

ÜBER DAS DREIKÖRPERPROBLEM.

Von

O. PYLARINOS

in THESSALONIKI (GRIECHENLAND).

1. In einer früheren Arbeit¹, in der ich die Lagrangeschen Fälle im verallgemeinerten Dreikörperproblem behandelte, habe ich unter anderen einen Sonderfall des Problems untersucht, in dem, unter der Voraussetzung, dass die wechselseitige Wirkung von je zweien der drei Körper der dritten Potenz ihres Abstandes umgekehrt proportional ist, das von den Körpern gebildete Dreieck beständig sich selbst ähnlich bleibt und es sich in Bezug auf ein Inertialkoordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkte der drei Massen um eine in der Ebene der drei Körper liegende Achse dreht.

Nun scheint es mir nicht ohne Interesse, den allgemeineren Fall des Dreikörperproblems zu untersuchen, bei dem bloss die Ebene der drei Körper beständig durch eine in Bezug auf das oben genannte Koordinatensystem feste Gerade hindurchgeht.

In der vorliegenden Note wird zuerst eine von der Natur der wechselseitigen Wirkung der Körper unabhängige Eigenschaft der Bewegung in diesem Sonderfalle aufgestellt. Weiter wird es sich zeigen, dass in diesem Falle, wenn auch die wechselseitige Wirkung von je zweien der drei Körper einer Potenz ihres Abstandes proportional ist, eine homogene Beziehung zwischen den gegenseitigen Entfernungen der drei Körper bestehen muss.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, bedienen wir uns folgendes Hilfssatzes:

» Wenn die Körper eines isolierten Systems dauernd in einer Geraden liegen, so muss diese Gerade in Bezug auf ein Inertialkoordinatensystem, dessen Ursprung

¹ O. PYLARINOS, Über die Lagrangeschen Fälle im verallgemeinerten Dreikörperproblem, Math. Zeitschrift, 47 (1941). S. 357—372.

mit dem Schwerpunkte des Systems zusammenfällt, entweder fest bleiben, oder sich um den Schwerpunkt in einer festen Ebene drehen; im letzteren Falle bleiben die Abstandsverhältnisse von diesen Körpern während der Bewegung konstant».

Liegen nämlich die Körper des Systems beständig in einer Geraden g , so liegen auch ihre Beschleunigungen in derselben Geraden, welche durch den Schwerpunkt G des Systems hindurchgeht; demgemäss muss diese Gerade in Bezug auf das oben genannte Koordinatensystem entweder sich in Ruhe befinden, oder sich um G in einer festen Ebene drehen. Im letzteren Falle wird der Winkelgeschwindigkeitsvektor, welcher der Drehung der Geraden g um den Schwerpunkt G entspricht

$$(1, 1) \quad \bar{\omega} = \omega \bar{a}$$

wobei \bar{a} ein von der Zeit unabhängiger Vektor ist, welcher senkrecht zu der Ebene der Bewegung steht.

Bezeichnet man ferner mit \bar{r}_i den Ortsvektor $\overline{GP_i}$ des beliebigen Körpers P_i des Systems, so kann man diesen Vektor in der Form

$$(1, 2) \quad \bar{r}_i = \lambda_i(t) \bar{q}_i$$

schreiben, wobei $\lambda_i(t)$ eine Funktion der Zeit t ist, welche im Anfangszeitpunkt t_1 den Wert Eins annimmt und für $t \geq t_1$ zweimal differenzierbar ist, und \bar{q}_i den Ortsvektor der in der Geraden g gelegenen Anfangslage des Körpers P_i darstellt.

Aus (1, 2) erhält man durch zweimalige Differenziation nach der Zeit für die Geschwindigkeit \bar{v}_i und die Beschleunigung \bar{b}_i des Körpers P_i die Formeln

$$(1, 3) \quad \bar{v}_i = \dot{\lambda}_i \bar{q}_i + \lambda_i \dot{\bar{q}}_i \quad \bar{b}_i = \ddot{\lambda}_i \bar{q}_i + 2 \dot{\lambda}_i \dot{\bar{q}}_i + \lambda_i \ddot{\bar{q}}_i.^1$$

Daneben gilt bekanntlich

$$(1, 4) \quad \dot{\bar{q}}_i = \bar{\omega} \times \bar{q}_i$$

und daraus durch Differenziation nach der Zeit

$$\ddot{\bar{q}}_i = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{q}_i + \bar{\omega} \times \{\bar{\omega} \times \bar{q}_i\},$$

oder mit Benutzung von (1, 1) und Berücksichtigung der Tatsache, dass die Vektoren \bar{q}_i und \bar{a} beständig senkrecht aufeinander stehen

$$(1, 5) \quad \ddot{\bar{q}}_i = \dot{\bar{\omega}} \bar{a} \times \bar{q}_i - \omega^2 \bar{a} \bar{q}_i.$$

¹ Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

Wenn man nun die Werte von $\dot{\varrho}_i$ und $\ddot{\varrho}_i$ aus (1, 4) und (1, 5) in (1, 3) einführt, so erhält man für die Beschleunigung \bar{b}_i die Formel

$$(1, 6) \quad \bar{b}_i = (\ddot{\lambda}_i - \omega^2 a^2 \lambda_i) \bar{\varrho}_i + (2 \dot{\lambda}_i \omega + \lambda_i \dot{\omega}) \bar{a} \times \bar{\varrho}_i.$$

Berücksichtigt man ferner, dass die Beschleunigung des Körpers P_i stets in g liegt, so hat man unmittelbar

$$2 \dot{\lambda}_i \omega + \lambda_i \dot{\omega} = 0$$

und daher durch Integration

$$(1, 7) \quad \omega = \frac{c_i}{\lambda_i^2}$$

wobei c_i eine von der Zeit unabhängige Grösse bedeutet, welche von Null verschieden sein muss auf Grund der Voraussetzung, dass die Gerade g sich um G dreht.

Da aber $\lambda_i(t)$ für beliebiges i im Anfangszeitpunkt t_1 den Wert Eins annimmt, so ergibt sich aus (1, 7), dass auch c_i von i unabhängig sein muss; daraus folgt unmittelbar, dass die Lage des betrachteten Systems auf der Geraden g beständig sich selbst ähnlich bleibt, und demgemäss, dass die Abstandsverhältnisse dieser Körper während der Bewegung konstant bleiben.

2. Es seien nun P_1, P_2, P_3 drei Körper mit den Massen m_1, m_2, m_3 , welche ein isoliertes System bilden, G der Schwerpunkt der drei Massen und GI der Knoten der Ebene der drei Körper auf der xy -Ebene des zugrunde gelegten Koordinatensystems $Gxyz$ mit dem Ursprung in G .

Bezeichnet man mit $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ die Grundvektoren des Koordinatensystems und mit \bar{i}_0 den Einheitsvektor, welcher in die positive Richtung des Knotens GI fällt, so wird

$$(2, 1) \quad \bar{i}_0 = \cos \varphi \cdot \bar{x}_0 + \sin \varphi \cdot \bar{y}_0,$$

wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren \bar{x}_0 und \bar{i}_0 bedeutet.

Wenn die Ebene der drei Körper sich in Bezug auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem um eine in dieser Ebene liegende Achse, welche man z. B. als die z -Achse des Bezugssystems wählen kann, dreht, so wird der Winkelgeschwindigkeitsvektor, welcher der Drehung von GI um G auf der xy -Ebene entspricht,

$$(2, 2) \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{z}_0,$$

und somit erhält man für die erste und zweite Ableitung von \bar{i}_0 nach der Zeit

$$(2, 3) \quad \dot{\bar{i}}_0 = \bar{\omega} \times \bar{i}_0 = \dot{\varphi} \bar{j}_0, \quad \ddot{\bar{i}}_0 = \ddot{\varphi} \bar{j}_0 - \dot{\varphi}^2 \bar{i}_0,$$

wobei

$$(2, 4) \quad \bar{j}_0 = \bar{z}_0 \times \bar{i}_0 = -\sin \varphi \cdot \bar{x}_0 + \cos \varphi \cdot \bar{y}_0$$

ist.

Bezeichnet man ferner mit $\bar{r}_i (i = 1, 2, 3)$ den Ortsvektor des Körpers $P_i (i = 1, 2, 3)$, so kann man setzen

$$(2, 5) \quad \bar{r}_i = z_i \bar{z}_0 + r'_i \bar{i}_0$$

wobei $r'_i = \bar{r}_i \cdot \bar{i}_0$ ist. Zudem gilt

$$(2, 6) \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i r'_i = 0,$$

auf Grund der Voraussetzung, dass der Ursprung des Bezugssystems mit dem Schwerpunkte der drei Massen zusammenfällt. Da aber die Projektionen der drei Körper auf die xy -Ebene, ebenso wie die Projektionen ihrer Beschleunigungen beständig in der Geraden GI liegen, so gilt für ihre Bewegung der im vorigen Paragraphen angegebene Hilfssatz; mit anderen Worten lässt sich r'_i in der Form

$$(2, 7) \quad r'_i = \lambda(t) \varrho'_i$$

schreiben, wobei $\lambda(t)$ eine Funktion der Zeit ist, welche im Anfangspunkte t_1 den Wert Eins annimmt und ϱ'_i den Anfangswert von r'_i darstellt.

Wenn also die Ebene von drei Körpern, welche ein isoliertes System bilden, sich in Bezug auf ein Inertialkoordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkte der drei Massen um eine in dieser Ebene liegende Achse dreht, so sind während der Bewegung die Abstände der drei Körper von der Drehachse dreien von der Zeit unabhängigen Grössen proportional.

Aus (2, 5) erhält man durch Differenziation nach der Zeit und Benutzung von (2, 3) und (2, 7) für die Geschwindigkeit \bar{v}_i und die Beschleunigung \bar{b}_i des Körpers P_i die Formeln

$$(2, 8) \quad \begin{cases} \bar{v}_i = z_i \bar{z}_0 + \lambda \varrho'_i \bar{i}_0 + \lambda \varrho'_i \dot{\varphi} \bar{j}_0 \\ \bar{b}_i = \ddot{z}_i \bar{z}_0 + \varrho'_i (\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\varphi}^2) \bar{i}_0 + \varrho'_i (2 \dot{\lambda} \dot{\varphi} + \lambda \ddot{\varphi}) \bar{j}_0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man ferner, dass die Beschleunigungen der drei Körper dauernd in der von diesen Körpern definierten Ebene liegen, so entnimmt man aus der zweiten Gleichung (2, 8)

$$2 \dot{\lambda} \dot{\varphi} + \lambda \ddot{\varphi} = 0,$$

woraus man durch Integration folgert

$$(2, 9) \quad \dot{\varphi} = \frac{c}{\lambda^2},$$

wobei c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Mithin erhält nun die Beschleunigung des Körpers P_i die Gestalt

$$(2, 10) \quad \bar{b}_i = \ddot{z}_i \bar{z}_0 + \varrho'_i \left(\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3} \right) \bar{z}_0,$$

wobei $\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3}$ nicht dauernd gleich Null sein kann, da die Körper nicht beständig in einer Geraden liegen.

Andererseits lässt sich bekanntlich¹ die Beschleunigung von P_i in die Form

$$(2, 11) \quad \bar{b}_i = \lambda'_i (\bar{r}_i - \bar{d})$$

bringen, wobei \bar{d} den Ortsvektor des Punktes D bedeutet, durch welchen die Angriffslinien der auf die drei Körper wirkenden Kräfte hindurchgehen.

Setzt man weiter voraus, dass die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper dem Produkt aus den Massen beider Körper und der $-(\nu - 1)$ ten Potenz ihres Abstandes proportional ist, so wird²

$$(2, 12) \quad \bar{d} = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \bar{r}_i$$

mit

$$(2, 13) \quad x_1 = \frac{m_1 a_{23}^\nu}{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu}, \quad x_2 = \frac{m_2 a_{31}^\nu}{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu},$$

$$x_3 = \frac{m_3 a_{12}^\nu}{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu}$$

und

$$(2, 14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{m_1} = -\varepsilon f \frac{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu}{a_{31}^\nu a_{12}^\nu}, \\ \lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{m_2} = -\varepsilon f \frac{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu}{a_{12}^\nu a_{23}^\nu}, \\ \lambda'_3 = \frac{\lambda_3}{m_3} = -\varepsilon f \frac{m_1 a_{23}^\nu + m_2 a_{31}^\nu + m_3 a_{12}^\nu}{a_{23}^\nu a_{31}^\nu}, \end{array} \right.$$

¹ Siehe z. B. O. PYLARINOS, loc. cit. S. 359.

² O. PYLARINOS, loc. cit. S. 369.

wobei f eine positive Konstante bedeutet, $\varepsilon = +1$ oder -1 , je nachdem die Wechselwirkung eine Anziehung oder eine Abstossung ist, und a_{12} , a_{23} , a_{31} die gegenseitigen Entfernungen der drei Körper darstellen.

Aus (2, 10) und (2, 11) erhält man die skalaren Gleichungen

$$(2, 15) \quad \begin{cases} \ddot{z}_1 = \lambda'_1 \{(1 - x_1) z_1 - x_2 z_2 - x_3 z_3\} \\ \ddot{z}_2 = \lambda'_2 \{-x_1 z_1 + (1 - x_2) z_2 - x_3 z_3\} \\ \ddot{z}_3 = \lambda'_3 \{-x_1 z_1 - x_2 z_2 + (1 - x_3) z_3\} \end{cases}$$

und

$$(2, 16) \quad \begin{cases} \varrho'_1 \left(\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3} \right) = \lambda'_1 \lambda \{(1 - x_1) \varrho'_1 - x_2 \varrho'_2 - x_3 \varrho'_3\} \\ \varrho'_2 \left(\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3} \right) = \lambda'_2 \lambda \{-x_1 \varrho'_1 + (1 - x_2) \varrho'_2 - x_3 \varrho'_3\} \\ \varrho'_3 \left(\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3} \right) = \lambda'_3 \lambda \{-x_1 \varrho'_1 - x_2 \varrho'_2 + (1 - x_3) \varrho'_3\}. \end{cases}$$

Die Elimination von $\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3}$ aus den zwei ersten Gleichungen (2, 16) liefert

$$\varrho'_2 \lambda'_1 \{(1 - x_1) \varrho'_1 - x_2 \varrho'_2 - x_3 \varrho'_3\} = \varrho'_1 \lambda'_2 \{-x_1 \varrho'_1 + (1 - x_2) \varrho'_2 - x_3 \varrho'_3\}$$

oder, wenn man in diese Beziehung die Werte von x_i , λ'_i ($i = 1, 2, 3$) aus (2, 13) und (2, 14) einsetzt und beachtet, dass, wegen der zweiten Gleichung (2, 6)

$$(2, 17) \quad \sum_1^3 m_i \varrho'_i = 0$$

ist,

$$(2, 18) \quad \frac{\varrho'_3 (\varrho'_1 - \varrho'_2)}{a_{12}^*} + \frac{\varrho'_1 (\varrho'_2 - \varrho'_3)}{a_{23}^*} + \frac{\varrho'_2 (\varrho'_3 - \varrho'_1)}{a_{31}^*} = 0.$$

Letztere Beziehung ergibt sich auch durch die Elimination von $\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3}$ aus irgendwelchen zweien der Gleichungen (2, 16), denn die linken Seiten dieser drei Gleichungen befriedigen, wie man leicht erkennt, eine homogene und lineare Beziehung.

Daher ergibt sich folgender Satz:

Wenn die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper der $-(v-1)$ ten Potenz ihres Abstandes proportional ist und die von diesen Körpern definierte Ebene

sich um eine in dieser Ebene liegende Achse dreht, so besteht zwischen den gegenseitigen Entfernungen a_{12} , a_{23} , a_{31} der drei Körper eine Beziehung von der Form

$$\frac{A_1}{a_{23}^v} + \frac{A_2}{a_{31}^v} + \frac{A_3}{a_{12}^v} = 0,$$

wobei A_1 , A_2 , A_3 drei von der Zeit unabhängige Grössen sind, von denen mindestens zwei von Null verschieden sind.

