ÜBER HAARS VERALLGEMEINERUNG DES LEMMAS VON DU BOIS-REYMOND UND VERWANDTE SÄTZE.

Von

L. BERWALD.

HAAR[1] hat vor einiger Zeit einen Satz ausgesprochen, der das bekannte Lemma von DU BOIS-REYMOND[2], das zur Begründung der Variationsrechnung dient, sowie die von ZERMELO[3] herrührende Verallgemeinerung dieses Lemmas als besondere Fälle enthält. Haar bemerkt, dass der Satz ein neues Licht auf den Zusammenhang eines linearen Differentialausdrucks und seines adjungierten wirft, sein Beweis macht aber von den Eigenschaften solcher Differentialausdrücke keinen Gebrauch. Bei dem Versuche, diese Eigenschaften beim Beweise des Satzes von Haar zu benutzen, bemerkte ich, dass er als besonderer Fall eines analogen Satzes über Systeme von linearen Differentialausdrücken erster Ordnung angesehen werden kann (Nr. 1). In Nr. 2 wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von RAZMADZÉ[4] für derartige Systeme gegeben. Sodann wird der Satz von Haar bewiesen (Nr. 3, 4) und endlich in Nr. 5 ein Satz von KRYLOFF[5] verallgemeinert.

Auf entsprechende Sätze bei mehrfachen Integralen gedenke ich an anderer Stelle einzugehen.

---

[1] A. HAAR, Über eine Verallgemeinerung des Du Bois-Reymondschen Lemmas. Acta litterarum ac scientiarum, Szeged 1 (1922), 33—38.

[2] P. DU BOIS-REYMOND, Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. Math. Ann. 15 (1879), 564—576.

[3] E. ZERMELO, Über die Herleitung der Differentialgleichung bei Variationsproblemen. Math. Ann. 58 (1904), 558—564.

[4] A. RAZMADZÉ, Über das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Math. Ann. 84 (1921), 115—116.

[5] N. KRYLOFF, Sur les différentes généralisations du lemme fondamental du calcul des variations. Bull. Acad. des Sciences de l'Oucraine 1 (1923), 8—11.

I.

1. Wir beginnen mit dem angekündigten Satz über Systeme von linearen Differentialausdrücken:

Satz 1. *Es seien*

$$L_i(u) \equiv a_{ik}(x)\, u'_k(x) + b_{ik}(x)\, u_k(x)^{1} \tag{1.1}$$

n lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, deren Koeffizienten $a_{ik}(x)$, $b_{ik}(x)$ im Intervall $[a, a']$[2] *einmal stetig differenzierbare, bezw. stetige Funktionen sein mögen, derart, dass die Determinante $A = |a_{ik}(x)|$ in $[a, a']$ nicht verschwindet. $f_i(x)$ seien n im Intervall $[a, a']$ definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, dass*

$$\int_a^{a'} f_i(t)\, L_i(\eta(t))\, dt = 0, \tag{1.2}$$

wenn $\eta_i(x)$ irgend n im Intervall $[a, a']$ stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, die den Randbedingungen

$$\eta_i(a) = 0, \quad \eta_i(a') = 0 \tag{1.3}$$

genügen. Dann sind die $f_i(x)$ selbst differenzierbar und bilden eine Lösung des zu $L_i(u) = 0$ adjungierten Systems

$$\Lambda_k(v) \equiv -\frac{d}{dx}(a_{ik}(x)\, v_i(x)) + b_{ik}(x)\, v_i(x) = 0. \tag{1.4}$$

Beweis: Die Funktionen $v_i^1(x)$, $v_i^2(x)$, $\ldots$, $v_i^n(x)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ mögen in $[a, a']$ ein Fundamentalsystem $\{v_i^\alpha(x)\}$ der Differentialgleichungen (1.4) bilden, die Determinante $V = |v_i^\alpha(x)|$ sei also ungleich Null. Wir setzen voraus, dass das Fundamentalsystem $\{v_i^\alpha(x)\}$ in $[a, a']$ orthogonal und normiert ist, d. h. dass

$$\int_a^{a'} v_i^\alpha(t)\, v_i^\beta(t)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha = \beta, \\ 0 \text{ für } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{1.5}$$

Das bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit. Denn man kann von einem beliebigen Fundamentalsystem der Gleichungen (1.4) durch das Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt, das nur eine besondere lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten und von Null verschiedener Determinante darstellt, zu einem orthogonalen und normierten Fundamentalsystem übergehen.

---

[1] Über jeden Zeiger, der in einem Gliede zweimal auftritt, ist von 1 bis n zu summieren. »Freie« Zeiger laufen stets von 1 bis n, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes angegeben ist.

[2] $[a, a']$ bedeutet das Intervall $a \leqq x \leqq a'$.

Setzen wir

$$\Phi_i(x) = f_i(x) - c^\alpha v_i^\alpha(x), \tag{1.6}$$

wo die c^α zunächst beliebige Konstanten sind, so gilt mit (1.2) gleichzeitig auch

$$\int_a^{a'} \Phi_i(t)\, L_i(\eta(t))\, dt = 0. \tag{1.7}$$

Denn wegen $\Lambda_i(v^\alpha) = 0$ und der Randbedingungen (1.3) folgt aus der Identität

$$v_i\, L_i(u) - u_i\, \Lambda_i(v) = \frac{d}{dx}(a_{ik}\, v_i\, u_k) \tag{1.8}$$

unmittelbar

$$\int_a^{a'} v_i^\alpha(t)\, L_i(\eta(t))\, dt = 0. \tag{1.9}$$

Wir wählen jetzt die Konstanten c^α so, dass die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^{a'} \Phi_i(t)\, v_i^\alpha(t)\, dt = 0 \tag{1.10}$$

gelten. Das ist der Fall, wenn wir für die c^α die »Fourierkonstanten»

$$c^\alpha = \int_a^{a'} f_i(t)\, v_i^\alpha(t)\, dt \tag{1.11}$$

setzen.

Nunmehr wählen wir die Funktionen $\eta_i(x)$ in (1.7) so, dass sie den Differentialgleichungen

$$L_i(\eta(x)) = \Phi_i(x) \tag{1.12}$$

genügen und die Randbedingungen (1.3) erfüllen. Eine solche Wahl ist möglich. Denn multiplizieren wir die Differentialgleichungen (1.12) der Reihe nach mit $v_i^\alpha(x)$ und summieren über i, so folgt wegen $\Lambda_i(v^\alpha) = 0$ aus der Identität (1.8) — mit η_i an Stelle von u_i —

$$\frac{d}{dx}(a_{ik}(x)\, v_i^\alpha(x)\, \eta_k(x)) = \Phi_i(x)\, v_i^\alpha(x), \tag{1.13}$$

und hieraus durch Integration wegen der ersten Randbedingungen (1.3)

$$a_{ik}(x)\, v_i^\alpha(x)\, \eta_k(x) = \int_a^x \Phi_i(t)\, v_i^\alpha(t)\, dt. \tag{1.14}$$

Diese Gleichungen bilden ein System von linearen Gleichungen für die $\eta_k(x)$. Bezeichnen wir in der Determinante $|a_{ik}(x)\, v_i^\alpha(x)| = A \cdot V$ das algebraische Komplement von $a_{ik}(x)\, v_i^\alpha(x)$, dividiert durch die Determinante, mit $u_k^\alpha(x)$, so lautet die Auflösung dieses Gleichungssystems

$$\eta_k(x) = u_k^\alpha(x) \int_a^x \Phi_i(t)\, v_i^\alpha(t)\, dt. \tag{1.15}$$

Die so gefundene Lösung von (1.12) erfüllt wegen der Orthogonalitätsrelation (1.10) auch die zweite Randbedingung (1.3).[1]

Setzen wir die Lösung (1.15) der Differentialgleichungen (1.12) in (1.7) ein, so ergibt sich

$$\int_a^{a'} \Phi_i(t)\, \Phi_i(t)\, dt = 0, \tag{1.16}$$

also wegen der Stetigkeit der $\Phi_i(x)$ $\Phi_i(x) = 0$ oder

$$f_i(x) = c^\alpha v_i^\alpha(x) \tag{1.17}$$

in $[a, a']$. Die $f_i(x)$ sind daher differenzierbar und bilden eine Lösung der Differentialgleichungen (1.4).

2. Die Identität (1.8) kann als Verallgemeinerung der Formel für die Ableitung eines Produktes angesehen werden, in die sie für $L_i(u) = u_i'$ übergeht. Ein Verfahren, das demjenigen entspricht, durch welches das Verschwinden der ersten Variation beim einfachsten Variationsproblem auf das Lemma von Du Bois-Reymond zurückgeführt wird, ergibt dann

Satz 2. *$L_i(u)$, $\Lambda_i(v)$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in Satz 1. $M_i(x)$, $N_i(x)$ seien $2n$ im Intervall $[a, a']$ definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, dass*

$$\int_a^{a'} [M_i(t)\, \eta_i(t) + N_i(t)\, L_i(\eta(t))]\, dt = 0, \tag{2.1}$$

[1] Die $u_k^\alpha(x)$ bilden ein Fundamentalsystem von $L_i(u) = 0$. Denn nach Definition der u_i^α ist

$$a_{ik}\, u_k^\alpha\, v_i^\beta = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{a}$$

und hieraus folgt wegen $\Lambda_k(v^\beta) = 0$ durch Ableitung nach x, wenn man (1.4) beachtet, einerseits $L_i(u^\alpha) = 0$, anderseits durch Determinantenbildung

$$|u_i^\alpha| = \frac{1}{A\, V} \neq 0.$$

wenn $\eta_i(x)$ irgend n im Intervall $[a, a']$ stetig differenzierbare Funktionen sind, die den Randbedingungen (1.3) *genügen. Dann sind die $N_i(x)$ differenzierbar und*

$$\Lambda_i(N(x)) + M_i(x) = 0. \tag{2.2}$$

Beweis: Es sei $P_i(x)$ eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\Lambda_i(P(x)) = M_i(x). \tag{2.3}$$

Dann ist wegen der Identität (1.8) und der Randbedingungen (1.3)

$$\int_a^{a'} M_i \eta_i \, dt = \int_a^{a'} \Lambda_i(P) \eta_i \, dt = \int_a^{a'} P_i L_i(\eta) \, dt, \tag{2.4}$$

so dass (2.1) in

$$\int_a^{a'} [P_i(t) + N_i(t)] L_i(\eta(t)) \, dt = 0 \tag{2.5}$$

übergeht. Nach Satz 1 sind die $P_i(x) + N_i(x)$, also auch die $N_i(x)$, differenzierbar und es ist

$$\Lambda_i(P+N) = \Lambda_i(P) + \Lambda_i(N) = 0. \tag{2.6}$$

Wegen (2.3) ist diese Gleichung mit (2.2) identisch.

Satz 2 lässt sich verallgemeinern, indem man die Iterationen der Differentialoperatoren L_i und Λ_i einführt. Wir begnügen uns indes damit, die entsprechende Verallgemeinerung für lineare Differentialausdrücke n-ter Ordnung abzuleiten (Nr. 5).

II.

3. Wir beweisen jetzt mit Hilfe des Satzes 1 folgenden Satz von Haar:

Satz 3. *Es sei*

$$L(u) \equiv u^{(n)}(x) + p_1(x) u^{(n-1)}(x) + p_2(x) u^{(n-2)}(x) + \cdots + p_n(x) u(x) \tag{3.1}$$

ein beliebiger linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung, dessen Koeffizienten $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_n(x)$ im Intervalle $[a, a']$ beliebig oft differenzierbare Funktionen sein mögen.[1] *Ist nun $f(x)$ eine im Intervalle $[a, a']$ definierte stetige Funktion von der Beschaffenheit, dass*

[1] Es genügt, $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ $(n-k)$-mal stetig differenzierbar, $p_n(x)$ stetig vorauszusetzen.

$$\int_a^{a'} f(t)\, L(\eta(t))\, dt = 0, \tag{3.2}$$

wenn $\eta(x)$ *irgend eine im Intervall* $[a, a']$ n*-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die in den Endpunkten des Intervalls mit ihren ersten* $n-1$ *Ableitungen verschwindet, so ist* $f(x)$ *selbst* n*-mal differenzierbar und eine Lösung der zu* $L(u) = 0$ *adjungierten Differentialgleichung*

$$\Lambda(v) \equiv (-1)^n [v^{(n)} - (p_1 v)^{(n-1)} + (p_2 v)^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n p_n v] = 0. \tag{3.3}$$

Zum Beweise wenden wir Satz 1 auf das System

$$\begin{cases} L_1(u) \equiv u_1'(x) - u_2(x), \\ L_2(u) \equiv u_2'(x) - u_3(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{n-1}(x) \equiv u_{n-1}'(x) - u_n(x), \\ L_n(x) \equiv u_n'(x) + p_1(x) u_n(x) + p_2(x) u_{n-1}(x) + \cdots + p_n(x) u_1(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

an. Sind also $f_i(x)$ n im Intervall $[a, a']$ definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, dass

$$\int_a^{a'} f_i(t)\, L_i(\eta(t))\, dt = 0, \tag{3.5}$$

wenn $\eta_i(x)$ irgend n im Intervall $[a, a']$ stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, die in den Endpunkten des Intervalls verschwinden, so sind die $f_i(x)$ selbst differenzierbar und bilden eine Lösung des zu $L_i(u) = 0$ adjungierten Systems

$$\begin{cases} \Lambda_1(v) \equiv -v_1'(x) \qquad\qquad + p_n(x) v_n(x) = 0, \\ \Lambda_2(v) \equiv -v_2'(x) - v_1(x) + p_{n-1}(x) v_n(x) = 0, \\ \Lambda_3(v) \equiv -v_3'(x) - v_2(x) + p_{n-2}(x) v_n(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Lambda_n(v) \equiv -v_n'(x) - v_{n-1}(x) + p_1(x) v_n(x) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Es sei nun $\eta(x)$ irgend eine im Intervall $[a, a']$ n-mal stetig differenzierbare Funktion, die mit ihren ersten $n-1$ Ableitungen in den Endpunkten des Intervalls verschwindet. Dann setzen wir

$$\eta(x) = \eta_1(x), \ \eta'(x) = \eta_2(x), \ \ldots \ \eta^{(n-1)}(x) = \eta_n(x), \tag{3.7}$$

so dass

$$L_1(\eta) = L_2(\eta) = \cdots = L_{n-1}(\eta) = 0, \tag{3.8}$$

wobei die $L_i(u)$ die Bedeutung (3.4) haben. Es wird dann

$$L_n(\eta) = \eta^{(n)}(x) + p_1(x)\eta^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\eta(x) \equiv L(\eta) \tag{3.9}$$

so dass sich (3.5) auf

$$\int_a^{a'} f_n(t)\, L(\eta(t))\, dt = 0 \tag{3.10}$$

reduziert.

Die Funktionen $f_i(x)$ bilden eine Lösung des adjungierten Systems (3.6). Man erhält daher, indem man von der letzten Gleichung (3.6) aus zurückgeht, wegen der über die $p_i(x)$ gemachten Voraussetzung der Reihe nach

$$\begin{cases} f_{n-1}(x) = -f_n'(x) + p_1(x) f_n(x), \\ f_{n-2}(x) = -f_{n-1}'(x) + p_2(x) f_n(x) = f_n'' - [p_1 f_n]' + p_2 f_n, \\ f_{n-3}(x) = -f_{n-2}'(x) + p_3(x) f_n(x) = -f_n''' + [p_1 f_n]'' - [p_2 f_n]' + p_3 f_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(x) \quad = -f_2'(x) + p_{n-1}(x) f_n(x) = \\ \qquad = (-1)^{n-1}\left\{f_n^{(n-1)} - [p_1 f_n]^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} p_{n-1} f_n\right\}^{1} \end{cases} \tag{3.11 a}$$

und schliesslich aus der letzten Gleichung (3.6)

$$\Lambda(f_n) \equiv (-1)^n \left\{f_n^{(n)} - [p_1 f_n]^{(n-1)} + [p_2 f_n]^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n p_n f_n\right\} = 0. \tag{3.11 b}$$

$f_n(x)$ ist also n-mal differenzierbar und Lösung von $\Lambda(v) = 0$. Setzen wir $f_n(x) =$ $= f(x)$, so ergibt sich die Aussage des Satzes.

4. Man kann den Satz von Haar auch durch dasselbe Verfahren beweisen, das zum Beweis des Satzes 1 diente. Obwohl dieser Beweis sich auf Grund des Vorhergehenden unmittelbar aus dem des Satzes 1 ableiten lässt, werde er doch kurz angegeben.

Die Funktionen $v^1(x)$, $v^2(x)$, ... $v^n(x)$ mögen in $[a, a']$ ein Fundamentalsystem $\{v^\alpha(x)\}$ der Differentialgleichung (3.3) bilden, das wir wieder orthogonal und normiert annehmen können:

$$\int_a^{a'} v^\alpha(t)\, v^\beta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{4.1}$$

[1] Da $f_{n-1}'(x)$, $f_n'(x)$ und nach Voraussetzung auch $p_1'(x)$ existiert, folgt aus der ersten Gleichung (3.11 a) die Existenz von $f_n''(x)$; da ferner $f_{n-2}'(x)$ und nach Voraussetzung auch $p_2'(x)$ existiert, folgt aus der zweiten Gleichung (3.11 a) die Existenz von $f_{n-1}''(x)$, und da nach Voraussetzung auch $p_1''(x)$ existiert, weiter aus der ersten Gleichung (3.11 a) die Existenz von $f_n'''(x)$, u. s. f.

Dann gilt mit (3.2) gleichzeitig auch

$$\int_a^{a'} \Phi(t)\, L(\eta(t))\, dt = 0, \tag{4.2}$$

wenn

$$\Phi(x) = f(x) - c^\alpha v^\alpha(x), \qquad (c^\alpha \text{ Konstanten}) \tag{4.3}$$

gesetzt wird, was man aus der Identität

$$\begin{cases} v\,L(u) - u\,\varLambda(v) = \dfrac{d}{dx}(\psi(u, v)), \\ \psi(u, v) = u^{(n-1)}v - u^{(n-2)}[v' - p_1 v] + u^{(n-3)}[v'' - (p_1 v)' + p_2 v] - \\ \qquad - \cdots + (-1)^{n-1} u\,[v^{(n-1)} - (p_1 v)' + \cdots + (-1)^{n-1} p_n v] \end{cases} \tag{4.4}$$

wegen $\varLambda(v^\alpha) = 0$ und der Randbedingungen für $\eta(x)$ unmittelbar ersieht. Wir wählen insbesondere

$$c^\alpha = \int_a^{a'} f(t)\, v^\alpha(t)\, dt, \tag{4.5}$$

dann ist $\Phi(x)$ in $[a, a']$ zu allen $v^\alpha(x)$ orthogonal:

$$\int_a^{a'} \Phi(t)\, v^\alpha(t)\, dt = 0. \tag{4.6}$$

Nun nehmen wir für $\eta(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$L(\eta) = \Phi(t), \tag{4.7}$$

die an den Enden des Intervalles mit ihren ersten $n - 1$ Ableitungen Null ist. Man bestätigt leicht, dass eine solche Lösung durch

$$\eta(x) = u^\alpha(x) \int_a^x \Phi(t)\, v^\alpha(t)\, dt \tag{4.8}$$

gegeben wird, wo

$$u^\alpha(x) = \frac{\partial \log |W|}{\partial v^\alpha} \tag{4.9}$$

und W die Wronskische Determinante der $v^\alpha(x)$ ist. Einsetzen dieser Lösung in (4.2) ergibt

$$\int_a^{a'} \Phi(t)^2\, dt = 0, \tag{4.10}$$

so dass in $[a, a']$

$$\Phi(x) \equiv f(x) - c^\alpha v^\alpha(x) = 0 \tag{4.11}$$

gilt. $f(x)$ ist daher n-mal differenzierbar und Lösung von (3.3).

5. Dem Satze 2 entspricht hier ein Satz, von dem wir sogleich eine wesentliche Verallgemeinerung aussprechen:

Satz 4. *$L(u)$, $\Lambda(v)$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in Satz 3. Ferner werde*

$$\begin{cases} L(u) = L^1(u), \quad L(L(u)) = L^2(u), \ldots L(L^{k-1}(u)) = L^k(u), \\ \Lambda(v) = \Lambda^1(v), \quad \Lambda(\Lambda(v)) = \Lambda^2(v), \ldots \Lambda(\Lambda^{k-1}(v)) = \Lambda^k(v), \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{5.1}$$

gesetzt. $M_0(x)$, $M_1(x)$, $\ldots M_k(x)$ seien $k+1$ im Intervall $[a, a']$ definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, dass die Verbindungen

$$\begin{aligned} &M_k, \ \Lambda(M_k) + M_{k-1}, \ \Lambda[\Lambda(M_k) + M_{k-1}] + M_{k-2}, \\ &\qquad \ldots, \Lambda[\Lambda[\ldots \Lambda[\Lambda(M_k) + M_{k-1}] + M_{k-2}] + \cdots] + M_3] + M_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

n-mal differenzierbar sind und dass

$$\int_a^{a'} [M_0(t)\eta(t) + M_1(t)L(\eta(t)) + M_2(t)L^2(\eta(t)) + \cdots + M_k(t)L^k(\eta(t))]\,dt = 0, \tag{5.3}$$

wenn $\eta(x)$ irgend eine im Intervall $[a, a']$ kn-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die in den Endpunkten des Intervalls mit ihren ersten $kn-1$ Ableitungen verschwindet. Dann ist auch

$$\Lambda[\Lambda[\Lambda[\ldots \Lambda[\Lambda(M_k) + M_{k-1}] + M_{k-2}] + \cdots] + M_3] + M_2] + M_1 \tag{5.4}$$

n-mal differenzierbar und es ist

$$\begin{aligned} &\Lambda[\Lambda[\Lambda[\Lambda[\ldots \Lambda[\Lambda(M_k) + M_{k-1}] + M_{k-2}] + \cdots] + \\ &\qquad\qquad + M_3] + M_2] + M_1] + M_0 = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ist insbesondere in $[a, a']$ $M_0(x)$ stetig, $M_q(x)$ $(q = 1, 2, \ldots k-1)$ qn-mal stetig differenzierbar, so ist $M_k(x)$ kn-mal differenzierbar und genügt der Differentialgleichung

$$\Lambda^k(M_k) + \Lambda^{k-1}(M_{k-1}) + \cdots + \Lambda(M_1) + M_0 = 0. \tag{5.6}$$

Zur Erleichterung der Übersicht führen wir den Beweis für $k = 3$. Der Beweis für ein beliebiges k verläuft ebenso.

Wir wählen der Reihe nach 3 Funktionen $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ so, dass

$$\Delta(P_1) = M_0,\ \Delta(P_2) = M_1 + P_1,\ \Delta(P_3) = M_2 + P_2. \tag{5.7}$$

Durch Einsetzen der Werte von M_0, M_1, M_2 aus (5.7) in das Integral links in (5.3) (mit $k = 3$) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^{a'} [M_0 \eta + M_1 L(\eta) + M_2 L^2(\eta) + M_3 L^3(\eta)]\, dt = \int_a^{a'} \{[\Delta(P_1)\eta - P_1 L(\eta)] + \\ + [\Delta(P_2) L(\eta) - P_2 L^2(\eta)] + [\Delta(P_3) L^2(\eta) - P_3 L^3(\eta)] + \\ + [P_3 + M_3] L^3(\eta)\}\, dt. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Wegen der Identität (4.4) und der Randbedingungen für $\eta(x)$ sind hier Integrale über alle eckigen Klammern mit Ausnahme der letzten Null. (5.3) reduziert sich daher im vorliegenden Fall auf

$$\int_a^{a'} (P_3 + M_3) L^3(\eta)\, dt = 0. \tag{5.9}$$

Nach Satz 3 ist also $M_3 + P_3$ $3n$-mal differenzierbar und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta^3(M_3 + P_3) = 0. \tag{5.10}$$

Nun erhalten wir aus (5.7)

$$\begin{aligned} \Delta^3(M_3 + P_3) = \Delta^2(\Delta(M_3 + P_3)) = \Delta^2(\Delta(M_3) + \Delta(P_3)) = \\ = \Delta^2([\Delta(M_3) + M_2] + P_2) = \Delta(\Delta[\Delta(M_3) + M_2] + \Delta(P_2)) = \\ = \Delta(\Delta[\Delta(M_3) + M_2] + M_1 + P_1). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Also ist

$$\Delta(\Delta[\Delta(M_3) + M_2] + M_1 + P_1) = 0. \tag{5.12}$$

Wegen der Linearität des Operators Δ und der ersten Gleichung (5.7) ist also auch der Ausdruck

$$\Delta[\Delta(M_3) + M_2] + M_1$$

n-mal differenzierbar, und es besteht die Gleichung

$$\Delta[\Delta[\Delta(M_3) + M_2] + M_1] + M_0 = 0. \tag{5.13}$$

Ist insbesondere $M_0(x)$ stetig, $M_q(x)$ $(q = 1, 2)$ qn-mal stetig differenzierbar, so folgt aus (5.7) die Existenz von $\dfrac{d^{qn} P_q}{dx^{qn}}$ und

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\,(P_1) = M_0, \\ \Delta^2(P_2) = \Delta(M_1) + \Delta(P_1) = \Delta(M_1) + M_0, \\ \Delta^3(P_3) = \Delta^2(M_2) + \Delta^2(P_2) = \Delta^2(M_2) + \Delta(M_1) + M_0. \end{array}\right. \tag{5.14}$$

P_3 ist somit $3n$-mal differenzierbar. Aus (5.10) folgt jetzt das Gleiche für M_3, und aus der letzten Gleichung (5.14) und (5.10), dass (5.6) (mit $k = 3$) gilt.

Prag, 30. Juni 1941.