ÜBER DIE VARIATIONSABLEITUNG VON FUNDAMENTAL-INVARIANTEN BELIEBIG HOHER ORDNUNG.

VON

H. A. BUCHDAHL
in HOBART (AUSTRALIEN).

§ 1. Es sei K eine Fundamentalinvariante, in welcher die Ableitungen der Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ bis zur $(s + 2)$-ten Ordnung vorkommen, wobei s irgendeine positive ganze Zahl oder Null ist. Dann ist die Variationsableitung $P^{\mu\nu}$ von K durch die Gleichung

$$\delta \int \mathfrak{K}\, d\tau = \delta \int K \sqrt{-g}\, d\tau = \int P^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\tau \tag{1.1}$$

definiert, wobei vorausgesetzt wird, dass alle Variationen der $g_{\mu\nu}$ und ihrer Ableitungen an der Grenze des betrachteten Integrationsgebietes verschwinden. $P^{\mu\nu}$ ist selbstverständlich ein kontravarianter symmetrischer Fundamentaltensor, der die Eigenschaft besitzt, dass seine Divergenz identisch verschwindet. (EDDINGTON, 1930, § 61.)

Indem wir die Schreibweise von Schouten (SCHOUTEN, 1924, S. 25, 31) für den symmetrischen oder den alternierenden Teil eines Tensors verwenden, wollen wir nun zeigen, dass sich die Variationsableitung $P^{\mu\nu}$ in einer einfachen Form darstellen lässt, die einerseits ihren Tensorcharakter klar erkennen lässt, und die sich andererseits zu ihrer Berechnung eignet, wenn K explizit gegeben ist. Das zu beweisende Ergebnis lässt sich dann in die folgende Gestalt bringen

$$P^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\sigma\varrho} - \tfrac{1}{3} B^{(\mu}{}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} X^{\nu)\alpha\sigma\varrho} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K + (T^{\varepsilon(\mu\nu)} - T^{(\mu\nu)\varepsilon})_{;\varepsilon} + t^{(\mu\nu)}. \tag{1.2}$$

Dabei sind die Tensoren $X^{\mu\nu\sigma\varrho}$, $T^{\alpha\beta\gamma}$, $t^{\mu\nu}$ aufgebaut aus dem Krümmungstensor $B_{\mu\nu\sigma\varrho}$ und seinen kovarianten Ableitungen, und den Tensoren

$$E^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} = \frac{\partial K}{\partial B_{\sigma_1 \ldots \sigma_4; \sigma_5 \ldots \sigma_j}} \tag{1.3}$$

und ihren kovarianten Ableitungen.

Steht ein unterer Index hinter einem Komma, so bedeutet er gewöhnliche Differentiation; steht er hinter einem Semikolon, so bedeutet er kovariante Differentiation. Die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors sind auf der rechten Seite von (1.3) unbeachtet zu lassen; die Reihenfolge seiner Indizes ist die von Eddington benutzte (EDDINGTON, 1930, S. 72). Definieren wir

$$F^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} = E^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} + \sum_{r=1}^{s-j+4} (-1)^r E^{\sigma_1 \ldots \sigma_{j+r}}{}_{;\sigma_{j+r} \ldots \sigma_{j+1}}, \tag{1.4}$$

so können wir etwas ausführlicher schreiben:

mit

$$\left.\begin{aligned} X^{\mu\nu\sigma\varrho} &= \bar{X}^{(\mu\nu)(\sigma\varrho)}, \\ \bar{X}^{\mu\nu\sigma\varrho} &= 4\, F^{[\mu[\nu\sigma]\varrho]}; \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

und

$$T^{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{i=1}^{j+4} F^{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \alpha \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j+4} \beta} B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_{i-1}}{}^{\gamma}{}_{\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j+4}}, \tag{1.6}$$

$$t^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} \sum_{j=0}^{s-1} F^{\sigma_1 \ldots \sigma_{j+4} \mu} B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_{j+4}}{}^{\nu}. \tag{1.7}$$

Es lässt sich sodann durch direkte Rechnung nachweisen, dass die Divergenz von $P^{\mu\nu}$ tatsächlich identisch verschwindet (§ 6). In §§ 7 und 8 betrachten wir einige spezielle Ergebnisse.

Die Dimensionszahl des betrachteten Raumes ist durchwegs als n angenommen.

§ 2. Schreiben wir der Einfachheit halber γ für $\sqrt{-g}$, so haben wir

$$\delta J = \delta \int K \gamma \, d\tau = \int (\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K \delta g_{\mu\nu} + \delta K) \gamma \, d\tau. \tag{2.1}$$

(Sollte es vorkommen, dass uns statt K eine Tensordichte $\mathfrak{K}$ gegeben ist, die mit Hilfe der numerischen Tensordichten $\varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_n}$ und $\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ von Levi-Cività gebildet ist, (VEBLEN, 1927, S. 25), so bringen wir sie erst auf die Form $K\gamma$, was unter Zuhilfenahme der Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_n} g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_2 \nu_2} \ldots g_{\mu_n \nu_n} &= g\, \varepsilon_{\nu_1 \ldots \nu_n}, \\ \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_n} \varepsilon_{\nu_1 \ldots \nu_n} &= \delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

immer möglich ist, wobei man dann $\delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ als eine Determinante der gewöhnlichen Kroneckerschen Symbole $\delta^{\mu_i}_{\nu_k}$ betrachtet).

Jede Invariante K ist nun einfach eine Funktion einer gewissen Anzahl von Invarianten, die formal allein ein Produkt von Komponenten des kontravarianten metrischen Tensors, des Krümmungstensors, und dessen kovarianten Ableitungen sind. Wir schreiben

$$K_{(p)} = \Gamma\, C \tag{2.3}$$

für die p-te dieser Invarianten. Wir haben dabei die Indizes der Tensoren Γ und C unterdrückt. Γ ist einfach ein Produkt kontravarianter Komponenten des metrischen Tensors, während C ein Produkt von m_i Komponenten der i-ten $(i = 0, 1, \ldots, s)$ kovarianten Ableitungen des kovarianten Krümmungstensors ist. Wir sagen $K_{(p)}$ sei von der *Ordnung* $s + 2$ und vom *Grade*

$$M_{(p)} = \sum_{i=0}^{s} m_i. \tag{2.4}$$

Γ ist offensichtlich $\overline{M}_{(p)}$-ter Stufe, wobei

$$\overline{M}_{(p)} = \sum_{i=0}^{s} (i + 4)\, m_i \tag{2.4$_1$}$$

ist. Unterdrückt man nun in $K_{(p)}$ der Reihe nach jeden einzelnen der darin vorkommenden m_i Faktoren $B_{\mu_1 | j \ldots; \ldots \mu_{i+4} | j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m_i)$, und ersetzt jedesmal die so freigewordenen Indizes in der richtigen Reihenfolge durch $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i+4}$, so erhält man m_i Tensoren $(i + 4)$-ter Stufe, deren Summe wir mit $E_{(p)}^{\sigma_1 \ldots \sigma_{i+4}}$ bezeichnen. Man hat also

$$E_{(p)}^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} = \frac{\partial K}{\partial B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_j}}, \tag{2.5}$$

wobei irgendwelche Symmetrieeigenschaften der $B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_j}$ ausser acht zu lassen sind. Weiterhin schreiben wir

$$\eta_{(p)}^{\mu\nu} = C \frac{\partial \Gamma}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{2.5$_1$}$$

Da nun K von der Form

$$K = F(K_{(1)}, K_{(2)}, \ldots, K_{(p)}, \ldots) \tag{2.6}$$

ist, haben wir sofort

$$\delta K = \eta^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} + \sum_{j=0}^{s} E^{\sigma_1 \ldots \sigma_{j+4}}\, \delta B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_{j+4}}, \tag{2.7}$$

wobei

$$\eta^{\mu\nu} = \sum_p \eta_{(p)}^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial K_{(p)}} \tag{2.7$_1$}$$

und

$$E^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} = \sum_p E_{(p)}^{\sigma_1 \ldots \sigma_j} \frac{\partial F}{\partial K_{(p)}} = \frac{\partial K}{\partial B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_j}} \tag{2.7$_2$}$$

ist. Nun kann man sich $K_{(p)}$ einfach als das Produkt von $M_{(p)}$ Faktoren $B^{\dots;\dots}_{\dots;\dots}$ geschrieben denken, nämlich so, dass jedem oberen Index genau ein gleicher unterer Index entspricht. Wir bezeichnen die Summe der $\frac{1}{2} M_{(p)}$ Tensoren die man erhält, indem man der Reihe nach jeden oberen Index durch μ ersetzt und gleichzeitig den ihm entsprechenden unteren Index heraufzieht und durch ν ersetzt, mit $\tilde{\eta}_{(p)}^{\mu\nu}$. Nun ist aber $\delta g^{\mu\nu} = - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho} \delta g_{\sigma\varrho}$; daher folgt sofort

$$\eta_{(p)}^{\mu\nu} = - \tilde{\eta}_{(p)}^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Wir haben also, wegen (2.7$_1$), (2.7$_2$),

$$\eta^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=1}^{j+4} E^{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \mu \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j+4}} B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_{i-1} \cdot \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j+4}}^{\nu}. \tag{2.9}$$

Wir betonen ausdrücklich noch einmal, dass die rechte Seite von (2.9) an sich schon in μ und ν symmetrisch ist,

$$\eta^{[\mu\nu]} = 0, \tag{2.9$_1$}$$

da dabei jeder Index von $K_{(p)}$ zweimal ersetzt wird, einmal durch μ, das andere mal durch ν, sodass die Doppelsumme einfach $\tilde{\eta}^{\mu\nu} + \tilde{\eta}^{\nu\mu}$ ist. (Die Bedeutung der $\tilde{\eta}^{\mu\nu}$ versteht sich von selbst.) Wir erhalten daher aus (2.1)

$$\delta J = \int [(\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K + \eta^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \sum_{j=0}^{s} E^{\sigma_1 \ldots \sigma_{j+4}} \delta B_{\sigma_1 \ldots ; \ldots \sigma_{j+4}}] \gamma \, d\tau. \tag{2.10}$$

§ 3. Wir beweisen jetzt zunächst die folgende Beziehung:

Sind die Tensoren $A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}$ und $B_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ kontravariant $(k+1)$-ter Stufe, bzw. kovariant k-ter Stufe, dann ist

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \gamma A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} \delta B_{\sigma_1 \ldots \sigma_k ; \varrho} \, d\tau \\ &= \int \gamma [- A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}{}_{;\varrho} \delta B_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} + (D^{(\mu|\varepsilon|\nu)} + D^{\varepsilon(\mu\nu)} - D^{(\mu\nu)\varepsilon})_{;\varepsilon} \delta g_{\mu\nu}] \, d\tau, \end{aligned} \tag{3.1}$$

vorausgesetzt, dass alle Variationen der $g_{\mu\nu}$ und ihrer Ableitungen an der Grenze des betrachteten Integrationsgebietes verschwinden. Hierbei ist

$$D^{\mu\varepsilon\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A^{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \mu \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k \varepsilon} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \cdot \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k}^{\nu}. \tag{3.1$_1$}$$

Wir haben

$$\delta I = \int \gamma A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} \delta (B_{\varrho_1 \ldots \sigma_k, \varrho} - \sum_{i=1}^{k} \{\sigma_i \varrho, \varepsilon\} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \varepsilon \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k}) \, d\tau$$

$$= - \int \gamma [(A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}{}_{, \varrho} + \{\varrho \lambda, \lambda\} A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}) \delta B_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \varepsilon \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k} \delta \{\sigma_i \varrho, \varepsilon\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \{\sigma_i \varrho, \varepsilon\} A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \varepsilon \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k}] \, d\tau$$

$$= - \int \gamma \, \delta L \, d\tau, \tag{3.2}$$

da der integrierte Teil laut Voraussetzung verschwindet. Nun ist δL ein Tensor (Skalar). Wir deuten daher alle Glieder, welche Christoffelsche Dreizeigersymbole als Faktoren enthalten, durch Punkte an, da solche Glieder allein keinen Tensor bilden können. Für das erste Glied in (3.2) erhalten wir daher

$$\int \gamma A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}{}_{, \varrho} \, d\tau = \int \gamma (A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho}{}_{; \varrho} + \cdots) \, d\tau. \tag{3.3}$$

Die erste Summe in (3.2) ergibt

$$\int \sum_{i=1}^{k} \gamma A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \varepsilon \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k} \delta (g^{\varepsilon \lambda} [\sigma_i \varrho, \lambda]) \, d\tau$$

$$= \int \gamma [\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A^{\sigma_1 \ldots \sigma_k \varrho} B_{\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1} \cdot \sigma_{i+1} \ldots \sigma_k}^{\quad\quad\;\; \lambda} \delta (g_{\sigma_i \lambda, \varrho} + g_{\varrho \lambda, \sigma_i} - g_{\sigma_i \varrho, \lambda}) + \cdots] \, d\tau,$$

während andererseits sowohl das zweite Glied als auch die zweite Summe in (3.2) offensichtlich durch Punkte ersetzt werden können. Durch partielle Integration und Umordnen von Indizes erhält man sodann (3.1) ohne weiteres.

§ 4. Wendet man jetzt (3.1) wiederholt auf (2.10) an, so ergibt sich sofort

$$\delta J = \int [(\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K + \eta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + F^{\mu\nu\sigma\varrho} \delta B_{\mu\nu\sigma\varrho}] \gamma \, d\tau, \tag{4.1}$$

mit

$$S^{\mu\nu} = (T^{(\mu|\varepsilon|\nu)} + T^{\varepsilon(\mu\nu)} - T^{(\mu\nu)\varepsilon})_{;\varepsilon}. \tag{4.1$_1$}$$

$T^{\alpha\beta\gamma}$ ist durch (1.6) definiert, während $F^{\mu\nu\sigma\varrho}$ ein Spezialfall von (1.4) ist, (mit $j = 4$). Nun ist

$$\begin{aligned}\delta J' &= \int \gamma F^{\mu\nu\sigma\varrho}\, \delta B_{\mu\nu\sigma\varrho}\, d\tau \\ &= \int \gamma F^{\mu\nu\sigma\varrho}\, [\tfrac{1}{2}(\delta g_{\mu\nu,\sigma\varrho} + \delta g_{\sigma\varrho,\mu\nu} - \delta g_{\mu\sigma,\nu\varrho} - \delta g_{\nu\varrho,\mu\sigma}) \\ &\qquad + \{\mu\nu,\alpha\}\,\delta[\varrho\sigma,\alpha] + [\varrho\sigma,\alpha]\,\delta\{\mu\nu,\alpha\} \\ &\qquad\qquad - \{\mu\sigma,\alpha\}\,\delta[\varrho\nu,\alpha] - [\varrho\nu,\alpha]\,\delta\{\mu\sigma,\alpha\}]\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}\int \gamma X^{\mu\nu\sigma\varrho}\,[\delta g_{\mu\nu,\sigma\varrho} + \{\sigma\varrho,\alpha\}(\delta g_{\mu\alpha,\nu} + \delta g_{\nu\alpha,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\alpha}) + \cdots]\, d\tau. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Hierbei ist $X^{\mu\nu\sigma\varrho}$ durch (1.5) definiert, während die Bedeutung der Punkte in § 3 angegeben ist. Wenden wir jetzt partielle Integration an, und ersetzen weiterhin gewöhnliche durch kovariante Ableitungen, so lässt sich (4.2) in die Form

$$\begin{aligned}\delta J' = \tfrac{1}{2}\int \gamma\, [X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\sigma\varrho} &- (\{\varrho\varepsilon,\nu\}_{,\sigma} + \{\varrho\sigma,\nu\}_{,\varepsilon})\, X^{\mu\varepsilon\sigma\varrho} \\ &- (\{\varrho\varepsilon,\mu\}_{,\sigma} + \{\varrho\sigma,\mu\}_{,\varepsilon})\, X^{\nu\varepsilon\sigma\varrho} + \cdots]\, \delta g_{\mu\nu}\, d\tau \qquad (4.3)\end{aligned}$$

bringen. Infolge (1.5) ist es selbstverständlich, dass

$$X^{[\mu\nu]\sigma\varrho} = X^{\mu\nu[\sigma\varrho]} = 0 \qquad (4.4)$$

ist; weiterhin lässt sich die Symmetrieeigenschaft

$$X^{\mu(\nu\sigma\varrho)} = 0 \qquad (4.4_1)$$

unschwer nachweisen. Multipliziert man jetzt (4.4_1) mit $\{\sigma\varrho,\nu\}_{,\varepsilon}$, so erhält man

$$\begin{aligned}2\{\sigma\varrho,\nu\}_{,\varepsilon}\, X^{\mu\sigma\varrho\varepsilon} &= -\{\sigma\varrho,\nu\}_{,\varepsilon}\, X^{\mu\varepsilon\sigma\varrho} \\ &= (B_{\sigma\varrho\varepsilon\cdot}{}^{\nu} - \{\sigma\varepsilon,\nu\}_{,\varrho})\, X^{\mu\varepsilon\sigma\varrho} + \cdots \\ &= B_{\sigma\varrho\varepsilon\cdot}{}^{\nu}\, X^{\mu\varepsilon\sigma\varrho} - \{\sigma\varrho,\nu\}_{,\varepsilon}\, X^{\mu\varrho\sigma\varepsilon} + \cdots, \qquad (4.5)\end{aligned}$$

somit

$$\{\sigma\varrho,\nu\}_{,\varepsilon}\, X^{\mu\sigma\varrho\varepsilon} = \tfrac{1}{3} B^{\nu}{}_{\cdot\varepsilon\sigma\varrho}\, X^{\mu\varepsilon\sigma\varrho} + \cdots. \qquad (4.5_1)$$

Wenden wir jetzt (4.5) und (4.5_1) auf (4.3) an, so erhalten wir

$$\delta J' = \tfrac{1}{2}\int \gamma\, (X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\sigma\varrho} + B^{(\mu}{}_{\cdot\alpha\sigma\varrho}\, X^{\nu)\alpha\sigma\varrho})\, \delta g_{\mu\nu}\, d\tau. \qquad (4.6)$$

Laut (4.1) und (4.6) nimmt die Variationsableitung von K jetzt die Gestalt

$$P^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\sigma\varrho} + \tfrac{1}{3} B^{(\mu}{}_{\cdot\alpha\sigma\varrho}\, X^{\nu)\alpha\sigma\varrho} + S^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K \qquad (4.7)$$

an.

§ 5. Um endlich (4.7) in (1.2) umzuformen, spalten wir das erste Glied von $S^{\mu\nu}$, nämlich $T^{(\mu|\varepsilon|\nu)}{}_{;\varepsilon}$, von den anderen beiden ab. Da offenbar, infolge von (1.4),

$$F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+1}}{}_{;\sigma_{j+1}} = -F^{\sigma_1\cdots\sigma_j} + E^{\sigma_1\cdots\sigma_j} \qquad (5.1)$$

ist, haben wir

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\varepsilon\nu}{}_{;\varepsilon} &= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{i=0}^{j+4}\Big[\big(E^{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\mu\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}} - F^{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\mu\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}}\big) B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{i-1}\overset{\nu}{\cdot}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}} \\
&\qquad + F^{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\mu\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+5}} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{i-1}\overset{\nu}{\cdot}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+5}}\Big] \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{s}\sum_{i=1}^{j+4} E^{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\mu\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{i-1}\overset{\nu}{\cdot}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} F^{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\mu\sigma_{i+1}\cdots\sigma_4} B_{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\overset{\nu}{\cdot}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_4} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{s-1} F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}\mu} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{j+4}\overset{\nu}{\cdot}\cdot}.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Unter Anwendung der Symmetrieeigenschaften von $B_{\mu\nu\sigma\varrho}$ lässt sich unschwer nachweisen, dass sich die zweite Summe in (5.2) einfach als $\frac{4}{3} B^{\nu}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} X^{\mu\alpha\sigma\varrho}$ schreiben lässt. Berücksichtigt man noch (2.9) und (1.7), so erhält man schliesslich aus (5.2)

$$
T^{\mu\varepsilon\nu}{}_{;\varepsilon} = -\eta^{\mu\nu} - B^{\nu}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} X^{\mu\alpha\sigma\varrho} + t^{\mu\nu}. \tag{5.3}
$$

Setzt man diese Beziehung in (4.7) ein, so ergibt sich (1.2), was zu beweisen war.

§ 6. Wir wollen jetzt durch direkte Rechnung nachweisen, dass die Divergenz der rechten Seite von (1.2) identisch verschwindet. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst die Gleichungen

$$
X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\varrho\sigma\nu} = B^{\mu}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} X^{\lambda\alpha\sigma\varrho}{}_{;\lambda} + \tfrac{1}{3} B^{\mu}_{\cdot\alpha\sigma\varrho;\lambda} X^{\lambda\alpha\sigma\varrho} - \tfrac{1}{3}\big(B^{\lambda}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} X^{\mu\alpha\sigma\varrho}\big)_{;\lambda} \tag{6.1}
$$

und

$$
t^{\nu\mu}{}_{;\nu} = -\tfrac{1}{2} K_{;\cdot}^{\ \mu} + \tfrac{1}{6} X^{\alpha\beta\sigma\varrho} B_{\alpha\beta\sigma\varrho;\cdot}^{\qquad\ \mu} - T^{\beta\varepsilon\alpha} B^{\mu}_{\cdot\beta\alpha\varepsilon}. \tag{6.2}
$$

(6.1) kann man beweisen, indem man die drei Ausdrücke $X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\varrho\sigma\nu}$, $X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\varrho\nu\sigma}$, $X^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\nu\varrho\sigma}$ addiert, und dabei im Auge behält, dass sich infolge der Identität von Ricci der zweite und dritte Ausdruck, unter Hinzufügung gewisser Zusatzglieder, durch den ersten ersetzen lassen. Andererseits kann man aber die Summe der drei Ausdrücke in der Form $(X^{\mu\nu\sigma\varrho} + X^{\mu\sigma\nu\varrho} + X^{\mu\sigma\varrho\nu})_{;\varrho\sigma\nu}$ schreiben, welche wegen (4.4) und (4.4₁) identisch verschwindet, worauf (6.1) sofort folgt. Was (6.2) betrifft, so haben wir infolge von (5.1)

$$
\begin{aligned}
t^{\nu\mu}{}_{;\nu} &= -\tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\Big[\big(E^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}} - F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}}\big) B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{j+4}\cdot}^{\qquad\qquad\ \mu} \\
&\qquad + F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+5}} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{j+5}\cdot}^{\qquad\qquad\ \mu} + 2\, g^{\mu\nu} F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}\varepsilon} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{j+4}[\nu\varepsilon]}\Big] \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{s} E^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{j+4}\cdot}^{\qquad\qquad\ \mu} + \tfrac{1}{2} F^{\sigma_1\cdots\sigma_4} B_{\sigma_1\cdots\sigma_4;\cdot}^{\qquad\ \ \mu} \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{i=1}^{j+4} F^{\sigma_1\cdots\sigma_{j+4}\varepsilon} B_{\sigma_1\cdots;\cdots\sigma_{i-1}\alpha\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j+4}} B_{\sigma_i\cdot\varepsilon\cdot}^{\ \ \mu\ \ \alpha},
\end{aligned}
$$

was in der Tat der rechten Seite von (6.2) entspricht.

Bilden wir nun die Divergenz von (1.2) und machen von (6.1) Gebrauch, so erhalten wir

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \tfrac{1}{3} B^{\mu}_{\cdot\,\alpha\sigma\varrho} X^{\lambda\alpha\sigma\varrho}{}_{;\lambda} - \tfrac{1}{3} (B^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\sigma\varrho} X^{\mu\alpha\sigma\varrho})_{;\lambda} + \tfrac{1}{2} K_{;\cdot}{}^{\mu}$$
$$+ (T^{\varepsilon(\mu\nu)} - T^{(\mu\nu)\varepsilon})_{;\varepsilon\nu} + t^{(\mu\nu)}{}_{;\nu}. \qquad (6.3)$$

Nun ist aber

$$(T^{\varepsilon(\mu\nu)} - T^{(\mu\nu)\varepsilon})_{;\varepsilon\nu} = T^{[\varepsilon|\nu|\mu]}{}_{;\nu\varepsilon} + T^{\varepsilon\mu\nu}{}_{;[\varepsilon\nu]} + 2\, T^{[\varepsilon|\nu|\mu]}{}_{;[\varepsilon\nu]}$$
$$= (\tfrac{2}{3} B^{[\varepsilon}_{\cdot\,\alpha\sigma\varrho} X^{\mu]\alpha\sigma\varrho} + t^{[\varepsilon\mu]})_{;\varepsilon} + T^{\varepsilon\mu\nu}{}_{;[\varepsilon\nu]} + 2\, T^{[\varepsilon|\nu|\mu]}{}_{;[\varepsilon\nu]},$$

(wegen (5.3) und (2.9_1)). Also wird (6.3) jetzt zu

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\tfrac{1}{3} X^{\varepsilon\alpha\sigma\varrho} B^{\mu}_{\cdot\,\alpha\sigma\varrho;\varepsilon} + \tfrac{1}{2} K_{;\cdot}{}^{\mu} + t^{\nu\mu}{}_{;\nu} + T^{\varepsilon\mu\nu}{}_{;[\varepsilon\nu]} + 2\, T^{[\varepsilon|\nu|\mu]}{}_{;[\varepsilon\nu]},$$

was sich wegen (6.2) auf

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \tfrac{1}{6} X^{\varepsilon\alpha\sigma\varrho} (B_{\varepsilon\alpha\sigma\varrho;\cdot}{}^{\mu} - 2\, B_{\sigma\varrho\cdot\,\alpha;\varepsilon}{}^{\mu}) + (T^{\varepsilon\mu\nu} + 2\, T^{[\varepsilon|\nu|\mu]})_{;[\varepsilon\nu]} - T^{\beta\varepsilon\alpha} B^{\mu}_{\cdot\,\beta\alpha\varepsilon}$$

reduziert. Wenden wir die Bianchische Identität auf den ersten, und die Riccische auf den zweiten Klammerausdruck an, so ergibt sich

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \tfrac{1}{3} X^{\varepsilon\lambda\sigma\varrho} B^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda(\varepsilon;\varrho)} + \tfrac{1}{2} T^{\varepsilon\alpha\nu} (B^{\mu}_{\cdot\,\varepsilon\nu\alpha} + B^{\mu}_{\cdot\,\varepsilon\alpha\nu} + B^{\mu}_{\cdot\,\alpha\nu\varepsilon}) - T^{\beta\varepsilon\alpha} B^{\mu}_{\cdot\,\beta\alpha\varepsilon}.$$

Das erste Glied verschwindet, da

$$X^{\varepsilon\lambda\sigma\varrho} B^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda(\varepsilon;\varrho)} = X^{\lambda(\varepsilon\varrho)\sigma} B^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda\varepsilon;\varrho} = -\tfrac{1}{2} X^{\lambda\sigma\varepsilon\varrho} B^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda\varepsilon;\varrho} = 0$$

ist, während die übrigen Glieder infolge der Symmetrieeigenschaften von $B_{\mu\nu\sigma\varrho}$ verschwinden. Also ist $P^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$, was zu beweisen war.

§ 7. Betrachten wir nun eine relative Fundamentalinvariante $K\gamma$, die dadurch entsteht, dass man in einer im Weylschen Sinne eichinvarianten relativen Fundamentalinvariante die Koeffizienten der linearen Fundamentalform gleich Null setzt, so folgt aus einer bekannten Gleichung (WEYL, 1919, 34, S. 247, Glg. 74), dass die verjüngte Variationsableitung $P\,(= P^{\nu}_{\nu})$ von K die Gestalt einer Divergenz haben muss. Behalten wir nun im Auge dass $B_{\mu\nu\sigma\varrho}$ die entartete Form des entsprechenden Weylschen Krümmungstensors ist, so erkennt man leicht, dass sich $K_{(p)}$ mit $\lambda^{-q_{(p)}}$ multipliziert, $(q_{(p)} = \overline{M}_{(p)} - 2\, M_{(p)})$, wenn wir die $g_{\mu\nu}$ mit einem konstanten Faktor λ^2 versehen. Da sich γ gleichzeitig mit λ^n multipliziert, K_γ sich aber laut Voraussetzung überhaupt nicht ändert, muss die Identität

$$F(\lambda^{-q_{(1)}} K_{(1)}, \ldots, \lambda^{-q_{(p)}} K_{(p)}, \ldots) \equiv \lambda^{-n} F(K_{(1)}, \ldots, K_{(p)}, \ldots) \qquad (7.1)$$

bestehen, woraus folgt, dass

$$\sum_p q_{(p)} K_{(p)} \frac{\partial K}{\partial K_{(p)}} = n K \tag{7.2}$$

ist, wenn wir nach λ, (welches wir jetzt als einen variablen Parameter ansehen), differenzieren, und sodann $\lambda = 1$ setzen.

Multiplizieren wir aber (1.2) mit $g_{\mu\nu}$, so ist es in der Tat möglich, P in die Form

$$P = \tfrac{1}{2}\left(n K - \sum_p q_{(p)} K_{(p)} \frac{\partial K}{\partial K_{(p)}}\right) + \cdots \tag{7.3}$$

zu bringen, wo die durch Punkte angedeuteten Glieder schon die Gestalt einer Divergenz haben. Da wir natürlich voraussetzen, dass K selbst keine Divergenz ist (im anderen Falle würde ja $P^{\mu\nu}$ identisch verschwinden), so sehen wir, dass P nur eine Divergenz sein kann, wenn das in (7.3) ausgeschriebene Glied verschwindet, also gerade die Bedingung (7.2) erfüllt ist.

Umgekehrt erkennen wir also, dass der aus der Variationsableitung einer Fundamentalinvariante K entspringende Skalar P nur dann die Form einer Divergenz besitzt, wenn $K\gamma$ die entartete Form einer im Weylschen Sinne eichinvarianten skalaren Dichte ist.

§ 8. (a) Ist K eine Funktion der $B_{\mu\nu\sigma\varrho}$ und $g_{\mu\nu}$ allein, ist also durchwegs $s = 0$, so bleiben in (1.2) nur die ersten drei Glieder bestehen, wovon jetzt das zweite auch schon ohne die μ und ν einschliessenden Klammern symmetrisch ist. Auch erkennt man unschwer, dass einfach

$$\tfrac{1}{2} X^{\mu\nu\sigma\varrho} \equiv Z^{\mu\nu\sigma\varrho} = \frac{\partial K}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\varrho}} \tag{8.1}$$

ist. Also ist in diesem Falle (s. Buchdahl, 1948)

$$P^{\mu\nu} = Z^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\sigma\varrho} - \tfrac{2}{3} B^{\mu}_{\cdot\alpha\sigma\varrho} Z^{\nu\alpha\sigma\varrho} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} K. \tag{8.2}$$

(b) Schliesslich betrachten wir noch ein Beispiel einer einfachen Invariante höherer Ordnung, und zwar die quadratische Invariante

$$K = G_{;\varepsilon} G^{;\varepsilon}, \qquad (s = 1), \tag{8.3}$$

(Wir schreiben der Einfachheit halber das Semikolon manchmal oben an.) Wir haben sofort

$$E^{\mu\nu\sigma\varrho\lambda} = F^{\mu\nu\sigma\varrho\lambda} = 2\, g^{\mu\nu} g^{\sigma\varrho} G^{;\lambda}. \tag{8.4}$$

Setzt man für einen beliebigen Tensor A

$$g^{\alpha\beta} A_{;\alpha\beta} \equiv \square A,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} F^{\mu\nu\sigma\varrho} &= -2 g^{\mu\nu} g^{\sigma\varrho} \square G, \\ X^{\mu\nu\sigma\varrho} &= -8 g^{[\mu[\nu} g^{\sigma]\varrho]} \square G, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

und

$$\left.\begin{aligned} T^{\alpha\beta\gamma} &= 4 G^{\alpha\gamma;\beta}, \\ t^{\mu\nu} &= - G^{;\mu} G^{;\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Einsetzen in (1.2) ergibt jetzt sofort

$$\tfrac{1}{2} P^{\mu\nu} = (\square G)^{;\mu\nu} + G^{\mu\nu} \square G - \tfrac{1}{2} G^{;\mu} G^{;\nu} - g^{\mu\nu} (\square^2 G - \tfrac{1}{4} G_{;\varepsilon} G^{;\varepsilon}). \tag{8.7}$$

($\square^2 G$ bedeutet hierbei $\square (\square G)$). Es ist zu beachten, dass auch die Variationsableitung der Invariante $- G \square G$, $(s = 2)$, durch (8.7) dargestellt wird, wie man durch partielle Integration, auf das Integral $- \int \gamma G \square G \, d\tau$ angewendet, leicht beweist.

(c) Für den Fall der eben betrachteten Invariante $G_{;\varepsilon} G^{;\varepsilon}$ ist $\overline{M} = 10$ und $M = 2$, also $q = 6$, sodass laut (7.2) P eine Divergenz sein muss, wenn $n = 6$ ist. In der Tat ist dann

$$P = \square (G^2 - 10 \square G). \tag{8.8}$$

Bibliographie.

WEYL, H., 1920, Raum, Zeit, Materie. Dritte Auflage. Julius Springer. Berlin.

SCHOUTEN, J. A., 1924, Der Ricci-Kalkül. Julius Springer. Berlin.

VEBLEN, O., 1927, Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambridge Tracts. No. 24.

EDDINGTON, A. S., 1930, The Mathematical Theory of Relativity. Zweite Auflage. Cambridge University Press.

BUCHDAHL, H. A., 1948, Quart. Jour. Math. Oxford. Vol. 19, *75*, 150.