PERIODISCHE ZYKLISCHE DIFFERENZENMATRIZEN.

Von

T. SZELE
in DEBRECEN (UNGARN).

§ 1. Einleitung.

Sei G eine beliebige additive Abelsche Gruppe und

$$(1) \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$$

eine Folge von $m(\geqq 2)$ Elementen aus G. Die Folge

$$(2) \qquad a_1-a_0, a_2-a_1, \ldots, a_0-a_{m-1}$$

nennen wir die *zyklische Differenzenfolge* von (1). Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine m-spaltige unendliche Matrix M_m mit der ersten Zeile (1), in der jede weitere Zeile die zyklische Differenzenfolge der unmittelbar vorangehenden Zeile ist. Diese Matrix nennen wir die zur Anfangszeile (1) gehörende *zyklische Differenzenmatrix*[1]. Die Matrix M_m wird *periodisch* genannt, falls ihre $(k+1)$-te Zeile für eine natürliche Zahl k mit der ersten Zeile (1) übereinstimmt.

Wir geben einige Beispiele für periodische zyklische Differenzenmatrizen an:

1°. Die Null-Matrix $M_m(0)$ mit der Anfangszeile $0, 0, \ldots, 0$.

2°. Die zyklische Differenzenmatrizen $M^*_{6r}(a, b)$ mit $6r$ Spalten und mit der Anfangszeile

$$(3) \qquad a, b, b-a, -a, -b, a-b, \ldots, a-b\,,$$

die man nach der Bildungsregel

$$(4) \qquad a_0 = a,\ a_1 = b,\ a_k = a_{k-1}-a_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots, 6r-1)$$

erhält. Hier sind a, b beliebige Elemente aus G. Offenbar entsteht die Zeile (3)

---

[1] Matrizen von solcher Bauart spielen eine wichtige Rolle in einer gemeinsamen Untersuchung von L. Rédei und von mir über das Problem der Darstellung der Restklassenfunktionen durch Polinome. Siehe: L. RÉDEI und T. SZELE, Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe II. — Acta mathematica, 82 (1950), S. 210—241.

durch r-maliges Nebeneinandersetzen der Folge der ersten 6 Elemente. Die zur Anfangszeile (3) gehörende zyklische Differenzenmatrix $M_{6r}^{*}(a, b)$ ist periodisch, denn ihre vierte Zeile stimmt mit (3) überein (es ist sogar jede Zeile von $M_{6r}^{*}(a, b)$ eine zyklische Permutation von (3)).

3°. Betrachten wir eine Matrix M_m, deren Anfangszeile (1) aus lauter Elementen a_i von *endlicher Ordnung* in G besteht. Dann liegen sämtliche Elemente von M_m in der endlichen Untergruppe $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, erzeugt von den eingeklammerten Elementen. Da sich aus den Elementen einer endlichen Gruppe überhaupt nur endlich viele verschiedene m-gliedrige Folgen bilden lassen, muss die Matrix M_m eine Zeile haben, die mit einer vorigen übereinstimmt. Ist die erste solche Zeile die l-te und stimmt diese mit der k-ten ($k < l$) überein, so lassen wir im Falle $k > 1$ die ersten $k-1$ Zeilen von M_m weg. So erhalten wir eine periodische Matrix mit lauter Elementen endlicher Ordnung. Eine solche periodische zyklische Differenzenmatrix bezeichnen wir mit $\overline{M}_m$.

4°. Alle Summen

$$M_{6r}^{*}(a, b) + \overline{M}_{6r} \tag{5}$$

sind offenbar auch periodische zyklische Differenzenmatrizen.

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, dass mit den in den Beispielen 1°.–4°. angegebenen schon *alle möglichen periodischen zyklischen Differenzenmatrizen* erschöpft sind, die sich aus Elementen der Gruppe G bilden lassen. Obwohl dies als ein rein gruppentheoretischer Satz anzusehen ist, können wir doch seine Richtigkeit nur auf algebraischem Wege, insbesondere mit Hilfe des kräftigen Apparates der Differenzenrechnung zeigen. In § 2 müssen wir nämlich zuerst alle Typen von periodischen zyklischen Differenzenmatrizen im Körper A der algebraischen Zahlen bestimmen, um auf diesem Grunde in § 3 den allgemeinen Fall erledigen zu können. In § 4 weise ich auf eine schöne gruppenalgebraische Anwendung des obigen Resultates hin, die ich einer freundlichen mündlichen Mitteilung vom Herrn Professor G. Hajós verdanken kann.

§ 2. Die periodischen Matrizen M_m im Körper A.

In diesem § sollen alle Elemente der betrachteten zyklischen Differenzenmatrizen algebraische Zahlen sein. Die Null-Matrix lassen wir in diesem § ausser Betracht.

Wir ordnen der zyklischen Differenzenmatrix M_m mit der Anfangszeile (1) eine Funktion $f(x)$ zu, die wir nur für die ganzen rationalen Werte von x und zwar durch

(6) $$f(i) = a_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1); \qquad (a_i \in A),$$

(7) $$f(x+m) = f(x) \qquad (x = 0, \pm 1, \ldots)$$

definieren. Dann ist die $(k+1)$-te Zeile der Matrix M_m

$$\Delta^k f(0), \Delta^k f(1), \ldots, \Delta^k f(m-1)$$

mit $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Ist die Matrix M_m periodisch, so gibt es eine natürliche Zahl k, für die $\Delta^k f(x) = f(x)$, d h.

(8) $$f(x+k) - \binom{k}{1} f(x+k-1) + \cdots + \big((-1)^k - 1\big) f(x) = 0 \qquad (x = 0, \pm 1, \ldots)$$

gilt. Die Bestimmung aller periodischen Matrizen M_m im Körper A kommt also auf die Angabe sämtlicher gemeinsamer Lösungen $f(x)$ der Differenzengleichungen (7), (8) hinaus.

Nun gelten die folgenden Lemmas:

Lemma 1[2]. *Alle Lösungen $f(x)$ einer Differenzengleichung*

(9) $$f(x+n) + b_1 f(x+n-1) + \cdots + b_n f(x) = 0 \qquad (b_i \in A)$$

lassen sich in der Form

(10) $$f(x) = c_1 \beta_1^x + \cdots + c_n \beta_n^x$$

angeben, wobei die c_i beliebige algebraische Zahlen sind und die β_i die Wurzeln der entsprechenden charakteristischen Gleichung

(11) $$z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

bezeichnen, vorausgezetzt, dass je zwei $\beta_i, \beta_j (i \neq j)$ verschieden sind.

Lemma 2. *Zwei Differenzengleichungen von der Form* (9) *besitzen eine (nicht identisch verschwindende) gemeinsame Lösung $f(x)$ nur dann, wenn die entsprechenden charakteristischen Gleichungen gemeinsame Wurzeln haben, und alle gemeinsamen Lösungen $f(x)$ lassen sich in der Form*

(12) $$f(x) = c_1 \beta_1^x + \cdots + c_s \beta_s^x$$

angeben, wobei $\beta_1, \ldots, \beta_s$ die gemeinsamen Wurzeln der beiden charakteristischen

---

[2] Dies ist ein wohlbekannter Satz in der Differenzenrechnung, Siehe: N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung (Grundlehren der Math. Wiss. 13), Berlin (1924), S. 296. — Den sehr kurzen Beweis dieses Satzes führe ich hier nur vollständigkeitshalber aus.

Gleichungen bezeichnen, vorausgezetzt, dass keine von diesen mehrfache Wurzeln besitzt.

Nach $\beta_i^{x+h} = \beta_i^h \beta_i^x$ ist es klar, dass (10) immer eine Lösung von (9) ist. Sei andererseits $g(x)$ eine beliebige Lösung von (9). Dann lassen sich $c_1, \ldots, c_n$ in (10) derart bestimmen, dass

$$f(i) = g(i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{13}$$

gelten; dies folgt daraus, dass die Determinante des Gleichungssystems (13) für die Unbekannten $c_1, \ldots, c_n$, als die Vandermondesche Determinante von $\beta_1, \ldots, \beta_n$, nach Voraussetzung nicht verschwindet. Nach (13) muss dann $f(x)$ in jeder ganzen rationalen Stelle x mit $g(x)$ übereinstimmen, da auf Grund von (9) eine Lösung $f(x)$ durch ihre Werte an n nacheinander folgenden ganzzahligen Stellen x eindeutig bestimmt ist.

Die Richtigkeit vom Lemma 2 folgt einfach daraus, dass zwei Funktionen $f(x)$ von der Form (10) für alle ganzen Werte von x nur dann miteinander übereinstimmen, wenn sie (formal) identisch sind. Wäre nämlich diese Behauptung falsch, so gälten die unendlich vielen Gleichungen

$$c_1'\alpha_1^x + \cdots + c_t'\alpha_t^x = 0 \qquad (x = 0, \pm 1, \ldots) \tag{14}$$

mit $c_1' \ldots c_t' \neq 0$ und lauter voneinander verschiedenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, was offensichtlich ein Widerspruch ist, es folgt ja aus (14) (schon für die Werte $x = 0, 1, \ldots, t-1$) nach Vandermonde $c_1' = \ldots = c_t' = 0$.

Zu unseren Differenzengleichungen (7), (8) gehören die charakteristischen Gleichungen

$$x^m - 1 = 0\,, \tag{15}$$

$$(x-1)^k - 1 = 0\,. \tag{16}$$

Keine von diesen hat mehrfache Wurzeln und so folgt aus Lemma 2, dass (7) und (8) nur dann eine gemeinsame Lösung $f(x)$ haben können, falls (15) und (16) gemeinsame Wurzeln besitzen. In der komplexen Zahlebene liegen aber die Wurzeln von (15) und (16) auf dem Einheitskreis um den Mittelpunkt 0 bzw. 1, woraus man sieht, dass (15) und (16) nur die beiden primitiven sechsten Einheitswurzeln als gemeinsame Lösung besitzen können[3]. Dann gilt in (15) $m = 6r$ und nach Lemma 2 sind alle gemeinsamen Lösungen von (7) und (8) von der Form

$$f(x) = c_1\varrho_1^x + c_2\varrho_2^x \quad \text{mit} \quad \varrho_i^2 - \varrho_i + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{17}$$

[3] Dies ist der einzige Punkt in unserem Beweisgang, der nicht rein algebraisch ist. Auch dieser Schluss liesse sich gewiss durch einen rein algebraischen ersetzen; allerdings ist aber der obige der denkbar einfachste und kürzeste.

Mithin genügt unsere Funktion $f(x)$, die wir der periodischen zyklischen Differenzenmatrix M_m zugeordnet haben, der Differenzengleichung

$$f(x+2)-f(x+1)+f(x) = 0 ,$$

woraus nach (6) und (4) folgt, dass M_m eine Matrix vom Typ $M^*_{6r}(a, b)$ ist. Als Resultat haben wir also bekommen, dass *mit den Typen unter* 1° *und* 2° *alle periodischen zyklischen Differenzenmatrizen im Körper A der algebraischen Zahlen erschöpft sind.*

§ 3. Die periodischen Matrizen M_m in einer beliebigen Abelschen Gruppe G.

Sei M_m eine von der Null-Matrix verschiedene periodische zyklische Differenzenmatrix mit der Anfangszeile (1), deren Elemente zu einer beliebigen additiven Abelschen Gruppe G gehören. Wir zeigen, dass dann M_m eine Matrix vom Typ unter 3° oder 4° ist (wobei unter 4° auch der Typ 2° als Spezialfall mitenthalten ist).

Offenbar liegen alle Elemente von M_m in der Untergruppe $\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ von G, erzeugt von den Elementen $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Nach dem Fundamentalsatz der Abelschen Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden[4] ist die Gruppe $\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ eine direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen, d. h. es gilt die direkte Zerlegung

$$\{a_0, \ldots, a_{m-1}\} = U+E ,$$

wobei E eine endliche Gruppe und U eine direkte Summe von $h(\geqq 0)$ unendlichen zyklischen Gruppen ist. Dementsprechend zerspaltet sich M_m in eine Summe $M'_m+\overline{M}_m$, wobei auch M'_m und $\overline{M}_m$ periodische zyklische Differenzenmatrizen sind, und $\overline{M}_m$ eine Matrix gebildet in E d. h. eine Matrix vom Typ unter 3° ist. Nach (5) müssen wir nur noch zeigen, dass die periodische zyklische Differenzenmatrix M'_m gebildet in der Gruppe U entweder die Null-Matrix $M_m(0)$, oder eine Matrix $M^*_m(a, b)$ ist.

Sei $u_1, \ldots, u_h$ eine Basis der Gruppe U. Dann lässt sich jedes Element von U eindeutig in der Form

$$n_1u_1+\cdots+n_hu_h \tag{18}$$

mit ganzen rationalen Zahlen n_i darstellen. Wählen wir eine algebraische Zahl α, die eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung im rationalen Zahlkörper vom Grade

[4] Siehe: B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II. (Grundlehren der Math. Wiss. 34), Berlin (1940), S. 114.

$\geqq h$ ist. Ordnet man dann dem Element (18) von U die algebraische Zahl $n_1+n_2\alpha+\cdots+n_h\alpha^{h-1}$ zu, so ist diese Abbildung offensichtlich ein Isomorphismus der Gruppe U in die additive Gruppe des Körpers A. Durch diesen Isomorphismus wird unsere Matrix M'_m in eine periodische zyklische Differenzenmatrix gebildet im Körper A überführt, worüber wir nach § 2 schon wissen, dass sie vom Typ 1° oder 2° sein muss. Dasselbe gilt dann auf Grund des Isomorphismus auch für die Matrix M'_m. Damit haben wir vollständig bewiesen den folgenden

Satz 1. *Jede periodische zyklische Differenzenmatrix gebildet in einer beliebigen additiven Abelschen Gruppe ist vom Typ* 1°, 2°, 3° *oder* 4°.

§ 4. Gruppenalgebraische Fassung des Resultates.

Sei Γ ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement und mit der Charakteristik 0 (d. h. jedes Element $\neq 0$ von Γ ist von unendlicher Ordnung in der additiven Gruppe von Γ). Das Einselement von Γ bezeichnen wir mit 1. Seien ferner $C^0, C^1, \ldots, C^{m-1}$ alle Elemente einer (multiplikativ geschriebenen) zyklischen Gruppe m-ter Ordnung; insbesondere bezeichne C^0 das Einselement dieser Gruppe. Dann bilden alle formalen Summen

$$c_0C^0+c_1C^1+\cdots+c_{m-1}C^{m-1} \qquad (c_i\in\Gamma),$$

mit denen man nach den gewöhnlichen Regeln zu rechnen hat, einen kommutativen Ring $\Gamma_m(C)$, den man die *Gruppenalgebra* (oder den Gruppenring) von der betrachteten zyklischen Gruppe bezüglich des Ringes Γ nennt. Statt der Elemente $1.C^i$ von $\Gamma_m(C)$ schreiben wir einfach C^i.

Sei nun M_m eine zyklische Differenzenmatrix mit Elementen aus Γ. Aus jeder Zeile $b_0, \ldots, b_{m-1}$ von M_m konstruieren wir das Element

$$b_0C^{m-1}+b_1C^{m-2}+\cdots+b_{m-1}C^0$$

von $\Gamma_m(C)$. In dieser Weise erhält man aus der Anfangszeile (1) von M_m

$$Z=a_0C^{m-1}+\cdots+a_{m-1}C^0, \tag{19}$$

und aus der $(k+1)$-ten Zeile von M_m mit Rücksicht auf (2):

$$(C-1)^kZ\,.$$

Die Matrix M_m ist dann und nur dann periodisch, falls für eine natürliche Zahl k die Gleichung $(C-1)^kZ=Z$ oder

$$[(C-1)^k-1]Z=0 \tag{20}$$

gilt. Die Anfangszeilen sämtlicher periodischer zyklischer Differenzenmatrizen im Ring Γ sind also nach (19) durch diejenigen Elemente Z der Gruppenalgebra $\Gamma_m(C)$ bestimmt, die eines der Elemente $(C-1)^k-1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ annullieren. Andererseits wissen wir nach Satz 1, dass im Ring Γ eine periodische zyklische Differenzenmatrix entweder die Null-Matrix, oder eine Matrix $M^*_{6r}(a, b)$ sein muss, und dass die Matrix $M^*_{6r}(a, b)$ eine dreizeilige Periode besitzt. Daraus folgt der folgende

Satz 2. *Bezeichnet $\Gamma_m(C)$ die Gruppenalgebra von der zyklischen Gruppe $\{C\}$ m-ter Ordnung über dem kommutativen Ring Γ mit Einselement und mit der Charakteristik Null, so ist das Element $(C-1)^k-1$ von $\Gamma_m(C)$ dann und nur dann ein Nullteiler in $\Gamma_m(C)$, falls m durch 6 und k durch 3 teilbar ist.*