BEMERKUNGEN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS FÜR SPEZIELLE RÄNDER.

Von

ERWIN FEHLBERG

in FRANKFURT (MAIN).

I. Einleitung.

Den folgenden Untersuchungen werde die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ in ihrer Normalform:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)\, z = d(x, y) \tag{1}$$

zugrunde gelegt.

Zur Lösung des Dirichletschen Problems für diese Differentialgleichung wird die Picardsche Iterationsmethode benutzt, die hier als bekannt vorausgesetzt werde. Die Picardsche Iterationsmethode lässt sich, was im folgenden gezeigt werden soll, bequem numerisch handhaben, wenn man in der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e(x, y), \tag{2}$$

auf die man bei dem Iterationsverfahren stets geführt wird, sowohl für $e(x, y)$ als auch für die gesuchte Lösung $z(x, y)$ eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Doppelreihe ansetzt.

Durch eine lineare Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 \cdot \xi + m_2 \\ y &= m_3 \cdot \eta + m_4 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

kann man stets erreichen, dass der dem Dirichletschen Problem zugrunde liegende Rand in der (ξ, η)-Ebene nicht über das Quadrat $-1 \leqq {\xi \atop \eta} \leqq +1$ hinausragt. Durch die Transformation (3) wird aus (2) eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + A \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = f(\xi, \eta), \tag{4}$$

in der A eine positive (reelle) Konstante bedeutet.

Wir setzen für das Folgende stets voraus, dass $f(\xi, \eta)$ sowie $z(\xi, \eta)$ auf dem Quadrat $-1 \leqq \begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix} \leqq +1$ hinreichend stetig und glatt sind, um die Konvergenz der nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Doppelreihen:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i,k} F_{ik} P_i(\xi) P_k(\eta) \tag{5}$$

bzw.

$$z(\xi, \eta) = \sum_{i,k} Z_{ik} P_i(\xi) P_k(\eta) \tag{6}$$

auf diesem Quadrat zu gewährleisten.

Weiter setzen wir voraus, dass die Lösung des Dirichletschen Problems für unsere Differentialgleichung eindeutig sei. Dies ist bekanntlich stets der Fall, wenn der Koeffizient $c(x, y)$ in (1) in dem von dem Rand umschlossenen Bereich der (x, y)-Ebene nirgends positiv ist.[1]

Wir werden im folgenden das Dirichletsche Problem für den Rechteck- und für den Ellipsenrand behandeln. Für diese Randformen, die auch in den Anwendungen häufig auftreten, werden die Entwicklungskoefficienten Z_{ik} der gesuchten Lösung explizit berechnet werden. Und zwar ergeben sich die Z_{ik} als Lösung eines linearen Gleichungssystems, das man durch Einsetzen von (5) und (6) in (4) unter Hinzunahme der Randbedingungen erhält.

II. Die aus der Differentialgleichung resultierenden Bedingungsgleichungen für die Z_{ik}.

In (6) ist noch offen geblieben, wieviel Glieder die Doppelreihe umfassen soll, d.h. nach wieviel Gliedern wir die (konvergente) Doppelreihe abbrechen können, um eine genügend genaue Näherung der gesuchten Lösung zu erhalten. Diese Frage lässt sich offenbar nicht allgemein beantworten, da die erforderliche Gliederzahl bei vorgeschriebener Genauigkeit natürlich von der rechten Seite in (4) sowie von den längs der geschlossenen Randkurve vorgegebenen Randwerten der gesuchten Lösung abhängt. Wir wollen annehmen, dass man in der Doppelreihe (5) für die rechte Seite von (4) die Indizes i und k beide nur von 0 bis n laufen zu lassen braucht, um eine genügend genaue Annäherung von $f(\xi, \eta)$ durch die Doppelreihe zu erhalten. Die Doppelreihe (5) umfasst dann $(n+1)^2$ Glieder. In der Dopelreihe (6) für die gesuchte Lösung

[1] Vgl. z. B. E. GOURSAT: Cours d'analyse III, Seite 520 ff., Paris 1942.

wollen wir dann i und k beide von 0 bis $n+2$ laufen lassen, so dass (6) dann $(n+3)^2$ Glieder umfasst. Unsere gesuchte Lösung ist dann durch die $(n+3)^2$ Legendreschen Koeffizienten Z_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n+2)$ charakterisiert.

Wir gehen nun unter diesen Annahmen über die Gliederzahl mit den Doppelreihen (5) und (6) in die Differentialgleichung (4) ein und erhalten, wenn wir auf der linken Seite von (4) dann die zweiten Ableitungen der Legendreschen Polynome wieder durch diese selbst (linear und homogen) ausdrücken, durch Koeffizientenvergleich der Glieder $P_i(\xi)\,P_k(\eta)$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ auf beiden Seiten von (4) ein lineares Gleichungssystem für die Z_{ik}.

Für die spezielle Form der Differentialgleichung (4), auf die man bei der Picardschen Iterationsmethode geführt wird, zerfällt nun dieses für die Z_{ik} resultierende Gleichungssystem in vier getrennte Systeme. Von diesen vier Systemen enthält eins nur die Z_{ik} mit geradem i und geradem k, das zweite nur die mit geradem i und ungeradem k, das dritte nur die mit ungeradem i und geradem k und das vierte endlich nur die mit ungeradem i und ungeradem k.

Dieser Zerfall rührt davon her, dass sich die zweite Ableitung P_ν'' allein durch die Legendreschen Polynome $P_{\nu-2}, P_{\nu-4}, P_{\nu-6}\ldots$ ausdrückt (wobei die Entwicklung abbricht, sobald der Index von P bis auf 0 oder 1 zurückgegangen ist). Denn dieser Umstand hat offenbar zur Folge, dass auf der rechten Seite von (4) in den Koeffizienten von $P_i(\xi)\,P_k(\eta)$ immer nur solche $Z_{\mu\nu}$ auftreten, für die $|\mu - i| \equiv 0 \pmod 2$ und $|\nu - k| \equiv 0 \pmod 2$ ist.

Dieser Zerfall erleichtert die Berechnung der Z_{ik} ganz wesentlich. Ihm ist die Möglichkeit für die explizite Berechnung der Koeffizienten Z_{ik} in der Hauptsache zu verdanken.

Im folgenden soll diese explizite Berechnung für $n = 3$ durchgeführt werden. Hierfür ist der Rechenaufwand noch relativ gering, andrerseits wird die Genauigkeit der dann durch $(n+3)^2 = 36$ Glieder der Doppelreihe (6) dargestellten Näherungslösung im allgemeinen schon recht beträchtlich sein, wie die Beispiele in V zeigen. Reicht die Genauigkeit indessen nicht aus, sei es dass die Funktion $f(\xi, \eta)$ oder aber die Randwerte, auf die wir noch in III und IV zu sprechen kommen werden, einen sehr komplizierten Verlauf haben, der in ihren Legendreschen Entwicklungen eine grosse Gliederzahl mitzunehmen zwingt, so bleibt noch die Möglichkeit, eine entsprechende, dann allerdings etwas umfangreichere Berechnung für $n > 3$ anzustellen.

Im Falle $n = 3$ zerfallen die aus der Differentialgleichung (4) herrührenden Bedingungsgleichungen für die Z_{ik} dann in die folgenden vier Gleichungssysteme zu je vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 3\,Z_{20} + 10\,Z_{40} + A\,(3\,Z_{02} + 10\,Z_{04}) &= F_{00} \\ 3\,Z_{22} + 10\,Z_{42} + A \cdot 35\,Z_{04} &= F_{02} \\ 35\,Z_{40} + A\,(3\,Z_{22} + 10\,Z_{24}) &= F_{20} \\ 35\,Z_{42} + A \cdot 35\,Z_{24} &= F_{22} \end{aligned}\right\} \tag{7 a}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\,Z_{21} + 10\,Z_{41} + A\,(15\,Z_{03} + 42\,Z_{05}) &= F_{01} \\ 3\,Z_{23} + 10\,Z_{43} + A \cdot 63\,Z_{05} &= F_{03} \\ 35\,Z_{41} + A\,(15\,Z_{23} + 42\,Z_{25}) &= F_{21} \\ 35\,Z_{43} + A \cdot 63\,Z_{25} &= F_{23} \end{aligned}\right\} \tag{7 b}$$

$$\left.\begin{aligned} 15\,Z_{30} + 42\,Z_{50} + A\,(3\,Z_{12} + 10\,Z_{14}) &= F_{10} \\ 15\,Z_{32} + 42\,Z_{52} + A \cdot 35\,Z_{14} &= F_{12} \\ 63\,Z_{50} + A\,(3\,Z_{32} + 10\,Z_{34}) &= F_{30} \\ 63\,Z_{52} + A \cdot 35\,Z_{34} &= F_{32} \end{aligned}\right\} \tag{7 c}$$

$$\left.\begin{aligned} 15\,Z_{31} + 42\,Z_{51} + A\,(15\,Z_{13} + 42\,Z_{15}) &= F_{11} \\ 15\,Z_{33} + 42\,Z_{53} + A \cdot 63\,Z_{15} &= F_{13} \\ 63\,Z_{51} + A\,(15\,Z_{33} + 42\,Z_{35}) &= F_{31} \\ 63\,Z_{53} + A \cdot 63\,Z_{35} &= F_{33} \end{aligned}\right\} \tag{7 d}$$

Zu diesen 16 Gleichungen für die 36 unbekannten Koeffizienten Z_{ik} müssen nun noch weitere 20 Gleichungen aus den Randbedingungen hinzutreten.

Wir beschränken uns nun im folgenden auf die in den Anwendungen häufig vorkommenden Randformen des (achsenparallelen) Rechtecks und der („achsenparallelen") Ellipse in der (x, y)-Ebene, die man durch die Transformation (3) in das zum Nullpunkt symmetrisch gelegene achsenparallele Quadrat der Seitenlänge 2 bzw. in den Einheitskreis der (ξ, η)-Ebene überführen kann.

Dieses Quadrat bzw. der Einheitskreis sind spezielle achsensymmetrische Randformen. Für solche achsensymmetrische Randformen in der (ξ, η)-Ebene zerfallen aber die zusätzlichen Bedingungsgleichungen stets wieder in gleicher Weise wie (7 a) bis (7 d) in vier getrennte Gleichungssysteme, so dass man für solche Randformen statt 36 Gleichungen mit 36 Unbekannten vier Systeme von je 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten aufzulösen hat. Im Spezialfall des Quadrates bzw. des Kreises nehmen die zerfallenden Gleichungen eine besonders einfache Gestalt an, so dass die numerische Auflösung des Gleichungssystems für die Z_{ik} dann besonders leicht durchführbar ist.

III. Die numerische Lösung des Dirichletschen Problems im Falle des Rechteck- bzw. Quadratrandes.

Im Falle des (zum Nullpunkt symmetrischen achsenparallelen) Quadrates der Seitenlänge 2 kann man die noch fehlenden zusätzlichen Bedingungsgleichungen für die Z_{ik} in folgender Weise gewinnen:

Auf jeder Quadratseite einzeln entwickele man die dort vorgegebenen Randwerte z in eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Reihe, die man nach den Gliedern mit P_5 abbreche. Die Entwicklungskoeffizienten bezeichne man mit $\zeta_0^{(\nu)}$, $\zeta_1^{(\nu)}$, $\zeta_2^{(\nu)}$, $\zeta_3^{(\nu)}$, $\zeta_4^{(\nu)}$, $\zeta_5^{(\nu)}$; hierbei mögen zu $\nu = 1$ die Entwicklungskoeffizienten der Quadratseite $\xi = +1$, $|\eta| \leqq 1$ gehören, zu $\nu = 2$ die von $\eta = +1$, $|\xi| \leqq 1$ usw. im positiven Drehsinn. Mit diesen Entwicklungen gehe man in die linke Seite von (6) ein, während man rechts $\xi = +1$ bzw. $\eta = +1$ bzw. $\xi = -1$ bzw. $\eta = -1$ setzt.

Führt man noch die Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\zeta_\mu^{(1)} + \zeta_\mu^{(3)}) &= \alpha_\mu \\ \frac{1}{2}(\zeta_\mu^{(1)} - \zeta_\mu^{(3)}) &= \beta_\mu \\ \frac{1}{2}(\zeta_\mu^{(2)} + \zeta_\mu^{(4)}) &= \gamma_\mu \\ \frac{1}{2}(\zeta_\mu^{(2)} - \zeta_\mu^{(4)}) &= \delta_\mu \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \tag{8}$$

ein, so gewinnt man durch Koeffizientenvergleich für P_0, P_1, P_2 und P_3 nach leichter Umformung die folgenden 16 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Z_{00} + Z_{20} + Z_{40} &= \alpha_0 \\ Z_{02} + Z_{22} + Z_{42} &= \alpha_2 \\ Z_{00} + Z_{02} + Z_{04} &= \gamma_0 \\ Z_{20} + Z_{22} + Z_{24} &= \gamma_2 \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{a}) \qquad \left.\begin{aligned} Z_{01} + Z_{21} + Z_{41} &= \alpha_1 \\ Z_{03} + Z_{23} + Z_{43} &= \alpha_3 \\ Z_{01} + Z_{03} + Z_{05} &= \delta_0 \\ Z_{21} + Z_{23} + Z_{25} &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{10} + Z_{30} + Z_{50} &= \beta_0 \\ Z_{12} + Z_{32} + Z_{52} &= \beta_2 \\ Z_{10} + Z_{12} + Z_{14} &= \gamma_1 \\ Z_{30} + Z_{32} + Z_{34} &= \gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{c}) \qquad \left.\begin{aligned} Z_{11} + Z_{31} + Z_{51} &= \beta_1 \\ Z_{13} + Z_{33} + Z_{53} &= \beta_3 \\ Z_{11} + Z_{13} + Z_{15} &= \delta_1 \\ Z_{31} + Z_{33} + Z_{35} &= \delta_3 \end{aligned}\right\} \quad (9\,\mathrm{d})$$

Die noch fehlenden vier weiteren Bedingungsgleichungen können auf diese Art nicht mehr gewonnen werden, da sich durch Koeffizientenvergleich von P_4 das System (9 a) um zwei Gleichungen und die Systeme (9 b) und (9 c) um je eine Gleichung vermehren würde, während das System (9 d) ungeändert bliebe, d.h. es würde dann nur in dem aus (7 b) und (9 b) bzw. aus (7 c) und (9 c) zusammengesetzten System die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmen.

Man würde erst wieder gleichviel Bedingungsgleichungen in allen vier Systemen erhalten, wenn man nicht nur die nächsten vier, sondern die nächsten acht Bedingungsgleichungen (Koeffizientenvergleich von P_4 und P_5) hinzunehmen würde. Diese würden lauten:

$$\left.\begin{aligned} Z_{04} + Z_{24} + Z_{44} &= \alpha_4 \\ Z_{40} + Z_{42} + Z_{44} &= \gamma_4 \end{aligned}\right\} \quad (9'\,\mathrm{a}) \qquad \left.\begin{aligned} Z_{05} + Z_{25} + Z_{45} &= \alpha_5 \\ Z_{41} + Z_{43} + Z_{45} &= \delta_4 \end{aligned}\right\} \quad (9'\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{14} + Z_{34} + Z_{54} &= \beta_4 \\ Z_{50} + Z_{52} + Z_{54} &= \gamma_5 \end{aligned}\right\} \quad (9'\,\mathrm{c}) \qquad \left.\begin{aligned} Z_{15} + Z_{35} + Z_{55} &= \beta_5 \\ Z_{51} + Z_{53} + Z_{55} &= \delta_5 \end{aligned}\right\} \quad (9'\,\mathrm{d})$$

Dann aber hätte man in jedem System eine Bedingungsgleichung zu viel. An die Stelle der Bedingungsgleichungen (9′ a) bis (9′ d) muss daher ein anderer Ansatz treten, der für jedes der obigen Systeme genau eine Bedingungsgleichung liefert. Solch einen Ansatz stellt z. B. die folgende Minimumforderung dar:

$$(Z_{04} + Z_{24} + Z_{44} - \alpha_4)^2 + (Z_{40} + Z_{42} + Z_{44} - \gamma_4)^2 = \text{Minimum} \qquad (10\,\mathrm{a})$$

$$(Z_{05} + Z_{25} + Z_{45} - \alpha_5)^2 + (Z_{41} + Z_{43} + Z_{45} - \delta_4)^2 = \text{Minimum} \qquad (10\,\mathrm{b})$$

$$(Z_{14} + Z_{34} + Z_{54} - \beta_4)^2 + (Z_{50} + Z_{52} + Z_{54} - \gamma_5)^2 = \text{Minimum} \qquad (10\,\mathrm{c})$$

$$(Z_{15} + Z_{35} + Z_{55} - \beta_5)^2 + (Z_{51} + Z_{53} + Z_{55} - \delta_5)^2 = \text{Minimum} \qquad (10\,\mathrm{d})$$

Aus den Gleichungen (7), (9) und (10) kann man dann sämtliche Z_{ik} berechnen. Z. B. erhält man aus (7 a) und (9 a), wenn man abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} 3\gamma_2 + 3A\cdot\alpha_2 - F_{00} + \frac{2}{7}F_{02} + \frac{2}{7}F_{20} - \frac{1}{7}\left(\frac{3}{5}A + \frac{4}{7}\right)F_{22} &= X_1 \\ \gamma_0 + \gamma_2 - (\alpha_0 + \alpha_2) - \frac{1}{35\,A}\cdot F_{02} + \frac{1}{35}F_{20} + \frac{1}{35}\left(1 + \frac{2}{7\,A}\right)F_{22} &= X_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11\,\mathrm{a})$$

setzt, sukzessive die folgenden Z_{ik}-Werte:

$$\left.\begin{aligned} Z_{22} &= \frac{35}{3}\cdot\frac{A}{A+1}\cdot\frac{3\,X_1 + 7\,(A-1)\,X_2}{135\,A + 7\,(A-1)^2} \\ Z_{24} &= \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\frac{45\,A\,X_2 - (A-1)\,X_1}{135\,A + 7\,(A-1)^2} \\ Z_{00} &= \alpha_0 - \gamma_2 - \frac{1}{35}F_{20} + \left(1 + \frac{3}{35}A\right)Z_{22} + \left(1 + \frac{2}{7}A\right)Z_{24} \\ Z_{02} &= \alpha_2 - \frac{1}{35}\cdot F_{22} - Z_{22} + A\,Z_{24} \end{aligned}\right\} \qquad (12\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{04} &= \frac{1}{35\,A} F_{02} - \frac{2}{245\,A} F_{22} - \frac{3}{35\,A} Z_{22} + \frac{2}{7} Z_{24} \\
Z_{20} &= \gamma_2 - Z_{22} - Z_{24} \\
Z_{40} &= \frac{1}{35} \cdot F_{20} - \frac{3}{35} A\, Z_{22} - \frac{2}{7} \cdot A\, Z_{24} \\
Z_{42} &= \frac{1}{35} F_{22} - A\, Z_{24}
\end{aligned}\right\} \tag{12 a}$$

Die Gleichung (10 a) stellt dann eine Bedingungsgleichung für den in (7 a) und (9 a) nicht auftretenden Koeffizienten Z_{44} dar. Durch Nullsetzen der Ableitung von (10 a) nach Z_{44} findet man:

$$Z_{44} = \frac{1}{2}(\alpha_4 + \gamma_4) - \frac{1}{2}(Z_{04} + Z_{24} + Z_{40} + Z_{42})\,[1] \tag{13 a}$$

Die übrigen drei Systeme liefern ganz entsprechende Ausdrücke für die in ihnen auftretenden Koeffizienten Z_{ik}, die im folgenden zusammengestellt sind:

$$\left.\begin{aligned}
3\,\delta_2 + 15\,A\,\alpha_3 - F_{01} + \frac{2}{3} F_{03} + \frac{2}{7} F_{21} - \frac{1}{21}(4 + 9\,A)\,F_{23} &= X_3 \\
\delta_0 + \delta_2 - (\alpha_1 + \alpha_3) - \frac{1}{63\,A} F_{03} + \frac{1}{35} F_{21} + \left(\frac{1}{35} + \frac{2}{441\,A}\right) F_{23} &= X_4
\end{aligned}\right\} \tag{11 b}$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{23} &= 21\,A \cdot \frac{(7\,A + 3)\,X_3 + 7\,(9\,A^2 - 1)\,X_4}{15\,A\,(27\,A + 7)\,(7\,A + 3) + 7\,(9\,A^2 - 1)^2} \\
Z_{25} &= \frac{7}{3} \cdot \frac{15\,A\,(27\,A + 7)\,X_4 - (9\,A^2 - 1)\,X_3}{15\,A\,(27\,A + 7)\,(7\,A + 3) + 7\,(9\,A^2 - 1)^2} \\
Z_{01} &= \alpha_1 - \delta_2 - \frac{1}{35} F_{21} + \left(1 + \frac{3}{7} A\right) Z_{23} + \left(1 + \frac{6}{5} A\right) Z_{25} \\
Z_{03} &= \alpha_3 - \frac{1}{35} F_{23} - Z_{23} + \frac{9}{5} A\, Z_{25} \\
Z_{05} &= \frac{1}{63\,A} F_{03} - \frac{2}{441\,A} \cdot F_{23} - \frac{1}{21\,A} \cdot Z_{23} + \frac{2}{7} Z_{25} \\
Z_{21} &= \delta_2 - Z_{23} - Z_{25} \\
Z_{41} &= \frac{1}{35} F_{21} - \frac{3}{7} A\, Z_{23} - \frac{6}{5} A\, Z_{25} \\
Z_{43} &= \frac{1}{35} F_{23} - \frac{9}{5} A\, Z_{25}
\end{aligned}\right\} \tag{12 b}$$

[1] Das Minimum von (10 a) wird, wie man leicht nachrechnet, für den Wert (13 a) von Z_{44} nur dann Null, wenn zwischen den übrigen in (10 a) auftretenden Koeffizienten die Bedingung: $Z_{04} + Z_{24} - (Z_{40} + Z_{42}) = \alpha_4 - \gamma_4$ besteht. Entsprechende Bedingungen sind für das Verschwinden der Minima in (10 b), (10 c) und (10 d) erforderlich.

$$Z_{45} = \frac{1}{2}(\alpha_5 + \delta_4) - \frac{1}{2}(Z_{05} + Z_{25} + Z_{41} + Z_{43}) \tag{13 b}$$

$$\left.\begin{aligned} 15\,\gamma_3 + 3\,A\,\beta_2 - F_{10} + \frac{2}{7}F_{12} + \frac{2}{3}F_{30} - \frac{1}{21}(4 + A)\,F_{32} &= X_5 \\ \gamma_1 + \gamma_3 - (\beta_0 + \beta_2) - \frac{1}{35\,A}\cdot F_{12} + \frac{1}{63}F_{30} + \frac{1}{21}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5\,A}\right)F_{32} &= X_6 \end{aligned}\right\} \tag{11 c}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{32} &= 21\,A\cdot\frac{(7 + 3\,A)\,X_5 + 7\,(A^2 - 9)\,X_6}{15\,A\,(27 + 7\,A)\,(7 + 3\,A) + 7\,(A^2 - 9)^2} \\ Z_{34} &= \frac{21}{5}\cdot\frac{15\,A\,(27 + 7\,A)\,X_6 - (A^2 - 9)\,X_5}{15\,A\,(27 + 7\,A)\,(7 + 3\,A) + 7\,(A^2 - 9)^2} \\ Z_{10} &= \beta_0 - \gamma_3 - \frac{1}{63}F_{30} + \left(1 + \frac{1}{21}A\right)Z_{32} + \left(1 + \frac{10}{63}A\right)Z_{34} \\ Z_{12} &= \beta_2 - \frac{1}{63}F_{32} - Z_{32} + \frac{5}{9}A\,Z_{34} \\ Z_{14} &= \frac{1}{35\,A}\cdot F_{12} - \frac{2}{105\,A}F_{32} - \frac{3}{7\,A}Z_{32} + \frac{2}{3}Z_{34} \\ Z_{30} &= \gamma_3 - Z_{32} - Z_{34} \\ Z_{50} &= \frac{1}{63}F_{30} - \frac{1}{21}A\cdot Z_{32} - \frac{10}{63}A\,Z_{34} \\ Z_{52} &= \frac{1}{63}F_{32} - \frac{5}{9}A\,Z_{34} \end{aligned}\right\} \tag{12 c}$$

$$Z_{54} = \frac{1}{2}(\beta_4 + \gamma_5) - \frac{1}{2}(Z_{14} + Z_{34} + Z_{50} + Z_{52}) \tag{13 c}$$

$$\left.\begin{aligned} 15\,\delta_3 + 15\,A\,\beta_3 - F_{11} + \frac{2}{3}F_{13} + \frac{2}{3}F_{31} - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{7}A\right)F_{33} &= X_7 \\ \delta_1 + \delta_3 - (\beta_1 + \beta_3) - \frac{1}{63\,A}F_{13} + \frac{1}{63}F_{31} + \frac{1}{63}\left(1 + \frac{2}{3\,A}\right)F_{33} &= X_8 \end{aligned}\right\} \tag{11 d}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{33} &= \frac{7}{5}\cdot\frac{A}{A + 1}\cdot\frac{X_7 + 9\,(A - 1)\cdot X_8}{35\,A + 3\,(A - 1)^2} \\ Z_{35} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{A + 1}\cdot\frac{105\,A\,X_8 - (A - 1)\,X_7}{35\,A + 3\,(A - 1)^2} \\ Z_{11} &= \beta_1 - \delta_3 - \frac{1}{63}\cdot F_{31} + \left(1 + \frac{5}{21}A\right)Z_{33} + \left(1 + \frac{2}{3}A\right)Z_{35} \\ Z_{13} &= \beta_3 - \frac{1}{63}F_{33} - Z_{33} + A\cdot Z_{35} \end{aligned}\right\} \tag{12 d}$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{15} &= \frac{1}{63\,A} F_{13} - \frac{2}{189\,A} F_{33} - \frac{5}{21\,A} Z_{33} + \frac{2}{3} Z_{35} \\
Z_{31} &= \delta_3 - Z_{33} - Z_{35} \\
Z_{51} &= \frac{1}{63} F_{31} - \frac{5}{21} A\, Z_{33} - \frac{2}{3} A\, Z_{35} \\
Z_{53} &= \frac{1}{63} F_{33} - A \cdot Z_{35}
\end{aligned}\right\} \tag{12 d}$$

$$Z_{55} = \frac{1}{2} (\beta_5 + \delta_5) - \frac{1}{2} (Z_{15} + Z_{35} + Z_{51} + Z_{53}) \tag{13 d}$$

Damit ist im Falle des Rechteck- bzw. Quadratrandes die explizite Berechnung der Legendreschen Koeffizienten Z_{ik} der Lösung des Dirichletchen Problems durchgeführt.

Die Entwicklung der Randwerte nach Legendreschen Polynomen, d. h. die Berechnung der $\zeta_\mu^{(\nu)}$ in (8) kann nach dem vom Verfasser in zwei früheren Arbeiten[1] geschilderten Verfahren vorgenommen werden; von der praktischen Durchführung der Legendreschen Entwicklung von $f(\xi, \eta)$ in (4), d. h. von der Berechnung der F_{ik} wird noch in VI die Rede sein.

IV. Die numerische Lösung des Dirichletschen Problems im Falle des Ellipsen- bzw. Kreisrandes.

Im Falle des Einheitskreises als Randform ist es naheliegend, zur Gewinnung der neben (7 a) bis (7 d) noch erforderlichen aus den Randwerten herzustellenden Bedingungsgleichungen für den Rand in (6) Polarkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \cos \pi\tau \\
\eta &= \sin \pi\tau
\end{aligned}\right\} \quad (-1 \leqq \tau \leqq +1) \tag{14}$$

einzuführen. Dann wird längs des Kreisrandes:

$$\left.\begin{aligned}
P_0(\xi) &= 1 \\
P_1(\xi) &= \cos \pi\tau \\
P_2(\xi) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\pi\tau \\
P_3(\xi) &= \frac{3}{8} \cos \pi\tau + \frac{5}{8} \cos 3\pi\tau
\end{aligned}\right| \tag{15}$$

[1] ZAMM 24 (1944), Seite 71/76 und ZAMM 31 (1951), Seite 104/108.

$$\left.\begin{aligned}P_4(\xi) &= \frac{9}{64} + \frac{5}{16}\cos 2\pi\tau + \frac{35}{64}\cos 4\pi\tau \\ P_5(\xi) &= \frac{15}{64}\cos\pi\tau + \frac{35}{128}\cos 3\pi\tau + \frac{63}{128}\cos 5\pi\tau\end{aligned}\right|$$

Die Werte $P_\nu(\eta)$ erhält man für den Kreisrand offenbar, wenn man in (15) τ durch $\frac{1}{2} - \tau$ ersetzt.

Durch Einsetzen von (15) und der entsprechenden Werte von $P_\nu(\eta)$ in (6) kann man die rechte Seite von (6) für den Kreisrand nach leichter Umformung in die Gestalt einer Fourierschen Reihe bringen, die nach $\cos\mu\pi\tau$ bzw. $\sin\mu\pi\tau$ fortschreitet.

Entwickelt man dann auch die Randwerte selbst in eine Fouriersche Reihe:

$$z(\tau) = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty}(C_\mu \cos\mu\pi\tau + S_\mu \sin\mu\pi\tau) \tag{16}$$

und setzt diese in die rechte Seite von (6) ein, so findet man aus (6) durch Koeffizientenvergleich von $\cos\mu\pi\tau$ bzw. $\sin\mu\pi\tau$ ($\mu = 0, 1, \ldots, 9$ bzw. $\mu = 1, 2, \ldots, 10$) wieder vier getrennte Gleichungssysteme für die Z_{ik}, die wie folgt lauten:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{00} + \frac{1}{4}Z_{02} + \frac{9}{64}Z_{04} + \frac{1}{4}Z_{20} - \frac{7}{32}Z_{22} - \frac{21}{256}Z_{24} + \frac{9}{64}Z_{40} - \frac{21}{256}Z_{42} + \frac{987}{8\,192}Z_{44} &= C_0 \\
-\frac{3}{4}Z_{02} - \frac{5}{16}Z_{04} + \frac{3}{4}Z_{20} + \frac{119}{512}Z_{24} + \frac{5}{16}Z_{40} - \frac{119}{512}Z_{42} &= C_2 \\
\frac{35}{64}Z_{04} - \frac{9}{32}Z_{22} + \frac{5}{256}Z_{24} + \frac{35}{64}Z_{40} + \frac{5}{256}Z_{42} + \frac{215}{2\,048}Z_{44} &= C_4 \\
\frac{105}{512}Z_{24} - \frac{105}{512}Z_{42} &= C_6 \\
\frac{1\,225}{8\,192}Z_{44} &= C_8
\end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{01} + \frac{3}{8}Z_{03} + \frac{15}{64}Z_{05} - \frac{1}{8}Z_{21} - \frac{9}{32}Z_{23} - \frac{135}{1\,024}Z_{25} - \frac{1}{64}Z_{41} + \frac{69}{1\,024}Z_{43} + \frac{1\,335}{8\,192}Z_{45} &= S_1 \\
-\frac{5}{8}Z_{03} - \frac{35}{128}Z_{05} + \frac{3}{8}Z_{21} - \frac{1}{64}Z_{23} + \frac{209}{1\,024}Z_{25} - \frac{15}{128}Z_{41} - \frac{135}{1\,024}Z_{43} + \frac{45}{4\,096}Z_{45} &= S_3 \\
\frac{63}{128}Z_{05} - \frac{15}{64}Z_{23} + \frac{21}{1\,024}Z_{25} + \frac{35}{128}Z_{41} + \frac{5}{1\,024}Z_{43} + \frac{371}{4\,096}Z_{45} &= S_5 \\
\frac{189}{1\,024}Z_{25} - \frac{175}{1\,024}Z_{43} + \frac{35}{16\,384}Z_{45} &= S_7 \\
\frac{2\,205}{16\,384}Z_{45} &= S_9
\end{aligned}\right\} \tag{17b}$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{10} - \frac{1}{8} Z_{12} - \frac{1}{64} Z_{14} + \frac{3}{8} Z_{30} - \frac{9}{32} Z_{32} + \frac{69}{1\,024} Z_{34} + \frac{15}{64} Z_{50} - \frac{135}{1\,024} Z_{52} + \frac{1\,335}{8\,192} Z_{54} &= C_1 \\
- \frac{3}{8} Z_{12} + \frac{15}{128} Z_{14} + \frac{5}{8} Z_{30} + \frac{1}{64} Z_{32} + \frac{135}{1\,024} Z_{34} + \frac{35}{128} Z_{50} - \frac{209}{1\,024} Z_{52} - \frac{45}{4\,096} Z_{54} &= C_3 \\
\frac{35}{128} Z_{14} - \frac{15}{64} Z_{32} + \frac{5}{1\,024} Z_{34} + \frac{63}{128} Z_{50} + \frac{21}{1\,024} Z_{52} + \frac{371}{4\,096} Z_{54} &= C_5 \\
\frac{175}{1\,024} Z_{34} - \frac{189}{1\,024} Z_{52} - \frac{35}{16\,384} Z_{54} &= C_7 \\
\frac{2\,205}{16\,384} Z_{53} &= C_9
\end{aligned}\right\} \quad (17\,\mathrm{c})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} Z_{11} - \frac{1}{8} Z_{13} - \frac{5}{256} Z_{15} - \frac{1}{8} Z_{31} - \frac{21}{128} Z_{33} + \frac{75}{1\,024} Z_{35} - \frac{5}{256} Z_{51} + \frac{75}{1\,024} Z_{53} + \frac{1\,605}{16\,384} Z_{55} &= S_2 \\
- \frac{5}{16} Z_{13} + \frac{7}{64} Z_{15} + \frac{5}{16} Z_{31} + \frac{117}{1\,024} Z_{35} - \frac{7}{64} Z_{51} - \frac{117}{1\,024} Z_{53} &= S_4 \\
\frac{63}{256} Z_{15} - \frac{25}{128} Z_{33} + \frac{7}{1\,024} Z_{35} + \frac{63}{256} Z_{51} + \frac{7}{1\,024} Z_{53} + \frac{2\,555}{32\,768} Z_{55} &= S_6 \\
\frac{315}{2\,048} Z_{35} - \frac{315}{2\,048} Z_{53} &= S_8 \\
\frac{3\,969}{32\,768} Z_{55} &= S_{10}
\end{aligned}\right\} \quad (17\,\mathrm{d})$$

Die Systeme (7 a), (17 a) bzw. (7 b), (17 b) bzw. (7 c), (17 c) bzw. (7 d), (17 d) gestatten wieder eine sukzessive explizite Auflösung nach den Z_{ik}. Und zwar findet man:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{44} &= \frac{8\,192}{1\,225} C_8 \\
Z_{24} &= \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{A+1} \cdot \left(\frac{512}{3} C_6 + F_{22} \right) \\
Z_{42} &= \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{A+1} \cdot \left(- \frac{512}{3} A\, C_6 + F_{22} \right) \\
Z_{22} &= \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{A^2 + 6A + 1} \cdot \Big\{ - A\, C_4 + \frac{1}{64} (F_{02} + A\, F_{20}) + \\
&\qquad + \frac{5}{32} A \left(\frac{1}{8} - A \right) Z_{24} - \frac{5}{32} \left(1 - \frac{1}{8} A \right) Z_{42} + \frac{215}{2\,048} A\, Z_{44} \Big\} \\
Z_{04} &= \frac{1}{35\,A} \cdot (F_{02} - 3\, Z_{22} - 10\, Z_{42})
\end{aligned}\right\} \quad (18\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{40} &= \frac{1}{35}\cdot(F_{20} - 3\,A\,Z_{22} - 10\,A\,Z_{24})\\
Z_{02} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\left\{-4\,C_2 + F_{00} - 10\left(\frac{1}{8}+A\right)Z_{04} + \frac{119}{128}Z_{24} - \frac{35}{4}Z_{40} - \frac{119}{128}Z_{42}\right\}\\
Z_{20} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\left\{4\,A\,C_2 + F_{00} - \frac{35}{4}A\,Z_{04} - \frac{119}{128}A\,Z_{24} - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - 10\left(1+\frac{1}{8}A\right)Z_{40} + \frac{119}{128}A\,Z_{42}\right\}\\
Z_{00} &= C_0 - \frac{1}{4}Z_{02} - \frac{9}{64}Z_{04} - \frac{1}{4}Z_{20} + \frac{7}{32}Z_{22} + \frac{21}{256}Z_{24} - \\
&\qquad\qquad - \frac{9}{64}Z_{40} + \frac{21}{256}Z_{42} - \frac{987}{8\,192}Z_{44}
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{45} &= \frac{16\,384}{2\,205}S_9\\
Z_{25} &= \frac{1}{63}\cdot\frac{1}{5A+3}\cdot\left\{1\,024\left(S_7 - \frac{1}{63}S_9\right) + 5\,F_{23}\right\}\\
Z_{43} &= \frac{1}{35}\cdot\frac{1}{5A+3}\cdot\left\{-1\,024\,A\left(S_7 - \frac{1}{63}S_9\right) + 3\,F_{23}\right\}\\
Z_{23} &= \frac{128}{3}\cdot\frac{1}{5A^2+10A+1}\cdot\left\{-A\,S_5 + \frac{1}{128}(F_{03} + A\,F_{21}) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{21}{64}A\left(\frac{1}{16}-A\right)Z_{25} + \frac{5}{64}\left(\frac{1}{16}A - 1\right)Z_{43} + \frac{371}{4\,096}A\,Z_{45}\right\}\\
Z_{05} &= \frac{1}{63\,A}\cdot(F_{03} - 3\,Z_{23} - 10\,Z_{43})\\
Z_{41} &= \frac{1}{35}\cdot(F_{21} - 15\,A\,Z_{23} - 42\,A\,Z_{25})\\
Z_{03} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3A+1}\cdot\left\{-8\,S_3 + F_{01} - 7\left(6\,A + \frac{5}{16}\right)Z_{05} - \frac{1}{8}Z_{23} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{209}{128}Z_{25} - \frac{175}{16}Z_{41} - \frac{135}{128}Z_{43} + \frac{45}{512}Z_{45}\right\}\\
Z_{21} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3A+1}\cdot\left\{24\,A\,S_3 + F_{01} - \frac{567}{16}A\,Z_{05} + \frac{3}{8}A\,Z_{23} - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{627}{128}A\,Z_{25} + 5\left(\frac{9}{16}A - 2\right)Z_{41} + \frac{405}{128}A\,Z_{43} - \frac{135}{512}A\,Z_{45}\right\}\\
Z_{01} &= S_1 - \frac{3}{8}Z_{03} - \frac{15}{64}Z_{05} + \frac{1}{8}Z_{21} + \frac{9}{32}Z_{23} + \frac{135}{1\,024}Z_{25} + \\
&\qquad + \frac{1}{64}Z_{41} - \frac{69}{1\,024}Z_{43} - \frac{1\,335}{8\,192}Z_{45}
\end{aligned}\right\}\quad(18\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{54} &= \frac{16\,384}{2\,205}\,C_9\\
Z_{34} &= \frac{1}{35}\cdot\frac{1}{3A+5}\cdot\left\{1\,024\left(C_7+\frac{1}{63}\,C_9\right)+3\,F_{32}\right\}\\
Z_{52} &= \frac{1}{63}\cdot\frac{1}{3A+5}\cdot\left\{-1\,024\,A\left(C_7+\frac{1}{63}\,C_9\right)+5\,F_{32}\right\}\\
Z_{32} &= \frac{128}{3}\cdot\frac{1}{A^2+10A+5}\cdot\left\{-A\,C_5+\frac{1}{128}\,(F_{12}+A\,F_{30})+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{5}{64}\,A\left(\frac{1}{16}-A\right)Z_{34}-\frac{21}{64}\left(1-\frac{1}{16}\,A\right)Z_{52}+\frac{371}{4\,096}\,A\,Z_{54}\right\}\\
Z_{14} &= \frac{1}{35\,A}\cdot(F_{12}-15\,Z_{32}-42\,Z_{52})\\
Z_{50} &= \frac{1}{63}\cdot(F_{30}-3\,A\,Z_{32}-10\,A\,Z_{34})\\
Z_{12} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{A+3}\cdot\left\{-24\,C_3+F_{10}-5\left(2\,A-\frac{9}{16}\right)Z_{14}+\frac{3}{8}\,Z_{32}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{405}{128}\,Z_{34}-\frac{567}{16}\,Z_{50}-\frac{627}{128}\,Z_{52}-\frac{135}{512}\,Z_{54}\right\}\\
Z_{30} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{A+3}\cdot\left\{8\,A\,C_3+F_{10}-\frac{175}{16}\,A\,Z_{14}-\frac{1}{8}\,A\,Z_{32}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{135}{128}\,A\,Z_{34}-7\left(6+\frac{5}{16}\,A\right)Z_{50}+\frac{209}{128}\,A\,Z_{52}+\frac{45}{512}\,A\,Z_{54}\right\}\\
Z_{10} &= C_1+\frac{1}{8}\,Z_{12}+\frac{1}{64}\,Z_{14}-\frac{3}{8}\,Z_{30}+\frac{9}{32}\,Z_{32}-\frac{69}{1\,024}\,Z_{34}-\\
&\qquad-\frac{15}{64}\,Z_{50}+\frac{135}{1\,024}\,Z_{52}-\frac{1\,335}{8\,192}\,Z_{54}
\end{aligned}\right\}\quad(18\,\mathrm{c})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{55} &= \frac{32\,768}{3\,969}\,S_{10}\\
Z_{35} &= \frac{1}{63}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\left(\frac{2\,048}{5}\,S_8+F_{33}\right)\\
Z_{53} &= \frac{1}{63}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\left(-\frac{2\,048}{5}\,A\,S_8+F_{33}\right)\\
Z_{33} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3A^2+10A+3}\cdot\left\{-256\,A\,S_6+F_{13}+A\,F_{31}+\right.\\
&\qquad\left.+7\,A\left(\frac{1}{4}-6\,A\right)Z_{35}-7\left(6-\frac{1}{4}\,A\right)Z_{53}+\frac{2\,555}{128}\,A\,Z_{55}\right\}
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{15} &= \frac{1}{63\,A}\cdot(F_{13} - 15\,Z_{33} - 42\,Z_{53})\\
Z_{51} &= \frac{1}{63}\cdot(F_{31} - 15\,A\,Z_{33} - 42\,A\,Z_{35})\\
Z_{13} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\Big\{-16\,S_4 + \frac{1}{3}F_{11} + 7\left(\frac{1}{4} - 2\,A\right)Z_{15} + \\
&\qquad\qquad + \frac{117}{64}Z_{35} - \frac{63}{4}Z_{51} - \frac{117}{64}Z_{53}\Big\}\\
Z_{31} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{A+1}\cdot\Big\{16\,A\,S_4 + \frac{1}{3}F_{11} - \frac{63}{4}A\,Z_{15} - \\
&\qquad\qquad - \frac{117}{64}A\,Z_{35} + 7\left(\frac{1}{4}A - 2\right)Z_{51} + \frac{117}{64}A\,Z_{53}\Big\}\\
Z_{11} &= 2\,S_2 + \frac{1}{4}Z_{13} + \frac{5}{128}Z_{15} + \frac{1}{4}Z_{31} + \frac{21}{64}Z_{33} - \frac{75}{512}Z_{35} + \\
&\qquad\qquad + \frac{5}{128}Z_{51} - \frac{75}{512}Z_{53} - \frac{1\,605}{8\,192}Z_{55}
\end{aligned}\right\} \quad (18\,\text{d})$$

Damit ist auch im Falle des Ellipsen- bzw. Kreisrandes die explizite Berechnung der Legendreschen Koeffizienten Z_{ik} der Lösung des Dirichletschen Problems durchgeführt.

Im folgenden werden einige einfache Beispiele zu III und IV gebracht.

V. Beispiele.

Erstes Beispiel: Torsion eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt.[1] Das Problem, die Verschiebung der Volumenelemente des tordierten Stabes in Längsrichtung des Stabes zu bestimmen, führt, wenn der Stab die Richtung der z-Achse hat, auf die Laplacesche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \text{ [2, 3]} \qquad (19)$$

[1] Man vergleiche die Behandlung dieses Problems z. B. in Frank-v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Band II, Kapitel VIII, § 2, 3, Braunschweig 1935.

[2] Setzt man die Verschiebung in der z-Richtung, d. h. in der Längsrichtung des Stabes, an in der Form: $w = \omega \cdot \varphi\,(x, y)$, wobei ω den Torsionswinkel pro Längeneinheit bedeutet, so hängt ψ in (19) mit φ über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zusammen.

[3] Um eine Verwechselung mit der dritten Raumkoordinate zu vermeiden, wurde für die abhängige Veränderliche in (19) ψ statt z geschrieben.

Die vier Seiten des rechteckigen Querschnitts mögen gegeben sein durch: $x = \pm \frac{1}{2}$, $|y| \leqq 1$ bzw. $y = \pm 1$, $|x| \leqq \frac{1}{2}$. Die zu unserem Problem gehörigen Randwerte lauten:

$$\left.\begin{aligned} x = \pm \frac{1}{2}:\ \psi &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} y^2 \\ y = \pm 1:\ \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die Transformation (3) wird hier: $x = \frac{1}{2}\xi$, $y = \eta$. Daraus folgt: $A = \frac{1}{4}$. Diese Transformation überführt (19) in die Form (4) mit $f(\xi, \eta) \equiv 0$, während der Rechteckrand in das Quadrat mit den Seiten $\xi = \pm 1$, $|\eta| \leqq 1$ bzw. $\eta = \pm 1$, $|\xi| \leqq 1$ übergeht. Aus (20) wird nach dieser Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \xi = \pm 1:\ \psi &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \eta^2 \\ \eta = \pm 1:\ \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aus (21) folgt, dass die einzigen von Null verschiedenen Werte (8) die folgenden sind:

$$\alpha_0 = \frac{7}{24},\ \alpha_2 = \frac{1}{3},\ \gamma_0 = \frac{13}{24},\ \gamma_2 = \frac{1}{12} \tag{22}$$

Dann sind in III lediglich die Koeffizienten (12 a) und (13 a) von Null verschieden. Die numerische Berechnung dieser Koeffizienten ergibt dann für ψ den folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \psi = {} & 0{,}323\,09\, P_0(\xi) P_0(\eta) + 0{,}245\,11\, P_0(\xi) P_2(\eta) - 0{,}026\,53\, P_0(\xi) P_4(\eta) \\ & - 0{,}028\,11\, P_2(\xi) P_0(\eta) + 0{,}092\,87\, P_2(\xi) P_2(\eta) + 0{,}018\,57\, P_2(\xi) P_4(\eta) \\ & - 0{,}003\,32\, P_4(\xi) P_0(\eta) - 0{,}004\,64\, P_4(\xi) P_2(\eta) + 0{,}007\,96\, P_4(\xi) P_4(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Der Ausdruck (23) entspricht $n = 3$ (vgl. II); wählt man dagegen $n = 4$, so erhält man durch eine analoge Rechnung anstelle von (23) den genaueren Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \psi = {} & 0{,}322\,69\, P_0(\xi) P_0(\eta) + 0{,}242\,56\, P_0(\xi) P_2(\eta) - \\ & \qquad - 0{,}020\,82\, P_0(\xi) P_4(\eta) - 0{,}002\,76\, P_0(\xi) P_6(\eta) \\ & - 0{,}028\,10\, P_2(\xi) P_0(\eta) + 0{,}093\,58\, P_2(\xi) P_2(\eta) + \\ & \qquad + 0{,}019\,04\, P_2(\xi) P_4(\eta) - 0{,}001\,18\, P_2(\xi) P_6(\eta) \\ & - 0{,}002\,74\, P_4(\xi) P_0(\eta) - 0{,}002\,05\, P_4(\xi) P_2(\eta) + \\ & \qquad + 0{,}002\,38\, P_4(\xi) P_4(\eta) + 0{,}002\,41\, P_4(\xi) P_6(\eta) \\ & - 0{,}000\,17\, P_6(\xi) P_0(\eta) - 0{,}000\,76\, P_6(\xi) P_2(\eta) - \\ & \qquad - 0{,}000\,60\, P_6(\xi) P_4(\eta) + 0{,}001\,53\, P_6(\xi) P_6(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Diese Näherungslösungen werden in der folgenden Tabelle 1 für einige (ξ, η)-Werte mit der strengen Lösung des Problems:

$$\psi = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4}\right) - \frac{8}{\pi^3} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \cdot \frac{\cosh(2\nu+1)\pi\eta}{\cosh(2\nu+1)\pi} \cdot \cos(2\nu+1)\pi\frac{\xi}{2} \tag{25}$$

verglichen.

Tabelle 1.

$\eta \diagdown \xi$	0	$\frac{1}{2}$	1	
1	0,5000	0,5313	0,6250	(23)
	0,5000	0,5313	0,6250	(24)
	0,5000	0,5313	0,6250	(25)
$\frac{3}{4}$	0,4151	0,4192	0,4063	(23)
	0,4136	0,4156	0,4063	(24)
	0,4137	0,4156	0,4063	(25)
$\frac{1}{2}$	0,3208	0,3072	0,2500	(23)
	0,3193	0,3041	0,2500	(24)
	0,3192	0,3042	0,2500	(25)
$\frac{1}{4}$	0,2507	0,2273	0,1563	(23)
	0,2518	0,2292	0,1563	(24)
	0,2518	0,2291	0,1563	(25)
0	0,2251	0,1985	0,1250	(23)
	0,2277	0,2032	0,1250	(24)
	0,2277	0,2030	0,1250	(25)

Zweites Beispiel: Für die Differentialgleichung:

$$\Delta z - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{4}{9} y^2 (z - y) = 0 \tag{26}$$

ist die durch die Randwertaufgabe:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm 1, \ |y| \leqq 1: \ z = y \\ y &= +1, \ |x| \leqq 1: \ z = x^2 \\ y &= -1, \ |x| \leqq 1: \ z = -x^2 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

bestimmte Lösung nach der Picardschen Iterationsmethode zu berechnen.

Die Picardsche Iterationsmethode löst bekanntlich die Aufgabe (26), (27), indem sie statt (26) die folgenden Differentialgleichungen auflöst:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta z_0 &= -\frac{4}{9}y^3\\ \varDelta z_1 &= -x\cdot\frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{4}{9}y^2\cdot z_0\\ \varDelta z_2 &= -x\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{4}{9}y^2\cdot z_1\\ &\vdots\end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

wobei z_0 den Randwerten (27) genügt, während die $z_1, z_2, \ldots$ auf dem Quadratrand von (27) überall sämtlich Null sind. Die Lösung von (26), (27) ist dann gegeben durch die (konvergente) Reihe:

$$z = z_0 - z_1 + z_2 - z_3 + - \cdots \tag{29}$$

Wegen $y^3 = \frac{3}{5}P_1(y) + \frac{2}{5}P_3(y)$ sind in der ersten Gleichung (28) nur die folgenden F_{ik} von Null verschieden:

$$F_{01} = -\frac{4}{15}, \quad F_{03} = -\frac{8}{45}. \tag{30}$$

Aus den Randbedingungen (27) für z_0 folgt, dass für die erste Gleichung (28) die einzigen von Null verschiedenen Werte von (8) die folgenden sind:

$$\alpha_1 = 1, \quad \delta_0 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{2}{3}. \tag{31}$$

Aus (11 b), (12 b), (13 b) findet man mit $A = 1$ durch Einsetzen von (30) und (31) für die Legendreschen Koeffizienten von z_0 die folgenden Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} Z_{23}^{(0)} = 0{,}081\,908\,7 & Z_{03}^{(0)} = -0{,}093\,828\,8 & Z_{41}^{(0)} = -0{,}027\,156\,9\\ Z_{25}^{(0)} = -0{,}006\,622\,3 & Z_{05}^{(0)} = -0{,}008\,614\,4 & Z_{43}^{(0)} = 0{,}011\,920\,1\\ Z_{01}^{(0)} = 0{,}435\,776\,6 & Z_{21}^{(0)} = 0{,}591\,380\,3 & Z_{45}^{(0)} = 0{,}015\,236\,8 \end{array}\right\} \tag{32}$$

Für die zweite, dritte usw. Gleichung (28) ergibt eine elementare Umformung der rechten Seiten für die einzigen von Null verschiedenen F_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} F_{01}^{(\nu+1)} &= -Z_{21}^{(\nu)} - Z_{41}^{(\nu)} - \frac{4}{15}Z_{01}^{(\nu)} - \frac{8}{105}Z_{03}^{(\nu)}\\ F_{03}^{(\nu+1)} &= -Z_{23}^{(\nu)} - Z_{43}^{(\nu)} - \frac{8}{45}Z_{01}^{(\nu)} - \frac{92}{405}Z_{03}^{(\nu)} - \frac{80}{891}Z_{05}^{(\nu)}\\ F_{21}^{(\nu+1)} &= -\frac{34}{15}Z_{21}^{(\nu)} - 5\,Z_{41}^{(\nu)} - \frac{8}{105}Z_{23}^{(\nu)}\\ F_{23}^{(\nu+1)} &= -\frac{8}{45}Z_{21}^{(\nu)} - \frac{902}{405}Z_{23}^{(\nu)} - \frac{80}{891}Z_{25}^{(\nu)} - 5\,Z_{43}^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots) \tag{33}$$

Hierbei bedeuten die $Z_{ik}^{(\nu)}$ die Legendreschen Koeffizienten von z_ν und $F_{ik}^{(\nu+1)}$ die Legendreschen Koeffizienten der rechten Seite von $\Delta z_{\nu+1} = -x\cdot\frac{\partial z_\nu}{\partial x} - \frac{4}{9}y^2\cdot z_\nu$ in (28).

Für $z_1, z_2, \ldots$ sind sämtliche Werte (8) Null. Mit (33) findet man aus (11 b), (12 b), (13 b) sukzessive die folgenden Entwicklungskoeffizienten:

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$
$Z_{23}^{(\nu)}$	0,007 480 8	0,002 002 4	−0,000 212 1	0,000 011 5	−0,000 000 3
$Z_{25}^{(\nu)}$	−0,010 862 3	0,000 155 9	0,000 025 2	−0,000 001 9	0,000 000 0
$Z_{01}^{(\nu)}$	0,021 387 5	−0,000 099 6	−0,000 060 5	0,000 005 8	−0,000 000 5
$Z_{03}^{(\nu)}$	−0,017 131 1	0,000 122 2	0,000 070 8	−0,000 007 2	0,000 000 4
$Z_{05}^{(\nu)}$	−0,004 256 5	−0,000 022 6	−0,000 010 5	0,000 001 3	−0,000 000 1
$Z_{21}^{(\nu)}$	0,003 381 5	−0,002 158 3	0,000 186 9	−0,000 009 6	0,000 000 3
$Z_{41}^{(\nu)}$	−0,024 769 0	0,002 257 9	−0,000 126 4	0,000 003 8	0,000 000 2
$Z_{43}^{(\nu)}$	0,009 650 3	−0,002 124 6	0,000 141 3	−0,000 004 3	−0,000 000 1
$Z_{45}^{(\nu)}$	0,015 118 8	−0,000 133 3	−0,000 014 8	0,000 000 6	0,000 000 0

(34)

Aus (32) und (34) folgt nach (29) für die gesuchte Lösung z von (26), (27) die folgende Legendresche Entwicklung:

$$\left.\begin{aligned} z = {} & 0{,}414\,36\,P_0(x)\,P_1(y) - 0{,}076\,65\,P_0(x)\,P_3(y) - 0{,}004\,37\,P_0(x)\,P_5(y) \\ & + 0{,}585\,64\,P_2(x)\,P_1(y) + 0{,}076\,65\,P_2(x)\,P_3(y) + 0{,}004\,37\,P_2(x)\,P_5(y) \\ & + 0{,}000\,00\,P_4(x)\,P_1(y) + 0{,}000\,00\,P_4(x)\,P_3(y) + 0{,}000\,00\,P_4(x)\,P_5(y) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Diese Näherungslösung (35) wird in Tabelle 2 für einige (x, y)-Werte mit der strengen Lösung:

$$z = y\cdot\{1 + (x^2 - 1)\cdot e^{\frac{1}{3}(y^2-1)}\} \tag{36}$$

verglichen.

Tabelle 2.

$y \diagdown x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	
1	0,0000	0,0625	0,2500	0,5625	1,0000	(35)
	0,0000	0,0625	0,2500	0,5625	1,0000	(36)
$\frac{3}{4}$	0,1020	0,1425	0,2640	0,4665	0,7500	(35)
	0,1013	0,1419	0,2635	0,4662	0,7500	(36)
$\frac{1}{2}$	0,1105	0,1348	0,2079	0,3296	0,5000	(35)
	0,1106	0,1349	0,2079	0,3296	0,5000	(36)
$\frac{1}{4}$	0,0668	0,0782	0,1126	0,1698	0,2500	(35)
	0,0671	0,0785	0,1128	0,1700	0,2500	(36)
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	(35)
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	(36)

Drittes Beispiel: Für die Laplacesche Differentialgleichung:

$$\Delta z = 0 \tag{37}$$

ist diejenige Lösung gesucht, die auf dem Einheitskreis die Werte:

$$z = \tau - \tau^3 \tag{38}$$

annimmt, wenn τ den durch π dividierten Polarwinkel bedeutet:

$$\varphi = \pi \cdot \tau \qquad (-1 \leqq \tau \leqq +1). \tag{39}$$

Die Fourier-Entwicklung der Randwerte ergibt in diesem Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = 0{,}387\,018 & S_6 = -0{,}001\,792 \\ S_2 = -0{,}048\,377 & S_7 = 0{,}001\,128 \\ S_3 = 0{,}014\,334 & S_8 = -0{,}000\,756 \quad C_\nu = 0 \\ S_4 = -0{,}006\,047 & S_9 = 0{,}000\,531 \\ S_5 = 0{,}003\,096 & S_{10} = -0{,}000\,387 \end{array}\right\} \tag{40}$$

Mit $A = 1$, $F_{ik} = 0$ und (40) liefert (18a) bis (18d) die folgende Legendresche Entwicklung für die gesuchte Lösung:

$$\left.\begin{aligned} z = {} & 0{,}390\,22\, P_0(x) P_1(y) - 0{,}008\,05\, P_0(x) P_3(y) + 0{,}001\,05\, P_0(x) P_5(y) \\ & - 0{,}092\,95\, P_1(x) P_1(y) + 0{,}011\,50\, P_1(x) P_3(y) - 0{,}002\,81\, P_1(x) P_5(y) \\ & + 0{,}022\,70\, P_2(x) P_1(y) - 0{,}008\,37\, P_2(x) P_3(y) + 0{,}002\,28\, P_2(x) P_5(y) \\ & - 0{,}004\,91\, P_3(x) P_1(y) + 0{,}004\,94\, P_3(x) P_3(y) - 0{,}002\,46\, P_3(x) P_5(y) \\ & + 0{,}000\,86\, P_4(x) P_1(y) - 0{,}004\,10\, P_4(x) P_3(y) + 0{,}003\,95\, P_4(x) P_5(y) \\ & + 0{,}000\,46\, P_5(x) P_1(y) + 0{,}002\,46\, P_5(x) P_3(y) - 0{,}003\,20\, P_5(x) P_5(y) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Andrerseits besitzt unser Problem in Polarkoordinaten (r, φ) die folgende Lösung[1]:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot r^n \cdot \sin n\varphi \tag{42}$$

mit

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{12}{(n\pi)^3}. \tag{43}$$

Die folgende Tabelle 3 liefert für einige (x, y)-Werte in und auf dem Einheitskreise einen Vergleich von (41) und (42):

[1] Man vergleiche z. B. Frank-v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Band I, Kapitel XVI, § 1, 3, Braunschweig 1930.

Tabelle 3.

	$\lvert x\rvert = y = 0{,}2$	$\lvert x\rvert = y = 0{,}4$	$\lvert x\rvert = y = 0{,}6$	$\lvert x\rvert = y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$		
$\varphi = \pi/4$	0,0737 0,0738	0,1405 0,1411	0,2028 0,2031	0,2342 0,2344		(41) (42)
$\varphi = 3\pi/4$	0,0820 0,0815	0,1716 0,1719	0,2711 0,2715	0,3281 0,3281		(41) (42)
	$y = 0{,}2$	$y = 0{,}4$	$y = 0{,}6$	$y = 0{,}8$	$y = 1$	
$\varphi = \pi/2$	0,0778 0,0773	0,1544 0,1539	0,2292 0,2293	0,3024 0,3031	0,3752 0,3750	(41) (42)

VI. Anhang: Die Berechnung der Legendreschen Koeffizienten für eine Funktion zweier Veränderlicher.

In II ist noch die Frage offen geblieben, wie man die Legendreschen Koeffizienten F_{ik} in (5) numerisch berechnen kann.

In Spezialfällen wird sich diese Berechnung oft ohne weiteres durchführen lassen. So erledigt sich z. B. der Fall, dass $f(\xi, \eta)$ ein Polynom in ξ und η ist dadurch, dass man die Legendresche Entwicklung der einzelnen Potenzen von ξ bzw. η in $f(\xi, \eta)$ einführt. Auch der Fall $f(\xi, \eta) = f_1(\xi) \cdot f_2(\eta)$ lässt sich noch ziemlich einfach erledigen, indem man $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ einzeln entwickelt (vgl. hierzu die diesbezüglichen Arbeiten[1] des Verfassers).

Im allgemeinen Falle würde indessen eine Übertragung der in[1] geschilderten Verfahren auf zwei Veränderliche wegen der relativ engen Intervalleinteilung eine erhebliche Rechenarbeit verursachen. Daher soll im folgenden ein (gröberes) Näherungsverfahren für die Berechnung der F_{ik} angegeben werden, das einen relativ geringen Aufwand erfordert und sich speziell zur Berechnung der Anfangsglieder von (5) eignet. Man ersetze in:

$$F_{ik} = \frac{(2i+1)(2k+1)}{4} \iint_{-1}^{+1} f(\xi, \eta)\, P_i(\xi)\, P_k(\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{44}$$

die Funktion $f(\xi, \eta)$ für $0 \leqq \frac{\eta}{\xi} \leqq 1$ durch ein Polynom von der folgenden Form:

[1] ZAMM 24 (1944), Seite 71/76 und ZAMM 31 (1951), Seite 104/108.

$$f(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right) + e \cdot \xi \cdot \eta + f \cdot \eta\left(\eta - \tfrac{1}{2}\right) + g\xi\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)\eta + \\ + h\xi\eta\left(\eta - \tfrac{1}{2}\right) + j\xi\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)\eta\left(\eta - \tfrac{1}{2}\right). \tag{45}$$

Dieses Polynom soll an den Stellen $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 0)$, $(1; \frac{1}{2})$, $(1, 1)$ mit den dortigen Werten f_{00}, $f_{\frac{1}{2}0}$, f_{10}, $f_{0\frac{1}{2}}$, $f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $f_{\frac{1}{2}1}$, f_{10}, $f_{1\frac{1}{2}}$, f_{11} der Funktion $f(\xi, \eta)$ übereinstimmen. Dann ergeben sich für die Koeffizienten des Polynoms die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
&a = f_{00},\ b = 2\,(f_{\frac{1}{2}0} - f_{00}),\ c = 2\,(f_{0\frac{1}{2}} - f_{00}),\ d = 2\,[(f_{10} - f_{\frac{1}{2}0}) - (f_{\frac{1}{2}0} - f_{00})] \\
&e = 4\,[(f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0}) - (f_{0\frac{1}{2}} - f_{00})],\ f = 2\,[(f_{01} - f_{0\frac{1}{2}}) - (f_{0\frac{1}{2}} - f_{00})] \\
&g = 4\,\{[(f_{1\frac{1}{2}} - f_{10}) - (f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0})] - [(f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0}) - (f_{0\frac{1}{2}} - f_{00})]\} \\
&h = 4\,\{[(f_{\frac{1}{2}1} - f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) - (f_{01} - f_{0\frac{1}{2}})] - [(f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0}) - (f_{0\frac{1}{2}} - f_{00})]\} \\
&j = 4 \cdot ((\{[(f_{11} - f_{1\frac{1}{2}}) - (f_{\frac{1}{2}1} - f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})] - [(f_{1\frac{1}{2}} - f_{10}) - (f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0})]\} - \\
&\qquad - \{[(f_{\frac{1}{2}1} - f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) - (f_{01} - f_{0\frac{1}{2}})] - [(f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}0}) - (f_{0\frac{1}{2}} - f_{00})]\}))
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Setzt man abkürzend:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 P_n(\sigma)\,d\sigma = I_n(0; 1) \\
&\int_0^1 \sigma P_n(\sigma)\,d\sigma = K_n(0; 1) \\
&\int_0^1 \sigma\left(\sigma - \tfrac{1}{2}\right) P_n(\sigma)\,d\sigma = L_n(0; 1)
\end{aligned}\right\}, \tag{47}$$

wobei σ anstelle von ξ order η steht, so liefert (44) auf dem Quadrat $0 \leqq {}^{\xi}_{\eta} \leqq 1$ für F_{ik} den Anteil:

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4} \cdot \{a\,(2\,i + 1)\,I_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,I_k(0; 1) + b\,(2\,i + 1)\,K_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,I_k(0; 1) + \\
&\quad + c\,(2\,i + 1)\,I_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,K_k(0; 1) + d\,(2\,i + 1)\,L_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,I_k(0; 1) + \\
&\quad + e\,(2\,i + 1)\,K_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,K_k(0; 1) + f\,(2\,i + 1)\,I_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,L_k(0; 1) + \\
&\quad + g\,(2\,i + 1)\,L_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,K_k(0; 1) + h\,(2\,i + 1)\,K_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,L_k(0; 1) + \\
&\quad + j\,(2\,i + 1)\,L_i(0; 1)\,(2\,k + 1)\,L_k(0; 1)\}
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Die entsprechenden Beiträge für die übrigen drei Quadraten berücksichtigt man durch Faltung.

Die in (48) auftretenden Faktoren von $a, b, c, \ldots, j$ kann man aus der folgenden Tabelle ein für alle Mal durch Produktbildung berechnen:

n	$(2n+1) I_n(0;1)$	$(2n+1) K_n(0;1)$	$(2n+1) L_n(0;1)$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{17}{48}$
3	$-\frac{7}{8}$	0	$\frac{7}{24}$
4	0	$-\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$

(49)

Mit aus (49) gebildeten Produkt-Tabellen lassen sich dann die F_{ik} (nach Faltung) bequem mit der Rechenmaschine in einem Arbeitsgang berechnen.

Zu beachten ist, dass durch die Faltung die Koeffizienten F_{ik} auch für $i > 2$ bzw. $k > 2$ im allgemeinen — wenn nicht besondere Symmetrieverhältnisse für $f(\xi, \eta)$ vorliegen — von Null verschieden sein werden, obgleich das Polynom (45) für $f(\xi, \eta)$ sowohl in ξ als auch in η nur von zweitem Grade war.

Zusammenfassung.

Durch Doppelreihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen wird die Lösung des Dirichletschen Problems mittels Picard-Iteration numerisch durchgeführt. Für den Rechteck- und den Ellipsenrand können die Entwicklungskoeffizienten der gesuchten Lösung explizit angegeben werden. Einfache Beispiele werden gebracht. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Legendreschen Koeffizienten für eine Funktion zweier Veränderlicher wird mitgeteilt.