-m-1}},$$

où M *et* N *sont les intégrales générales des deux équations* (11).

Observons que $M(\xi)$, $N(\eta)$ sont homogènes de degré 0 en x, y, z, puisque $\xi = \text{const.}$ et $\eta = \text{const.}$ représentent des cônes, de sorte que $M(\xi)\, N(\eta)\, r^m$ est un harmonique homogène de degré m; on sait que son quotient par r^{2m+1} conserve l'harmonicité, ce qui donne l'autre harmonique $M N r^{-m-1}$.

2. Pour déterminer la fonction $\theta(\xi, \eta)$, posons

$$\alpha = \xi + i\eta, \qquad \beta = \xi - i\eta;$$

$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ est une fonction analytique de la variable complexe α, soit

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = u(\alpha),$$

et $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$ est une fonction analytique de β, soit

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} = v(\beta).$$

On peut supposer que ξ, η prennent des valeurs complexes sans que $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ cesse d'être harmonique, ce qui permet de considérer α, β comme deux variables complexes indépendantes. L'expression

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = u(\alpha)\, v(\beta) \tag{12}$$

qu'on en déduit est bien la solution générale de $\Delta \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 0$, si $u(\alpha)$, $v(\beta)$ sont deux fonctions analytiques arbitraires de α et de β. Il vient alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} u' v, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} u v',$$

donc

$$\Delta_1 \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)^2 = 4 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \cot^2 \frac{\theta}{2} u v u' v',$$

ou, compte tenu de (12) lui-même,

$$\Delta_1 \theta = \frac{4 u'(\alpha)\, v'(\beta)}{(1 + uv)^2}.$$

Cette expression est analogue à celle rencontrée dans le mémoire concernant les surfaces coaxiales de révolution[1], et n'en diffère que par le changement de v en $-\frac{1}{v}\cdot$ On a vu, à cette occasion, que, pour que $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \Delta_1 \theta = 0$, il faut et il suffit que $u(\alpha)$ et $-\frac{1}{v(\beta)}$ vérifient les deux équations[2] différentielles elliptiques aux mêmes coefficients constants a, b, c, d, e

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e,$$

$$\left(\frac{d\left(-\frac{1}{v}\right)}{d\beta}\right)^2 = a\left(\frac{-1}{v}\right)^4 + 4b\left(\frac{-1}{v}\right)^3 + 6c\left(\frac{-1}{v}\right)^2 + 4d\frac{-1}{v} + e,$$

ou enfin

$$\begin{cases} u'(\alpha)^2 = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e, \\ v'(\beta)^2 = ev^4 - 4dv^3 + 6cv^2 - 4bv + a. \end{cases} \tag{13}$$

Il ne reste plus qu'à choisir les coefficients constants de manière que u, v soient conjugués harmoniques en même temps que α, β; $u'(\alpha)^2$ et $v'(\beta)^2$ le sont aussi, donc il faut que e et $-d$ soient imaginaires conjugués de a et b, respectivement, et que c soit réel; ça suffit évidemment, en prenant soin de choisir les valeurs initiales $\beta_0, v(\beta_0), v'(\beta_0)$ imaginaires conjugués de α_0, $u(\alpha_0)$, $u'(\alpha_0)$ respectivement.

[1] Loc. cit. p. 290.
[2] Loc. cit. p. 292.

Nous avons ainsi démontré que $u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ *est l'intégrale générale de l'équation différentielle à coefficients constants*

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 - 4\bar{b}u + \bar{a} \qquad c \text{ réel.} \tag{14}$$

3. Les coefficients de cette équation dépendent non seulement de la famille des cônes en question, mais encore des axes de coordonnées auxquels elle est rapportée. La demi-droite de colatitude θ et longitude φ perce la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au point $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$, auquel on associe sa projection stéréographique $X = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi$, $Y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi$, $Z = 0$, et l'on sait que la rotation réelle la plus générale du premier se traduit, pour le second, par la transformation homographique

$$u = \frac{\lambda U - \bar{\mu}}{\mu U + \bar{\lambda}} \qquad u = X + iY = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi},$$

où λ, μ sont deux nombres complexes quelconques, et $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ leurs imaginaires conjugués. Après une telle rotation, (14) est remplacé par

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = AU^4 + 4BU^3 + 6CU^2 - 4\bar{B}U + \bar{A}, \tag{14'}$$

avec

$$(\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu})^2 A = a\lambda^4 + 4b\lambda^3\mu + 6c\lambda^2\mu^2 - 4\bar{b}\lambda\mu^3 + \bar{a}\mu^4,$$

$$(\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu})^2 B = -a\lambda^3\bar{\mu} + b\lambda^2(\lambda\bar{\lambda} - 3\mu\bar{\mu}) + 3c\lambda\mu(\lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}) - \bar{b}\mu^2(3\lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}) + \\ + \bar{a}\bar{\lambda}\mu^3,$$

$$(\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu})^2 C = a\lambda^2\bar{\mu}^2 - 2b\lambda\bar{\mu}(\lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}) + c(\lambda^2\bar{\lambda}^2 - 4\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu} + \mu^2\bar{\mu}^2) - \\ - 2\bar{b}\bar{\lambda}\mu(\lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}) + \bar{a}\bar{\lambda}^2\mu^2.$$

On peut alors choisir λ et μ de manière à annuler A; il faut et il suffit que $\frac{\lambda}{\mu}$ soit un zéro u_0 du second membre de (14), ce qui correspond bien au fait que $U = \infty$ est un zéro du second membre de (14′). On peut alors écrire

$$(u_0\bar{u}_0 + 1)^2 B = \frac{\mu}{\bar{\mu}}[-au_0^3 + bu_0^2(u_0\bar{u}_0 - 3) + 3cu_0(u_0\bar{u}_0 - 1) - \bar{b}(3u_0\bar{u}_0 - 1) + \bar{a}\bar{u}_0],$$

$$(u_0\bar{u}_0 + 1)^2 C = au_0^2 + \bar{a}\bar{u}_0^2 - 2(bu_0 + \bar{b}\bar{u}_0)(u_0\bar{u}_0 - 1) + c(u_0^2\bar{u}_0^2 - 4u_0\bar{u}_0 + 1);$$

si C est bien déterminé par le choix de u_0, B dépend en outre du facteur $\frac{\mu}{\bar{\mu}}$, de module 1, qui permet de rendre B réel. Observons d'ailleurs que la rotation autour de l'axe $o z$ se traduit par la transformation homographique

$$u = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} U,$$

ce qui donne

$$A = a \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2, \qquad B = b \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}, \qquad C = c,$$

de sorte que le facteur $\frac{\mu}{\bar{\mu}}$ de l'expression générale de B correspond à une rotation autour de $o z$, qui laisse invariants c et l'égalité $a = 0$. En résumé, *les familles de cônes cherchées se déduisent, à une rotation près autour de leur sommet, des intégrales* $u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ *de l'équation différentielle*

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right)^2 = 4 b u^3 + 6 c u^2 - 4 b u \tag{15}$$

où b et c sont deux constantes réelles.

4. *Discussion.* Les deux coefficients b, c ne peuvent être simultanément nuls, car $u(\alpha) = C^{te}$ définit une droite réelle $\theta = C^{te}$, $\varphi = C^{te}$, et non un cône. Supposons donc tout d'abord $b = 0$, $c \neq 0$. Il vient tout de suite

$$u = e^{\sqrt{6c}(\alpha - \alpha_0)};$$

si $c > 0$, ceci donne

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{\sqrt{6c}(\xi - \xi_0)}, \qquad \varphi = \sqrt{6c}(\eta - \eta_0),$$

tandis que $c < 0$ donne

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{-\sqrt{-6c}(\eta - \eta_0)}, \qquad \varphi = \sqrt{-6c}(\xi - \xi_0).$$

Les cônes correspondants sont les cônes $\theta = C^{te}$, de révolution autour de $o z$, et leurs plans diamétraux $\varphi = C^{te}$. En permutant au besoin ξ et $-\eta$, on peut supposer $c > 0$, et même réduire $\sqrt{6c}$ à l'unité en remplaçant ξ et η par des quantités proportionnelles. On peut aussi supposer $\xi_0 = \eta_0 = 0$. Il suffit donc de considérer la solution

$$u = e^{\xi + i\eta}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{\xi}, \qquad \varphi = \eta.$$

Les harmoniques correspondants sont les harmoniques sphériques, comme on le vérifie d'ailleurs aisément. On a effectivement $v = e^{\xi - i\eta}$, donc

$$\Delta_1 \theta = \frac{4\, u'\, v'}{(1 + u\, v)^2} = \frac{4\, e^{2\xi}}{(1 + e^{2\xi})^2} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\, \xi},$$

de sorte que les équations (11), où l'on fait $g(\xi) = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 \xi}$, $h(\eta) = 0$, et où l'on pose $C = -n^2$, s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 M}{d\xi^2} + \left[\dfrac{m(m+1)}{\mathrm{Ch}^2 \xi} - n^2\right] M = 0, \\ \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} + n^2 N = 0 \qquad \eta = \varphi. \end{cases}$$

Compte tenu des égalités $\mathrm{Ch}\, \xi = \frac{1}{\sin \theta}$, $d\theta = \sin\theta\, d\xi$, la première de ces équations se transforme en l'équation de Legendre de $P_n^m(\cos\theta)$

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dM}{d\theta} + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right] M = 0,$$

ce qui donne bien les harmoniques

$$M N \begin{matrix} r^m \\ r^{-m-1} \end{matrix} = \begin{matrix} P_n^m(\cos\theta) \\ Q_n^m(\cos\theta) \end{matrix} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n\varphi) \begin{matrix} r^m \\ r^{-m-1} \end{matrix}.$$

5. Etudions maintenant le cas général où $b \neq 0$. Le changement de variable

$$u = \frac{1}{b}\left(p - \frac{c}{2}\right)$$

transforme (15) en

$$\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 = 4 p^3 - g_2 p - g_3, \tag{16}$$

où

$$g_2 = 3 c^2 + 4 b^2, \qquad g_3 = -c^3 - 2 b^2 c$$

sont réels; de plus, g_2 est positif. Les zéros du second membre de (16) sont

$$e_1 = \frac{c}{2}, \qquad \left.\begin{matrix} e_2 \\ e_3 \end{matrix}\right\} = \frac{-c \pm \sqrt{9 c^2 + 16 b^2}}{4},$$

donc réels et distincts. p est la fonction elliptique de Weierstrass $\wp(\alpha - \alpha_0;\, g_2, g_3)$, d'invariants réels, et

$$u = \frac{-c}{2b} + \frac{1}{b}\wp(\alpha - \alpha_0;\ g_2, g_3), \qquad v = \frac{-c}{2b} + \frac{1}{b}\wp(\beta - \beta_0;\ g_2, g_3).$$

α_0, β_0 doivent être imaginaires conjugués; on peut même les annuler, ce qui donne enfin

$$u = \frac{\wp(\alpha;\ g_2, g_3) - e_1}{b}, \qquad v = \frac{\wp(\beta;\ g_2, g_3) - e_1}{b}. \tag{17}$$

La projection stéréographique M, de coordonnées X, Y, $Z = 0$, du point courant (x, y, z) de la famille des cônes, décrit donc le réseau $\xi = C^{te}$, $\eta = C^{te}$ des courbes planes définies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} X &= \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi = -\frac{c}{2b} + \frac{\wp\alpha + \wp\beta}{2b}, \\ Y &= \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi = \frac{\wp\alpha - \wp\beta}{2ib}, \\ Z &= 0, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

avec $\alpha = \xi + i\eta$, $\beta = \xi - i\eta$. Ce sont les équations rencontrées dans le mémoire cité[1], aux notations près. Le réseau décrit par M se compose donc de deux familles de Cartésiennes homofocales, d'axe Ox, admettant sur cet axe trois foyers réels dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$4\left(X + \frac{c}{2b}\right)^3 - \frac{g_2}{b^2}\left(X + \frac{c}{2b}\right) - \frac{g_3}{b^3} = 0,$$

c'est à dire

$$X = -\frac{c}{2b} + \frac{e_i}{b} \qquad i = 1, 2, 3,$$

ou enfin

$$X_1 = 0, \qquad \left.\begin{matrix} X_2 \\ X_3 \end{matrix}\right\} = \frac{-3c \pm \sqrt{9c^2 + 16b^2}}{4b}.$$

L'équation cartésienne de ces familles est

$$\left[\left(bX + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2Y^2 - 2\zeta\left(bX + \frac{c}{2}\right) + \frac{g_2}{4} - 2\zeta^2\right]^2 - \\ -(4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3)\left[2\left(bX + \frac{c}{2}\right) + \zeta\right] = 0, \tag{19}$$

où les valeurs $\zeta = \wp(2\xi)$ et $\zeta = \wp(2i\eta)$ du paramètre déterminent les deux Cartésiennes qui passent par le point (18). Ces Cartésiennes ne dépendent que des

[1] Loc. cit. p. 299—302.

deux paramètres $\frac{c}{b}$ et $\frac{\zeta}{b}$; leurs familles sont donc les familles des Cartésiennes homofocales d'axe $o\,x$, dont les foyers sur cet axe ont les abscisses $X_1 = o$, X_2, $\frac{-1}{X_2}$. Nous avons ainsi établi que *les cônes correspondant à l'épuation* (15) *où* $b \neq o$ *sont ceux dont l'intersection avec la sphère* $r = 1$ *est la projection stéréographique de la Cartésienne la plus générale du plan* $x\,o\,y$, *admettant pour foyers l'origine et deux points réels inverses par rapport à la sphère* $r = i$.

L'intersection avec la sphère est donc une biquadratique sphérique (cyclique) ayant pour foyers le pôle $z = -1$ de la projection, et les inverses des foyers de la Cartésienne, c'est à dire le point (o, o, 1) et deux points de la sphère diamétralement opposés. Réciproquement, toute cyclique de la sphère $r = 1$, ayant quatre foyers réels diamétralement opposés, est la projection stéréographique, par rapport à l'un de ses foyers, d'une Cartésienne ayant pour foyers le centre de la sphère et deux points réels inverses par rapport à la sphère $r = i$. On peut donc encore dire que les cônes en question sont ceux dont l'intersection avec la sphère $r = 1$ est la famille des cycliques homofocales ayant quatre foyers réels diamétralement opposés. *Ce sont donc des cônes ayant seulement quatre droites focales, dont deux réelles, c'est à dire des cônes homofocaux du second degré.*

6. Effectivement, posons

$$2\zeta - c = l, \qquad \zeta + c = q,$$

de sorte que

$$2\zeta^2 + c\zeta - c^2 = l\,q, \qquad 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3 = l\,(l\,q - 2\,b^2);$$

(19) s'écrit

$$[b^2(X^2 + Y^2) - b\,l\,X - (l\,q - b^2)]^2 - l\,(l\,q - 2\,b^2)(2\,b\,X + q) = o.$$

Le cône qui s'appuie sur la projection stéréographique de cette Cartésienne s'en déduit par la transformation

$$X = \frac{x}{z + r}, \qquad Y = \frac{y}{z + r}, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{20}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}[b^2(x^2 + y^2) - b\,l\,x(z + r) - (l\,q - b^2)(z + r)^2]^2 - \\ - l\,(l\,q - 2\,b^2)(z + r)^3[2\,b\,x + q\,(z + r)] = o.\end{aligned}$$

En remplaçant $x^2 + y^2$ par $r^2 - z^2$, le facteur $(z + r)^2$ est en évidence, et il reste le cône

$$[b\,l\,x + l\,q\,z + (l\,q - 2\,b^2)\,r]^2 - l\,(l\,q - 2\,b^2)\,(z + r)\,(2\,b\,x + q\,z + q\,r) = 0,$$

où le terme du premier degré en r disparaît, donc

$$l^2\,(b\,x + q\,z)^2 - l\,(l\,q - 2\,b^2)\,z\,(2\,b\,x + q\,z) - 2\,b^2\,(l\,q - 2\,b^2)\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

après simplification, et retour aux paramètres ζ et c, on a enfin

$$(21) \qquad (6\,c\,\zeta - g_2)\,x^2 + 2\,(2\,\zeta^2 + c\,\zeta - c^2 - 2\,b^2)\,y^2 - 4\,b^2 z^2 - 4\,b\,(2\,\zeta - c)\,x\,z = 0.$$

Les droites focales réelles de ces cônes quadratiques sont les transformées par (20) des foyers de la Cartésienne, c'est à dire l'axe $o\,z$ et la droite $\frac{x}{4\,b} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3\,c}\cdot$ L'équation canonique s'obtient en prenant pour nouveaux axes $o\,x'$ et $o\,z'$ les bissectrices de ces droites focales, c'est à dire les parallèles aux droites joignant le centre $(0, 0, -1)$ de la projection stéréographique aux foyers de la Cartésienne, d'abscisses X_2 et X_3. Les équations de ces nouveaux axes sont

$$y = 0, \qquad x - X_i\,z = 0, \qquad i = 2,\ 3,$$

ou

$$y = 0, \qquad b\,x - (e_i - e_1)\,z = 0, \qquad i = 2,\ 3.$$

En observant que $b^2 = -(e_2 - e_1)\,(e_3 - e_1)$, et en choisissant $e_2 < e_1 < e_3$, on est ainsi conduit à poser

$$\begin{cases} b\,x - (e_3 - e_1)\,z = \sqrt{(e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2)}\,x', \\ b\,x + (e_1 - e_2)\,z = \sqrt{(e_1 - e_2)\,(e_3 - e_2)}\,z', \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{e_1 - e_2}\,x' + \sqrt{e_3 - e_1}\,z'}{\operatorname{sgn} b\,\sqrt{e_3 - e_2}}, \\[2ex] z = \dfrac{-\sqrt{e_3 - e_1}\,x' + \sqrt{e_1 - e_2}\,z'}{\sqrt{e_3 - e_2}}. \end{cases}$$

L'équation (21), qui s'écrit encore

$$\left(3\,e_1\,\zeta - \frac{g_2}{4}\right)x^2 + (\zeta - e_2)\,(\zeta - e_3)\,y^2 - b^2 z^2 - 2\,b\,(\zeta - e_1)\,x\,z = 0,$$

prend alors la forme

$$(22) \qquad (e_1 - e_2)\,(\zeta - e_3)\,x'^2 + (\zeta - e_2)\,(\zeta - e_3)\,y'^2 + (e_1 - e_3)\,(\zeta - e_2)\,z'^2 = 0$$

où $y' = y$. Il suffit enfin de poser

$$\zeta - e_1 = \frac{-b^2}{\varrho - e_1} = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\varrho - e_1} \tag{23}$$

pour obtenir l'équation canonique cherchée

$$\frac{x'^2}{\varrho - e_3} + \frac{y'^2}{\varrho - e_1} + \frac{z'^2}{\varrho - e_2} = 0, \tag{24}$$

qui met en évidence la nature homofocale de la famille.

7. Les harmoniques correspondants sont bien connus. Parmi eux, sont particulièrement intéressants les polynômes homogènes de la forme

$$y'^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}} z'^{\frac{1+\varepsilon_2}{2}} x'^{\frac{1+\varepsilon_3}{2}} \prod_{s=1}^{p} \left(\frac{y'^2}{\varrho_s - e_1} + \frac{z'^2}{\varrho_s - e_2} + \frac{x'^2}{\varrho_s - e_3} \right), \tag{25}$$

où les ϱ_s sont les zéros d'un polynôme en ϱ, de degré p, vérifiant l'équation différentielle de Lamé

$$(\varrho - e_1)(\varrho - e_2)(\varrho - \varepsilon_3) \frac{d^2 P}{d \varrho^2} + \\ + \left[\sum \frac{2 + \varepsilon_1}{2} (\varrho - e_2)(\varrho - \varepsilon_3) \right] \frac{d P}{d \varrho} - \left[p \left(p + 2 + \frac{\Sigma \varepsilon_1}{2} \right) \varrho + h \right] P = 0,$$

dont le paramètre h a $p + 1$ valeurs réelles bien déterminées lorsque le nombre entier $p \geq 0$ et les valeurs ± 1 des ε_i sont données; les symboles $\sum$ se rapportent à la permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

Montrons comment ces résultats peuvent se déduire du théorème général du paragraphe 1. On est conduit à former tout d'abord $\Delta_1 \theta$, dont la valeur, d'après (17), est

$$\Delta_1 \theta = \frac{4 u' v'}{(1 + u v)^2} = \frac{4}{b^2} \frac{\wp' \alpha \, \wp' \beta}{\left[1 + \frac{(\wp \alpha - e_1)(\wp \beta - e_1)}{b^2} \right]^2};$$

il est a priori de la forme $g(\xi) + h(\eta)$, donc $\eta = 0$ donne

$$g(\xi) + h(0) = \frac{4 b^2 (\wp' \xi)^2}{[(\wp \xi - e_1)^2 + b^2]^2} = 4 b^2 \left[\frac{\wp' \xi}{(\wp \xi - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right]^2,$$

ou, grâce à une formule classique,

$$g(\xi) + h(0) = \frac{4\,b^2}{\wp(2\,\xi) - e_1};$$

de même, $\xi = 0$ donne

$$g(0) + h(\eta) = \frac{-4\,b^2}{\wp(2\,i\eta) - e_1};$$

enfin $g(0) + h(0) = 0$, donc

$$\Delta_1\theta = g(\xi) + h(\eta) = 4\,b^2\left[\frac{1}{\wp(2\,\xi) - e_1} - \frac{1}{\wp(2\,i\,\eta) - e_1}\right]. \tag{26}$$

Les équations (11), où l'on pose $C = 4\,k\,b^2$, prennent alors la même forme[1]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 M}{d(2\,\xi)^2} - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\left[\dfrac{m(m+1)}{\wp(2\,\xi) - e_1} + k\right] M = 0, \\ \dfrac{d^2 N}{d(2\,i\,\eta)^2} - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\left[\dfrac{m(m+1)}{\wp(2\,i\,\eta) - e_1} + k\right] N = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Ce sont des équations de Lamé du type généralisé, identiques, aux notations près, à celles qui fournissent les harmoniques des cyclides de révolution.[2] Rappelons que la forme algébrique de l'équation

$$\frac{d^2 \Lambda}{d x^2} - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\left[\frac{m(m+1)}{\wp x - e_1} + k\right]\Lambda = 0, \tag{28}$$

où l'on prend $\wp x = \zeta$ comme variable, est

$$\begin{aligned} 4(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2} + 2\left(3\,\zeta^2 - \frac{g_2}{4}\right)\frac{d\Lambda}{d\zeta} - \\ - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\left[\frac{m(m+1)}{\zeta - e_1} + k\right]\Lambda = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Si donc $E_m^k(\zeta)$ et $F_m^k(\zeta)$ sont deux intégrales distinctes de (29), les harmoniques des cônes (21) sont

$$\begin{matrix} r^m \\ r^{-m-1} \end{matrix} \times \begin{matrix} E_m^k(\wp(2\,\xi)) \\ F_m^k(\wp(2\,\xi)) \end{matrix} \times \begin{matrix} E_m^k(\wp(2\,i\,\eta)) \\ F_m^k(\wp(2\,i\,\eta)) \end{matrix}. \tag{30}$$

Mais au lieu d'étudier directement l'équation (29), ce qui ne présente pas plus de difficultés que pour l'équation ordinaire de Lamé, les observations faites au paragraphe 6 suggèrent d'effectuer le nouveau changement de variable (23). Il vient ainsi

---

[1] On a fait $g(0) = h(0) = 0$.

[2] loc. cit. p. 314.

$$\zeta - e_1 = \frac{-b^2}{\varrho - e_1}, \qquad \zeta - e_2 = (e_1 - e_2)\frac{\varrho - e_3}{\varrho - e_1}, \qquad \zeta - e_3 = (e_1 - e_3)\frac{\varrho - e_2}{\varrho - e_1},$$

de sorte que ce changement de variable permute entre eux les quatre points singuliers e_1, e_2, e_3, ∞ de l'équation (29). On a d'autre part

$$\frac{dA}{d\zeta} = \frac{b^2}{(\zeta - e_1)^2}\frac{dA}{d\varrho} = \frac{(\varrho - e_1)^2}{b^2}\frac{dA}{d\varrho},$$

$$\frac{d^2A}{d\zeta^2} = \frac{(\varrho - e_1)^3}{b^4}\left[(\varrho - e_1)\frac{d^2A}{d\varrho^2} + 2\frac{dA}{d\varrho}\right],$$

$$3\zeta^2 - \frac{g_2}{4} = \sum (\zeta - e_2)(\zeta - e_3) =$$

$$= \frac{-b^2}{(\varrho - e_1)^2}[(\varrho - e_2)(\varrho - e_3) + (e_1 - e_2)(\varrho - e_3) + (e_1 - e_3)(\varrho - e_2)],$$

de sorte que (29) devient

$$4(\varrho - e_1)(\varrho - e_2)(\varrho - e_3)\frac{d^2A}{d\varrho^2} + 2[3(\varrho - e_2)(\varrho - e_3) - (e_1 - e_2)(\varrho - e_3) - (e_1 - e_3)(\varrho - e_2)]\frac{dA}{d\varrho} -$$

$$- [m(m+1)(\varrho - e_1) - k b^2]A = 0;$$

le coefficient de $\dfrac{dA}{d\varrho}$ est encore de la forme $2\left(3\varrho^2 - \dfrac{g_2}{4}\right)$, ce qui donne enfin l'équation ordinaire de Lamé

$$(31) \qquad (\varrho - e_1)(\varrho - e_2)(\varrho - e_3)\frac{d^2A}{d\varrho^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum (\varrho - e_2)(\varrho - e_3)\right]\frac{dA}{d\varrho} - \left[\frac{m(m+1)}{4}(\varrho - e_1) - \frac{k b^2}{4}\right]A = 0.$$

Sans qu'il soit utile de refaire le calcul classique qui permet de former les harmoniques ellipsoïdaux[1], il nous suffira d'indiquer, pour terminer, que les harmoniques (25) se déduisent de (30) en utilisant les intégrales de (31) qui sont de la forme

$$A(\varrho) = (\varrho - e_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}(\varrho - e_2)^{\frac{\alpha_2}{2}}(\varrho - e_3)^{\frac{\alpha_3}{2}} P(\varrho),$$

où $P(\varrho)$ est un polynôme en ϱ; les exposants caractéristiques des e_i étant 0 et $\frac{1}{2}$, les seules intégrales de cette forme sont fournies par les valeurs 0 ou 1 des α_i.

[1] Une application détaillée de ce calcul, relative aux cyclides de révolution, est exposée dans l'article « Sur une classe d'harmoniques associés aux cyclides de révolution », Bull. Soc. math., t. 72, 1944, p. 169.