VERALLGEMEINERUNG EINES MITTELWERTSATZES VON J. FAVARD FÜR POSITIVE KONKAVE FUNKTIONEN.

Von

L. BERWALD[1].

Einleitung.

1. Nach J. L. W. V. JENSEN[2] heisst eine Funktion $f(x)$, die für je zwei Argumentwerte $x^{(1)}, x^{(2)}$ aus ihrem Definitionsintervall der Ungleichung

$$(1.1) \qquad f\left(\frac{x^{(1)}+x^{(2)}}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}[f(x^{(1)})+f(x^{(2)})], \quad \text{bezw.} \quad \geqq \frac{1}{2}[f(x^{(1)})+f(x^{(2)})]$$

genügt, *konvex* bezw. *konkav*. J. FAVARD[3] hat vor einigen Jahren für positive konkave Funktionen folgenden Mittelwertsatz ausgesprochen:

In $a \leqq x \leqq b$ *sei* $f(x) \geqq 0$, *konkav, stetig*[4], *nicht identisch Null, und*

$$(1.2) \qquad \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

---

[1] In 1939, BERWALD lost his position as a professor of mathematics at the German University of Prague because he was regarded as a »non-aryan». On the 26th of October, 1941, he was deported to Lodz (Litzmannstadt) Ghetto. There he died in February or March, 1942. Before he left Prague he handed me five manuscripts of mathematical papers which he had composed, but had not been able to publish during the war. Two of these manuscripts are printed here. H. LÖWIG (Prague).

[2] J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta math. 30 (1906), 175—193.

[3] J. FAVARD, Sur les valeurs moyennes. Bull. Sci. Math. (2) 57 (1933), 54—64. Herr FAVARD nimmt als Integrationsintervall das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und schreibt an Stelle des Integrals links in (1.3) einen äquivalenten Mittelwert, in unserer Bezeichnungsweise $\int_0^1 \psi(2x\bar{f})\,dx$.

[4] Die Stetigkeit in $a < x < b$ folgt aus den vorhergehenden Voraussetzungen.

$m(y)$ sei in $0 \leqq y \leqq 2\bar{f}$ beschränkt und nicht abnehmend[1], $\psi(y) = \int_0^y m(t)\,dt$ $(0 \leqq y \leqq 2\bar{f})$.
Dann gilt

$$\frac{1}{2\bar{f}} \int_0^{2\bar{f}} \psi(y)\,dy \geqq \frac{1}{b-a} \int_a^b \psi(f(x))\,dx. \tag{1.3}$$

In (1.3) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f(x)$ eine »Dachfunktion von der Höhe $2\bar{f}$« ist, d. h. in $a \leqq x \leqq b$ den grössten Wert $2\bar{f}$ hat und aus zwei linearen Stücken zwischen den Werten $f(a) = f(b) = 0$ besteht, von denen eines auch fehlen kann.

Favard stellt auch einen entsprechenden Satz für konkave Funktionen mehrerer Veränderlichen auf und leitet aus beiden Sätzen einige besondere Ungleichungen her.

Im folgenden wird zunächst der Mittelwertsatz von Favard (§ 1), sodann die von ihm angegebenen Ungleichungen für Funktionen einer Veränderlichen (§ 2) verallgemeinert. Ferner wird die entsprechende Verallgemeinerung für konkave Funktionen mehrerer Veränderlichen abgeleitet und auf besondere Ungleichungen angewendet (§ 3). Schliesslich wird ein entsprechender Satz für die Abschätzung nach der anderen Seite angegeben. Der Grundgedanke des Beweises ist durchwegs der des Beweises von Favard für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

§ 1. Sätze über positive konkave Funktionen einer Veränderlichen.

2. Wir beweisen zunächst folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes von Favard:

Satz 1. *In $a \leqq x \leqq b$ sei $f(x) \geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null. In $0 \leqq y \leqq Y$, wo Y hinreichend gross ist, sei $\varphi(y)$ monoton im engeren Sinn und stetig. Dann hat die Gleichung*

$$\frac{1}{z} \int_0^z \varphi(y)\,dy = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x))\,dx \tag{2.1}$$

genau eine wesentlich positive Nullstelle $z = \hat{M}$.

[1] *Im folgenden wird stets vorausgesetzt, dass die nicht abnehmende (und ebenso die nicht zunehmende, bezw. monotone) Funktion im Innern ihres Definitionsintervalls* **nicht konstant** *ist.* Andernfalls müssen die Angaben über die Giltigkeit des Gleichheitszeichens in den Sätzen dieser Arbeit geändert werden.

Weiter sei $m(y)$ *in* $0 \leqq y \leqq \hat{M}$ *beschränkt und monoton, und*

$$\psi(y) = \int_0^y m(t)\, d\varphi(t) \qquad (0 \leqq y \leqq \hat{M})$$

wo rechts ein Stieltjes-Integral steht. Dann gilt

$$\frac{1}{\hat{M}} \int_0^{\hat{M}} \psi(y)\, dy \geqq \frac{1}{b-a} \int_a^b \psi(f(x))\, dx, \tag{2.2}$$

wenn $\varphi(y)$ *und* $m(y)$ *gleichsinnig monoton sind und*

$$\frac{1}{\hat{M}} \int_0^{\hat{M}} \psi(y)\, dy \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b \psi(f(x))\, dx, \tag{2.3}$$

wenn sie ungleichsinnig monoton sind. Das Gleichheitszeichen steht in (2.2), (2.3) *dann und nur dann, wenn* $f(x)$ *eine Dachfunktion von der Höhe* $\hat{M}$ *ist.*

Für die Giltigkeit des Satzes 1 ist offenbar $Y = \hat{M}$ hinreichend. Der Satz von Favard geht aus Satz 1 für $\varphi(y) = y$ und nicht abnehmendes $m(y)$ hervor. (2.1)—(2.3) ändern sich bei Addition einer Konstanten zu $\varphi(y)$ bezw. $\psi(y)$ nicht.

Beweis. x, y seien rechtwinklige Koordinaten. Zunächst sei $m(y)$ nicht abnehmend, $\varphi(y)$ zunehmend. Wir können annehmen, dass $\varphi(0) = 0$. M sei der grösste Wert von $f(x)$ in $a \leqq x \leqq b$, $s(y)$ für $y \leqq M$ die Länge der Strecke, auf der $f(x) \geqq y$, für $y > M$ Null. Die »Sehnenfunktion» $s(y)$ ist in $0 \leqq y \leqq M$ stetig, positiv und nicht zunehmend bezw. konstant gleich $b - a$.

Wir berechnen auf zwei Arten das Stieltjes-Doppelintegral

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{b-a} \iint_{\mathfrak{B}} dx\, d\varphi(y), \tag{2.4}$$

erstreckt über den konvexen Bereich $\mathfrak{B}$, der von der x-achse, dem Kurvenbogen $y = f(x)$ und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist, und erhalten so

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x))\, dx = \frac{1}{b-a} \int_0^M s(y)\, d\varphi(y). \tag{2.5}$$

Insbesondere haben die Dachfunktionen $\hat{f}(x, \xi)$, deren grösster Wert $\hat{M} > 0$ ($\hat{M}$ zunächst beliebig) die Abszisse ξ ($a \leqq \xi \leqq b$) hat, alle die Sehnenfunktion

$$\hat{s}(y) = \left(1 - \frac{y}{\hat{M}}\right)(b - a). \tag{2.6}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (2.5) und Teilintegration ergibt sich

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(\hat{f}(x, \xi))\, dx = \frac{1}{b-a}\int_0^{\hat{M}} \hat{s}(y)\, d\varphi(y) = \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \varphi(y)\, dy. \tag{2.7}$$

Durch zweifache Berechnung des Doppelintegrals

$$\overline{\psi} = \frac{1}{b-a}\iint_{\mathfrak{B}} m(y)\, dx\, d\varphi(y) \tag{2.8}$$

findet man ebenso

$$\overline{\psi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\, dx = \frac{1}{b-a}\int_0^M m(y)\, s(y)\, d\varphi(y), \tag{2.9}$$

und für Dachfunktionen $\hat{f}(x, \xi)$ von der Höhe $\hat{M}$ entsprechend

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(\hat{f}(x, \xi))\, dx = \frac{1}{b-a}\int_0^{\hat{M}} m(y)\, \hat{s}(y)\, d\varphi(y) = \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \psi(y)\, dy. \tag{2.10}$$

Wegen (2.5), (2.9) hat $\overline{\varphi}$ und ebenso $\overline{\psi}$ für alle stetigen positiven konkaven Funktionen $f(x)$ mit derselben Sehnenfunktion $s(y)$ den gleichen Wert. Man kann also alle zur x-achse parallelen Sehnen des Bereiches $\mathfrak{B}$ in ihrer Richtung beliebig so verschieben, dass dadurch ein neuer konvexer Bereich entsteht, ohne $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ zu ändern. Wir beschränken uns daher weiterhin auf diejenigen Bereiche $\mathfrak{B}_0$, $\hat{\mathfrak{B}}_0$ mit der Sehnenfunktion $s(y)$ bezw. $\hat{s}(y)$, die zur Geraden $x = \frac{a+b}{2}$ symmetrisch liegen[1]. Dementsprechend bedeutet $f(x)$ im folgenden die Funktion, die in der Gleichung $y = f(x)$ der »oberen» Randkurve von $\mathfrak{B}_0$ auftritt. $\hat{\mathfrak{B}}_0$ ist ein Dreiecksbereich mit der oberen Randkurve $y = \hat{f}\left(x, \frac{a+b}{2}\right)$.

[1] $\mathfrak{B}_0$, $\hat{\mathfrak{B}}_0$ sind konvex. $\mathfrak{B}_0$ entsteht aus $\mathfrak{B}$ durch »Transformation durch homothetische Schnitte». Vgl. etwa T. Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. Paris 1929, S. 124 f.; T. Bonnesen und W. Fenchel, Théorie der konvexen Körper. Berlin 1934, S. 73.

Zunächst beweisen wir, dass (2.1) oder

$$(2.11)\qquad F(z) \equiv \int_0^z \varphi(y)\,dy - \overline{\varphi} z = 0$$

eine einzige wesentlich positive Wurzel hat. Die Ableitung $F'(z)$ ist für $z \geqq 0$ stetig, zunehmend, und

$$(2.12)\qquad F'(0) = -\overline{\varphi} < 0, \quad F'(M) = \varphi(M) - \overline{\varphi} = \frac{1}{b-a}\int_0^M [b - a - s(y)]\,d\varphi(y) \geqq 0.$$

Also hat $F'(z)$ genau eine positive Nullstelle $z_0 (0 < z_0 \leqq M)$. $F(z)$ selbst ist daher konvex, nimmt in $0 < z < z_0$ von Null ausgehend ab und für $z > z_0$ zu. Da eine für $x \geqq x_0$ stetige zunehmende konvexe Funktion $K(x)$ durch jeden Wert $> K(x_0)$ genau einmal hindurchgeht, ist die Behauptung bewiesen.

Wir setzen jetzt voraus, dass $f(x)$ keine Dachfunktion ist, und wählen für die bisher willkürliche Zahl $\hat{M} > 0$ die positive Nullstelle von (2.11). Dann ist $\hat{M} > M$. Denn wäre $\hat{M} \leqq M$, so wäre der Bereich $\hat{\mathfrak{B}}_0$ wegen der Konvexität von $\mathfrak{B}_0$ ein echter Teilbereich von $\mathfrak{B}_0$, also

$$(2.13)\qquad \hat{s}(y) - s(y) < 0 \quad \text{in} \quad 0 < y < M,$$

und wegen der Stetigkeit von $s(y)$, $\hat{s}(y)$ in diesem Intervall

$$(2.14)\qquad F(\hat{M}) = \frac{\hat{M}}{b-a}\int_0^{\hat{M}} [\hat{s}(y) - s(y)]\,d\varphi(y) < 0.$$

Andererseits ist auch $\mathfrak{B}_0$ kein Teilbereich von $\hat{\mathfrak{B}}_0$. Denn aus

$$(2.15)\qquad \hat{s}(y) - s(y) \geqq 0 \quad \text{in} \quad 0 < y < M, \quad > 0 \text{ in } M < y < \hat{M}$$

würde ebenso $F(\hat{M}) > 0$ folgen.

Da $\mathfrak{B}_0$ konvex ist, hat jede der beiden Randgeraden $y = \hat{f}\left(x, \frac{a+b}{2}\right)$ von $\hat{\mathfrak{B}}_0$ mit der Randkurve $y = f(x)$ von $\mathfrak{B}_0$ ausser etwaigen Schnittpunkten $(a, 0)$ bezw. $(b, 0)$ genau einen Punkt gemeinsam. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist wegen der Symmetrie von $\mathfrak{B}_0$, $\hat{\mathfrak{B}}_0$ zur Geraden $x = \frac{a+b}{2}$ parallel zur x-achse. Ihre Gleichung sei $y = y^{(0)} (0 < y^{(0)} \leqq M)$. Dann ist

$$(2.16)\qquad s(y) - \hat{s}(y) > 0 \quad \text{in} \quad 0 < y < y^{(0)}, \quad < 0 \quad \text{in} \quad y^{(0)} < y < \hat{M},$$

also

$$(2.17)\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx - \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_0^{y^{(0)}} [s(y)-\hat{s}(y)]\,d\varphi(y) - \int_{y^{(0)}}^{\hat{M}} [\hat{s}(y)-s(y)]\,d\varphi(y)\right\} = 0.$$

Da $m(y)$ nicht abnimmt und in $0<y<\hat{M}$ nicht konstant ist, so folgt wegen (2.16)

$$(2.18)\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\,dx - \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \psi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_0^{y^{(0)}} m(y)[s(y)-\hat{s}(y)]\,d\varphi(y) - \int_{y^{(0)}}^{\hat{M}} m(y)[\hat{s}(y)-s(y)]\,d\varphi(y)\right\} < 0.$$

Ist $f(x)$ Dachfunktion von der Höhe M, so ist

$$\hat{M} = M,\quad \hat{s}(y) = s(y),\quad \hat{f}\left(x, \frac{a+b}{2}\right) = f(x)$$

und in (2.2) gilt das Gleichheitszeichen.

Wenn $m(y)$ in $0<y<\hat{M}$ nicht zunimmt, so ist offenbar in (2.18) bezw. (2.2) das Ungleichheitszeichen umzukehren.

Nimmt $\varphi(y)$ in $0 \leqq y \leqq Y$ ab, so setzen wir

$$(2.19)\quad \varphi(y) = -\varphi_1(y),\quad \psi(y) = \int_0^y m(t)\,d\varphi(t) = -\int_0^y m(t)\,d\varphi_1(t) = -\psi_1(y).$$

Für $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$ gilt dann das bisher Bewiesene. Beim Übergang von $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$ zu $\varphi(y)$, $\psi(y)$ ändert sich (2.1) nicht und in (2.2), (2.3) kehren sich die Ungleichheitszeichen um.

3. In § 2 benutzen wir, dass $\int_a^b \log f(x)\,dx$ und $\int_a^b f(x)^t\,dx$, $(-1<t<0)$ für jede in $a \leqq x \leqq b$ positive konkave stetige Funktion $f(x)$, die nicht identisch Null ist, existiert. Das folgt aus

Satz 2. *In $a \leqq x \leqq b$ sei $f(x) \geqq 0$, konkav, stetig und habe das Maximum $M>0$. $f(a)\cdot f(b)$ sei Null. $\varphi(y)$ sei in $0<y\leqq M$ monoton und nicht beschränkt, aber das uneigentliche Integral $\int_0^M \varphi(y)\,dy$ konvergiere. Dann konvergiert auch $\int_a^b \varphi(f(x))\,dx$.*

Beweis. Zunächst nehme $\varphi(y)$ in $0<y\leqq M$ nicht ab. Ferner sei $f(\xi^{(0)})=M$, und

$$\hat{f}(x,\xi^{(0)})=\begin{cases} M\dfrac{x-a}{\xi^{(0)}-a} & \text{in} \quad a\leqq x\leqq \xi^{(0)}, \\ M\dfrac{b-x}{b-\xi^{(0)}} & \text{in} \quad \xi^{(0)}\leqq x\leqq b, \end{cases} \tag{3.1}$$

endlich $0<\varepsilon_1<\xi^{(0)}-a$, $0<\varepsilon_2<b-\xi^{(0)}$. Dann ergibt eine einfache Rechnung

$$\int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}\varphi(\hat{f}(x,\xi^{(0)}))\,dx=\frac{\xi^{(0)}-a}{M}\int\limits_{M\frac{\varepsilon_1}{\xi^{(0)}-a}}^{M}\varphi(y)\,dy+\frac{b-\xi^{(0)}}{M}\int\limits_{M\frac{\varepsilon_2}{b-\xi^{(0)}}}^{M}\varphi(y)\,dy. \tag{3.2}$$

Wegen der Konvergenz des Integrals $\int\limits_0^M\varphi(y)\,dy$ folgt aus (3.2) für $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(\hat{f}(x,\xi^{(0)}))\,dx=\frac{1}{M}\int\limits_0^M\varphi(y)\,dy. \tag{3.3}$$

Da $\varphi(y)<0$ für hinreichend kleine $y>0$, so ergibt sich aus (3.2), (3.3)

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}\varphi(\hat{f}(x,\xi^{(0)}))\,dx>\frac{1}{M}\int\limits_0^M\varphi(y)\,dy. \tag{3.4}$$

Setzen wir jetzt etwa $f(a)=f(b)=0$ voraus! In $a\leqq x\leqq b$ folgt dann aus der Konkavität von $f(x)$ $f(x)\geqq\hat{f}(x,\xi^{(0)})$ und aus der Monotonie von $\varphi(y)$ weiter $\varphi(f(x))\geqq\varphi(\hat{f}(x,\xi^{(0)}))$. Daher ist

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}\varphi(f(x))\,dx\geqq\frac{1}{b-a}\int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}\varphi(\hat{f}(x,\xi^{(0)}))\,dx>\frac{1}{M}\int\limits_0^M\varphi(y)\,dy. \tag{3.5}$$

Somit konvergiert $\int\limits_a^b\varphi(f(x))\,dx$ und man hat

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(f(x))\,dx\geqq\frac{1}{M}\int\limits_0^M\varphi(y)\,dy. \tag{3.6}$$

Ist $f(a)=0$, $f(b)>0$, bezw. $f(a)>0$, $f(b)=0$, so gelten die gleichen Schlüsse mit $\varepsilon_2=0$, bezw. $\varepsilon_1=0$. Wenn $\varphi(y)$ in $0<y\leqq M$ nicht zunimmt, so folgt die Behauptung aus dem für die nicht abnehmende Funktion $-\varphi(y)$ Bewiesenen.

Mit Hilfe des Satzes 2 beweisen wir schliesslich noch einen

Zusatz zu Satz 1. *Satz 1 bleibt auch unter folgenden Voraussetzungen über* $\varphi(y)$ *und* $\psi(y)$ *giltig: In* $0 < y \leqq Y$ *ist* $\varphi(y)$ *im engeren Sinn monoton, stetig, nicht beschränkt, aber* $y^{\mu}\varphi(y)$ *für ein* μ *aus* $0 < \mu < 1$ *beschränkt.* $\psi(y)$ *ist für jedes* ε *aus* $0 < \varepsilon \leqq \hat{M}$ *durch*

$$\psi(y) = \psi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{y} m(t)\, d\varphi(t) \qquad (\varepsilon \leqq y \leqq \hat{M})$$

erklärt.

In die beim Beweise des Satzes 1 benutzten Integralformeln gehen jetzt uneigentliche Integrale ein. Wir zeigen, dass bei etwas anderer Schreibweise dieser Formeln die auftretenden uneigentlichen Integrale konvergieren. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass $\varphi(y)$ zunimmt, $m(y)$ nicht abnimmt. Die übrigen Fälle erledigen sich ebenso.

Zunächst sei $f(a) = f(b) = 0$. In hinreichend kleinen Intervallen $a \leqq x \leqq \xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} \leqq x \leqq b$, $(\xi^{(1)} \leqq \xi^{(2)})$ nimmt die stetige konkave Funktion $y = f(x)$ zu, bezw. ab. Sie hat also in den entsprechenden y-Intervallen je eine stetige inverse Funktion $f_1^*(y)$ bezw. $f_2^*(y)$ mit $f_1^*(0) = a$, $f_2^*(0) = b$. Wir berechnen auf zwei Arten das Doppelintegral

$$\overline{\varphi}^* = \frac{1}{b-a} \iint_{\mathfrak{B}^*} dx\, d\varphi(y), \tag{3.7}$$

erstreckt über den Bereich $\mathfrak{B}^*$, der vom Kurvenbogen $y = f(x)$ und der Geraden $y = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, hinreichend klein), begrenzt ist und erhalten bei gleicher Bezeichnungsweise wie im Beweise des Satzes 1

$$\frac{1}{b-a} \int_{f_1^*(\varepsilon)}^{f_2^*(\varepsilon)} [\varphi(f(x)) - \varphi(\varepsilon)]\, dx = \frac{1}{b-a} \int_{\varepsilon}^{M} s(y)\, d\varphi(y)$$

oder

$$\frac{1}{b-a} \int_{f_1^*(\varepsilon)}^{f_2^*(\varepsilon)} \varphi(f(x))\, dx + \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{b-a}\left(\frac{b-f_2^*(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{f_1^*(\varepsilon)-a}{\varepsilon}\right) = \varphi(M) - \frac{1}{b-a}\int_{\varepsilon}^{M}(b-a-s(y))\, d\varphi(y). \tag{3.8}$$

Da $f(x)$ konkav ist, so ist

$$\frac{f(x)}{x-a} \geqq \frac{M}{\xi^{(0)}-a}, \quad \text{wenn } f(\xi^{(0)}) = M,\ a < x \leqq \xi^{(0)}.$$

Also gilt

$$0 \leqq \frac{f_1^*(\varepsilon)-a}{\varepsilon} = \frac{x-a}{f(x)} \leqq \frac{\xi^{(0)}-a}{M}.$$

Entsprechend folgt die Beschränktheit von $\frac{b-f_2^*(\varepsilon)}{\varepsilon}$. Wegen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\,\varphi(\varepsilon) = 0$ ergibt der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$(3.9) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx = \varphi(M) - \frac{1}{b-a}\int_0^M (b-a-s(y))\,d\varphi(y).$$

Das Integral links konvergiert nach Satz 2. Also konvergiert auch das Integral rechts. Ist $f(a) > 0$, bezw. $f(b) > 0$, so ist im Vorstehenden $f_1^*(\varepsilon)$ durch a, bezw. $f_2^*(\varepsilon)$ durch b zu ersetzen.

Ebenso ist für die im Beweise des Satzes 1 auftretenden Dachfunktionen

$$(3.10) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(\hat{f}(x,\xi)) = \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \varphi(y)\,dy = \varphi(\hat{M}) - \frac{1}{b-a}\int_0^{\hat{M}} (b-a-\hat{s}(y))\,d\varphi(y).$$

Für die Funktion $\psi(y)$ ergibt Abschätzung des Integrals in

$$(3.11) \qquad \psi(\hat{M}) = \psi(y) + \int_y^{\hat{M}} m(t)\,d\varphi(t), \qquad (0 < y < \hat{M})$$

die Ungleichungen

$$(3.12) \qquad y^\mu[\psi(\hat{M}) - m(\hat{M})\varphi(\hat{M})] + m(\hat{M})y^\mu\varphi(y) \leqq y^\mu\psi(y) \leqq$$
$$\leqq y^\mu[\psi(\hat{M}) - m(y)\varphi(\hat{M})] + m(y)y^\mu\varphi(y).$$

Da $m(y)$ und $y^\mu\varphi(y)$ in $0<y\leqq\hat{M}$ beschränkt sind, so ist es auch $y^\mu\psi(y)$. Daher konvergiert $\int_0^{\hat{M}}\psi(y)\,dy$ und für $\hat{M}\geqq M$ auch $\int_0^M \psi(y)\,dy$, also nach Satz 2 $\int_a^b \psi(f(x))\,dx$. Zweifache Berechnung des Doppelintegrals

$$(3.13) \qquad \bar{\psi}^* = \frac{1}{b-a}\iint\limits_{\mathfrak{B}^*} m(y)\,dx\,d\varphi(y)$$

und Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt auf dieselbe Weise wie oben

$$(3.14) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\,dx = \psi(M) - \frac{1}{b-a}\int_0^M m(y)\,(b-a-s(y))\,d\varphi(y)$$

und

$$(3.15) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(\hat{f}(x,\xi))\,dx = \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \psi(y)\,dy = \psi(\hat{M}) - \frac{1}{b-a}\int_0^{\hat{M}} m(y)\,(b-a-\hat{s}(y))\,d\varphi(y).$$

Die in (3.14), (3.15) neu auftretenden uneigentlichen Integrale konvergieren also. Aus (3.9), (3.10), (3.14), (3.15) folgt weiter

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx - \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \varphi(y)\,dy = \int_0^{\mathrm{Max}(M,\hat{M})} [s(y)-\hat{s}(y)]\,d\varphi(y) \tag{3.16}$$

und für $\hat{M} \geqq M$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\,dx - \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \psi(y)\,dy = \int_0^{\hat{M}} m(y)\,[s(y)-\hat{s}(y)]\,d\varphi(y). \tag{3.17}$$

Damit ist die Giltigkeit aller im Beweise des Satzes 1 benutzten Formeln unter den neuen Voraussetzungen gezeigt. Die aus diesen Formeln gezogenen Schlüsse bleiben im wesentlichen unverändert.

§ 2. Anwendungen.

4. Eine erste Anwendung des Satzes 1 erhalten wir für

$$\varphi(y) = y^\alpha, \quad m(y) = \frac{\beta}{\alpha} y^{\beta-\alpha}, \quad \text{also} \quad \psi(y) = y^\beta \qquad (0 < \alpha < \beta).$$

Es ist dann

$$\frac{1}{z}\int_0^z \varphi(y)\,dy = \frac{z^\alpha}{\alpha+1}, \quad \frac{1}{\hat{M}}\int_0^{\hat{M}} \psi(y)\,dy = \frac{\hat{M}^\beta}{\beta+1},$$

und für $\hat{M}$ folgt aus (2.1) der Wert

$$\hat{M} = \left[\frac{\alpha+1}{b-a}\int_a^b f(x)^\alpha\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(2.2) ergibt daher

$$\left[\frac{\beta+1}{b-a}\int_a^b f(x)^\beta\,dx\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq \left[\frac{\alpha+1}{b-a}\int_a^b f(x)^\alpha\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.1}$$

Für $-1 < \alpha < \beta < 0$ folgt (4.1) aus dem Zusatz zu Satz 1.

Es gilt also

Satz 3. *In $a \leqq x \leqq b$ sei $f(x) \geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null. Dann ist das Funktional*[1]

$$\Phi(f(x); t) = \begin{cases} \left[\frac{t+1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^t\,dx\right]^{\frac{1}{t}} & \text{für } -1 < t < 0,\ 0 < t < \infty, \\ \lim\limits_{t\to 0} \Phi(f(x); t) = e^{1+\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \log f(x)\,dx} & \text{für } t = 0, \\ \lim\limits_{t\to\infty} \Phi(f(x); t) = \operatorname*{Max}\limits_{a\leqq x\leqq b} f(x) & \text{für } t = \infty \end{cases} \tag{4.2}$$

eine abnehmende Funktion von t, wenn $f(x)$ keine Dachfunktion ist, und konstant für Dachfunktionen.

In (4.1) ist für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ die mit einer Ungleichung von Frank und Pick[2] identische Ungleichung

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^2\,dx \leqq \frac{4}{3}\left[\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right]^2,$$

für $\alpha = 1$, $\beta = p > 1$ die Ungleichung von Favard[3]

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^p\,dx \leqq \frac{2^p}{p+1}\left[\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right]^p$$

enthalten. Weiter folgt aus Satz 3 für $t > 0$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^t\,dx \geqq \frac{1}{t+1}\,[\operatorname*{Max}\limits_{a\leqq x\leqq b} f(x)]^t, \tag{4.3}$$

$$e^{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \log(f(x)^t)\,dx} \geqq \frac{t+1}{e^t}\,\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^t\,dx. \tag{4.4}$$

(4.3) ergibt für $t = 1$ eine Ungleichung von Favard[3], (4.4) die Ungleichung

$$e^{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \log f(x)\,dx} \geqq \frac{2}{e}\,\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{4.5}$$

---

[1] Vgl. etwa G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I., Berlin 1925, II. Abschnitt, Kap. 2, Aufgabe 83, S. 55; Lösung S. 210.

[2] Ph. Frank und G. Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum I., Math. Ann. 76 (1915), 354—357, bes. Satz I a, S. 359. Vgl. auch Favard, a. a. O., S. 58 f. und H. Kneser, Bemerkung über die gemischten Inhalte in vier Dimensionen, Math. Ann. 115 (1937), 132—135.

[3] Favard, a. a. O., S. 58.

zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel einer positiven konkaven stetigen Funktion. Das Gleichheitszeichen gilt überall nur für Dachfunktionen.

Für Funktionen $f(x)$, die in $a \leqq x \leqq b$ nicht konkav und positiv sind, braucht Satz 3 nicht erfüllt zu sein. Z. B. nimmt

$$\left[(t+1)\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^{2t} dx\right]^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{4}\left(\frac{t+1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}}$$

für $-\frac{1}{2} < t < 0$ und $t > 0$ zu.

5. Wir leiten jetzt aus (4.1) eine Ungleichung für eine endliche Anzahl von positiven konkaven Funktionen her.

Für $2m$ Zahlen $a_i > 0$, $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ gilt bekanntlich[1]

$$(5.1) \qquad (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_m^{a_m})^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_m}} \leqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m}{a_1 + a_2 + \cdots + a_m},$$

und für $m > 1$ steht hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $b_1 = b_2 = \cdots = b_m$. Somit ist für $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$

$$(5.2) \qquad \beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\ldots\beta_m^{\alpha_m} \leqq \frac{\alpha_1\beta_1^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} + \alpha_2\beta_2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} + \cdots + \alpha_m\beta_m^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m},$$

wo für $m > 1$ das Gleichheitszeichen immer und nur für $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m$ steht.

Wir benutzen (5.2) zum Beweise folgender Ergänzung zu einem Satz von JENSEN[2]:

Die Funktionen $f_i(x)$ seien in $a \leqq x \leqq b$ stetig, in $a < x < b$ wesentlich positiv, ferner sei $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Dann gilt

---

[1] L. J. ROGERS, Messenger of Math. (2) 17 (1888). Vgl. PÓLYA und SZEGÖ, a. a. O., II. Abschnitt, Kap. 2, Aufgabe 78, S. 53; Lösung S. 209. — Ich verdanke Herrn G. PICK folgenden einfachen Beweis $(m > 1)$: Bei der Ersetzung $a_i \to \varrho a_i$, $b_i \to \sigma b_i$ $(\varrho > 0, \sigma > 0, i = 1, 2, \ldots m)$ ändert sich (5.1) nicht. Man kann daher durch $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 1$ normieren. Dann steht rechts in (5.1) Eins und zu beweisen ist

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \log b_i \leqq 0.$$

Das folgt aber aus $\log x \leqq x - 1$ unmittelbar. Das Gleichheitszeichen steht nur für $b_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Aufhebung der Normierung ergibt (5.1).

[2] JENSEN, a. a. O., Nr. 4. Dort werden die $f_i(x) \geqq 0$ und integrabel vorausgesetzt, und die α_i durch $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ normiert.

$$(5.3)\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f_1(x)^{\alpha_1} f_2(x)^{\alpha_2}\cdots f_m(x)^{\alpha_m}\,dx \leqq \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f_i(x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}\,dx\right]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}},$$

und das Gleichheitszeichen steht für $m > 1$ *dann und nur dann, wenn in* $a \leqq x \leqq b$

$$(5.4)\qquad f_1(x):f_2(x):\cdots:f_m(x) = k_1:k_2:\cdots:k_m,$$

wo die k_i *Konstanten sind.*

Beweis. Da sich (5.3) bei der Ersetzung $f_i(x) \to \varrho_i f_i(x)$ ($\varrho_i > 0$, konstant, $i = 1, 2, \ldots m$) nicht ändert, können wir die $f_i(x)$ durch

$$(5.5)\qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f_i(x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}\,dx = 1$$

normieren. Dann vereinfacht sich (5.3) zu

$$(5.6)\qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f_1(x)^{\alpha_1} f_2(x)^{\alpha_2}\ldots f_m(x)^{\alpha_m}\,dx \leqq 1.$$

Nun folgt aus (5.2) für $\beta_i = f_i(x)$, wenn x in $a < x < b$ liegt,

$$(5.7)\qquad f_1(x)^{\alpha_1} f_2(x)^{\alpha_2}\ldots f_m(x)^{\alpha_m} \leqq \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} f_i(x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (5.5) durch Integration (5.6). Das Gleichheitszeichen steht dabei für $m > 1$ stets und nur, wenn die normierten Funktionen $f_i(x)$ alle einander gleich sind. Aufhebung der Normierung führt zu dem ausgesprochenen Satz.

Dieser gilt insbesondere, wenn in $a \leqq x \leqq b$ die Funktionen $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots m$) $\geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null sind. In diesem Fall erhält man aber ausserdem aus (4.1) für $m > 1$, $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$, $f(x) = f_i(x)$ die Ungleichung

$$(5.8)\quad \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f_i(x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}\,dx\right)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}} \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+1}\right)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}} \frac{\alpha_i+1}{b-a}\int_a^b f_i(x)^{\alpha_i}\,dx,$$

wo das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn $f_i(x)$ eine Dachfunktion ist. Aus (5.3), (5.8) folgt

Satz 4. *Sind in* $a \leqq x \leqq b$ *die Funktionen* $f_i(x) \geqq 0$, *konkav, stetig, nicht identisch Null, und die Konstanten* $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, *so gilt*

$$(5.9) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f_1(x)^{\alpha_1} f_2(x)^{\alpha_2} \ldots f_m(x)^{\alpha_m}\, dx \leqq$$
$$\leqq \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+1} \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f_i(x)^{\alpha_i}\, dx\right).$$

In (5.9) *steht das Gleichheitszeichen für* $m > 1$ *dann und nur dann, wenn alle* $f_i(x)$ *Dachfunktionen sind, die ihren grössten Wert an derselben Stelle des Intervalls* $a \leqq x \leqq b$ *annehmen.*

Der besondere Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$ der Ungleichung (5.9) ist schon von J. FAVARD[1] aufgestellt worden.

6. Eine andere Anwendung des Satzes 1 erhalten wir für

$$(6.1) \qquad \varphi(y) = e^{\alpha y}, \quad m(y) = \frac{\beta}{\alpha} e^{(\beta-\alpha)y}, \quad \text{also} \quad \psi(y) = e^{\beta y} - 1, \quad (\alpha < \beta,\ \alpha\beta > 0).$$

Wir drücken aus, dass (2.1) die Nullstelle $z = \hat{M}\,(\hat{M} > 0)$ hat:

$$(6.2) \qquad e^{\alpha \hat{M}} = 1 + \alpha \hat{M}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (e^{f(x)})^{\alpha}\, dx\right].$$

Wenn $f(x)$ keine Dachfunktion von der Höhe $\hat{M}$ ist, so ergibt die Ungleichung (2.2) bezw. (2.3)

$$(6.3) \qquad e^{\beta \hat{M}} > 1 + \beta \hat{M}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (e^{f(x)})^{\beta}\, dx\right], \quad \text{bezw.} \quad < 1 + \beta \hat{M}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (e^{f(x)})^{\beta}\, dx\right],$$

je nachdem $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$. Die wesentlich positive Nullstelle der Gleichung

$$(6.4) \qquad e^{\beta z} = 1 + \beta z\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (e^{f(x)})^{\beta}\, dx\right]$$

ist also im ersten Falle kleiner, im zweiten grösser als $\hat{M}$. Ist $f(x)$ Dachfunktion von der Höhe $\hat{M}$, so gilt beidemale das Gleichheitszeichen. Setzen wir

$$(6.5) \qquad e^{f(x)} = g(x),$$

so ergibt sich[2]

---

[1] FAVARD, a. a. O., S. 60.

[2] Vgl. JENSEN, a. a. O., Bemerkung am Schluss von Nr. 1.

Satz 5. *In $a \leqq x \leqq b$ sei* 1) $g(x)$ *stetig*, $\geqq 1$, *aber nicht identisch gleich 1;* 2) *für irgend zwei Wertepaare* $x^{(1)}$, $x^{(2)}$

$$g(x^{(1)})\, g(x^{(2)}) \leqq \left[g\left(\frac{x^{(1)}+x^{(2)}}{2}\right)\right]^2.$$

Dann hat die Gleichung

$$e^{tz} = 1 + tz\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)^t\, dx\right] \tag{6.6}$$

für jedes $t \neq 0$ *genau eine wesentlich positive Nullstelle* $z(t)$, *und diese ist im allgemeinen für* $t > 0$ *eine abnehmende, für* $t < 0$ *eine zunehmende Funktion von* t *Die einzige Ausnahme bilden in beiden Fällen die Funktionen*

$$g(x) = \begin{cases} e^{\hat{M}\frac{x-a}{\xi-a}} & \text{für} \quad a \leqq x \leqq \xi, \\ e^{\hat{M}\frac{b-x}{b-\xi}} & \text{für} \quad \xi \leqq x \leqq b, \end{cases} \tag{6.7}$$

wo ξ *eine beliebige Stelle aus* $a \leqq x \leqq b$ *und* $\hat{M} > 0$ *konstant ist. Für sie ist* $z(t) = \hat{M}$ *für alle* $t \neq 0$.

§ 3. Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlichen.

7. Die meisten der vorstehenden Sätze lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auf Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen[1]. Der Begriff »*konvexe*, bezw. *konkave Funktion*» ist dabei in folgender Weise zu fassen[2]:

$\mathfrak{K}$ sei ein konvexer Bereich eines n-dimensionalen euklidischen Raums, in dem $x_1, x_2, \ldots x_n$ rechtwinklige Koordinaten sind. Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_i)$, die in $\mathfrak{K}$ definiert ist, heisst *konvex*, bezw. *konkav*, wenn für jedes Paar von Punkten $x_i^{(1)}$ und $x_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ aus $\mathfrak{K}$

$$f\left(\frac{x_i^{(1)}+x_i^{(2)}}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}[f(x_i^{(1)}) + f(x_i^{(2)})], \quad \text{bezw.} \quad \geqq \frac{1}{2}[f(x_i^{(1)}) + f(x_i^{(2)})] \tag{7.1}$$

gilt.

Das Gegenstück zu Satz 1 lautet dann:

[1] Die entsprechende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes von Favard (mit $n = 2$) bei FAVARD, a. a. O., S. 61 ff.

[2] JENSEN, a. a. O., Bemerkung nach Nr. 7.

Satz 6. *Im konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ des n-dimensionalen Raumes sei $f(x_i) \geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null. $\varphi(y)$ habe dieselbe Bedeutung wie in Satz 1. Dann hat die Gleichung*

$$(7.2) \qquad \frac{n}{z^n} \int_0^z \varphi(y)(z-y)^{n-1}\, dy = \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} \varphi(f(x_i))\, dV,$$

wo V das n-dimensionale Volumen von $\mathfrak{K}$ ist, und rechts ein n-faches Integral steht, genau eine wesentlich positive Nullstelle $z = \hat{M}$.

Haben weiter $m(y)$, $\psi(y)$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 1, so gilt

$$(7.3) \qquad \frac{n}{\hat{M}^n} \int_0^{\hat{M}} \psi(y)(\hat{M}-y)^{n-1}\, dy \geqq \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} \psi(f(x_i))\, dV,$$

wenn $\varphi(y)$ und $m(y)$ gleichsinnig monoton sind, und

$$(7.4) \qquad \frac{n}{\hat{M}^n} \int_0^{\hat{M}} \psi(y)(\hat{M}-y)^{n-1}\, dy \leqq \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} \psi(f(x_i))\, dV,$$

wenn sie ungleichsinnig monoton sind. Das Gleichheitszeichen in (7.3), (7.4) steht dann und nur dann, wenn $f(x_i)$ eine »Dachfunktion von der Höhe $\hat{M}$« ist, d. h. wenn die Hyperfläche $y = f(x_i)$ in einem $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ ein Hyperkegel von der Basis $\mathfrak{K}$ und der Höhe $\hat{M}$ ist, dessen Scheitel als senkrechte Projektion auf die Hyperebene $y = 0$ einen Punkt von $\mathfrak{K}$ hat.

Beweis. $m(y)$ sei nicht abnehmend, $\varphi(y)$ zunehmend. Wir können wieder annehmen, dass $\varphi(0) = 0$. M sei der grösste Wert von $f(x_i)$ in $\mathfrak{K}$. $V(y)$ sei für $y \leqq M$ das n-dimensionale Volumen des konvexen Bereichs $\mathfrak{K}(y)$, auf dem $f(x_i) \geqq y$ ist, für $y > M$ Null. Die »Inhaltsfunktion« $V(y)$ ist in $0 \leqq y \leqq M$ stetig, positiv und nicht zunehmend, bezw. konstant gleich V. Wir berechnen auf zwei Arten das $(n+1)$-fache Stieltjes-Integral

$$(7.5) \qquad \overline{\varphi} = \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{B}}^{(n+1)} dx_1 \ldots dx_n\, d\varphi(y),$$

erstreckt über den Bereich $\mathfrak{B}$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, der von der Hyperebene $y = 0$, dem Mantel des zu ihr senkrechten Hyperzylinders über $\mathfrak{K}$ und der Hyperfläche $y = f(x_i)$ begrenzt ist, und erhalten so

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{V} \int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} \varphi\,(f(x_i))\,d\,V = \frac{1}{V} \int\limits_0^{M} V(y)\,d\,\varphi\,(y). \tag{7.6}$$

Insbesondere haben die Dachfunktionen $\hat{f}(x_i, \xi_i)$, die ihren grössten Wert $\hat{M} > 0$ ($\hat{M}$ zunächst beliebig) im Punkte ξ_i von $\mathfrak{K}$ annehmen, alle die Inhaltsfunktion

$$\hat{V}(y) = \frac{(\hat{M} - y)^n}{\hat{M}^n}\,V. \tag{7.7}$$

Man erhält daher durch Teilintegration

$$\frac{1}{V} \int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} \varphi\,(\hat{f}(x_i, \xi_i))\,d\,V = \frac{1}{V} \int\limits_0^{\hat{M}} \hat{V}(y)\,d\,\varphi\,(y) = \frac{n}{\hat{M}^n} \int\limits_0^{\hat{M}} \varphi\,(y)\,(\hat{M} - y)^{n-1}\,d\,y. \tag{7.8}$$

Durch zweifache Berechnung des $(n + 1)$-fachen Integrals

$$\bar{\psi} = \frac{1}{V} \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(n+1)} m(y)\,d\,x_1 \ldots d\,x_n\,d\,\varphi\,(y) \tag{7.9}$$

findet man ebenso

$$\bar{\psi} = \frac{1}{V} \int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} \psi\,(f(x_i))\,d\,V = \frac{1}{V} \int\limits_0^{M} m(y)\;V(y)\,d\,\varphi\,(y), \tag{7.10}$$

und für Dachfunktionen $\hat{f}\,(x_i, \xi_i)$ von der Höhe $\hat{M}$ entsprechend

$$\frac{1}{V} \int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} \psi\,(\hat{f}(x_i, \xi_i))\,d\,V = \frac{1}{V} \int\limits_0^{\hat{M}} m\,(y)\;\hat{V}\,(y)\,d\,\varphi\,(y) = \frac{n}{\hat{M}^n} \int\limits_0^{\hat{M}} \psi(y)\,(\hat{M} - y)^{n-1}\,d\,y. \tag{7.11}$$

Wegen (7.6), (7.10) hat $\bar{\varphi}$ und ebenso $\bar{\psi}$ für alle in $\mathfrak{K}$ stetigen positiven konkaven Funktionen $f\,(x_i)$ mit der gleichen Inhaltsfunktion $V\,(y)$ denselben Wert. Man kann also in jeder Hyperebene $y =$ konst. den n-dimensionalen Schnittbereich mit dem Bereiche $\mathfrak{B}$ durch einen Bereich ersetzen, der dasselbe n-dimensionale Volumen $V(y)$ hat, ohne dadurch $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ zu ändern, wofern nur der von den neuen Schnittbereichen gebildete $(n + 1)$-dimensionale Bereich wieder konvex ist. Wir errichten insbesondere in einem inneren Punkt $\xi_i^{(0)}$ von $\mathfrak{K}$ ein Lot l zur Hyperebene $y = 0$ und wählen die neuen Schnittbereiche mit jeder Hyperebene $y =$ konst. so, dass jeder von ihnen bezüglich eines auf l liegenden Ähnlichkeitszentrums zu $\mathfrak{K}$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Der dadurch entstehende $(n+1)$-dimensionale Bereich $\mathfrak{B}_0$ ist konvex[1]. Wir beschränken uns weiterhin auf $\mathfrak{B}_0$ und den über $\mathfrak{K}$ stehenden Bereich $\hat{\mathfrak{B}}_0$, dessen obere Berandung vom Hyperkegelmantel $y=\hat{f}(x_i, \xi_i^{(0)})$ gebildet wird. Dementsprechend bedeutet $f(x_i)$ im folgenden die Funktion, die in die Gleichung $y=f(x_i)$ der oberen Berandung von $\mathfrak{B}_0$ auftritt.

Schreiben wir (7.2) in der Form

$$(7.12) \qquad G(z) \equiv \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z \varphi(y)(z-y)^{n-1}\,dy - \frac{1}{n!}\bar{\varphi} z^n = 0,$$

so ist die $(n-1)$-te Ableitung $G^{(n-1)}(z)$ mit der Funktion $F(z)$ im Beweise des Satzes 1 identisch. Aus den Eigenschaften von $F(z)$ folgt dann leicht, dass $G(z)$ von $G(0)=0$ bis zu einer Stelle $\zeta>0$ abnimmt, wobei es zunächst konkav, dann konvex ist, und für $z>\zeta$ zunimmt und konvex ist. Also hat (7.12) genau eine wesentlich positive Nullstelle.

Wir identifizieren nun die bisher willkürliche Zahl $\hat{M}$ mit dieser Nullstelle und setzen voraus, dass $f(x_i)$ keine Dachfunktion ist. Dann folgt analog wie im Beweise des Satzes 1, dass keiner der Bereiche $\mathfrak{B}_0$, $\hat{\mathfrak{B}}_0$ ein Teilbereich des anderen ist. Da $\mathfrak{B}_0$ konvex ist, so hat jede Erzeugende des Hyperkegels $y=\hat{f}(x_i, \xi_i^{(0)})$ ausser einem etwaigen Randpunkte von $\mathfrak{K}$ mit der Randhyperfläche $y=f(x_i)$ von $\mathfrak{B}_0$ nur einen Punkt gemeinsam. Infolge der Konstruktion, die zu $\mathfrak{B}_0$ geführt hat, erfüllen diese Schnittpunkte eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die bezüglich des Scheitels des Hyperkegels als Ähnlichkeitszentrum zum Rande von $\mathfrak{K}$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Sie liegt also in einer zur Hyperebene $y=0$ parallelen Hyperebene $y=y^{(0)}$. Die weiteren Schlüsse sind dieselben wie im Beweise des Satzes 1. Es tritt nur die Differenz $V(y)-\hat{V}(y)$ an Stelle von $s(y)-\hat{s}(y)$, V an Stelle von $b-a$ und $\mathfrak{K}$ an Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq b$.

8. Ebenso, wie die Sätze in Nr. 4, 5 aus Satz 1, erhält man aus Satz 6 die folgenden Sätze:

Satz 7. *Im n-dimensionalen konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ vom Volumen V sei $f(x_i)\geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null. Dann ist*

$$\left[\binom{t+n}{n}\frac{1}{V}\int_{\mathfrak{K}}^{(n)} f(x_i)^t\,dV\right]^{\frac{1}{t}} \qquad (t>0)$$

[1] Siehe Fussnote S. 20.

eine abnehmende Funktion von t, wenn $f(x_i)$ keine Dachfunktion ist, und konstant für Dachfunktionen.

Satz 8. *Im n-dimensionalen konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ vom Volumen V seien die Funktionen $f_k(x_i) \geqq 0$, konkav, stetig, nicht identisch Null, und die Konstanten $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots m)$. Dann gilt*

$$(8.1)\quad \frac{1}{V}\int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} f_1(x_i)^{\alpha_1} f_2(x_i)^{\alpha_2} \ldots f_m(x_i)^{\alpha_m}\, dV \leqq \frac{\binom{\alpha_1+n}{n}\binom{\alpha_2+n}{n}\cdots\binom{\alpha_m+n}{n}}{\binom{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+n}{n}} \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{V}\int\limits_{\mathfrak{K}}^{(n)} f_k(x_i)^{\alpha_k}\, dV\right).$$

In (8. 1) steht das Gleichheitszeichen für $m > 1$ dann und nur dann, wenn alle $f_k(x_i)$ Dachfunktionen sind, die ihren grössten Wert an derselben Stelle des Bereiches $\mathfrak{K}$ annehmen.

Schlussbemerkung.

9. Auf dieselbe Weise kann für beliebige konkave oder konvexe stetige Funktionen auch eine Abschätzung nach der anderen Seite abgeleitet werden:

Satz 9. *In $a \leqq x \leqq b$ sei $f(x)$ konkav oder konvex und stetig mit dem Maximum M und dem Minimum $\mu \leqq M$, ferner $p(x) \geqq 0$, stetig, $\int_a^b p(x)\,dx > 0$. In $\mu \leqq y \leqq M$ sei $\varphi(y)$ monoton im engeren Sinn und stetig. Dann gibt es in $\mu < y < M$ genau eine Stelle $\overline{M}$, so dass*

$$(9.1)\quad \varphi(\overline{M}) = \frac{\int_a^b p(x)\,\varphi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}.$$

Weiter sei $m(y)$ in $\mu \leqq y \leqq M$ beschränkt und monoton, und

$$\psi(y) = \int_\mu^y m(t)\,d\varphi(t) \qquad (\mu \leqq y \leqq M).$$

Dann gilt

$$(9.2)\quad \psi(\overline{M}) \leqq \frac{\int_a^b p(x)\,\psi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \quad \text{bezw.} \quad \geqq \frac{\int_a^b p(x)\,\psi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$$

je nachdem $\varphi(y)$ und $m(y)$ gleichsinnig oder ungleichsinnig monoton sind. Das Gleichheitszeichen in (9. 2) steht immer und, wenn $p(x) > 0$ in $a < x < b$, auch nur für $f(x) = \overline{M}$.

Für $\varphi(y) = y$ geht Satz 9 bis auf die Aussage über das Gleichheitszeichen in einen besonderen Fall eines bekannten Satzes von JENSEN[1] über. (9.1), (9.2) ändern sich bei Addition einer Konstanten zu $\varphi(y)$ bezw. $\psi(y)$ nicht.

Der Beweis werde nur skizziert. $\varphi(y)$ sei zunehmend, $\varphi(\mu) = 0$, $m(y)$ nicht abnehmend, $f(x)$ konkav, nicht konstant. Die Existenz und Einzigkeit einer Nullstelle $\overline{M}$ von (9.1) in $\mu < y < M$ folgt aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Stetigkeit und Monotonie von $\varphi(y)$. An Stelle der »Sehnenfunktion» $s(y)$ tritt jetzt eine Funktion $\sigma(y)$, die so erklärt ist: Es seien $x^{(1)}(y^{(0)})$, $x^{(2)}(y^{(0)}) \geqq x^{(1)}(y^{(0)})$ die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve $y = f(x)$ mit der Geraden $y = y^{(0)}$ $(\mu \leqq y^{(0)} \leqq M)$. Dann ist

$$\sigma(y) = \int_{x^{(1)}(y)}^{x^{(2)}(y)} p(x)\,dx \quad \text{für} \quad \mu \leqq y \leqq M, \quad = 0 \text{ sonst.} \tag{9.3}$$

$\sigma(y)$ ist in $\mu \leqq y \leqq M$ stetig, positiv, nicht zunehmend, $\sigma(\mu) = \int_a^b p(x)\,dx$. Für $p(x) > 0$ in $a \leqq x \leqq b$ ist

$$\sigma(\mu) - \sigma(y) > 0 \text{ in } \mu < y < \overline{M}, \quad \sigma(y) > 0 \text{ in } \overline{M} < y < M. \tag{9.4}$$

Daher folgt aus

$$\varphi(\overline{M}) - \frac{1}{\int_a^b p(x)\,dx}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx = \frac{1}{\sigma(\mu)}\left\{\int_\mu^{\overline{M}} [\sigma(\mu) - \sigma(y)]\,d\varphi(y) - \int_{\overline{M}}^M \sigma(y)\,d\varphi(y)\right\} = 0 \tag{9.5}$$

wegen der Monotonie von $m(y)$

$$\begin{aligned} \psi(\overline{M}) - \frac{1}{\int_a^b p(x)\,dx}\int_a^b \psi(f(x))\,dx &= \\ &= \frac{1}{\sigma(\mu)}\left\{\int_\mu^{\overline{M}} m(y)\,[\sigma(\mu) - \sigma(y)]\,d\varphi(y) - \int_{\overline{M}}^M m(y)\,\sigma(y)\,d\varphi(y)\right\} < 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

In (9.4), (9.6) kann auch das Gleichheitszeichen eintreten, wenn $p(x) \geqq 0$. Es steht ausschliesslich, wenn $f(x)$ konstant ist. Die übrigen Möglichkeiten für $\varphi(y)$, $m(y)$ erledigen sich ebenso wie im Beweise des Satzes 1. Der Beweis für konkaves $f(x)$ verläuft entsprechend.

Satz 9 überträgt sich mutatis mutandis auf konkave und konvexe stetige Funktionen mehrerer Veränderlichen.

---

[1] JENSEN, a. a. O., Nr. 4.

Die in Nr. 4 getroffene Wahl der Funktionen $\varphi(y)$, $m(y)$ ergibt nur bekannte Sätze, die in Nr. 7 getroffene den Satz, dass für eine stetige nicht konstante Funktion $g(x) > 0$ mit der Eigenschaft 2) des Satzes 5 oder der entgegengesetzten Eigenschaft

$$\left[\frac{\int\limits_a^b p(x)\, g(x)^t\, dx}{\int\limits_a^b p(x)\, dx}\right]^{\frac{1}{t}}$$

für $t > 0$ zunimmt, für $t < 0$ abnimmt, wenn $p(x) > 0$ und stetig ist.