SUR UN PROBLEME DE LA THEORIE DES CORRESPONDANCES MULTIVOQUES ENTRE DES ENSEMBLES ABSTRAITS.

Par

W. SIMONSEN

à Copenhague.

1. Dans un ouvrage précédent[1] nous avons donné quelques résultats des recherches sur la théorie des correspondances multivoques, qu'il est possible d'établir entre des ensembles abstraits (c.-à-d. des ensembles dépourvus de structure). En particulier, nous avons introduit la notion de *l'ensemble invariant* relativement à une correspondance multivoque f et la notion d'une *classe*, déterminée par la correspondance f.

Dans la suite, nous nous occuperons du problème, qui peut être formulé comme suit: Étant donnés trois ensembles P, Q et R, non vides, une correspondance f entre P et Q, et une correspondance g entre P et R; peut-on démontrer l'existence et l'unicité d'une correspondance h entre Q et R, telle que $hf = g$? Nous allons montrer que, dans le cas important, où f est une correspondance *univoque*, nous pouvons établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que la réponse à cette question soit affirmative.

Employant dans la suite les résultats et le système de notations de notre ouvrage précité, nous remarquerons, comme préliminaire aux considérations ultérieures, que la relation $f' \subseteq f''$, où f' et f'' sont deux correspondances multivoques entre les ensembles, non vides, P et Q, équivaut à la condition, que $f'\{x\} \subseteq f''\{x\}$ pour tout $x \in P$. En effet, si $f' \subseteq f''$, on a pour tout $y \in f'\{x\}$, où x est un élément arbitraire de P: $(x, y) \in f'$, donc $(x, y) \in f''$ ou $y \in f''\{x\}$, c.-à-d. $f'\{x\} \subseteq f''\{x\}$; réciproquement, si $f'\{x\} \subseteq f''\{x\}$ pour tout $x \in P$, on aura $f' \subseteq f''$, comme la relation $(x, y) \in f'$ entraînera $y \in f'\{x\}$, donc $y \in f''\{x\}$ et $(x, y) \in f''$. L'égalité $f' = f''$ étant équivalente aux deux relations simultanées $f' \subseteq f''$ et $f'' \subseteq f'$, nous verrons que *la condition, que*

[1] Acta mathematica, t. 81 (1949), pp. 291—297.

$f'\{x\} = f''\{x\}$ pour tout $x \in P$, est nécessaire et suffisante pour l'identité des correspondances f' et f'' entre P et Q.

2. Soient maintenant P, Q et R trois ensembles, non vides, f une correspondance entre P et Q, et g une correspondance entre P et R. Nous supposerons que la correspondance f est univoque, c.-à-d. que tout $x \in P$ est contenu comme élément premier dans une paire ordonnée $(x, y) \in f$ seulement; l'élément $y \in Q$ sera donc d'une manière univoque déterminé par x, et nous le désignerons comme habituel par $f(x)$; on a donc $f\{x\} = \{f(x)\}$.

Nous pouvons donc démontrer le théorème suivant:

(2.1). Pour qu'il existe une correspondance h entre Q et R, telle que $hf = g$, il faut et il suffit que l'égalité

$$gf^{-1}\{f(x)\} = g\{x\} \tag{2.2}$$

soit remplie pour tout $x \in P$. S'il existe une telle correspondance h, elle sera uniquement déterminée par la relation $h = gf^{-1}$.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, h une correspondance entre Q et R, telle que $hf = g$; on a donc $hff^{-1} = gf^{-1}$. La correspondance f étant univoque, la correspondance ff^{-1} sera la correspondance identique, c.-à-d. $ff^{-1}\{y\} = \{y\}$ pour tout $y \in Q$; par conséquent, on aura $h = gf^{-1}$. Pour tout $x \in P$ on aura donc $f(x) \in Q$ et $h\{f(x)\} = gf^{-1}\{f(x)\}$; et comme $h\{f(x)\} = hf\{x\}$ et $hf = g$, on aura $h\{f(x)\} = g\{x\}$, en vertu de la remarque à la fin de la section précédente; par conséquent, (2.2) est remplie.

On verra que l'existence de h entraînera l'unicité de cette correspondance, comme $h = gf^{-1}$.

Inversement, la condition est suffisante. Posons, pour tout $y \in Q$, $h\{y\} = gf^{-1}\{y\}$; utilisant la remarque à la fin de la section 1, nous verrons que la correspondance h est complètement déterminée. Soit x un élément arbitraire de P; on aura donc $f(x) \in Q$ et $hf\{x\} = h\{f(x)\} = gf^{-1}\{f(x)\} = g\{x\}$, en vertu de (2.2); par conséquent, $hf\{x\} = g\{x\}$ pour tout $x \in P$, donc $hf = g$.

3. L'objet de cette section sera l'étude des relations entre les classes déterminées par les correspondances f, g et h, en supposant l'existence de la correspondance $h = gf^{-1}$.

Observons, préalablement (sans supposer l'existence de h), que pour tout $x \in P$ l'ensemble $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}f\{x\}$ est la classe, déterminée par f, qui contient l'élément x, comme la correspondance f est univoque. En effet, cette classe est

$$\{x\}+f^{-1}f\{x\}+f^{-1}ff^{-1}f\{x\}+\cdots = \{x\}+f^{-1}f\{x\} = f^{-1}f\{x\}\,,$$

comme ff^{-1} est la correspondance identique, et $\{x\} \subseteqq f^{-1}f\{x\}$.

Utilisant ce résultat, nous pouvons transformer un peu la condition, exprimée par (2.2):

(3.1). Pour qu'il existe une correspondance h entre Q et R, telle que $hf = g$, il faut et il suffit que, pour toute classe $M \subseteqq P$, déterminée par f, et pour tout $x \in M$, on ait $g\{x\} = gM$.

En effet, si M est une classe, déterminée par f, et x un élément, tel que $x \in M$, M sera la classe $f^{-1}\{f(x)\}$; par conséquent, on aura $gM = gf^{-1}\{f(x)\}$. Si (2.2) est remplie, on obtient $g\{x\} = gf^{-1}\{f(x)\} = gM$, donc $g\{x\} = gM$; inversement, si pour tout $x \in P$: $g\{x\} = gM$, où M est la classe contenant x, on aura $g\{x\} = gf^{-1}\{f(x)\}$, la condition (2.2) étant ainsi remplie.

Soient maintenant M une classe $\subseteqq P$, déterminée par f, et A une classe $\subseteqq P$, déterminée par g, et supposons l'existence de $h = gf^{-1}$. Si $AM \supset O$, il existe un $x \in P$, tel que $x \in A$ et $x \in M$; on aura donc $gM = g\{x\}$, en vertu de (3.1), et $g\{x\} \subseteqq gA$, donc $gM \subseteqq gA$. Par conséquent, $M \subseteqq g^{-1}gM \subseteqq g^{-1}gA = A$, comme A est un ensemble invariant relativement à g, donc $M \subseteqq A$.

Soit

$$P = M^{*}+M^{**}+\cdots$$

la division unique de P en classes disjointes, déterminée par f; on a donc pour une classe arbitraire A, déterminée par g:

$$A = AP = AM^{*}+AM^{**}+\cdots\,.$$

Désignons par M', M'',... ceux des ensembles M^{*}, M^{**},..., pour lesquels l'intersection avec l'ensemble A est $\supset O$; on aura

$$A = M'+M''+\cdots\,, \tag{3.2}$$

comme tous les ensembles M', M'',... sont $\subseteqq A$. De là résulte le théorème suivant:

(3.3). Toute classe $A \subseteqq P$, déterminée par g, est l'union d'un système de classes disjointes M', M'',..., déterminées par f.

Notons que la division de A, donnée par (3.2), est déterminée d'une façon unique.

Posons, ensuite, $C = gA$ et $B = h^{-1}C$; l'ensemble C sera une classe $\subseteqq R$, déterminée par g^{-1}, et on aura $A = g^{-1}C$. Nous allons démontrer que C est une classe déterminée par h^{-1}, d'où il suit que B est une classe déterminée par h.

Montrons d'abord que, si C^* est un ensemble invariant relativement à h^{-1}, C^* sera un ensemble invariant relativement à g^{-1}.

En effet, si C^* est invariant relativement à h^{-1}, on aura $C^* = hh^{-1}C^*$. Or, tenant compte des relations $h = gf^{-1}$ et $h^{-1} = fg^{-1}$, on a $hh^{-1} = gf^{-1}fg^{-1}$ et, par conséquent, $C^* = gf^{-1}fg^{-1}C^*$. Comme $f^{-1}fg^{-1}C^* \supseteqq g^{-1}C^*$, nous obtenons $C^* \supseteqq gg^{-1}C^*$; et comme nous avons aussi $gg^{-1}C^* \supseteqq C^*$, il suit que $gg^{-1}C^* = C^*$, c.-à-d. que C^* est invariant relativement à g^{-1}.

On a, de plus, $hh^{-1}C = hfg^{-1}gA = hfA = gA = C$, l'ensemble C étant ainsi un ensemble invariant relativement à h^{-1}.

Nous pouvons maintenant démontrer que C est une classe déterminée par h^{-1}. Soit, en effet, C^* un ensemble invariant relativement à h^{-1}, tel que $O \subset C^* \subseteqq C$; C^* est donc invariant relativement à g^{-1}. Remarquant que C est une classe déterminée par g^{-1}, nous verrons, en employant le théorème (3.4) de notre ouvrage précité, qu'on doit avoir $C^* = C$, d'où il suit au moyen du même théorème, que C doit être une classe déterminée par h^{-1}.

Le résultat de ces considérations peut s'exprimer de la façon suivante:

(3.4). Pour toute classe C déterminée par g^{-1}, l'ensemble $B = h^{-1}C$ est une classe déterminée par h, et C est une classe déterminée par h^{-1}.

De ce théorème nous déduirons une conséquence immédiate. Soit

$$R = C' + C'' + \cdots \tag{3.5}$$

la division unique de R en classes disjointes relativement à g^{-1}. En vertu de (3.4), les ensembles $C', C'' \ldots$ sont aussi des classes relativement à h^{-1}; et, la division de R en classes disjointes relativement à h^{-1} étant unique, nous verrons que cette division doit être identique à la division (3.5), c.-à-d. que les classes relativement à g^{-1} et les classes relativement à h^{-1} sont les mêmes. En posant $B' = h^{-1}C'$, $B'' = h^{-1}C'', \ldots$, il suit de (3.5) que

$$Q = B' + B'' + \cdots \tag{3.6}$$

est la division unique de Q en classes disjointes, relativement à h.

En résumé, nous avons établi le théorème:

(3.7). Les classes déterminées par les correspondances g^{-1} et h^{-1} sont les mêmes.

Considérons encore une classe B déterminée par h; posons $C = hB$ et $A = g^{-1}C$, et écrivons A sous la forme, donnée par (3.2). Les ensembles $M', M'', \ldots$ étant des classes déterminées par f, et f étant univoque, les ensembles $fM', fM'', \ldots$ se réduisent à des ensembles $\{y'\}$, $\{y''\}, \ldots$, dont chacun ne contient qu'un seul élément; et nous aurons, en employant la relation $h^{-1} = fg^{-1}$:

$$B = h^{-1}C = fg^{-1}C = fA = fM' + fM'' + \cdots ,$$

ou

$$B = \{y', y'', \ldots\} . \tag{3.8}$$

4. Terminons par quelques observations sur le cas spécial, dans lequel la correspondance g est univoque, en supposant, comme dans la section précédente, que f est univoque et que la correspondance h existe.

Dans ce cas toutes les classes C déterminées par g^{-1}, ou par h^{-1}, se réduisent à des ensembles ne contenant qu'un seul élément; c.-à-d. que la correspondance h est nécessairement univoque. En nous appuyant sur les considérations de la section 2, nous verrons que h est donnée par $\{h(y)\} = gf^{-1}\{y\}$, l'ensemble $gf^{-1}\{y\}$ étant une des classes C, déterminées par g^{-1} et ne contenant qu'un seul élément.