FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN AUF HALBGRUPPEN.

Von

WILHELM MAAK

in HAMBURG.

Der Begriff „fastperiodische Funktion", der ursprünglich von H. Bohr nur für Funktionen einer reellen Variablen geschaffen wurde, lässt sich nach v. Neumann [2] auch für Funktionen auf Gruppen erklären, und eine ausführliche Theorie dieser Funktionen hat sich entwickelt [3]. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, dass man auch für Funktionen der Elemente einer Halbgruppe den Begriff „fastperiodisch" definieren kann (§ 1). Die in diesem Sinne fastperiodischen Funktionen sind identisch mit den nach v. Neumann fastperiodischen Funktionen, wenn die Halbgruppe eine Gruppe ist. Für die fastperiodischen Funktionen einer Halbgruppe gelten wörtlich dieselben Sätze wie für die fastperiodischen Funktionen auf Gruppen. Wir werden insbesondere in § 5 den folgenden *Approximationssatz* beweisen: Jede auf einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ fastperiodische Funktion $f(x)$ lässt sich gleichmässig und beliebig genau durch Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho, \sigma=1}^{s_i} \gamma_{i, \varrho\sigma} D_{i, \varrho\sigma}(x)$$

approximieren. Dabei bedeuten die $D_{i, \varrho\sigma}(x)$ die Koeffizienten geeigneter unitärer Darstellungen $D_i(x) = \{D_{i, \varrho\sigma}(x)\}$ von $\mathfrak{H}$ und die $\gamma_{i, \varrho\sigma}$ sind geeignete komplexe Zahlen. Wenn $\mathfrak{H}$ speziell eine Gruppe ist, so ist dies der bekannte Approximationssatz der v. Neumannschen Theorie.

Der Beweis des Approximationssatzes für fastperiodische Funktionen einer Halbgruppe wird von uns dadurch geführt werden, dass wir den fastperiodischen Funktionen der Halbgruppe umkehrbareindeutig die fastperiodischen Funktionen einer gewissen zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ zuordnen. Anwendung des v. Neumannschen Approximationssatzes auf die fastperiodischen Funktionen von $\hat{\mathfrak{G}}$ liefert dann unmittelbar auch den Approximationssatz für die Funktionen auf $\mathfrak{H}$.

Die eigentliche Schwierigkeit besteht in der Konstruktion der Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ (§ 4). Ihre Elemente sind umkehrbareindeutige lineare Transformationen der Menge der fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{H}$, und zwar wird $\hat{\mathfrak{G}}$ durch die Transformationen

$$T_a f(x) = f(xa) \qquad a \in \mathfrak{H}$$

erzeugt. In § 3 wird gezeigt, dass zu diesen Transformationen T_a inverse Transformationen existieren.

Als wichtigstes Werkzeug benötigen wir bei unsren Untersuchungen einen *kombinatorischen Hilfssatz*: Es seien eine Menge $\mathfrak{H}$, irgendwelche n Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und andere n Teilmengen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{H}$ gegeben. Nun wähle man irgendwelche Mengen $\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_r}$ aus. Wenn die Anzahl s aller $\mathfrak{A}_j$ mit

$$(\mathfrak{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_{i_r}) \cap \mathfrak{A}_j \neq 0$$

stets $\geqq r$ ist, wie man auch immer r und wie man auch immer die $\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_r}$ auswählt, so existiert eine Permutation j_i der Zahlen $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_{j_i} \neq 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Wegen eines Beweises siehe z. B. [3].

Dieser Satz kann u. a. benutzt werden, um zu zeigen, dass jede fastperiodische Funktion auf einer Halbgruppe einen Integralmittelwert besitzt [4]. Jedoch machen wir von diesem Mittelwert in vorliegender Abhandlung nicht Gebrauch. Es will mir scheinen, als gewänne man einen besseren Eindruck von dem Wesen unsrer fastperiodischen Funktionen, wenn man den Mittelwert möglichst nicht als Hilfsmittel heranzieht. Die Folgerungen aus dem Hilfssatz, welche in der Theorie benötigt werden, sind in § 2 zusammen gestellt.

Abgesehen von dem v. Neumannschen Approximationssatz und dem kombinatorischen Hilfssatz werden keine Sätze oder Begriffe verwandt, die nicht allgemein bekannt sind.

§ 1. Definition der fastperiodischen Funktionen.

Ist jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen einer Menge $\mathfrak{H}$ ein Element $c \in \mathfrak{H}$ als Produkt zugeordnet und erfüllt diese so erklärte Multiplikation das assoziative Gesetz:

$$(ab)c = a(bc),$$

so heisst $\mathfrak{H}$ eine Halbgruppe. Wir fordern von einer Halbgruppe ausserdem, dass sie stets ein Element 1 enthält, für das

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad\qquad a \text{ beliebig aus } \mathfrak{H}$$

gilt. (Sollte in $\mathfrak{H}$ keine 1 vorhanden sein, so kann man sie adjungieren.)

Wir betrachten nun komplexwertige Funktionen $f(x)$ der Elemente x einer derartigen Halbgruppe $\mathfrak{H}$.

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heisse *fastperiodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ existieren, die folgende Bedingungen erfüllen:

1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n$
2) Gilt für gewisse Elemente $x, y, c', d' \in \mathfrak{H}$ und geeignetes i

$$c' x d', \; c' y d' \in \mathfrak{A}_i,$$

so folgt

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq \varepsilon \qquad\qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{H}.$$

Wir nennen das System von Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine *Teilung* $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Die Menge aller fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{H}$ werde mit R bezeichnet.

Wir wollen zunächst einsehen, dass der soeben eingeführte Begriff „fastperiodisch" mit dem gebräuchlichen gleichwertig ist, wenn $\mathfrak{H}$ eine Gruppe ist.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe und $f(x)$ eine komplexe Funktion ihrer Elemente x. Es ist $f(x)$ dann und nur dann fastperiodisch, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, die folgende Bedingungen erfüllen:*

a) $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n$.
b) *Gilt für gewisse $x, y \in \mathfrak{G}$ und geeignetes i*

$$x, y \in \mathfrak{A}_i$$

so folgt

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq \varepsilon \qquad\qquad \textit{für alle } c, d \in \mathfrak{G}.$$

Beweis: Es sei $f(x)$ fastperiodisch und $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sei eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Dann erfüllen die $\mathfrak{A}_i$ auch die Bedingungen a), b) unsres Satzes. Wenn umgekehrt $f(x)$ den Ansprüchen unsres Satzes genügt, so existieren also zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, welche die Bedingungen a), b) erfüllen. Ich behaupte, diese $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ bilden eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Es sei etwa für gewisse $c_0, d_0, x, y \in \mathfrak{G}$ und geeignetes i

$$c_0 x d_0, \; c_0 y d_0 \in \mathfrak{A}_i.$$

Dann ist wegen b)

$$|f(cc_0 x d_0 d) - f(cc_0 y d_0 d)| \leqq \varepsilon \qquad\qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{G}.$$

Weil $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, darf man $c c_0$ und $d_0 d$ durch c bzw. d ersetzen und man findet

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq \varepsilon \qquad \text{für alle } c, d \in \mathfrak{G}.$$

Die $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ erfüllen also Bedingung 2) unsrer Definition. Die Bedingung 1) ist wegen a) trivialerweise erfüllt. Die $\mathfrak{A}_i$ bilden also eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$.

In Hinblick auf eine Anwendung in § 4 beweisen wir noch

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. Eine auf $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $f(x)$ ist fastperiodisch, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, die folgende Bedingungen erfüllen:*

α) $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n$.

β) *Gilt für gewisse $x, y \in \mathfrak{G}$ und geeignetes i*

$$x, y \in \mathfrak{A}_i,$$

so folgt

$$|f(cx) - f(cy)| \leqq \varepsilon \qquad \textit{für alle } c \in \mathfrak{G}.$$

Beweis: Wir werden, ausgehend von den $\mathfrak{A}_i$ des Satzes, eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ bilden. Dazu wählen wir aus jedem $\mathfrak{A}_i$ ein Element a_i aus. Sodann bilden wir die Mengen

$$\mathfrak{A}_i a_k^{-1},$$

welche aus sämtlichen Elementen $x a_k^{-1}$ mit $x \in \mathfrak{A}_i$ bestehen. Die Mengen

$$\mathfrak{B}_{i_1, \ldots, i_n} = \mathfrak{A}_{i_1} a_1^{-1} \cap \mathfrak{A}_{i_2} a_2^{-1} \cap \cdots \cap \mathfrak{A}_{i_n} a_n^{-1}$$
$$i_1 = 1, \ldots, n; \ldots; i_n = 1, \ldots, n$$

erfüllen dann die Bedingung a) des Satzes 1. Ist nun $x, y \in \mathfrak{B}_{i_1, \ldots, i_n}$, so gilt

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq |f(cxd) - f(cxa_k)| + |f(cxa_k) - f(cya_k)| + |f(cya_k) - f(cyd)|.$$

Dabei haben wir angenommen, dass $d \in \mathfrak{A}_k$ und haben das a_k entsprechend gewählt. Es folgt dann wegen $d, a_k \in \mathfrak{A}_k$ und wegen $x a_k, y a_k \in \mathfrak{A}_{i_k}$

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Aus Satz 1 folgt demnach, dass $f(x)$ fastperiodisch ist.

Von nun an wenden wir uns endgültig der Betrachtung von beliebigen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und ihrer fastperiodischen Funktionen zu. Wie bei Gruppen, so besteht auch bei Halbgruppen ein enger Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Halbgruppe und ihren fastperiodischen Funktionen. Ist jedem $x \in \mathfrak{H}$ eine unitäre Matrix $D(x) = \{D_{\varrho\sigma}(x)\}$ zugeordnet und gilt

$$D(x)\,D(y) = D(xy) \qquad x, y \in \mathfrak{H},$$

so sprechen wir von einer *unitären Darstellung* von $\mathfrak{H}$.

Satz 3. *Die Koeffizienten $D_{\varrho\sigma}(x)$ einer unitären Darstellung von $\mathfrak{H}$ sind fastperiodische Funktionen.*

Beweis: Man kann die Menge aller Matrizen $D(x)$ mit $x \in \mathfrak{H}$ so in endlich viele Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ aufspalten, dass[1]

$$|D(x) - D(y)| \leqq \varepsilon,$$

falls nur $D(x), D(y) \in A_i$. Nun erklären wir Teilmengen $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{H}$, indem wir festsetzen:

$$x \in \mathfrak{A}_i \text{ wenn } D(x) \in A_i.$$

Es sei etwa $c_0 x d_0, c_0 y d_0 \in \mathfrak{A}_i$. Dann ist

$$|D(c_0 x d_0) - D(c_0 y d_0)| \leqq \varepsilon$$

und folglich

$$\begin{aligned} |D(cxd) - D(cyd)| &= |D(c)\,(D(x) - D(y))\,D(d)| \\ &= |D(c)\,D^{-1}(c_0)\,(D(c_0 x d_0) - D(c_0 y d_0))\,D^{-1}(d_0)\,D(d)| \\ &= |D(c_0 x d_0) - D(c_0 y d_0)| \leqq \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$|D_{\varrho\sigma}(cxd) - D_{\varrho\sigma}(cyd)| \leqq \varepsilon.$$

Die $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sind also eine Teilung $\mathfrak{T}\{D_{\varrho\sigma}(x), \varepsilon\}$ für alle ϱ, σ.

Nachdem wir in Satz 3 einige Beispiele fastperiodischer Funktionen auf Halbgruppen kennengelehrnt haben, sollen nunmehr die wichtigsten Eigenschaften der Menge der fastperiodischen Funktionen angegeben werden.

Satz 4. *Die Menge R aller fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{H}$ bildet einen abgeschlossenen linearen Raum.*

Beweis: Ist $f \in R$, so existiert nach Definition zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$. Für jede komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ ist $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ eine $\mathfrak{T}\{\lambda f(x), |\lambda|\,\varepsilon\}$. Also ist $\lambda f \in R$.

Sind $f, g \in R$ und bilden die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$, die Mengen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ eine $\mathfrak{T}\{g(x), \varepsilon\}$, so bilden die Mengen $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_j$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ eine $\mathfrak{T}\{f(x) + g(x), 2\varepsilon\}$. Also folgt $f + g \in R$.

R ist also ein linearer Raum.

---

[1] Ist $D = \{D_{\varrho\sigma}\}$ eine Matrix, so setzen wir $|D| = \sqrt{\sum_{\varrho,\sigma} |D_{\varrho\sigma}|^2}$.

Nun sei $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine gleichmässig konvergente Folge fastperiodischer Funktionen auf $\mathfrak{H}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir ein n mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{H}.$$

Ist dann $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine $\mathfrak{T}\{f_n(x), \varepsilon/3\}$, so folgt aus

$$c' x d', \; c' y d' \in \mathfrak{A}_i$$

offenbar

$$|f(cxd) - f(cyd)| \leqq |f(cxd) - f_n(cxd)| + |f_n(cxd) - f_n(cyd)| + |f_n(cyd) - f(cyd)|$$
$$\leqq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

d. h. es ist $\mathfrak{T}\{f_n(x), \varepsilon/3\}$ eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ und folglich ist $f \in R$.

Es möge noch erwähnt werden, dass mit $f, g \in R$ auch $f \cdot g \in R$ gilt. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass jede fastperiodische Funktion beschränkt ist.

Satz 5. *Ist $f(x)$ fastperiodisch und sind a, b beliebige Elemente aus $\mathfrak{H}$, so ist $f(axb)$ fastperiodisch.*

Beweis: Es braucht nur bemerkt zu werden, dass jede $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ auch eine $\mathfrak{T}\{f(axb), \varepsilon\}$ ist.

Wir erklären nun im Bereich R aller fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{H}$ eine Transformation T_a (mit $a \in \mathfrak{H}$) durch

$$T_a f(x) = f(xa). \tag{1}$$

Wegen Satz 5 geht bei Anwendung von T_a der Raum R in sich über. Es ist aber zunächst nicht ausgeschlossen, dass die Menge $T_a R$, bestehend aus allen $f(xa)$, eine echte Teilmenge von R ist. Offenbar ist

$$T_a(\lambda f + \mu g) = \lambda T_a f + \mu T_a g.$$

Die Transformationen T_a sind also lineare Transformationen von R.

Wenn man wie üblich das Produkt zweier Transformationen T_a, T_b durch

$$(T_a T_b) f = T_a(T_b f)$$

erklärt, so gilt offenbar

$$T_a T_b = T_{ab},$$

d. h. die Menge aller T_a bildet eine zu $\mathfrak{H}$ homöomorphe Halbgruppe $\hat{\mathfrak{H}}$. Wenn $a \neq b$, so braucht nicht notwendig $T_a \neq T_b$ zu sein. Wenn aber $T_a = T_b$ ist, so folgt aus (1) für jedes fastperiodische $f(x)$

$$f(a) = T_a f(1) = T_b f(1) = f(b).$$

Wir nennen eine Halbgruppe *maximalfastperiodisch*, wenn zu je zwei verschiedenen Elementen $a, b \in \mathfrak{H}$ eine fastperiodische Funktion $f(x)$ mit $f(a) \neq f(b)$ existiert. In einer solchen Halbgruppe folgt aus $a \neq b$ notwendig $T_a \neq T_b$.

Satz 6. *Die Transformationen*

$$T_a f(x) = f(xa)$$

bilden eine zu $\mathfrak{H}$ homöomorphe Halbgruppe $\hat{\mathfrak{H}}$ von linearen Transformationen von R in sich. Ist $T_a = T_b$, so ist für jede fastperiodische Funktion

$$f(a) = f(b).$$

Wenn $\mathfrak{H}$ maximalfastperiodisch ist, so sind $\mathfrak{H}$ und $\hat{\mathfrak{H}}$ isomorph: $\mathfrak{H} \cong \hat{\mathfrak{H}}$.

§ 2. Minimalteilungen.

In der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer Gruppe hat sich der Begriff der minimalen Teilungen $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ bewährt. Ein analoger Begriff spielt im Falle der Halbgruppen eine fundamentale Rolle.

Definition: Ist $f(x)$ fastperiodisch und ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgebene Zahl, so heisst ein System von endlich vielen Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$ eine *Teilung* $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1) Es ist

$$\mathfrak{A}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_n = \mathfrak{H}.$$

2) Für beliebige $c, d \in \mathfrak{H}$ und beliebige x, y, welche beide in dem gleichen $\mathfrak{A}_i$ liegen, gilt

$$|f(c a_0 x b_0 d) - f(c a_0 y b_0 d)| \leqq \varepsilon.$$

3) Falls für gewisse $c', d', x, y \in \mathfrak{H}$ und für gewisses $\mathfrak{A}_i$

$$c' x d', \; c' y d' \in \mathfrak{A}_i$$

gilt, so soll

$$|f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon$$

folgen.

Ist $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$ und gilt für jede andere Teilung

$$\mathfrak{T}\{f(x), a_0', b_0', \varepsilon\},$$

bestehend aus den Teilen $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_{n'}'$, dass $n' \geqq n$ ist, so heisst $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$ eine *Minimalteilung.*

Satz 1. *Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ besitzt zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$.*

Beweis: Jede $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ (siehe Definition in § 1) ist eine $\mathfrak{T}\{f(x), 1, 1, \varepsilon\}$, wie man sofort nachprüft. Es existieren also sicher Teilungen $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$. Unter ihnen gibt es sicher solche Teilungen mit einer kleinsten Anzahl n von Teilen $\mathfrak{A}_i$.

Die Elemente eines jeden Teiles $\mathfrak{A}_i$ einer Minimalteilung liegen in gewissem Sinne „relativ dicht in $\mathfrak{H}$“. Das bringt mit sich, dass jeder Teil $\mathfrak{A}_i$ sich quer durch die gesamte Halbgruppe erstreckt. Dies ist die Aussage unsres

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$. Dann gilt für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$ und beliebiges $i = 1, \ldots, n$*

$$\mathfrak{A}_i \cap a\,\mathfrak{H}\,b \neq 0.$$

Beweis: Um den in der Einleitung formulierten kombinatorischen Hilfssatz anwenden zu können, gehen wir von unsrer Minimalteilung $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ aus und bilden die Mengen

$$\mathfrak{B}_1 = a\,a_0\,\mathfrak{A}_1\,b_0\,b, \ldots, \mathfrak{B}_n = a\,a_0\,A_n\,b_0\,b. \tag{1}$$

Wir werden zeigen, dass eine Permutation j_i der Zahlen $i = 1, \ldots, n$ existiert, so dass

$$\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_{j_i} \neq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

ist. Wenn dies bewiesen ist, so folgt unser Satz sofort aus der Bemerkung

$$\mathfrak{B}_{j_i} \subset a\,\mathfrak{H}\,b \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Es werden irgendwelche $\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_r}$ ausgewählt. Die übrigen Mengen (1) seien $\mathfrak{B}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_n}$. Jetzt suchen wir alle $\mathfrak{A}_j$ auf, für die

$$(\mathfrak{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_{i_r}) \cap \mathfrak{A}_j \neq 0$$

ist. Wir finden etwa $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_s}$. Wenn wir zeigen können, dass, von welchen Mengen $\mathfrak{B}$ auch immer man ausgeht, stets $s \geqq r$ ist, so kann der kombinatorische

Hilfssatz angewandt werden, und es folgt die Existenz einer Permutation j_i, so dass (2) richtig ist.

Um $r \geqq s$ zu zeigen, beachten wir zunächst, dass

$$\mathfrak{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_{i_r} \subset \mathfrak{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{A}_{j_s}. \tag{3}$$

Nun werden gewisse s Teilmengen $\mathfrak{C}_\nu$ erklärt durch:

$$x \in \mathfrak{C}_\nu \text{ dann und nur dann, wenn } a\,a_0\,x\,b_0\,b \in \mathfrak{A}_{j_\nu}.$$

Das System von Mengen

$$\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s, \ \mathfrak{A}_{i_{r+1}}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_n} \tag{4}$$

ist nun eine $\mathfrak{T}\{f(x), a_0 a a_0, b_0 b b_0, \varepsilon\}$. Wir zeigen z. B., dass

$$\mathfrak{C}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{C}_s \cup \mathfrak{A}_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_n} = \mathfrak{H}.$$

Es ist

$$\mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r} \cup \mathfrak{A}_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_n} = \mathfrak{H}.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\mathfrak{A}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_{i_r} \subset \mathfrak{C}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{C}_s.$$

Sei also $x \in \mathfrak{A}_{i_\mu}$. Dann ist

$$a\,a_0\,x\,b_0\,b \in \mathfrak{B}_{i_\mu}$$

und folglich wegen (3) für geeignetes ν

$$a\,a_0\,x\,b_0\,b \in \mathfrak{A}_{j_\nu},$$

d. h. es ist

$$x \in \mathfrak{C}_\nu.$$

Die andren beiden Bedingungen, welche die Mengen (4) definitionsgemäss erfüllen müssen, damit sie eine $\mathfrak{T}\{f(x), a_0 a a_0, b_0 b b_0, \varepsilon\}$ bilden, lassen sich ebenfalls ganz leicht untersuchen (siehe [4]).

Da die $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Minimalteilung bilden, muss notwendig

$$s + n - r \geqq n,$$

also

$$s \geqq r$$

sein. Genau dies war noch nachzuweisen.

Die soeben erhaltenen Resultate können dazu dienen, die Existenz eines Integralmittelwertes $M_x\{f(x)\}$ für jede auf einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ fastperiodische Funktion $f(x)$ zu beweisen (siehe [4]). Dieser Integralmittelwert hat alle Eigenschaften, die man vernünftigerweise erwarten kann. Insbesondere gilt auch $M_x\{f(x)\} > 0$, falls $f(x) \geqq 0$ und $f(x) \not\equiv 0$. Ich gehe auf die Mittelwerttheorie nicht ein, da wir sie nicht benötigen werden.

Es soll nun der Begriff der Minimalteilung einer etwas genaueren Betrachtung unterzogen werden. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz, der auch an sich interessant ist.

Satz 3. *Gilt für die fastperiodische Funktion $f(x)$, geeignete feste Elemente $a, b \in \mathfrak{H}$ und für die Zahl $\varepsilon > 0$*

$$|f(axb)| \leqq \varepsilon \qquad x \text{ beliebig} \in \mathfrak{H},$$

so gilt auch

$$|f(x)| \leqq \varepsilon \qquad x \text{ beliebig} \in \mathfrak{H}.$$

Beweis: Es sei $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig vorgegeben, weiter sei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine minimale $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \bar{\varepsilon}\}$. Dann existieren nach Satz 2 zu jedem festen, aber beliebigem $x \in \mathfrak{H}$ ein Element h_i und eine Teilmenge $\mathfrak{A}_i$, so dass

$$x, h_i \in \mathfrak{A}_i \qquad h_i = a h_i' b.$$

Für das betreffende x haben wir dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqq |f(x) - f(h_i)| + |f(a h_i' b)| \\ &\leqq \quad \bar{\varepsilon} \quad + \quad \varepsilon \end{aligned}$$

Da $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig war, so folgt die Behauptung.

Satz 4. *Ist $f(x)$ fastperiodisch auf $\mathfrak{H}$, so ist jede minimale $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), 1, 1, \varepsilon\}$.*

Beweis: Besteht die minimale $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$ aus den Teilen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, so gilt wegen der Bedingung 2 in der Definition dieses Paragraphen für $x, y \in \mathfrak{A}_i$ und beliebige $c, d \in \mathfrak{H}$

$$|f(c a_0 x b_0 d) - f(c a_0 y b_0 d)| \leqq \varepsilon. \tag{5}$$

Wir müssen zeigen, dass diese Ungleichung richtig bleibt, falls $a_0 = b_0 = 1$ gesetzt wird. Zu diesem Zwecke halten wir in $f(c a_0 x b_0 d) - f(c a_0 y b_0 d)$ zunächst die Elemente x, y, a_0, b_0, d fest und fassen diesen Ausdruck als fastperiodische Funktion von c auf. Aus Satz 3 folgt dann, dass man in (5) $a_0 = 1$ setzen darf. Entsprechend zeigt man, dass $b_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Das Resultat des Satz 4 ist recht merkwürdig. Es zeigt nachträglich, dass man die minimalen Teilungen auch etwas einfacher als Teilungen $\mathfrak{T}\{f(x), 1, 1, \varepsilon\}$ hätte erklären können, die aus möglichst wenig Teilen $\mathfrak{A}_i$ bestehen. Jedoch wäre man bei dieser Definition beim Beweis des Satzes 2 auf Schwierigkeiten gestossen.

Es mag an dieser Stelle noch erwähnt werden, dass sich die Theorie der fastperiodischen Funktionen natürlich auch dann durchführen lässt, wenn man nicht verlangt, dass die Halbgruppe ein 1-Element enthält. Bei der Definition von „fastperiodisch" müsste man dann nur die Teilungen $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ durch Teilungen $\mathfrak{T}\{f(x), a_0, b_0\, \varepsilon\}$ ersetzen. Der Satz 4 zeigt, dass man dieselben Funktionen als fastperiodisch erhält, wenn man verlangt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{T}\{f(x), 1, 1, \varepsilon\}$ existieren soll; d. h. in Bedingung 2 auf S. 39 dürfen a_0 und b_0 fortgelassen werden.

Mit Hilfe der Sätze 2 und 4 beweisen wir einen Satz, welchen wir bei den weiteren Erörterungen ständig verwenden werden.

Satz 5. *Ist $f(x)$ eine auf $\mathfrak{H}$ fastperiodische Funktion, und sind $\varepsilon > 0$ sowie $x, a, b \in \mathfrak{H}$ willkürlich, aber fest gewählt, so existiert ein x', für das*

$$|f(cxd) - f(cax'bd)| \leqq \varepsilon \tag{6}$$

bei beliebigen $c, d \in \mathfrak{H}$ richtig ist.

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Minimalteilung $\mathfrak{T}\{f(x), 1, 1, \varepsilon\}$ (man beachte Satz 4!). Das x liegt in einem $\mathfrak{A}_i$. In diesem $\mathfrak{A}_i$ existiert nach Satz 2 ein Element $ax'b$. Aus der Bedingung 2 der Definition dieses Paragraphen folgt (6).

§ 3. Konstruktion einer Hilfsfunktion.

Wäre $\mathfrak{H}$ eine Gruppe und $f(x)$ eine Funktion auf $\mathfrak{H}$, so könnte man ohne weiteres die Funktion

$$f(xy^{-1}) = f(x, y) \tag{1}$$

bilden. Diese Tatsache wird in der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen kräftig ausgenutzt, und zwar vor allem bei der Definition der Faltung zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Man setzt bekanntlich

$$f \times g(x) = M_y\{f(xy^{-1})\, g(y)\}.$$

Wenn aber $\mathfrak{H}$ keine Gruppe ist, so kann man nicht ohne weiteres y^{-1} bilden und folglich weder $f(xy^{-1})$ noch die Faltung $f \times g$ erklären.

Jedoch ist es möglich, auf jeder Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen $x, y \in \mathfrak{H}$ anzugeben, welche dieselben formalen Eigenschaften wie (1) hat, nämlich:

1) $f(x, y)$ ist fastperiodische Funktion von x für jedes feste y.

2) $f(x, 1) = f(x)$ für alle x

3) $f(xa, ya) = f(x, y)$ für alle x, y, a.

Wir werden in diesem Paragraphen die Existenz einer solchen Funktion beweisen. Ausserdem zeigt sich, dass sie durch ihre 3 Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Zunächst konstruieren wir, ausgehend von der fastperiodischen Funktion $f(x)$ eine Funktion $f_\varepsilon(x, y)$, die für jedes $\varepsilon > 0$ näherungsweise die geforderten Eigenschaften besitzt. Wir halten y fest und wählen für jedes $\varepsilon > 0$ ein y', sodass für alle $c, d \in \mathfrak{H}$

$$|f(cd) - f(cyy'd)| \leqq \varepsilon. \tag{2}$$

Ein solches y' existiert; dies entnimmt man § 2 Satz 5. (Man hat dort $x = 1$, $a = y$, $b = 1$ zu setzen, dann ist $y' = x'$.) Wir erklären nun

$$f_\varepsilon(x, y) = f(xy'). \tag{3}$$

Zwar ist y' an sich nicht eindeutig bestimmt, nachdem wir aber y' gemäss (2) zu jedem $\varepsilon > 0$ hinzugewählt haben, ist $f_\varepsilon(x, y)$ für jedes y eine wohlbestimmte fastperiodische Funktion von x (§ 1 Satz 5).

Satz 1. *Es ist für beliebige* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$·

$$|f_{\varepsilon_1}(x, y) - f_{\varepsilon_2}(x, y)| \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Beweis: Es sei etwa

$$f_{\varepsilon_1}(x, y) = f(xy_1') \qquad f_{\varepsilon_2}(x, y) = f(xy_2').$$

Wir wenden § 2 Satz 5 an, indem wir dort ε durch ein beliebiges $\bar{\varepsilon} > 0$, a und c durch 1, b durch y und schliesslich d einmal durch y_1' und das andere mal durch y_2' ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}|f(xy_1') - f(xy_2')| &\leqq |f(xy_1') - f(x'yy_1')| + |f(x'yy_1') - f(x')| \\ &\quad + |f(x') - f(x'yy_2')| + |f(x'yy_2') - f(xy_2')| \\ &\leqq \bar{\varepsilon} + |f(x'yy_1') - f(x')| + |f(x') - f(x'yy_2')| + \bar{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Hierin ist nun

$$|f(x'yy_1') - f(x')| \leqq \varepsilon_1$$

wegen (2) (man hat $d = 1$ und $c = x'$ zu setzen). Entsprechend ergibt sich

$$|f(x') - f(x'yy_2')| \leqq \varepsilon_2.$$

Insgesamt also

$$|f(xy_1') - f(xy_2')| \leqq 2\,\bar{\varepsilon} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Hierin ist $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig, es folgt somit unser Satz.

Satz 2. *Die Funktionen $f_\varepsilon(x, y)$ konvergieren für $\varepsilon \to 0$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion*

$$f(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x, y).$$

Es ist $f(x, y)$ bei festem $y \in \mathfrak{H}$ eine fastperiodische Funktion von x.

Beweis: Dass die Folge gleichmässig konvergiert, entnehmen wir dem Satz 1. Die Fastperiodizität von $f(x, y)$ folgt aus § 1 Satz 4.

Satz 3. *Es ist*

$$f(x, 1) = f(x).$$

Beweis: Aus der Definition (2) von y', angewandt auf den Fall $y = 1$ und aus (3) folgt sofort

$$|f_\varepsilon(x, 1) - f(x)| = |f(xy') - f(x)| \leqq \varepsilon.$$

Lässt man ε gegen 0 gehen, so folgt die Behauptung.

Satz 4. *Es ist*

$$f(xa, ya) = f(x, y).$$

Beweis: Es sei für $\varepsilon > 0$ etwa

$$f_\varepsilon(xa, ya) = f(xa(ya)') \qquad f_\varepsilon(x, y) = f(xy').$$

Wir wenden § 2 Satz 5 an und zwar setzen wir $c = 1$, ebenso das in diesem Satz auftretende $a = 1$, $b = y$ und d einmal $= a(ya)'$, das andre mal $= y'$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |f(xa(ya)') - f(xy')| &\leqq |f(xa(ya)') - f(x'ya(ya)')| \\ &\quad + |f(x'ya(ya)') - f(x')| + |f(x') - f(x'yy')| \\ &\quad + |f(x'yy') - f(xy')| \\ &\leqq \varepsilon + |f(x'ya(ya)') - f(x')| + |f(x') - f(x'yy')| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Definition (2) von y' für $c = x'$ und $d = 1$

$$|f(x') - f(x'yy')| \leqq \varepsilon.$$

Ganz entsprechend folgt

$$|f(x') - f(x'ya(ya)')| \leqq \varepsilon.$$

Insgesamt finden wir

$$|f_\varepsilon(xa,\ ya) - f_\varepsilon(x,\ y)| = |f(xa(ya)') - f(xy')| \leqq 4\varepsilon.$$

Lässt man ε gegen Null streben, so folgt unser Satz.

Wir haben jetzt also gezeigt, dass zu jeder fastperiodischen Funktion $f(x)$ eine Funktion $f(x, y)$ existiert, welche die am Anfang dieses Paragraphen geforderten Eigenschaften besitzt. Wir wollen jetzt zeigen, dass $f(x, y)$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Dazu leiten wir zunächst einen allgemeinen Satz her.

Satz 5. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ fastperiodische Funktionen auf $\mathfrak{H}$ und existiert ein $y \in \mathfrak{H}$, so dass*

$$f(xy) = g(xy) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{H},$$

so ist

$$f(x) = g(x).$$

Beweis: Wir geben $\varepsilon > 0$ beliebig vor und wenden § 2 Satz 5 mit $a = c = d = 1$ und $b = y$ an auf die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Wir finden

$$|h(x)| = |h(x) - h(x'y)| \leqq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass $h(x) \equiv 0$ ist und also ergibt sich unsere Behauptung.

Satz 6. *Ist $f(x)$ eine fastperiodische Funktion, so existiert eine Funktion $f(x, y)$, welche folgende Eigenschaften hat:*

1) *$f(x, y)$ ist fastperiodisch in x für jedes y.*
2) *$f(x, 1) = f(x)$.*
3) *$f(xa, ya) = f(x, y)$.*

$f(x, y)$ ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Existenzaussage ist durch die Sätze 2, 3, 4 bereits als richtig erkannt. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an, $\varphi(x, y)$ sei irgend eine Funktion, welche dieselben drei Eigenschaften wie $f(x, y)$ besitzt. Halten wir dann y fest, so gilt

$$\varphi(xy,\ y) = \varphi(x,\ 1) = f(x) = f(x,\ 1) = f(xy,\ y).$$

Wegen Satz 5 ist also

$$\varphi(x,\ y) = f(x,\ y)$$

w. z. b. w.

Als Anwendung der Eindeutigkeitsaussage des Satzes 6 leiten wir einen Hilfssatz her, der für spätere Zwecke nützlich sein wird.

Satz 7. *Gilt für zwei fastperiodische Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$

$$|f(x) - g(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{H},$$

so ist auch

$$|f(x, y) - g(x, y)| \leqq \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{H}.$$

Beweis: Wir setzen

$$f(x) - g(x) = h(x).$$

Wegen Satz 6 ist

$$f(x, y) - g(x, y) = h(x, y).$$

Gemäss Definition von $h(x, y)$ gilt

$$h(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} h(x y').$$

Folglich ist $|h(x, y)| \leqq \varepsilon$, w. z. b. w.

Wir sind nun in die Lage versetzt, die Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen auf verschiedenste Weise zu Ende führen zu können. Beispielsweise kann man ($f(x, y)$ ist auch in y fastperiodisch!)

$$f \times g(x) = M_y\{f(x, y)\, g(y)\}$$

setzen. Man führt nun die gesamte Theorie genau so durch, wie es im Falle der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen üblich ist. Man zeigt, dass die fastperiodischen Funktionen ein hyperkomplexes System über dem Körper der komplexen Zahlen (mit im allgemeinen nicht abzählbarer Basis) bilden, wenn man die Addition durch $f + g$ und die Multiplikation durch $f \times g$ erklärt. Man zerlegt dieses System in minimale (abgeschlossene) Rechtsideale und zeigt, dass diese sämtlich eine endliche Basis besitzen. Damit ist alles wesentliche geleistet. Bezüglich Einzelheiten verweise ich auf [3] oder irgendwelche Abhandlungen über fastperiodische Funktionen auf Gruppen. Die geringfügigen Modifikationen, welche bei der Übersetzung der bekannten Beweise in die Sprache der Halbgruppen angebracht werden müssen, bereiten keinerlei Schwierigkeiten.

Eine andere Möglichkeit, die Theorie durchzuführen, beruht auf folgender Bemerkung. Die Funktion $f(x, y)$ ist nicht nur fastperiodisch in x und in y, vielmehr ist $f(x, y)$ auch fastperiodisch als Funktion der Elemente (x, y) der Halbgruppe $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit, dass der Operator

$$u(x) \to M_y\{f(x, y)\, u(y)\}$$

vollstetig ist. Somit kann man die allgemeine von Rellich [1] angegebene Theorie vollstetiger Operatoren in Anwendung bringen. Dass sich die Eigenfunktionen des Operators durch die Koeffizienten unitärer Darstellungen $D(x) = \{D_{\varrho\sigma}(x)\}$ der Halbgruppe linear kombinieren lassen, folgt sofort aus der Invarianz $f(xa, ya) = f(x, y)$ unsrer Funktion $f(x, y)$.

Wir wollen keinen dieser beiden Wege weiter verfolgen, vielmehr werden wir alle Hauptsätze über fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen aus den entsprechenden Sätzen über fastperiodische Funktionen auf Gruppen herleiten. Damit werden wir dann nicht nur dieselben Resultate erhalten haben wie sie die oben angedeuteten Theorien liefern, wir werden vielmehr darüber hinausgehend auch erkennen, in welcher Beziehung die fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen zu solchen auf Gruppen stehen.

§ 4. Die zu einer Halbgruppe gehörige Gruppe.

In § 1 haben wir erkannt, dass den Transformationen

$$T_a f(x) = f(xa)$$

der Menge R aller auf $\mathfrak{H}$ fastperiodischen Funktionen in sich eine zu $\mathfrak{H}$ homöomorphe Halbgruppe $\hat{\mathfrak{H}}$ von linearen Transformationen bilden. Wir zeigen nun

Satz 1. *Die linearen Transformationen $T_a \in \hat{\mathfrak{H}}$ sind umkehrbareindeutige Abbildungen von R auf sich.*

Beweis: Es genügt, festzustellen, dass eine beliebig vorgegebene Funktion $f(x) \in R$ als Bild der Funktion $f(x, a)$ bei der Abbildung T_a aufgefasst werden kann:

$$T_a f(x, a) = f(xa, a) = f(x, 1) = f(x).$$

Gäbe es ausser $f(x, a)$ eine Funktion $\varphi(x)$, für die ebenfalls

$$T_a \varphi(x) = \varphi(xa) = f(x)$$

gilt, so müsste doch nach § 3 Satz 5

$$\varphi(x) = f(x, a)$$

sein.

Satz 2. *Die Elemente $T_a \in \hat{\mathfrak{H}}$ erzeugen eine Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ von linearen Transformationen von R auf sich. Diese Gruppe heisse die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Gruppe.*

Beweis: Die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von R auf sich bilden eine Gruppe, die wegen Satz 1 die Halbgruppe $\hat{\mathfrak{H}}$ umfasst. Offenbar ist $\hat{\mathfrak{G}}$ die kleinste ihrer Untergruppen, die $\hat{\mathfrak{H}}$ umfasst.

Aus Satz 2 lässt sich ein interessanter Schluss ziehen.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{H}$ maximalfastperiodisch, so kann $\mathfrak{H}$ in eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eingebettet werden. Man kann $\mathfrak{G}$ so wählen, dass $\mathfrak{G} \cong \hat{\mathfrak{G}}$.*

Beweis: Nach § 1 Satz 6 ist $\mathfrak{H} \cong \hat{\mathfrak{H}}$. Identifiziert man die Elemente von $\mathfrak{H}$ und $\hat{\mathfrak{H}}$, so umfasst die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ die Halbgruppe $\mathfrak{H}$.

Wir zeigen nun, dass in Hinblick auf die fastperiodischen Funktionen von $\mathfrak{H}$ die Halbgruppe $\hat{\mathfrak{H}}$ in $\hat{\mathfrak{G}}$ überall dicht liegt.

Satz 4. *Ist $f(x)$ eine fastperiodische Funktion auf $\mathfrak{H}$, ε eine beliebige Zahl > 0 und ist $T \in \hat{\mathfrak{G}}$, dann existiert eine Transformation $T' \in \hat{\mathfrak{H}}$ so dass*

$$|T f(x) - T' f(x)| \leqq \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in \mathfrak{H}.$$

Beweis: Weil $\hat{\mathfrak{H}}$ die Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ erzeugt, darf angenommen werden, dass

$$(1) \qquad T = T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \cdots T_{a_1} T_{b_1}^{-1} \qquad T_{a_i}, T_{b_i} \in \hat{\mathfrak{H}}.$$

Ist

$$T = T_a T_b^{-1},$$

so hat man

$$T f(x) = f(xa, b).$$

Aus der Definition in § 3 Satz 2 und aus § 3 (3) folgt, dass in $\mathfrak{H}$ ein b' existiert, so dass

$$|f(xa, b) - f(xab')| \leqq \varepsilon.$$

Also ist

$$|T_a T_b^{-1} f(x) - T_a T_{b'} f(x)| \leqq \varepsilon.$$

In diesem Falle hat man also $T' = T_a T_{b'}$ zu setzen.

Unser Satz wird nun durch Induktion nach n bewiesen. Es sei also unser Satz für alle $\varepsilon > 0$ und alle $T = T_{a_{n-1}} T_{b_{n-1}}^{-1} \cdots T_{a_1} T_{b_1}^{-1}$ bewiesen. Wir zeigen jetzt, dass er auch für solche $T \in \hat{\mathfrak{G}}$, welche die Gestalt (1) haben, richtig ist. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist es nach Voraussetzung möglich, in $\hat{\mathfrak{H}}$ ein Element T_0 so zu bestimmen, dass

$$(2) \qquad \left| T_{a_{n-1}} T_{b_{n-1}}^{-1} \cdots T_{a_1} T_{b_1}^{-1} f(x) - T_0 f(x) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad T_0 \in \hat{\mathfrak{H}}.$$

Jetzt werde ein $T_1 \in \hat{\mathfrak{H}}$ derart ausgewählt, dass

$$(3) \qquad \left| T_{a_n} T_{b_n}^{-1} (T_0 f(x)) - T_1 (T_0 f(x)) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen $T_1 T_0 = T'$ und haben

$$\begin{aligned}(4)\qquad |Tf(x) - T'f(x)| \leqq &\left| T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \left(T_{a_{n-1}} T_{b_{n-1}}^{-1} \cdots T_{a_1} T_{b_1}^{-1} f(x) \right) - T_{a_n} T_{b_n}^{-1} (T_0 f(x)) \right| \\ &+ \left| T_{a_n} T_{b_n}^{-1} T_0 f(x) - T' f(x) \right|.\end{aligned}$$

Setzt man

$$T_{a_{n-1}} T_{b_{n-1}}^{-1} \cdots T_{a_1} T_{b_1}^{-1} f(x) = \varphi(x), \quad T_0 f(x) = \psi(x),$$

so folgt aus (2)

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Offenbar ist

$$T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \varphi(x) = \varphi(x a_n, b_n)$$

$$T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \psi(x) = \psi(x a_n, b_n).$$

Aus § 3 Satz 7 entnehmen wir also

$$\left| T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \varphi(x) - T_{a_n} T_{b_n}^{-1} \psi(x) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Benutzen wir noch (3), so folgt aus (4)

$$|Tf(x) - T'f(x)| \leqq \varepsilon \qquad\qquad T' \in \hat{\mathfrak{H}}$$

w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satz ziehen wir sofort eine Folgerung.

Satz 5. *Wenn sich zwei fastperiodische Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ überall auf $\mathfrak{H}$ um höchstens ε unterscheiden*

$$|f(x) - g(x)| \leqq \varepsilon \qquad\qquad x \text{ beliebig } \in \mathfrak{H},$$

so gilt auch bei beliebigem $T \in \hat{\mathfrak{G}}$

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leqq \varepsilon.$$

Beweis: Da $T \in \hat{\mathfrak{G}}$ eine lineare Transformation ist, braucht nur $|T(f(x) - g(x))| \leqq \varepsilon$ gezeigt zu werden. Es sei nun $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig angenommen. Wir bestimmen dann gemäss Satz 4 ein $T' \in \hat{\mathfrak{H}}$, so dass

$$|T(f(x) - g(x)) - T'(f(x) - g(x))| \leqq \bar{\varepsilon}.$$

Sicherlich gilt der zu beweisende Satz für alle Transformationen aus $\hat{\mathfrak{H}}$. Deshalb können wir folgendermassen abschätzen

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leqq |T(f(x) - g(x)) - T'(f(x) - g(x))| + |T'f(x) - T'g(x)|$$
$$\leqq \tilde{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Weil $\tilde{\varepsilon}$ beliebig war, folgt unser Satz.

Ausgehend von einer beliebigen fastperiodischen Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{H}$ werden wir jetzt eine entsprechende fastperiodische Funktion auf der Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ erklären. Ist T ein beliebiges Element aus $\hat{\mathfrak{G}}$, so definieren wir zunächst durch

$$Tf(x) = \varphi(x)$$

eine Funktion $\varphi(x)$ und setzen

$$\hat{f}(T) = \varphi(1). \tag{5}$$

Statt dessen werden wir auch die Schreibweise

$$\hat{f}(T) = Tf(1)$$

benutzen.

Satz 6. *Die soeben, ausgehend von der auf $\mathfrak{H}$ fastperiodischen Funktion $f(x)$, für alle $T \in \hat{\mathfrak{G}}$ erklärte Funktion $\hat{f}(T) = Tf(1)$ ist auf der Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ fastperiodisch. Es ist $\hat{f}(T_x) = f(x)$ für jedes $T_x \in \hat{\mathfrak{H}}$.*

Beweis: Wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ Teilmengen $\hat{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{A}}_n$ von $\hat{\mathfrak{G}}$ existieren, welche folgende Eigenschaften haben:

α) Es ist $\hat{\mathfrak{A}}_1 \cup \cdots \cup \hat{\mathfrak{A}}_n = \hat{\mathfrak{G}}$.

β) Sind $U, V \in \hat{\mathfrak{G}}$ irgendwelche Elemente und gibt es ein i ($i = 1$ oder ... oder $= n$), so dass

$$U, V \in \hat{\mathfrak{A}}_i,$$

so ist für alle T

$$|\hat{f}(TU) - \hat{f}(TV)| \leqq \varepsilon.$$

Aus der Existenz solcher Überdeckungen $\hat{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{A}}_n$ von $\hat{\mathfrak{G}}$ folgt nach § 1 Satz 2 die Fastperiodizität von $\hat{f}$.

Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann bestimmen wir eine $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon/3\}$ bestehend aus den Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{H}$. Ist nun T irgendein Element aus $\hat{\mathfrak{G}}$, so wählen wir gemäss Satz 4 ein Element $T' \in \hat{\mathfrak{H}}$, so dass

$$|Tf(x) - T'f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Weil $T' \in \hat{\mathfrak{H}}$, gibt es ein $a \in \mathfrak{H}$, so dass

$$T' = T_a. \tag{7}$$

Wir setzen nunmehr fest, dass

(8) $$T \in \hat{\mathfrak{A}}_i, \text{ wenn } a \in \mathfrak{A}_i.$$

Offenbar ist die obige Forderung α) erfüllt:

$$\hat{\mathfrak{A}}_1 \cup \cdots \cup \hat{\mathfrak{A}}_n = \hat{\mathfrak{G}}.$$

Um nun auch die Forderung β) zu untersuchen, nehmen wir an, dass U, $V \in \hat{\mathfrak{A}}_i$. Dann bestimmen wir gemäss (6), (7) und (8) Elemente u, v der Halbgruppe $\mathfrak{H}$, welche in $\mathfrak{A}_i$ liegen, so dass

$$|U f(x) - T_u f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \qquad |V f(x) - T_v f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \qquad u, v \in \mathfrak{A}_i.$$

Es ergibt sich

$$|U f(x) - V f(x)| \leqq |U f(x) - T_u f(x)| + |f(xu) - f(xv)| + |T_v f(x) - V f(x)|$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Wegen Satz 5 ist dann auch für beliebige $T \in \hat{\mathfrak{G}}$

$$|T U f(x) - T V f(x)| \leqq \varepsilon.$$

Aus der Definition (5) von $\hat{f}$ folgt

$$|\hat{f}(T U) - \hat{f}(T V)| \leqq \varepsilon.$$

Also ist $\hat{f}$ fastperiodisch auf $\hat{\mathfrak{G}}$.

Die letzte Behauptung unsres Satzes erkennt man sofort als richtig, wenn man auf die Definition von $\hat{f}$ zurückgeht. Es sei $a \in \mathfrak{H}$ beliebig. Dann ist

$$\varphi(x) = T_a f(x) = f(x a)$$

und

$$\varphi(1) = \hat{f}(T_a) = f(a),$$

w. z. b. w.

Wir beweisen nun eine Art Umkehrung des Satzes 6.

Satz 7. *Ist $F(T)$ eine auf $\hat{\mathfrak{G}}$ fastperiodische Funktion, so ist*

$$f(x) = F(T_x) \qquad T_x \in \hat{\mathfrak{H}}$$

eine auf $\mathfrak{H}$ fastperiodische Funktion von x. Es ist

(9) $$F(T) = \hat{f}(T).$$

Beweis: Es sei $\hat{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{A}}_n$ eine $\mathfrak{T}\{F(T), \varepsilon\}$. Wir setzen fest:

$$x \in \mathfrak{A}_i \quad \text{wenn} \quad T_x \in \hat{\mathfrak{A}}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ist dann $c_0 x d_0$, $c_0 y d_0 \in \mathfrak{A}_i$, so gilt wegen § 1 Satz 1

$$\begin{aligned} |f(cxd) - f(cyd)| &= |F(T_{cxd}) - F(T_{cyd})| \\ &= \left|F\left(T_c T_{c_0}^{-1} T_{c_0 x d_0} T_{d_0}^{-1} T_d\right) - F\left(T_c T_{c_0}^{-1} T_{c_0 y d_0} T_{d_0}^{-1} T_d\right)\right| \\ &\leqq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $c, d \in \mathfrak{H}$. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Um auch die zweite herzuleiten, denken wir uns wieder die $T \in \hat{\mathfrak{G}}$ folgendermassen aufgeschrieben:

$$T = T_{x_n} T_{y_n}^{-1} \cdots T_{x_1} T_{y_1}^{-1} \qquad T_{x_i}, T_{y_i} \in \hat{\mathfrak{H}}.$$

Aus

$$f(x) = F(T_x)$$

können wir folgern, dass

$$f(x, y) = F(T_x T_y^{-1}). \tag{10}$$

Denn offenbar ist $F(T_x T_1^{-1}) = f(x)$, $F(T_{xa} T_{ya}^{-1}) = F(T_x T_y^{-1})$ und $F(T_x T_y^{-1})$ ist fastperiodische Funktion von x, weil $F(T T_y^{-1})$ fastperiodische Funktion von T ist. Aus § 3 Satz 6 folgt (10). Es ist aber

$$f(x, y) = T_y^{-1} f(x) = T_x T_y^{-1} f(1).$$

Wir haben also

$$F(T) = \hat{f}(T) \qquad \text{für } T = T_x T_y^{-1}$$

bewiesen. Nun wenden wir Induktion nach n an. Es sei also (9) bewiesen für alle fastperiodischen Funktionen F auf $\hat{\mathfrak{G}}$ und alle

$$T_n = T_{x_n} T_{y_n}^{-1} \cdots T_{x_1} T_{y_1}^{-1} \qquad \text{festes } n.$$

Offenbar ist $F(T T_n)$ fastperiodisch in T. Setzt man

$$\varphi(x) = F(T_x T_n),$$

so folgt unter zweimaliger Benutzung unsrer Induktionsannahme

$$\begin{aligned} F(T_x T_y^{-1} T_n) &= \hat{\varphi}(T_x T_y^{-1}) = T_x T_y^{-1} \varphi(1) = T_x T_y^{-1} F(T_n) \\ &= T_x T_y^{-1} \hat{f}(T_n) = T_x T_y^{-1} T_n f(1) \\ &= \hat{f}(T_x T_y^{-1} T_n) \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Wir haben also eingesehen, dass sich die fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{H}$ und auf $\hat{\mathfrak{G}}$ umkehrbareindeutig entsprechen.

Satz 8. *Man kann die fastperiodischen Funktionen f auf $\mathfrak{H}$ und F auf $\hat{\mathfrak{G}}$ umkehrbareindeutig so auf einander abbilden*

$$f(x) \longleftrightarrow F(T), \tag{11}$$

dass

$$F(T) = \hat{f}(T) \quad \textit{und} \quad f(x) = F(T_x)$$

wird. Die Abbildung (11) *ist eine lineare Transformation,* d. h.:

Ist $f \longleftrightarrow F$ und $g \longleftrightarrow G$, so gilt für beliebige komplexe Zahlen λ, μ

$$\lambda f + \mu g \longleftrightarrow \lambda F + \mu G.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass (11) eine lineare Transformation ist. Setzen wir etwa

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \varphi(x), \tag{12}$$

dann ist das Bild von $\varphi(x)$ bei der Abbildung (11) offenbar

$$\Phi(T) = \hat{\varphi}(T) = T\varphi(1).$$

Aus (12) folgt, da T eine lineare Transformation ist

$$\begin{aligned} T\varphi(1) &= \lambda T f(1) + \mu T g(1) \\ &= \lambda F(T) + \mu G(T). \end{aligned}$$

Also

$$\Phi(T) = \lambda F(T) + \mu G(T),$$

w. z. b. w.

§ 5. Die Hauptsätze.

Das wesentliche Ergebnis der Theorie fastperiodischer Funktionen im Falle der Halbgruppen wie auch bei Gruppen ist die Feststellung des Zusammenhangs zwischen fastperiodischen Funktionen und unitären Darstellungen. Bevor wir den in der Einleitung bereits formulierten Approximationssatz beweisen, soll ein Resultat über unitäre Darstellungen der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ hergeleitet werden, welches zwar nicht zum Beweis des Approximationssatzes voll benötigt wird, das aber zum Verständnis der vorliegenden Verhältnisse beitragen kann,

Satz 1. *Ist* $D(x) = \{D_{\varrho\sigma}(x)\}$ *eine unitäre Darstellung der Halbgruppe* $\mathfrak{H}$, *so ist* $\hat{D}(T) = \{\hat{D}_{\varrho\sigma}(T)\}$ *eine unitäre Darstellung von* $\hat{\mathfrak{G}}$ *und es gilt*

$$\hat{D}(T_x) = D(x).$$

Ist umgekehrt $\hat{D}(T)$ *eine unitäre Darstellung von* $\hat{\mathfrak{G}}$, *so ist* $D(x) = \hat{D}(T_x)$ *eine unitäre Darstellung von* $\mathfrak{H}$ *und es gilt, falls* $D(x) = \{D_{\varrho\sigma}(x)\}$

$$\{\hat{D}_{\varrho\sigma}(T)\} = \hat{D}(T).$$

Beweis: Nach § 1 Satz 3 sind die Koeffizienten $D_{\varrho\sigma}(x)$ einer unitären Darstellung $D(x)$ fastperiodische Funktionen auf $\mathfrak{H}$. Nach § 4 Satz 8 ist also

$$\hat{D}(T) = \{\hat{D}_{\varrho\sigma}(T)\} \qquad T \in \hat{\mathfrak{G}}$$

wohlbestimmt. Wir haben nur zu zeigen, dass die Matrizen $\hat{D}(T)$ eine Darstellung von $\hat{\mathfrak{G}}$ bilden, und dass diese Darstellung unitär ist. Offenbar ist nach § 4 Satz 8

$$\hat{D}(T_x) = \{\hat{D}_{\varrho\sigma}(T_x)\} = D(x) \qquad T_x \in \hat{\mathfrak{H}}.$$

Da $\hat{\mathfrak{H}}$ wegen § 1 Satz 6 zu $\mathfrak{H}$ homöomorph ist, folgt

$$\hat{D}(T_x)\,\hat{D}(T_y) = \hat{D}(T_x T_y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{H},$$

oder

$$\sum_{\nu} \hat{D}_{\varrho\nu}(T_x)\,\hat{D}_{\nu\sigma}(T_y) = \hat{D}_{\varrho\sigma}(T_x T_y). \tag{1}$$

Für festes $y \in \mathfrak{H}$ bedeutet (1) eine lineare Relation zwischen fastperiodischen Funktionen von x. Ersetzt man die T_x durch beliebige Elemente $S \in \hat{\mathfrak{G}}$, so muss, wegen § 4 Satz 8, diese Relation erhalten bleiben:

$$\sum_{\nu} \hat{D}_{\varrho\nu}(S)\,\hat{D}_{\nu\sigma}(T_y) = \hat{D}_{\varrho\sigma}(S T_y). \tag{2}$$

Bei festem S und variablem $y \in \mathfrak{H}$ bedeutet auch (2) wieder eine lineare Relation zwischen fastperiodischen Funktionen von y auf $\mathfrak{H}$. Wie eben erschliessen wir, dass wir die T_y durch beliebige $T \in \hat{\mathfrak{G}}$ ersetzen dürfen:

$$\sum_{\nu} \hat{D}_{\varrho\nu}(S)\,\hat{D}_{\nu\sigma}(T) = \hat{D}_{\varrho\sigma}(S T),$$

oder

$$\hat{D}(S)\,\hat{D}(T) = \hat{D}(S T) \qquad S, T \in \hat{\mathfrak{G}}.$$

Weil jedes $T \in \hat{\mathfrak{G}}$ in der Gestalt

$$T = T_{x_n} T_{y_n}^{-1} \cdots T_{x_1} T_{y_1}^{-1}$$

geschrieben werden kann, ist

$$\hat{D}(T) = D(x_n) D^{-1}(y_n) \ldots D(x_1) D^{-1}(y_1).$$

Alle Matrizen in dem Produkt der rechten Seite sind unitär, also ist auch die Darstellung $D(T)$ unitär.

Wenn andrerseits $\hat{D}(T)$ eine unitäre Darstellung von $\hat{\mathfrak{G}}$ ist, so ist offensichtlich $D(x) = \hat{D}(T_x)$ eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{H}$. Die soeben angestellten Überlegungen, welche zeigten, dass (wenn $D(x) = \{D_{\varrho\sigma}(x)\}$ und $T = T_{x_n} T_{y_n}^{-1} \cdots T_{x_1} T_{y_1}^{-1}$ angenommen wird)

$$\{\hat{D}_{\varrho\sigma}(T)\} = D(x_n) D^{-1}(y_n) \cdots D(x_1) D^{-1}(y_1)$$

ist, liefern uns nun wegen

$$D(x_n) D^{-1}(y_n) \cdots D(x_1) D^{-1}(y_1) = \hat{D}(T)$$

die letzte Behauptung unsres Satzes.

Wir beweisen nun den Hauptsatz der Theorie.

Satz 2. Approximationssatz. *Jede auf $\mathfrak{H}$ fastperiodische Funktion $f(x)$ lässt sich beliebig genau und gleichmässig durch Ausdrücke*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho, \sigma=1}^{s_i} \gamma_{i, \varrho\sigma} D_{i, \varrho\sigma}(x)$$

approximieren. Dabei bedeuten die $D_{i, \varrho\sigma}(x)$ die Koeffizienten geeigneter unitärer Darstellungen $D_i(x) = \{D_{i, \varrho\sigma}(x)\}$ von $\mathfrak{H}$ und die $\gamma_{i, \varrho\sigma}$ sind geeignete komplexe Zahlen.

Beweis: Wir bestimmen zu $f(x)$ gemäss § 4 Satz 8 die entsprechende Funktion $F(T)$ auf $\hat{\mathfrak{G}}$. Für den Fall fastperiodischer Funktionen auf Gruppen ist der Approximationssatz bereits bewiesen (siehe Einleitung). Es gibt also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gewisse unitäre Darstellungen $\hat{D}_1(T) = \{\hat{D}_{1, \varrho\sigma}(T)\}, \ldots, \hat{D}_n(T) = \{\hat{D}_{n, \varrho\sigma}(T)\}$ und komplexe Zahlen $\gamma_{i, \varrho\sigma}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \varrho, \sigma = 1, \ldots, s_i)$, so dass für alle $T \in \hat{\mathfrak{G}}$

$$\left| F(T) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho, \sigma=1}^{s_i} \gamma_{i, \varrho\sigma} \hat{D}_{i, \varrho\sigma}(T) \right| \leqq \varepsilon.$$

Dies gilt insbesondere für alle $T_x \in \hat{\mathfrak{H}}$. Wegen Satz 1 und § 4 Satz 8 ergibt sich für $T = T_x$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho, \sigma=1}^{s_i} \gamma_{i, \varrho\sigma} D_{i, \varrho\sigma}(x) \right| \leqq \varepsilon.$$

Dabei sind die $D_i(x) = \{D_{i, \varrho\sigma}(x)\}$ unitäre Darstellungen von $\mathfrak{H}$.

Nachdem wir den wichtigsten Satz unsrer Theorie nunmehr vollständig bewiesen haben, will ich über weitere Ergebnisse nur noch kurz berichten; ausführliche Beweise dürften deshalb unnötig sein, weil sich die Verhältnisse auf Halbgruppen von denen auf Gruppen fast garnicht unterscheiden.

Man sieht leicht, dass jede unitäre Darstellung einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in irreduzible Darstellungen aufgespalten werden kann (z. B. unter Benutzung von Satz 1 oder direkt, genau so wie bei Gruppen). Man kann also ein vollständiges System inäquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen

$$\ldots, D^{(\nu)}(x) = \{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)\}, \ldots$$

sich ein für alle mal bestimmt denken. Die diesen $D^{(\nu)}(x)$ gemäss Satz 1 entsprechenden Darstellungen $\hat{D}^{(\nu)}(T)$ von $\hat{\mathfrak{G}}$ sind dann ebenfalls irreduzibel und sie bilden ein vollständiges System irreduzibler inäquivalenter unitärer Darstellungen von $\hat{\mathfrak{G}}$.

Es wurde bereits in § 2 erwähnt, dass jede fastperiodische Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{H}$ einen Mittelwert $M_x\{f(x)\}$ besitzt. Offenbar gilt

$$M_x\{f(x)\} = M_T\{F(T)\}. \tag{3}$$

Man setzt

$$\alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} = M_x\left\{f(x)\,\overline{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)}\right\}$$

und nennt die Matrizen $A^{(\nu)} = \left\{\alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma}\right\}$ die *Fouriermatrizen* von $f(x)$. Die symbolische Summe

$$f(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum \alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x) \tag{4}$$

heisst die *Fourierreihe* von $f(x)$. Aus (3) folgt, dass $f(x)$ und $F(T)$ die gleichen Fouriermatrizen besitzen. Der Satz, dass $F(T)$ durch die Fouriermatrizen $A^{(\nu)}$ eindeutig bestimmt ist, überträgt sich sofort auf Halbgruppen. Die Fourierreihe (4) bestimmt die fastperiodische Funktion $f(x)$ eindeutig.

Auf Gruppen $\hat{\mathfrak{G}}$ gilt die *Vollständigkeitsrelation*, also

$$M_T\{|F(T)|^2\} = \sum s^{(\nu)} |A^{(\nu)}|^2.$$

Wegen (3) folgt sofort, dass auch auf Halbgruppen die Vollständigkeitsrelation

$$M_x\{|f(x)|^2\} = \sum s^{(\nu)} |A^{(\nu)}|^2$$

Gültigkeit hat.

Literaturangaben.

[1] Rellich, F.: Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. Math. Ann. **110**. 342—356 (1934). — Über die v. Neumannschen fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe. Math. Ann. **111**. 560—567 (1935).

[2] v. Neumann, I.: Almost periodic functions in a group I. Trans. A. M. S. **36**. 445—492 (1934).

[3] Maak, W.: Fastperiodische Funktionen. Berlin (1950).

[4] ——: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. Crelle (1951).