ÜBER EINE METHODE ZUR LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGS-GLEICHUNG.

Von

PENTTI LAASONEN

in TAMPERE (FINNLAND).

In ihrem beachtenswerten Aufsatz in den Mathematischen Annalen (Bd. 100, 1928) legen COURANT, FRIEDRICHS und LEWY eine Methode zur Lösung der in der Physik oft vorkommenden elliptischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen vor, bei welcher der Raum der n stetigen Variablen durch ein n-dimensionales Gitternetz und die partiellen Differentialquotienten durch die entsprechenden in den Gitterpunkten definierten Differenzenquotienten ersetzt werden, womit die Aufgabe in ein einfaches System von Differenzengleichungen übergeht. In manchen Fällen kann die Konvergenz der elementar auffindbaren Lösungen dieses Systems für gegen Null abnehmende Maschenweite nachgewiesen werden. Auch in bezug auf die Normalform der parabolischen Gleichung, die sog. Wärmeleitungsgleichung, wird dies in dem einfachsten Fall durchgeführt, der die quellenlose Wärmeleitung in einem zweiseitig unendlichen linearen Leiter zum Gegenstand hat.

Im folgenden wird der allgemeinere, beiderseitig begrenzte und mit inneren Quellen versehene lineare Wärmeleiter, d. h. die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit gegebenen Randwerten behandelt. Wir wollen dabei vor allem betonen, dass eine von der bisherigen etwas abweichende Wahl der Differenzenquotienten im Hinblick auf die Einfachheit des Konvergenzbeweises vorteilhaft ist, so dass der Existenzbeweis für die Lösung der Differentialgleichung sich in dem vorliegenden regulären Fall auf ganz elementare Betrachtungen gründen lässt.

Es gilt diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \varkappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + q(x, t) = 0 \qquad (\varkappa^2 > 0)$$

zu bestimmen, die auf dem Rand des Bereichs

$$A_T: \quad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq L, & (L > 0) \\ 0 \leqq t \leqq T & (0 < T < \infty) \end{cases}$$

die Randbedingungen

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_0(x), & (0 \leqq x \leqq L) \\ u(0, t) = f_1(t), & (0 \leqq t \leqq T) \\ u(L, t) = f_2(t) & (0 \leqq t \leqq T) \end{cases}$$

erfüllt.

Bei der Formulierung der die Existenz dieser Lösung gewährleistenden Voraussetzungen hinsichtlich der gegebenen Funktionen $q(x, t)$, $f_0(x)$, $f_1(t)$ und $f_2(t)$ wollen wir keineswegs nach der grösstmöglichen Allgemeinheit streben sondern die folgenden, wohl zu strengen, aber bei den Anwendungen meistens erfüllten Bedingungen aufstellen:

Satz. *Die Quellenfunktion $q(x, t)$ soll die Ableitungen q''_{xx} und q'_t, die Randwertfunktionen $f_0(x)$, $f_1(t)$ und $f_2(t)$ die Ableitungen $f_0^{(4)}$, f_1'' bzw. f_2'' besitzen. Dann gehört dem obigen Problem eine eindeutige Lösung zu.*

Um zu den der zu gebrauchender Methode charakteristischen Elementarproblemen zu gelangen wird zuerst der Bereich A_T mit dem Netz der Gitterpunkte

$$x = nh, \quad t = mk$$

überdeckt, wo h und k die Maschenweiten in der x-bzw. t-Richtung $\left(h \text{ ein Bruchteil } \frac{L}{N} \text{ und } k \text{ ein Bruchteil } \frac{T}{M}\right)$ sowie n und m ganze Zahlen sind. In der Gleichung (1) werden jetzt die partiellen Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}: \qquad \frac{U(x-h, t) - 2U(x, t) + U(x+h, t)}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}: \qquad \frac{U(x, t) - U(x, t-k)}{k}$$

einer Funktion U ersetzt, die in den Gitterpunkten definiert zu denken ist. Gleichfalls wird die Quellenfunktion $q(x, t)$ von (1) durch eine Funktion $Q(x, t)$ ersetzt, die in den Gitterpunkten gemäss

$$Q(x, t) = q(x, t)$$

definiert wird. Damit ergibt sich die Differenzengleichung

$$\text{(2)} \quad \frac{\kappa^2}{h^2}[U(x-h, t) - 2\,U(x, t) + U(x+h, t)] - \frac{1}{k}[U(x, t) - U(x, t-k)] + Q(x, t) = 0$$

oder

$$\text{(3)} \qquad U(x, t) = \frac{U(x-h, t) + U(x+h, t) + a\,U(x, t-k)}{2+a} + b \cdot Q(x, t)$$

wo von den Abkürzungen

$$\begin{cases} a = \dfrac{h^2}{k\kappa^2} \\[2ex] b = \dfrac{1}{2\dfrac{\kappa^2}{h^2} + \dfrac{1}{k}} \end{cases}$$

Gebrauch gemacht worden ist. Für die Gitterfunktion werden in den Randpunkten des Gitterbereichs die Werte

$$\begin{cases} U(nh, 0) = f_0(nh) & (0 \leqq n \leqq N) \\ U(0, mk) = f_1(mk) & (0 \leqq m \leqq M) \\ U(Nh, mk) = f_2(mk) & (0 \leqq m \leqq M) \end{cases}$$

vorgegeben.

— Um die Behandlung zu vereinfachen, wollen wir im folgenden zuerst allseitige Endlichkeit des betrachteten Bereichs und somit auch Endlichkeit der Grössen T und M annehmen, womit dann die Beschränktheit von U und von den Differenzenquotienten dieser Funktion gleichmässig wird. Nachher kann dann durch Übergang zu unbeschränkt wachsendem T die wesentliche Unveränderlichkeit des bewiesenen Existenzsatzes auch für unendliches T gefolgert werden. —

Zur Bestimmung der $M(N-1)$ Unbekannten

$$U(nh, mk) \qquad \begin{cases} n = 1, 2, \ldots, N-1 \\ m = 1, 2, \ldots, M \end{cases}$$

werden nun ebenso viele Gleichungen (2) erhalten. Dieses lineare System besitzt eine eindeutige Lösung, wenn nicht die Koeffizientendeterminante verschwindet. Dies kann entweder direkt aus der Gestalt der Determinante ersehen oder indirekt folgenderweise gefunden werden. Würde die Determinante verschwinden, so hätte nach der Gleichungstheorie das entsprechende homogene Gleichungssystem auch nichttriviale Lösungen. Das homogene Gleichungssystem mit iden tisch verschwindenden Randwerten kann aber nach (3) auch in den Innenpunkten nur den Wert 0 als Lösung erhalten; die Formel (3) kann nämlich, wenn $Q(x, t)=0$ ist, als eine Mittelwertformel gedeutet werden, so dass sie in einem Innenpunkt das Vorkommen weder eines Maximums noch eines Minimums zulässt. In den Innenpunkten des Gitterbereichs wird die Funktion U somit eindeutig bestimmt.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{cases} G_T = \max\left(\left|f_0(x)\right|_{0\leqq x\leqq L}, \left|f_1(t)\right|_{0\leqq t\leqq T}, \left|f_2(t)\right|_{0\leqq t\leqq T}\right), \\ H_T = \max\limits_{\substack{0\leqq x\leqq L \\ 0\leqq t\leqq T}} \left|q(x, t)\right|, \end{cases}$$

ein und zeigen, dass die Ungleichung

$$\left|U(x, t)\right| \leqq G_T + \frac{1}{8\varkappa^2} H_T \tag{4}$$

im Bereich A_T gilt. Hierzu wird U mit der Funktion $\bar{U}$ verglichen, die als Lösung unserer Randwertaufgabe den folgenden Quellen- und Randwertfunktionen zugeordnet ist:

$$\begin{cases} \bar{q}(x, t) = H_T, \\ \bar{f}_0(x) \quad = \frac{1}{2\varkappa^2} H_T x(L-x) + G_T, \\ \bar{f}_1(t) \quad = \bar{f}_2(t) = G_T. \end{cases}$$

Sofort wird festgestellt, dass die Vergleichsfunktion

$$\bar{U}(x, t) = G_T + \frac{1}{2\varkappa^2} H_T x(L-x)$$

ist. Die Funktion $\bar{U} - U$ löst somit die Randwertaufgabe mit den Randfunktionen

$$\begin{cases} \bar{f}_0 - f_0 \geqq \frac{1}{2\varkappa^2} H_T x(L-x) \geqq 0, \\ \bar{f}_1 - f_1 \geqq 0, \\ \bar{f}_2 - f_2 \geqq 0 \end{cases}$$

und der nichtnegativen Quellenfunktion $\bar{q} - q$. Nach (3) kann $\bar{U} - U$ seinen kleinsten Wert in keinem Innenpunkt erhalten, also ist diese Funktion überall nichtnegativ. Aus der Ungleichung $\bar{U} \geqq U$ und der analog zu beweisenden $-\bar{U} \leqq U$ folgt dann die Behauptung (4).

— In diesem Zusammenhang wollen wir unsere Methode, die partielle Ableitung $u_t'(x, t)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{U(x, t) - U(x, t-k)}{k}$ zu ersetzen, mit dem bisher üblichen Ausdruck $\frac{U(x, t+k) - U(x, t)}{k}$ vergleichen. Letzterer gibt zwar den einfachen expliziten Ausdruck

$$U(x, t+k) = \frac{1}{a}[U(x-h, t) + (a-2)\,U(x, t) + U(x+h, t)] + k\,Q(x, t),$$

der die schrittweise Berechnung der unbekannten Werte U ermöglicht, um aber die Konvergenz der verschiedenen Gitterfunktionen für verschwindende Maschenweiten zu gewährleisten muss die Positivität des Koeffizienten $a-2$, d. h. eine Ungleichung zwischen den zwei Maschenweiten, vorausgesetzt werden. Unser Ausdruck (3) dagegen macht keine derartigen Bedingungen notwendig. Ein anderer theoretischer Nachteil des bisherigen Verfahrens liegt darin, dass auf die Bestimmung eines Wertes $U(x, t)$ nur diejenigen Randwerte von $U(x+nh, t-mk)$ einwirken können, für welche $m \geqq |n|$ ist, während bei unserer Rechenmethode mit dem infinitesimalen Sachverhalt übereinstimmend alle Randwerte mit $m \geqq 0$ von Einfluss sind. —

Wir betrachten jetzt irgendeine solche unendliche Folge den Bereich A_T überdeckender Gitternetze, dass beim Fortschreiten in der Folge die beiden Maschenweiten h and k gegen Null streben, sowie die entsprechende unendliche Folge von U-Funktionen. Im folgenden müssten wir eigentlich aus dieser Folge auf Grund einer Konvergenzeigenschaft eine Teilfolge auswählen, dieser wieder eine neue Teilfolge entnehmen und diese Auswahl endlich viele oder höchstens abzählbar unendlich viele Male wiederholen. Jedoch werden wir das Ausführen dieser Teilfolgenwahl stets unerwähnt lassen und nehmen folglich an, dass die ursprüngliche Folge schon alle diese Konvergenzeigenschaften besitzt.

Ebenso können wir jetzt mit Rücksicht auf die gleichmässige Beschränktheit der Funktionen U voraussetzen, dass es, wenn B_T eine auf A_T überall dichte abzählbare Punktmenge ist, für jeden Punkt P von B_T eine solche Folge von Vertreterpunkten aus den aufeinanderfolgenden Gittern gibt, dass erstens die Punktfolge gegen P konvergiert und zweitens den Werten der entsprechenden Gitterfunktionen U ein bestimmter Grenzwert $u(P)$ zukommt.

Wir bezeichnen die Differenzenquotienten der Gitterfunktionen U den partiellen Ableitungen entsprechend mit

$$U'_x(x, t),\ U'_t(x, t),\ U''_{xx}(x, t), \ldots, U^{(\mu+\nu)}_{x^\mu t^\nu}(x, t), \ldots,$$

wobei die Variablen x und t die Koordinaten des Schwerpunktes der angewandten Gitterpunkte bedeuten. Dann genügt U der Differenzengleichung

$$(5) \qquad \varkappa^2 V''_{xx}(x, t) - V'_t(x, t - \tfrac{1}{2} k) + p(x, t) = 0,$$

wenn als Funktion $p(x, t)$ die Quellenfunktion $Q(x, t)$ genommen wird. Offenbar erfüllt auch jeder Differenzenquotient von U die selbe Gleichung, wenn der entsprechende Differenzenquotient von $Q(x, t)$ zur Funktion $p(x, t)$ genommen und vorausgesetzt wird, dass alle in Frage kommenden Gitterpunkte zum Bereich A_T gehören. Allgemeiner wird bemerkt, dass U der Differenzengleichung

$$(6) \qquad \varkappa^{2\alpha} V^{(2\alpha)}_{x^{2\alpha}}(x, t) - V^{(\alpha)}_{t^\alpha}\left(x, t - \frac{\alpha}{2} k\right) + r(x, t) = 0$$

genügt, wo

$$(7) \qquad r(x, t) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \varkappa^{2i} q^{(\alpha+i-1)}_{x^{2i} t^{\alpha-i-1}}\left(x, t - \frac{\alpha - i - 1}{2} k\right)$$

bedeutet. Ein jeder Differenzenquotient von U genügt also ebenfalls der Gleichung (6), wenn in dem Ausdruck (7) der r-Funktion q mit dem entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt wird.

Wir wollen nun annehmen, dass die Randwertfunktion $f_0(x)$ Ableitungen bis zur $2n$:ten Ordnung, die Randwertfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ solche bis zur n:ten Ordnung sowie die Quellenfunktion $q(x, t)$ partielle Ableitungen $q^{(\mu+\nu)}_{x^\mu t^\nu}(x, t)$ von den Ordnungen $\mu + 2\nu \leqq 2n - 2$ besitzen und dass alle diese Ableitungen beschränkt sind. Dann sind also auch alle für die Gitterpunktmengen gebildeten Differenzenquotienten der entsprechenden Ordnungen gleichmässig beschränkt. Wir behaupten, dass dann auch die Differenzenquotienten $U^{(\mu+\nu)}_{x^\mu t^\nu}(x, t)$ der Gitterlösungsfunktionen U von den Ordnungen $\mu + 2\nu \leqq 2n$ gleichmässig beschränkt sind.

Es sei zuerst μ gerade, $\mu = 2\lambda$. Weil $U^{(\mu)}_{x^\mu}$ und $U^{(\nu)}_{t^\nu}$ gewissen Gleichungen von der Form (6) genügen, wo α mit ν bzw. mit λ ersetzt werden kann und wo die Funktionen r gewisse gleichmässig beschränkte Linearausdrücke der Differenzenquotienten von q sind, kann der zu untersuchende Differenzenquotient $U^{(\mu+\nu)}_{x^\mu t^\nu}(x, t)$ sowohl in der Form

$$\varkappa^{2\nu} U^{(\mu+2\nu)}_{x^{\mu+2\nu}}\left(x, t + \frac{\nu}{2} k\right) + r_1(x, t)$$

als auch in der Form

$$\varkappa^{-2\lambda}\, U^{(\lambda+\nu)}_{t^{\lambda+\nu}}\left(x,\, t-\frac{\lambda}{2}k\right)+r_2(x,\, t)$$

ausgedrückt werden, wo r_1 und r_2 gewisse von q und seinen Differenzenquotienten linear abhängige, gleichmässig beschränkte Ausdrücke sind.

Der Differenzenquotient $U^{(\mu+\nu)}_{x^\mu t^\nu}$ erfüllt, wie oben bemerkt, eine Gleichung von der Form (5). Die gleichmässige Beschränktheit der zugehörigen Funktion $p(x, t)$ in (5) ist offensichtlich, und die Beschränktheit der Randwerte wird an Hand der Ausdrücke

$$\begin{cases} \varkappa^{2\nu} f_0^{(\mu+2\nu)}(\xi)+r_1(x,\, 0), & (0<\xi<L) \\ \varkappa^{-2\lambda} f_1^{(\lambda+\nu)}(\tau_1)+r_2(0,\, t), & (0<\tau_1<T) \\ \varkappa^{-2\lambda} f_2^{(\lambda+\nu)}(\tau_2)+r_2(L,\, t) & (0<\tau_2<T) \end{cases}$$

auf den betreffenden Randteilen gefolgert. Nach dem vorangegangenen Beweis für die Beziehung (4) kann nun auf die gleichmässige Beschränktheit von $U^{(2\lambda+\nu)}_{x^{2\lambda} t^\nu}$ auch im Innern des Bereichs A_T geschlossen werden.

Wenn μ ungerade ist, also $\mu = 2\lambda + 1$, wobei somit $\lambda < n - \nu$ sein muss, wird zuerst die Gitterfunktion $U^{(2\lambda+\nu)}_{x^{2\lambda} t^\nu}(x, t_0)$ betrachtet. Ihre beiden Endwerte auf der Punktstrecke $0 \leqq x \leqq L$, $t = t_0$ sind beschränkt, und nach dem Vorigen ist auch ihr zweiter Differenzenquotient in bezug auf x $U^{(2\lambda+\nu+2)}_{x^{2\lambda+2} t^\nu}(x, t_0)$ auf der Strecke gleichmässig beschränkt, so dass die gleichmässige Beschränktheit des ersten Differenzenquotienten in bezug auf x, also von $U^{(2\lambda+\nu+1)}_{x^{2\lambda+1} t^\nu}(x, t_0)$ leicht gefolgert werden kann.

Durch die Beschränktheit der Ableitungen der Quellen- und Randwertfunktionen unseres Problems wird also die Annahme zulässig, dass nicht nur die Folge der Funktionen U sondern auch die Folgen ihrer entsprechenden Differenzenquotienten bei der Annäherung gegen Punkte von B_T gegen bestimmte, gleichmässig beschränkte Werte konvergieren. Hieraus kann wieder auf die Stetigkeit der Grenzfunktion u und ihrer Ableitungen in folgender Weise geschlossen werden. Wenn z. B. noch die Ableitungen q''_{xx}, q'_t, $f_0^{(4)}$, f_1'' und f_2'' existieren, kann ausser der Konvergenz der Funktionen U auch diejenige der Folgen der Differenzenquotienten U'_x, U'_t, U''_{xx}, U''_{xt}, U''_{tt}, U'''_{xxx}, U'''_{xxt}, $U^{(4)}_{x^4}$ vorausgesetzt werden. Die zugehörigen Grenzfunktionen sind in allen Punkten von B_T definiert und beschränkt.

Zuerst folgt aus der gleichmässigen Beschränktheit der Folgen von den beiden ersten Differenzenquotienten von U, dass die auf B_T definierte Grenzfunktion u der Folge von U-Funktionen als eine stetige Funktion auf dem ganzen Bereich A_T definiert werden kann. Weil ferner die beiden ersten Differenzenquotienten beispielsweise von U'_x gleichmässig beschränkt sind, ist auch die Grenzfunktion der Folge U'_x auf A_T stetig definierbar. Wir behaupten jetzt, dass diese Funktion die Ableitung u'_x ist.

Um dies zu beweisen bilden wir für beliebige, zuerst jedoch feste Punkte P und P' mit der gleichen t-Koordinate den Differenzenquotienten $\dfrac{u(P')-u(P)}{x(P')-x(P)}$. Bezeichnen wir mit P_n bzw. P'_n die nächstgelegenen Punkte des n:ten Gitters, so kann jener Quotient offenbar mit beliebiger Genauigkeit durch $\dfrac{U_n(P'_n)-U_n(P_n)}{x(P'_n)-x(P_n)}$ approximiert werden, wenn n gross genug genommen wird. Dieser Differenzenquotient seinerseits kann als ein Mittelwert von den Differenzenquotienten U'_{n_x} zwischen P_n und P'_n ausgedrückt werden und nähert sich somit beliebig gut dem Grenzwert von U'_x im Punkte P, wenn erstens n gross genug und zweitens P' genügend nahe P gewählt worden ist. Hieraus folgt aber die Behauptung.

Gleicherweise wird aus der gleichmässigen Beschränktheit der beiden ersten Differenzenquotienten von U'_t auf die Stetigkeit der Grenzfunktion von U'_t geschlossen sowie bewiesen, dass diese Grenzfunktion gleich der Ableitung u'_t ist. Schliesslich kann auf die selbe Weise die Existenz und die Stetigkeit der Ableitung u''_{xx} gefolgert werden.

Da U der Gleichung

$$\varkappa^2 U''_{xx}(x, t) - U'_t(x, t-\tfrac{1}{2}k) + Q(x, t) = 0$$

genügt, in welcher die Differenzenquotienten U''_{xx} und U'_t gegen die Ableitungen u''_{xx} und u'_t konvergieren und die Funktion Q gegen die Funktion q, genügt u der Differentialgleichung (1). Aus der gleichmässigen Stetigkeit von u folgt nun, dass diese Funktion die richtigen Randwerte erhält. Die Funktion u leistet mithin die Lösung unserer Aufgabe.

— Aus der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung folgt offenbar, dass eine jede Gitterfolge, deren Maschenweiten gegen Null konvergieren, die gleiche Grenzfunktion u liefert, so dass die Beschränkung auf bestimmte Teilfolgen in der Tat nicht erforderlich ist. —

Wenn den Quellen- und Randwertfunktionen keine anderen Eigenschaften als die Stetigkeit vorgeschrieben sind, wird wieder, wie oben, die Konvergenz einer geeigneten Folge von Gitterfunktionen gegen die Grenzfunktion u festgestellt. Auch die Stetigkeit dieser Grenzfunktion ist offenbar. Werden nämlich die Quellenfunktion und die Randwertfunktionen durch solche Funktionen, die die erforderlichen Ableitungen besitzen, so genau approximiert, dass der Absolutwert des Fehlers in bezug auf erstere $< 4\varkappa^2 \varepsilon$ und in bezug auf die letzteren $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so wird u durch die stetige Lösung der entsprechenden Gleichung (1) mit der Genauigkeit ε approximiert; hieraus folgt die Behauptung. Aus der Stetigkeit folgt weiter, dass u die richtigen Randwerte erhält. Es ist auch offensichtlich, dass wenn die Differentialgleichung eine Lösung mit den geforderten Randwerten besitzt, diese mit u übereinstimmen muss. Um aber die Existenz der Lösung für die Aufgabe oder, was zu derselben Schlussfolgerung führen würde, die Existenz der Ableitungen u''_{xx} und u'_t zu beweisen, müsste man in diesem allgemeineren Fall, wo nur die Stetigkeit, nicht aber die Differenzierbarkeit der vorgegebenen Quellen- und Randwertfunktionen bedingt wird, entweder von speziellen Grundlösungen oder von irgendwelchen anderen weniger elementaren Hilfsbetrachtungen Gebrauch machen. Mit Rücksicht auf das begrenzte Ziel, das wir uns eingangs gesteckt haben, wollen wir auf die Überwindung dieser in physikalischen und technischen Anwendungen kaum eintretenden Komplikationen verzichten. Dasselbe gilt für die zwar leicht mögliche Verallgemeinerung in bezug auf den Rand des Bereichs A_T.