EINFÜHRUNG DES INVARIANTEN DIFFERENTIALS UND INTEGRALS IN ALLGEMEINEN METRISCHEN RÄUMEN.

Von

ARTHUR MOÓR

in Debrecen (Ungarn).

Einleitung.

In den allgemeinen metrischen Räumen sowie auch in den allgemeinen affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen spielt das invariante Differential von Vektoren und Tensoren eine grosse Rolle. In dem n-dimensionalen Finslerschen Raum R_n in dem also durch die Funktion

$$ds = F(x, dx)$$

(x bedeutet die Mannigfaltigkeit von $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ebenso dx die von $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$) ein Entfernungsmass definiert ist, hat E. Cartan[1] das invariante Differential eines Vektors ξ^i in der Form:

$$D\xi^i = d\xi^i + C^i_{jk}\xi^j d\dot{x}^k + \Gamma^i_{jk}\xi^j dx^k \tag{1}$$

angegeben. Dabei erweiterte er den n-dimensionalen Punktraum R_n, der auf die Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ bezogen war, zu einer $(2n-1)$-dimensionalen Linienelementmannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_n$, indem er zu jedem Punkt $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sämtliche hindurchgehende Richtungen $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$ hinzugefügt hatte. Ein Linienelement soll im folgenden kurz mit $(x, \dot{x})$ bezeichnet werden. Sämtliche Grössen des $\mathfrak{R}_n$ — z. B. die C^i_{jk} und die Γ^i_{jk} in (1) — sind also Funktionen der Linienelemente. In der Formel (1) ist es wesentlich, dass $D\xi^i$ in dx^i und $d\dot{x}^i$ linear ist. Die C^i_{jk} und Γ^i_{jk} sind natürlich Funktionen des metrischen Grundtensors:

$$g_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}.$$

---

[1] Vgl. [1]. Literaturverzeichnis am Ende.

O. Varga[1] gab eine neue Begründung des invarianten Differentials, indem er zum Linienelementraum $\mathfrak{K}_n$ einen oskulierenden Riemannschen Raum hinzufügte; damit konnte er das invariante Differential des Riemannschen Raumes auf den Linienelementraum $\mathfrak{K}_n$ übertragen.

Wir werden im folgenden das invariante Differential mit der in der Riemannschen Geometrie[2] angewandten Methode herleiten, und zugleich eine andere Operation definieren — wir werden diese Operation tensorielles Integral, oder invariantes Integral nennen — welches zu jedem Vektor ξ^i einen anderen:

$$\zeta^i = \int \xi^i$$

zuordnet, auf die Weise, dass die Relationen:

$$D\zeta^i = D\int \xi^i = \xi^i; \quad \int D\xi^i = \xi^i$$

bestehen sollen.

In § 4 geben wir eine Anwendung des tensoriellen Integrals.

In § 5 wollen wir das invariante Differential und Integral auch in den N-dimensionalen Kawaguchischen Räumen $\mathfrak{K}_n^*$ definieren und zwar für die Exvektoren des Raumes; als Grundelement betrachten wir in den Kawaguchischen Räumen das Linienelement M-ter Ordnung $(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(M)})$.[3] Es gibt aber zwischen dem invarianten Differential in den Kawaguchischen Räumen und in den Finslerschen Räumen einen grossen Unterschied. Für die von uns benutzte Herleitung des invarianten Differentials sind die durch (2 a) und (36) gegebenen Tensorrelationen des n-Beins wesentlich; in Finslerschen Räumen kann man die Vektoren des adjungierten n-Beins immer bestimmen, hingegen sind die Tensorrelationen (2 a) und (36) in den Kawaguchischen Räumen für Exvektoren nicht immer erfüllbar. In diesen Räumen ist nämlich das invariante Differential, sowie das invariante Integral an ein n-Bein geknüpft. Dieses n-Bein soll das ausgezeichnete n-Bein des Raumes genannt werden.

§ 1. Das invariante Differential.

Es sei durch die Mannigfaltigkeit

$$x^1, x^2, \ldots, x^n$$

ein n dimensionaler Punktraum definiert, den wir durch Hinzufügung einer Richtung

---

[1] Vgl [5].
[2] Vgl. [2]. Band II., S. 29—35.
[3] Für ihre Bezeichnung vgl. [4].

$$\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$$

zu einem $(2n-1)$-dimensionalen Linienelementraum

$$\mathfrak{K}_n : (x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$$

erweitern. Dessen Elemente werden wir kurz mit $(x, \dot{x})$ bezeichnen. Bei den $\dot{x}^i$ handelt es sich nur um ihr Verhältnis.[1]

Die Tensoren in $\mathfrak{K}_n$ sind Funktionen von $(x, \dot{x})$; sie sind in $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension.

Es sei nun in $\mathfrak{K}_n$ in jedem Linienelement $(x, \dot{x})$ ein stetig differentierbares kovariantes n-Bein

$$_{[a]}\mu_i(x, \dot{x}) \qquad (a, i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben, zu dem durch die Tensorrelationen

$$_{[a]}\mu_i\, _{[b]}\lambda^i = \delta_{ab} \qquad \left(\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a = b \\ 0, & \text{wenn } a \neq b \end{cases}\right) \tag{2}$$

$$_{[a]}\mu_i\, _{[a]}\lambda^k = \delta_i^k \qquad \left(\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = k \\ 0, & \text{wenn } i \neq k \end{cases}\right) \tag{2 a}$$

das zu $_{[a]}\mu_i$ adjungierte kontravariante n-Bein bestimmt ist. (2) gibt uns n^2 Gleichungen für $_{[b]}\lambda^i$ und (2 a) ist eine Folge von (2). Bedeutet $\xi^i = \xi^i(x, \dot{x})$ einen kontravarianten Vektor in $\mathfrak{K}_n$ der längs einer Kurve

$$x^i = x^i(t), \quad \dot{x}^i = \dot{x}^i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, so bestimmen die Funktionen

$$_{[a]}\Phi = {}_{[a]}\mu_k\, \xi^k \qquad (a = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ein System von n Invarianten. Differentiert man (3), so bekommt man

$$d\, _{[a]}\Phi = {}_{[a]}\mu_k\, d\,\xi^k + \frac{\partial\, _{[a]}\mu_k}{\partial \dot{x}^j}\, \xi^k\, d\,\dot{x}^j + \frac{\partial\, _{[a]}\mu_k}{\partial x^j}\, \xi^k\, d\,x^j.$$

Überschiebt man diese Gleichung mit $_{[a]}\lambda^i$ so erhält man einen Vektor, den wir mit η^i bezeichnen. Unter Beachtung von (2 a) wird

$$\eta^i = {}_{[a]}\lambda^i\, d\, _{[a]}\Phi = d\,\xi^i + C^i_{kj}\, \xi^k\, d\,\dot{x}^j + \Gamma^i_{kj}\, \xi^k\, d\,x^j, \tag{4}$$

wo

[1] Vgl. [1], [5].

$$C^i_{kj} = {}_{[a]}\lambda^i \frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_k}{\partial \dot{x}^j} \tag{4 a}$$

$$\Gamma^i_{kj} = {}_{[a]}\lambda^i \frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_k}{\partial x^j} \tag{4 b}$$

bedeuten.

Wir definieren jetzt in $\mathfrak{R}_n$ den metrischen Grundtensor durch die Gleichungen:

$$g_{ij} = {}_{[a]}\mu_i\, {}_{[a]}\mu_j; \tag{5}$$

das Bogenelement wird also

$$ds = \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j}. [1] \tag{6}$$

Jetzt sind wir imstande die Funktionen C^i_{kj} und Γ^i_{kj} durch g_{ij} auszudrücken. Überschieben wir (4 a) und (4 b) mit ${}_{[b]}\mu_i$ so bekommt man wegen (2)

$${}_{[b]}\mu_i\, C^i_{kj} = \delta_{ab} \frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_k}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_k}{\partial \dot{x}^j}, \tag{7 a}$$

$${}_{[b]}\mu_i\, \Gamma^i_{kj} = \delta_{ab} \frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_k}{\partial x^j} = \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_k}{\partial x^j}. \tag{7 b}$$

Durch Differentieren erhält man aus (5)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^h} = {}_{[b]}\mu_i \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_j}{\partial \dot{x}^h} + {}_{[b]}\mu_j \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_i}{\partial \dot{x}^h} \tag{8 a}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = {}_{[b]}\mu_i \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_j}{\partial x^h} + {}_{[b]}\mu_j \frac{\partial\, {}_{[b]}\mu_i}{\partial x^h} \tag{8 b}$$

(statt a haben wir jetzt b geschrieben). Setzen wir (7 a) bzw. (7 b) in (8 a) bzw. (8 b) ein, so wird

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^h} = {}_{[b]}\mu_i\, {}_{[b]}\mu_k\, C^k_{jh} + {}_{[b]}\mu_k\, {}_{[b]}\mu_j\, C^k_{ih}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = {}_{[b]}\mu_i\, {}_{[b]}\mu_k\, \Gamma^k_{jh} + {}_{[b]}\mu_k\, {}_{[b]}\mu_j\, \Gamma^k_{ih}.$$

Auf Grund von (5) wird

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^h} = g_{ik}\, C^k_{jh} + g_{jk}\, C^k_{ih}, \tag{9 a}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik}\, \Gamma^k_{jh} + g_{jk}\, \Gamma^k_{ih}. \tag{9 b}$$

[1] Vgl. [1].

Damit haben wir für die C^i_{kh} und Γ^i_{kh} die zwei fundamentalen Identitäten erhalten, die E. Cartan auf einem anderen Weg erhalten hat.[1] Der Vektor η^i definiert also eben das invariante Differential von ξ^i. Den Bildungsprozess von η^i nennt man tensorielle Ableitung. Nach der gewöhnlichen Bezeichnung ist:

$$\eta^i = D\xi^i.$$

Um das invariante Differential eines kontravarianten Vektors ξ_i zu erhalten, formen wir die n Invarianten:

$$ {}_{[a]}\psi = {}_{[a]}\lambda^k \xi_k, \qquad (a = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Differentiert man (10), so wird

$$d\,{}_{[a]}\psi = {}_{[a]}\lambda^k d\xi_k + \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial \dot{x}^h}\xi_k\, d\dot{x}^h + \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial x^h}\xi_k\, dx^h.$$

Überschieben wir diese Gleichung mit ${}_{[a]}\mu_i$, so wird unter Beachtung von (2 a)

$$\eta_i = {}_{[a]}\mu_i\, d\,{}_{[a]}\psi = d\xi_i + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial \dot{x}^h}\xi_k\, d\dot{x}^h + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial x^h}\xi_k\, dx^h; \tag{11}$$

aus (2 a) bekommt man die Identitäten

$${}_{[a]}\lambda^k \frac{\partial\,{}_{[a]}\mu_i}{\partial \dot{x}^h} + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial \dot{x}^h} = 0, \tag{12 a}$$

$${}_{[a]}\lambda^k \frac{\partial\,{}_{[a]}\mu_i}{\partial x^h} + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial x^h} = 0. \tag{12 b}$$

Nach (4 a), (4 b) sind die Gleichungen (12 a) und (12 b) identisch mit

$$C^k_{ih} + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial \dot{x}^h} = 0, \tag{13 a}$$

$$\Gamma^k_{ih} + {}_{[a]}\mu_i \frac{\partial\,{}_{[a]}\lambda^k}{\partial x^h} = 0, \tag{13 b}$$

und damit wird aus (11)

$$\eta_i = d\xi_i - C^k_{ih}\xi_k\, d\dot{x}^h - \Gamma^k_{ih}\xi_k\, dx^h. \tag{14}$$

η_i in (14) ist eben das invariante Differential von ξ_i. $\eta_i = D\xi_i$.

Wir wollen noch bemerken, dass L. Berwald die Tensoren des n-Beins in zweidimensionalen Räumen in expliziter Form bestimmt hat. In seiner Arbeit „On Finsler and Carten Geometries III."[2] sind

---

[1] Vgl. [1], S. 5.

[2] **Es ist veröffentlicht im Annals of Math. 42. (1941) 84—112. Vgl. die Formel (4.1)—(4.4).**

$$ {}_{[1]}\mu_i = l_i, \quad {}_{[2]}\mu_i = h_i, $$

$$ {}_{[1]}\lambda^j = l^j, \quad {}_{[2]}\lambda^j = h^j. $$

l bedeutet den Einheitsvektor, der dieselbe Richtung wie sein Linienelement besitzt, und h bezeichnet den normalen Einheitsvektor.

§ 2. Das tensorielle Integral.

Aus (3) und (10) lässt sich durch Integration eine neue Operation herleiten, die aus einem Tensor ξ^i einen neuen Tensor ζ^i bestimmt in der Weise, dass $D\zeta^i = \xi^i$ ist.

Aus (3) bekommt man nach Integration

$$ \int_{t_0}^{t} {}_{[a]}\Phi \, dt = \int_{t_0}^{t} \xi^k \, {}_{[a]}\mu_k \, dt. \tag{15} $$

Nach Überschiebung der Gleichung (15) mit ${}_{[a]}\lambda^i$ bekommt man den Vektor

$$ \zeta^i = {}_{[a]}\lambda^i \int_{t_0}^{t} \xi^k \, {}_{[a]}\mu_k \, dt, \tag{16} $$

oder nach partieller Integration unter Beachtung von (2 a)

$$ \zeta^i = \int_{t_0}^{t} \xi^i \, dt - {}_{[a]}\lambda^i \int_{t_0}^{t} \frac{d\,{}_{[a]}\mu_k}{dt} \left(\int_{t_0}^{t} \xi^i \, dt \right) dt. \tag{16a} $$

Den Vektor ζ^i werden wir tensorielles Integral von ξ^i nennen, denn es besteht die Gleichung

$$ \frac{D\zeta^i}{dt} = \frac{d\zeta^i}{dt} + C^i_{kh}\, \zeta^k \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^i_{kh}\, \zeta^k \frac{dx^h}{dt} = \xi^i. $$

Es ist nämlich

$$ \frac{D\zeta^i}{dt} = \frac{d\,{}_{[a]}\lambda^i}{dt} \int_{t_0}^{t} \xi^k \, {}_{[a]}\mu_k \, dt + {}_{[a]}\lambda^i \, {}_{[a]}\mu_k \, \xi^k + {}_{[a]}\lambda^k \int_{t_0}^{t} \xi^r \, {}_{[a]}\mu_r \, dt \left(C^i_{kh} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^i_{kh} \frac{dx^h}{dt} \right). \tag{17} $$

Nach (13 a) und (13 b) ist aber

$$ C^i_{kh} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^i_{kh} \frac{dx^h}{dt} = - {}_{[b]}\mu_k \left(\frac{\partial\, {}_{[b]}\lambda^i}{\partial \dot{x}^h} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \frac{\partial\, {}_{[b]}\lambda^i}{\partial x^h} \frac{dx^h}{dt} \right) = - {}_{[b]}\mu_k \frac{d\, {}_{[b]}\lambda^i}{dt}. \tag{18} $$

Beachten wir noch die Gleichung (2), so wird aus (17)

$$\frac{D\zeta^i}{dt} = \xi^i \tag{19}$$

w. z. b. w.

Die Gleichung (19) berechtigt uns für ζ^i den Namen tensorielles Integral zu geben, da sich nachweisen lässt, dass auch das tensorielle Integral von $D\xi^i$ eben ξ^i ist.

Bezeichnet man nämlich das tensorielle Integral mit $\int\limits_{t_0}^{t} \xi^i\,dt$, so ist der Vektor

$$\zeta^i = \int\limits_{t_0}^{t} \xi^i\,dt = {}_{[a]}\lambda^i \int\limits_{t_0}^{t} \xi^k\,{}_{[a]}\mu_k\,dt; \tag{20}$$

in diesem Falle ist also

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{D\xi^i}{dt}\,dt = \xi^i. \tag{21}$$

[Für die Gleichung (19) kann man übrigens mit dieser Bezeichnung auch die Form

$$\frac{D\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi^i\,dt\right)}{dt} = \xi^i \tag{22}$$

geben.]

Beweis der Gleichung (21). Unter Beachtung von (4 a), (4 b), wird:

$$\frac{D\xi^k}{dt} = \frac{d\xi^k}{dt} + {}_{[b]}\lambda^k \frac{d\,{}_{[b]}\mu_r}{dt}\,\xi^r$$

(statt a, k haben wir jetzt b, r geschrieben). Nach (20) bekommt man, wenn wir die tensorielle Integration auf $\frac{D\xi^i}{dt}$ anwenden,

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{D\xi^i}{dt}\,dt = {}_{[a]}\lambda^i \int\limits_{t_0}^{t} {}_{[a]}\mu_k \frac{d\xi^k}{dt}\,dt + {}_{[a]}\lambda^i \int\limits_{t_0}^{t} {}_{[a]}\mu_k\,{}_{[b]}\lambda^k \frac{d\,{}_{[b]}\mu_r}{dt}\,\xi^r\,dt.$$

Durch partielle Integration des ersten Gliedes erhalten wir unter Beachtung von (2 a) und (2):

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{D\xi^i}{dt}\,dt = \xi^i - {}_{[a]}\lambda^i \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\,{}_{[a]}\mu_k}{dt}\,\xi^k\,dt + {}_{[a]}\lambda^i \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\,{}_{[a]}\mu_r}{dt}\,\xi^r\,dt = \xi^i$$

w. z. b. w.

Durch die Gleichungen (21) und (22) kommt zum Ausdruck, dass die tensorielle Integration eben die entgegengesetzte Operation der tensoriellen Ableitung ist. Das tensorielle Integral ist ein Kurvenintegral, denn es hängt vom Weg $x^i = x^i(t)$ ab.

Um das tensorielle Integral eines kovarianten Vektors ξ_i zu erhalten, integrieren wir (10) und überschieben es mit ${}_{[a]}\mu_i$; so wird

$$\zeta_i = \int_{t_0}^{t} \xi_i \, dt = {}_{[a]}\mu_i \int_{t_0}^{t} {}_{[a]}\lambda^k \, \xi_k \, dt. \tag{23}$$

Man kann ebenso auf Grund von (14) und (23) nachweisen, dass

$$\frac{D\left(\int_{t_0}^{t} \xi_i \, dt\right)}{dt} = \xi_i \tag{24}$$

und

$$\int_{t_0}^{t} \frac{D\xi_i}{dt} \, dt = \xi_i \tag{25}$$

richtig sind, nur muss man in (24) den Wert

$$C^k_{ih} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^k_{ih} \frac{dx^h}{dt}$$

mit Hilfe von (4 a), (4 b) berechnen. Es wird

$$C^k_{ih} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^k_{ih} \frac{dx^h}{dt} = {}_{[b]}\lambda^k \frac{d\,{}_{[b]}\mu_i}{dt}. \tag{26}$$

§ 3. Zwei Eigenschaften der Vektoren ${}_{[a]}\lambda^i$, ${}_{[a]}\mu_i$.

Die Vektoren ${}_{[a]}\lambda^i$, ${}_{[a]}\mu_i$ verhalten sich in Bezug auf die tensorielle Differentiation, bzw. Integration wie Konstanten. Es ist nämlich nach (4)

$$\frac{D\,{}_{[a]}\lambda^i}{dt} = \frac{d\,{}_{[a]}\lambda^i}{dt} + {}_{[a]}\lambda^k \left(C^i_{kh} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^i_{kh} \frac{dx^h}{dt} \right).$$

Wegen (18) wird

$$\frac{D\,{}_{[a]}\lambda^i}{dt} = 0; \tag{27}$$

nach (14) ist

$$\frac{D\,{}_{[a]}\mu_i}{dt} = \frac{d\,{}_{[a]}\mu_i}{dt} - {}_{[a]}\mu_k \left(C^k_{ih} \frac{d\dot{x}^h}{dt} + \Gamma^k_{ih} \frac{dx^h}{dt} \right).$$

Unter Beachtung von (26) wird

(28) $$\frac{D\,{}_{[a]}\mu_i}{dt} = 0.$$

Nach (20), (23) ist wegen (2)

(29) $$\int_{t_0}^{t} {}_{[b]}\lambda^i\,dt = {}_{[b]}\lambda^i (t - t_0),$$

(30) $$\int_{t_0}^{t} {}_{[b]}\mu_i\,dt = {}_{[b]}\mu_i (t - t_0).$$

Die Gleichungen (27)—(30) beweisen unsere Behauptung.

§ 4. Anwendung des tensoriellen Integrals.

Das invariante Differential und Integral spielt in den allgemeinen metrischen Räumen $\mathfrak{R}_n$ dieselbe Rolle, wie das gewöhnliche Differential und Integral in dem Euklidischen Raum. Die Frenetformeln einer Kurve im dreidimensionalen Finslerschen Raum — wenn der Tangentenvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor der Reihe nach mit t^i, n^i, b^i bezeichnet sind — lauten:

(31 a) $$\frac{Dt^i}{ds} = \frac{1}{\varrho} n^i,$$

(31 b) $$\frac{Dn^i}{ds} = -\frac{1}{\varrho} t^i + \frac{1}{\tau} b^i,$$

(31 c) $$\frac{Db^i}{ds} = -\frac{1}{\tau} n^i,$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ bzw. $\frac{1}{\tau}$ die Krümmung bzw. Torsion der Kurve bezeichnet. Die Gleichungen (31) stimmen in formaler Hinsicht mit den Frenetformeln der Kurven des Euklidischen Raumes überein, nur steht hier statt des gewöhnlichen Differentials das invariante Differential.

Wenn für eine Kurve

(32) $$x^i = x^i(s)$$

die Gleichungen (31) erfüllt sind, wo noch

$$g_{ik}\, t^i\, t^k = g_{ik}\, x'^i\, x'^k = 1,$$

s also eben den Bogenparameter bedeutet, dann wird man für die Kurve nach (31 a) die Form:

$$x^i = \int_0^s t^i(s)\, d s = \int_0^s \left(\int_0^s \frac{1}{\varrho}\, n^i\, d s \right) d s \tag{33}$$

haben. Nach (31 a) ist nämlich

$$x'^i(s) = t^i = \int_0^s \frac{1}{\varrho}\, n^i\, d s. \tag{34}$$

Wir wollen noch bemerken, dass das tensorielle Integral statt des ersten Integrals in (33) nicht anwendbar ist, denn — wie wir in (34) auch gezeigt haben — der Vektor t^i ist aus $x^i(s)$ durch das gewöhnliche Differential entstanden.

Wir ergänzen noch die durch die Gleichungen (20), (23) gegebene Definition des tensoriellen Integrals mit der Bemerkung, dass das tensorielle Integral für einen Skalar mit dem gewöhnlichen Integral übereinstimmt. Das ist equivalent mit der Tatsache, dass das invariante Differential für einen Skalar in das gewöhnliche Differential übergeht.

§ 5. Das invariante Differential und Integral in Kawaguchischen Räumen.

Ein N-dimensionaler Kawaguchischer Raum $\mathfrak{K}_n^*$ ist eine Punktmannigfaltigkeit die auf Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^N$ bezogen ist, und in der durch die Funktion

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(M)})\, d t, \qquad \left(x^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha x}{d t^\alpha} \right) \tag{35}$$

die Entfernung auf irgendeine Kurve

$$x^i = x^i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

zwischen den Punkten

$$x^i(t_0),\ x^i(t_1)$$

bestimmt ist. Die Extensoren und Skalare des Raumes sind Funktionen des Linienelementes M-ter Ordnung: $(x^i, x^{(\alpha)i})$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, M)$.

Um das invariante Differential eines Exvektors G-ter Ordnung $V^{\alpha a}$ $(\alpha = 0,$

$1, \ldots, G$; $a = 1, 2, \ldots, N$) definieren zu können[1], nehmen wir an, dass zu dem exkontravarianten N-Bein

$$_{[a]}\lambda^{\gamma i} = {}_{[a]}\lambda^{\gamma i}(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(M)}), \qquad \begin{pmatrix} a, i = 1, 2, \ldots, N \\ \gamma = 0, 1, \ldots, G \end{pmatrix}$$

durch die Tensorrelationen

$$(36) \qquad {}_{[a]}\lambda^{\gamma i}\, {}_{[a]}\mu_{\beta j} = \delta^{\gamma}_{\beta}\, \delta^{i}_{j}$$

das adjungierte exkovariante N-Bein ${}_{[a]}\mu_{\beta j}$ existiert. (36) enthält $N^2(G+1)^2$ Gleichungen, und wenn man die ${}_{[a]}\mu_{\beta j}$ als unbekannte Funktionen voraussetzt, dann enthält (36) $(G+1)N^2$ Unbekannten. Wegen $N^2(G+1)^2 \geqq N^2(G+1)$ ist zu ${}_{[a]}\lambda^{\gamma i}$ das exkovariante adjungierte N-Bein ${}_{[a]}\mu_{\beta j}$ nicht immer bestimmbar. Für $G = 0$ hat man N^2 Gleichungen, mit ebensoviel Unbekannten, die ${}_{[a]}\mu_{0j}$ sind also jetzt im allgemeinen eindeutig bestimmt. ${}_{[a]}\mu_{0j}$ bedeutet aber eben die gewöhnlichen Tensoren.[2] Zu einem N-Bein 0-ter Ordnung ${}_{[a]}\lambda^{0i}$ ist also auch im Kawaguchischen Raum das adjungierte N-Bein ${}_{[a]}\mu_{0j}$ eindeutig bestimmt.

Jetzt sind wir imstande auch das invariante Differential eines exkovarianten Exvektors $W_{\alpha a}$ bzw. exkontravarianten Exvektors $V^{\alpha a}$ mit der in § 1. angewandten Methode zu bestimmen.

$$(37\text{ a}) \qquad {}_{[a]}\Phi = {}_{[a]}\mu_{\beta j}\, V^{\beta j} \qquad (a = 1, 2, \ldots, N),$$

bzw.

$$(37\text{ b}) \qquad {}_{[a]}\psi = {}_{[a]}\lambda^{\beta j}\, W_{\beta j} \qquad (a = 1, 2, \ldots, N)$$

bilden je ein Invariantensystem. Nach Differentieren und Überschiebung der Gleichung (37 a) mit ${}_{[a]}\lambda^{\alpha i}$ und (37 b) mit ${}_{[a]}\mu_{\alpha i}$ erhält man unter Beachtung von (36)

$$D V^{\alpha i} = {}_{[a]}\lambda^{\alpha i}\, d\, {}_{[a]}\Phi = d V^{\alpha i} + {}_{[a]}\lambda^{\alpha i} \frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_{\beta j}}{\partial x^{(\gamma) k}} V^{\beta j}\, d x^{(\gamma) k}$$

bzw.

$$D W_{\alpha i} = {}_{[a]}\mu_{\alpha i}\, d\, {}_{[a]}\psi = d W_{\alpha i} + {}_{[a]}\mu_{\alpha i} \frac{\partial\, {}_{[a]}\lambda^{\beta j}}{\partial x^{(\gamma) k}} W_{\beta j}\, d x^{(\gamma) k}.$$

---

[1] Die griechischen Indizes laufen immer, wenn nichts anderes gesetzt wird, von 0 bis G; die lateinischen aber von 1 bis N.

[2] Das Transformationsgesetz eines exkovarianten Exvektors $W_{\alpha i}$ ist nämlich

$$\overline{W}_{\alpha i} = \frac{\partial x^{(\beta) k}}{\partial \overline{x}^{(\alpha) i}} W_{\beta k}.$$

Vgl. [3]. Wenn $\alpha = \beta = 0$, dann ist W_{0i} ein gewöhnlicher Tensor erster Stufe.

Wegen (36) ist aber

$$(37)\qquad {}_{[a]}\lambda^{\alpha i}\frac{\partial\, {}_{[a]}\mu_{\beta j}}{\partial x^{(\gamma) k}} = -\, {}_{[a]}\mu_{\beta j}\frac{\partial\, {}_{[a]}\lambda^{\alpha i}}{\partial x^{(\gamma) k}} = \Gamma^{\alpha i}_{\beta j\ \gamma k},$$

somit bekommt man für das invariante Differential

$$(38\text{ a})\qquad D V^{\alpha i} = d V^{\alpha i} + \Gamma^{\alpha i}_{\beta j\ \gamma k} V^{\beta j}\, d x^{(\gamma) k}\ [1]$$

und

$$(38\text{ b})\qquad D W_{\alpha i} = d W_{\alpha i} - \Gamma^{\beta j}_{\alpha i\ \gamma k} W_{\beta j}\, d x^{(\gamma) k}.$$

Wenn $\alpha = \beta = 0$ und $\gamma = 0, 1$ ist, — es handelt sich also um die gewöhnlichen Vektoren, die von $(x, \dot{x})$ abhängig sind, — dann geht (38 a) und (38 b) nach der Substitution

$$\Gamma^{0j}_{0i\ 0k} = \Gamma^{j}_{ik},\quad \Gamma^{0j}_{0i\ 1k} = C^{j}_{ik}$$

in das gewöhnliche invariante Differential über. Vgl. Gleichung (4) und (14).

Werden die Gleichungen (37 a), (37 b) integriert, und dann mit ${}_{[a]}\lambda^{\alpha i}$ bzw. ${}_{[a]}\mu_{\alpha i}$ überschoben, so bekommt man das tensorielle Integral von $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$. Um die Identitäten

$$\int D V^{\alpha i}\, d t = D \int V^{\alpha i}\, d t = V^{\alpha i}$$

$$\int D W_{\alpha i}\, d t = D \int W_{\alpha i}\, d t = W_{\alpha i}$$

zu beweisen [2], braucht man aber noch die Tensorrelationen

$$(39)\qquad {}_{[a]}\lambda^{\gamma i}\, {}_{[b]}\mu_{\gamma i} = \delta_{ab}.$$

Dies gibt noch N^2 Gleichungen zu den Gleichungen (36). Das tensorielle Integral ist:

$$(40\text{ a})\qquad \int_{t_0}^{t} V^{\alpha i}\, d t = {}_{[a]}\lambda^{\alpha i}\int_{t_0}^{t} {}_{[a]}\mu_{\beta j}\, V^{\beta j}\, d t,$$

$$(40\text{ b})\qquad \int_{t_0}^{t} W_{\alpha i}\, d t = {}_{[a]}\mu_{\alpha i}\int_{t_0}^{t} {}_{[a]}\lambda^{\beta j}\, W_{\beta j}\, d t.$$

Wir wollen noch bemerken, dass die Gleichungen (2 a) nach einem bekannten Satz der Tensorrechnung [3] aus (2) folgen. (39) folgt aber nicht aus (36), nur im Falle $\gamma = 0$, also für die gewöhnlichen Tensoren.

[1] Die Formel von $D V^{\alpha i}$ ist ganz ähnlich wie das Differential von Kawaguchi, das er in seiner Arbeit [4] gegeben hat.

[2] Der Beweis geht übrigens ebenso, wie in dem Finslerschen Raum.

[3] Vgl. z. B. [2].

Literaturverzeichnis.

[1]. E. CARTAN, *Les espaces de Finsler.* Actualités Scientifiques et Industrielles. No. 79. Paris, Herrmann & Cie. (1934.)

[2]. A. DUSCHEK—W. MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie. I.—II.* Leipzig und Berlin, Verlag von B. G. Teubner. (1930.)

[3]. A. KAWAGUCHI, *Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I.* Journal of the Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I. 9. (1940) 1—152.

[4]. —— *Theorie of connections in a Kawaguchi space of order two.* Proc. Imp. Akad. Jap. 13. (1937) 183—186.

[5]. O. VARGA, *Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen.* Monatshefte für Math. und Phys. 50. (1941) 165—175.

Zusatz bei der Korrektur.

Die in vorliegender Arbeit[1] definierte Operation das tensorielle Integration ist durch die Bestimmungsgleichungen noch nicht eindeutig festgelegt. Die Bestimmungsgleichungen lauten nämlich

$$D \int \xi^i = \xi^i,$$

wo D das invariante Differential und $\int$ das invariante Integral (auch tensorielles Integral genannt) bezeichnet. Offensichtlich kann man zu dem Vektor $\int \xi^i$ noch einen anderen Vektor γ^i hinzufügen, so dass

$$D \left(\int \xi^i + \gamma^i\right) = \xi^i$$

bestehe, wenn nur

$$D\gamma^i = 0$$

besteht. Dies drückt aus, dass $\int \xi^i$ bis auf ein parallel verschobenes Vektorfeld γ^i bestimmt ist. γ^i spielt gewissermassen eine ähnliche Rolle, wie die Integrationskonstante im gewöhnlichen Integral.

[1] Vgl. § 2.