BEMERKUNGEN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS FÜR ALLGEMEINERE RÄNDER *

VON

ERWIN FEHLBERG

in Drummondville, Canada

I. Einleitung und Programm

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Berechnung der Lösung des Dirichletschen Problems für die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in ihrer Normalform:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)\cdot z=d(x, y) \tag{1}$$

vorgelegt sei.

Indem wir uns zur numerischen Lösung dieses Problems der Picardschen Iterationsmethode bedienen, können wir uns darauf beschränken, anstelle von (1) die spezielle Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e(x, y) \tag{2}$$

zugrunde zu legen, da die Picardsche Iterationsmethode die Lösung von (1) aus Lösungen von (2) aufbaut.

Der vorgelegten geschlossenen, sich nicht überschneidenden Randkurve in der (x, y)-Ebene zeichnen wir eine Ellipse um, deren Hauptachsen den Koordinatenachsen parallel seien. Diese Ellipse soll sich unserer Randkurve von aussen möglichst anschmiegen. Der numerischen Rechnung wegen wollen wir jedoch darauf achten, dass

* In einer früheren Arbeit, Acta mathematica, Band 87, 1952, Seite 361/382, hat Verf. dieses Problem für spezielle achsensymmetrische Ränder untersucht.

das Achsenverhältnis dieser Ellipse eine möglichst einfache rationale Zahl wird. Weiter setzen wir voraus, dass der von dem Mittelpunkt dieser (nicht eindeutig bestimmten) Ellipse zur Randkurve gezogene Radiusvektor r eine eindeutige Funktion des Polarwinkels φ ist. Diese Bedingung ist z. B. immer erfüllt, wenn der Rand eine konvexe Kurve ist, ohne dass der konvexe Charakter der Randkurve für die Eindeutigkeit von $r(\varphi)$ notwendig wäre.

Durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x' + m_1 \\ y &= a\,y' + n_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

führen wir ein neues Koordinatensystem x', y' so ein, dass der Mittelpunkt unserer Ellipse im Nullpunkt dieses Koordinatensystems liegt und die grosse Achse der Ellipse die Länge 1 erhält. Die Transformation (3) überführe (2) in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = e'(x', y'). \tag{4}$$

Weiter überführen wir unsere Ellipse jetzt durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x' &= m_2\,\xi \\ y' &= n_2\,\eta \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

bei der entweder m_2 oder n_2 gleich 1 ist, in den Einheitskreis der (ξ, η)-Ebene mit dem Nullpunkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Mittelpunkt. Diese Transformation überführt zugleich unsere vorgelegte geschlossene Randkurve in eine ganz im Innern dieses Einheitskreises verlaufende geschlossene Kurve der (ξ, η)-Ebene.

Durch die Transformation (5) wird aus (4) eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + A\,\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = f(\xi, \eta), \tag{6}$$

wobei A eine reelle positive Konstante bedeutet, die man durch eventuelle Variablenvertauschung stets grösser oder gleich 1 machen kann.

Wir werden das Dirichletsche Problem im folgenden in zwei Schritten lösen. Für den ersten Schritt werden wir die vorgegebenen Randwerte von der vorgelegten Randkurve auf die umbeschriebene Ellipse übertragen und das Dirichletsche Problem für die Ellipse lösen. Dies liefert uns eine erste grobe Näherung unserer gesuchten Näherung. Beim zweiten Schritt wird diese erste Näherung unseres Problems korrigiert, indem man eine Lösung der homogen gemachten Gleichung (4) berechnet, die den Fehler der ersten Näherung in einem System diskreter Punkte des vorgelegten ursprünglichen Randes nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht. Die Addition dieser Korrektur zu der ersten Näherung ergibt unsere numerische Lösung des Dirichletschen Problems.

Für die numerische Handhabung des Problems werden wir uns in der transformierten Differentialgleichung (6) sowohl $f(\xi, \eta)$ als auch die gesuchte Lösung $z(\xi, \eta)$ in nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Doppelreihen entwickelt denken:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i, k} F_{i, k} P_i(\xi) P_k(\eta)^{1} \tag{7}$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{l, m} Z_{l, m} P_l(\xi) P_m(\eta). \tag{8}$$

Wir setzen also voraus, dass $f(\xi, \eta)$ und $z(\xi, \eta)$ in und auf dem dem Einheitskreise der (ξ, η)-Ebene umbeschriebenen Quadrat $-1 \leqq \xi \leqq +1$; $-1 \leqq \eta \leqq +1$ hinreichend stetig und glatt sind, um die Konvergenz der Doppelreihen (7) und (8) zu gewährleisten. Ferner setzen wir die eindeutige Lösung des Dirichletschen Problems voraus.

Unsere Aufgabe besteht dann also in der Berechnung der Koeffizienten $Z_{l, m}$ der Lösung (8) des Dirichletschen Problems. Die Zahl der Glieder, die wir in den Doppelreihen (7) und (8) mitzunehmen haben, wird sich nach dem Aussehen sowohl der Funktion $f(\xi, \eta)$ als auch der vorgelegten Randwerte unseres Problems richten.

II. Erste Näherung für die Lösung des Dirichletschen Problems

Für das Folgende wollen wir annehmen, dass wir $f(\xi, \eta)$ bereits hinreichend genau approximieren können, wenn wir uns in (7) auf $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ und $i + k \leqq 4$ beschränken. In III werden wir zum Schluss kurz diskutieren, wie man vorzugehen hat, wenn sich $f(\xi, \eta)$ nicht durch so wenige Glieder genau genug annähern lässt.

Da sich durch die zweimalige Differentiation, die in (6) an der Funktion $z(\xi, \eta)$ durchzuführen ist, der Grad der Legendreschen Polynome um 2 erniedrigt, müssen wir für den in (6) beabsichtigten Koeffizientenvergleich, den wir nach Einführung der Ansätze (7) und (8) in (6) vornehmen wollen, in (8) $l = 0, 1, \ldots, 6$, $m = 0, 1, \ldots, 6$ und $l + m \leqq 6$ zulassen. Unter diesen Voraussetzungen für die Indizes i, k, l und m

[1] Zur numerischen Berechnung der $F_{i, k}$ vergleiche man, falls die die $F_{i, k}$ definierenden Doppelintegrale nicht geschlossen berechenbar sind, die oben zitierte Arbeit des Verfassers. Das dort auf S. 380/382 beschriebene Verfahren kann durch Unterteilung des Grundquadrates verfeinert werden.

ergibt dieser Koeffizientenvergleich der Legendreschen Polynome in (6) das folgende lineare Gleichungssystem für die gesuchten $Z_{l,m}$:

$$\left.\begin{aligned}
3\,AZ_{02}+10\,AZ_{04}+21\,AZ_{06}+3\,Z_{20}+10\,Z_{40}+21\,Z_{60}&=F_{00}\\
35\,AZ_{04}+90\,AZ_{06}+3\,Z_{22}+10\,Z_{42}&=F_{02}\\
99\,AZ_{06}+3\,Z_{24}&=F_{04}\\
3\,AZ_{22}+10\,AZ_{24}+35\,Z_{40}+90\,Z_{60}&=F_{20}\\
35\,AZ_{24}+35\,Z_{42}&=F_{22}\\
3\,AZ_{42}+99\,Z_{60}&=F_{40}
\end{aligned}\right\}\tag{9 a}$$

$$\left.\begin{aligned}
15\,AZ_{03}+42\,AZ_{05}+3\,Z_{21}+10\,Z_{41}&=F_{01}\\
63\,AZ_{05}+3\,Z_{23}&=F_{03}\\
15\,AZ_{23}+35\,Z_{41}&=F_{21}
\end{aligned}\right\}\tag{9 b}$$

$$\left.\begin{aligned}
3\,AZ_{12}+10\,AZ_{14}+15\,Z_{30}+42\,Z_{50}&=F_{10}\\
35\,AZ_{14}+15\,Z_{32}&=F_{12}\\
3\,AZ_{32}+63\,Z_{50}&=F_{30}
\end{aligned}\right\}\tag{9 c}$$

$$\left.\begin{aligned}
15\,AZ_{13}+42\,AZ_{15}+15\,Z_{31}+42\,Z_{51}&=F_{11}\\
63\,AZ_{15}+15\,Z_{33}&=F_{13}\\
15\,AZ_{33}+63\,Z_{51}&=F_{31}
\end{aligned}\right\}\tag{9 d}$$

Das System zerfällt also in vier getrennte Systeme. Dieser Umstand, der der speziellen Form der Differentialgleichung (6) zu verdanken ist, erleichtert die numerische Berechnung der $Z_{l,m}$ wesentlich.

Zu diesen 15 Gleichungen für die 28 Koeffizienten $Z_{l,m}$ in (8) müssen nun noch 13 weitere Gleichungen hinzutreten, um die Berechnung der $Z_{l,m}$ zu ermöglichen. Diese noch fehlenden 13 Gleichungen hat man nun aus den bis jetzt noch nicht benutzten Randwerten zu gewinnen.

Da wir bei der hier zunächst zu behandelnden ersten Näherung den Einheitskreis der (ξ,η)-Ebene als Randform vorliegen haben, werden wir in (8) zweckmässig Polarkoordinaten einführen:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\cos(\pi\tau)\\ \eta&=\sin(\pi\tau)\end{aligned}\right\}(-1\leqq\tau\leqq+1).\tag{10}$$

Längs des Kreisrandes ergibt sich dann für die in (8) auftretenden Legendreschen Polynome:

$$\left.\begin{aligned}
P_0(\xi) &= 1 \\
P_1(\xi) &= \cos(\pi\tau) \\
P_2(\xi) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2\pi\tau) \\
P_3(\xi) &= \frac{3}{8}\cos(\pi\tau) + \frac{5}{8}\cos(3\pi\tau) \\
P_4(\xi) &= \frac{9}{64} + \frac{5}{16}\cos(2\pi\tau) + \frac{35}{64}\cos(4\pi\tau) \\
P_5(\xi) &= \frac{15}{64}\cos(\pi\tau) + \frac{35}{128}\cos(3\pi\tau) + \frac{63}{128}\cos(5\pi\tau) \\
P_6(\xi) &= \frac{25}{256} + \frac{105}{512}\cos(2\pi\tau) + \frac{63}{256}\cos(4\pi\tau) + \frac{231}{512}\cos(6\pi\tau)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für $P_\nu(\eta)$, indem man in $P_\nu(\xi)$ jetzt τ durch $\frac{1}{2} - \tau$ ersetzt.

Mit (11) und den entsprechenden Ausdrücken für $P_\nu(\eta)$ gehe man in (8) ein und entwickele auch die linke Seite von (8) längs des Kreisrandes, d. h. die auf den Kreisrand übertragenen ursprünglichen Randwerte, durch trigonometrische Interpolation z. B. nach dem Rungeschen 12-Ordinaten-Schema:

$$\left.\begin{aligned}
z = {} & C_0 + C_1\cdot\cos(\pi\tau) + C_2\cdot\cos(2\pi\tau) + C_3\cdot\cos(3\pi\tau) + C_4\cdot\cos(4\pi\tau) + C_5\cdot\cos(5\pi\tau) + \\
& + C_6\cdot\cos(6\pi\tau) \\
& + S_1\cdot\sin(\pi\tau) + S_2\cdot\sin(2\pi\tau) + S_3\cdot\sin(3\pi\tau) + S_4\cdot\sin(4\pi\tau) + S_5\cdot\sin(5\pi\tau)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Durch Koeffizientenvergleich der trigonometrischen Funktionen ergeben sich dann die noch benötigten 13 linearen Gleichungen für die $Z_{l,m}$:

$$\left.\begin{aligned}
& Z_{00} + \frac{1}{4}Z_{02} + \frac{9}{64}Z_{04} + \frac{25}{256}Z_{06} + \frac{1}{4}Z_{20} - \frac{7}{32}Z_{22} - \frac{21}{256}Z_{24} + \frac{9}{64}Z_{40} - \frac{21}{256}Z_{42} + \frac{25}{256}Z_{60} = C_0 \\
& -\frac{3}{4}Z_{02} - \frac{5}{16}Z_{04} - \frac{105}{512}Z_{06} + \frac{3}{4}Z_{20} + \frac{119}{512}Z_{24} + \frac{5}{16}Z_{40} - \frac{119}{512}Z_{42} + \frac{105}{512}Z_{60} = C_2 \\
& \frac{35}{64}Z_{04} + \frac{63}{256}Z_{06} - \frac{9}{32}Z_{22} + \frac{5}{256}Z_{24} + \frac{35}{64}Z_{40} + \frac{5}{256}Z_{42} + \frac{63}{256}Z_{60} = C_4 \\
& -\frac{231}{512}Z_{06} + \frac{105}{512}Z_{24} - \frac{105}{512}Z_{42} + \frac{231}{512}Z_{60} = C_6
\end{aligned}\right\} \tag{13 a}$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{01}+\frac{3}{8}Z_{03}+\frac{15}{64}Z_{05}-\frac{1}{8}Z_{21}-\frac{9}{32}Z_{23}-\frac{1}{64}Z_{41}&=S_1\\
-\frac{5}{8}Z_{03}-\frac{35}{128}Z_{05}+\frac{3}{8}Z_{21}-\frac{1}{64}Z_{23}-\frac{15}{128}Z_{41}&=S_3\\
\frac{63}{128}Z_{05}\qquad-\frac{15}{64}Z_{23}+\frac{35}{128}Z_{41}&=S_5
\end{aligned}\right\}\quad(13\text{ b})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{10}-\frac{1}{8}Z_{12}-\frac{1}{64}Z_{14}+\frac{3}{8}Z_{30}-\frac{9}{32}Z_{32}+\frac{15}{64}Z_{50}&=C_1\\
-\frac{3}{8}Z_{12}+\frac{15}{128}Z_{14}+\frac{5}{8}Z_{30}+\frac{1}{64}Z_{32}+\frac{35}{128}Z_{50}&=C_3\\
\frac{35}{128}Z_{14}\qquad-\frac{15}{64}Z_{32}+\frac{63}{128}Z_{50}&=C_5
\end{aligned}\right\}\quad(13\text{ c})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}Z_{11}-\frac{1}{8}Z_{13}-\frac{5}{256}Z_{15}-\frac{1}{8}Z_{31}-\frac{21}{128}Z_{33}-\frac{5}{256}Z_{51}&=S_2\\
-\frac{5}{16}Z_{13}+\frac{7}{64}Z_{15}+\frac{5}{16}Z_{31}\qquad-\frac{7}{64}Z_{51}&=S_4\\
\frac{63}{256}Z_{15}\qquad-\frac{25}{128}Z_{33}+\frac{63}{256}Z_{51}&=0
\end{aligned}\right\}\quad(13\text{ d})$$

Da wir hier infolge der Übertragung der Randwerte von der Randkurve auf die umbeschriebene Ellipse nur eine grobe Näherung der Lösung erwarten können, wird es oft schon genügen, anstelle der Rungeschen trigonometrischen Interpolationsformeln die Thompsonschen Formeln[1] zu benutzen, die statt von (12) von dem folgenden trigonometrischen Interpolationspolynom:

$$\left.\begin{aligned}
z=C_0+C_1\cdot\cos(\pi\tau)+C_2\cdot\cos(2\pi\tau)+C_3\cdot\cos(3\pi\tau)\\
+S_1\cdot\sin(\pi\tau)+S_2\cdot\sin(2\pi\tau)+S_3\cdot\sin(3\pi\tau)
\end{aligned}\right\}\quad(12')$$

ausgehen.

Bei Zugrundelegung von (12′) anstelle von (12) hat man in (13 a) bis (13 d) sowie den folgenden Formeln (14 a) bis (14 d) $C_4=C_5=C_6=0$ und $S_4=S_5=0$ zu setzen.

Die obigen 13 Gleichungen zerfallen also wieder in vier getrennte Systeme. Dieser Umstand ist diesmal der achsensymmetrischen Form des Kreisrandes zu verdanken.

Aus (9 a) und (13 a), aus (9 b) und (13 b), aus (9 c) und (13 c) sowie aus (9 d) und (13 d) lassen sich dann sämtliche $Z_{l,m}$ sukzessiv berechnen. Die Ausrechnung ergibt:

[1] Man vergleiche z. B. WHITTAKER-ROBINSON, *The calculus of observations*, London und Glasgow 1948, S. 271/273.

$$\left.\begin{aligned}
Z_{42} &= \frac{1}{7}\frac{A^2}{(A+1)(A^2+14A+1)}\left\{-512\,C_6 - \frac{7}{3}\frac{1}{A}F_{04} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{A^2}\left(3A+\frac{1}{5}\right)F_{22} + \frac{7}{3}F_{40}\right\}\\
Z_{60} &= \frac{1}{99}F_{40} - \frac{1}{33}AZ_{42}\\
Z_{24} &= \frac{1}{35}\frac{1}{A}F_{22} - \frac{1}{A}F_{42}\\
Z_{06} &= \frac{1}{99}\frac{1}{A}F_{04} - \frac{1}{1155}\frac{1}{A^2}F_{22} + \frac{1}{33}\frac{1}{A^2}Z_{42}\\
Z_{22} &= \frac{1}{12}\frac{A}{A^2+6A+1}\left\{-256\,C_4 + 4\frac{1}{A}F_{02} + 4F_{20} - 297\,Z_{06} - \right.\\
&\quad \left. -5(8A-1)Z_{24} - 5\frac{1}{A}(8-A)Z_{42} - 297\,Z_{60}\right\}\\
Z_{40} &= \frac{1}{35}F_{20} - \frac{2}{7}AZ_{24} - \frac{18}{7}Z_{60} - \frac{3}{35}A\,Z_{22}\\
Z_{04} &= \frac{1}{35}\frac{1}{A}F_{02} - \frac{2}{7}\frac{1}{A}Z_{42} - \frac{18}{7}Z_{06} - \frac{3}{35}\frac{1}{A}Z_{22}\\
Z_{02} &= \frac{1}{3}\frac{1}{A+1}\left\{-4\,C_2 + F_{00} - 5\left(\frac{1}{4}+2A\right)Z_{04} - 21\left(\frac{5}{128}+A\right)Z_{06} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{119}{128}Z_{24} - \frac{35}{4}Z_{40} - \frac{119}{128}Z_{42} - \frac{2583}{128}Z_{60}\right\}\\
Z_{20} &= \frac{1}{3}F_{00} - \frac{10}{3}AZ_{04} - 7\,AZ_{06} - \frac{10}{3}Z_{40} - 7\,Z_{60} - A\,Z_{02}\\
Z_{00} &= C_0 - \frac{1}{4}Z_{02} - \frac{9}{64}Z_{04} - \frac{25}{256}Z_{06} - \frac{1}{4}Z_{20} + \frac{7}{32}Z_{22} + \\
&\quad + \frac{21}{256}Z_{24} - \frac{9}{64}Z_{40} + \frac{21}{256}Z_{42} - \frac{25}{256}Z_{60}
\end{aligned}\right\}\quad (14\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{23} &= \frac{1}{3}\frac{A}{5A^2+10A+1}\left\{-128\,S_5 + \frac{1}{A}F_{03} + F_{21}\right\}\\
Z_{05} &= \frac{1}{63}\frac{1}{A}F_{03} - \frac{1}{21}\frac{1}{A}Z_{23}\\
Z_{41} &= \frac{1}{35}F_{21} - \frac{3}{7}A\,Z_{23}
\end{aligned}\right\}\quad (14\,\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{03} &= \frac{1}{5}\frac{1}{3A+1}\left\{-8S_3 + F_{01} - 7\left(\frac{5}{16}+6A\right)Z_{05} - \frac{175}{16}Z_{41} - \frac{1}{8}Z_{23}\right\}\\
Z_{21} &= \frac{1}{3}F_{01} - 14AZ_{05} - \frac{10}{3}Z_{41} - 5AZ_{03}\\
Z_{01} &= S_1 - \frac{15}{64}Z_{05} + \frac{1}{64}Z_{41} + \frac{9}{32}Z_{23} - \frac{3}{8}Z_{03} + \frac{1}{8}Z_{21}
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{32} &= \frac{1}{3}\frac{A}{A^2+10A+5}\left\{-128C_5 + \frac{1}{A}F_{12} + F_{30}\right\}\\
Z_{14} &= \frac{1}{35}\frac{1}{A}F_{12} - \frac{3}{7}\frac{1}{A}Z_{32}\\
Z_{50} &= \frac{1}{63}F_{30} - \frac{1}{21}AZ_{32}\\
Z_{12} &= \frac{1}{3}\frac{1}{A+3}\left\{-24C_3 + F_{10} + 5\left(\frac{9}{16}-2A\right)Z_{14} - \frac{567}{16}Z_{50} + \frac{3}{8}Z_{32}\right\}\\
Z_{30} &= \frac{1}{15}F_{10} - \frac{2}{3}AZ_{14} - \frac{14}{5}Z_{50} - \frac{1}{5}AZ_{12}\\
Z_{10} &= C_1 + \frac{1}{64}Z_{14} - \frac{15}{64}Z_{50} + \frac{9}{32}Z_{32} + \frac{1}{8}Z_{12} - \frac{3}{8}Z_{30}
\end{aligned}\right\} \quad (14\text{ c})$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_{33} &= \frac{1}{5}\frac{A}{3A^2+10A+3}\left\{\frac{1}{A}F_{13} + F_{31}\right\}\\
Z_{15} &= \frac{1}{63}\frac{1}{A}F_{13} - \frac{5}{21}\frac{1}{A}Z_{33}\\
Z_{51} &= \frac{1}{63}F_{31} - \frac{5}{21}AZ_{33}\\
Z_{13} &= \frac{1}{5}\frac{1}{A+1}\left\{-16S_4 + \frac{1}{3}F_{11} + 7\left(\frac{1}{4}-2A\right)Z_{15} - \frac{63}{4}Z_{51}\right\}\\
Z_{31} &= \frac{1}{15}F_{11} - \frac{14}{5}AZ_{15} - \frac{14}{5}Z_{51} - AZ_{13}\\
Z_{11} &= 2S_2 + \frac{5}{128}Z_{15} + \frac{5}{128}Z_{51} + \frac{21}{64}Z_{33} + \frac{1}{4}Z_{13} + \frac{1}{4}Z_{31}
\end{aligned}\right\} \quad (14\text{ d})$$

Durch Einsetzen dieser Werte $Z_{l,m}$ in (8) ergibt sich dann die erste Näherung $z = z^{(1)}(\xi, \eta)$ unserer gesuchten Lösung:

$$z^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{l,m} Z^{(1)}_{l,m}\, P_l(\xi)\cdot P_m(\eta). \tag{15}$$

Hierbei haben wir auch den Legendreschen Koeffizienten in (15) den oberen Index 1 beigefügt, um damit zum Ausdruck zu bringen, dass es sich hierbei um die Koeffizienten der ersten Näherung unserer gesuchten Lösung des Dirichletschen Problems handelt.

III. Korrektur der Näherungslösung des Dirichletschen Problems

Die in II gefundene erste Näherung unserer gesuchten Lösung wird im allgemeinen längs der ursprünglichen Randkurve die vorgeschriebenen Randwerte noch nicht genügend genau erfüllen, da die Übertragung der Randwerte von der ursprünglichen Randkurve auf die umbeschriebene Ellipse zu Abweichungen der Lösungswerte längs der ursprünglichen Randkurve von den dort vorgegebenen Randwerten führen muss.

Wir wollen daher versuchen, zu unserer Näherungslösung Lösungen der homogen gemachten Differentialgleichung (4) zu addieren und dadurch diese Abweichungen unserer Näherungslösung längs der Randkurve möglichst klein zu machen.

Da die homogen gemachte Gleichung (4) die Laplacesche Potentialgleichung ist, erhalten wir solche Lösungen sofort in der Form:

$$z = \tilde{z} = \sum_{\varkappa} a_{\varkappa} \cdot r'^{\varkappa} \cdot \cos(\varkappa \varphi') + \sum_{\lambda} b_{\lambda} \cdot r'^{\lambda} \cdot \sin(\lambda \varphi'), \tag{16}$$

wobei r' und φ' Polarkoordinaten in der (x', y')-Ebene bedeuten.

Wir bestimmen nun die Werte unserer Näherungslösung z. B. in den durch den Polarwinkel $\varphi' = 0°, 15°, 30°, 45°, \ldots, 345°$ bestimmten Punkten des ursprünglichen Randes und bezeichnen sie mit $z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, \ldots, z_{23}^{(1)}$. Die an den gleichen Stellen vorgegebenen Randwerte seien $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots z_{23}$. Die Differenzen $z_\nu - z_\nu^{(1)} = \delta z_\nu$ suchen wir nun nach der Methode der kleinsten Quadrate durch einen Ansatz (16) mit $\varkappa = 0, 1, \ldots, 6$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, 5$ zu approximieren:

$$\sum_{\nu=0}^{23} \{\delta z_\nu - [a_0 + a_1 \cdot r'_\nu \cos \varphi'_\nu + \cdots + a_6 \cdot r'^6_\nu \cos(6 \varphi'_\nu) + \\ + b_1 \cdot r'_\nu \sin \varphi'_\nu + \cdots + b_5 \cdot r'^5_\nu \sin(5 \varphi'_\nu)]\}^2 = \text{Minimum}. \tag{17}$$

Der Ansatz (17) ist offenbar analog der Minimumsforderung, die der trigonometrischen Interpolation zugrunde liegt, und geht für den Spezialfall, dass sämtliche $r'_\nu = 1$ sind (Kreisrand), in diese über.

Aus (17) erhält man durch Differentiation nach den Konstanten $a_\varkappa$ und b_λ ein lineares System von 12 Gleichungen für die 12 unbekannten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_6, b_1, b_2, \ldots b_5$. Dieses Gleichungssystem lässt sich schreiben in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{6} \alpha_{mn}^{(1)} \cdot a_n + \sum_{n=1}^{5} \beta_{mn}^{(1)} \cdot b_n &= \gamma_m^{(1)} \qquad (m=0, 1, \dots, 6) \\ \sum_{n=0}^{6} \alpha_{mn}^{(2)} \cdot a_n + \sum_{n=1}^{5} \beta_{mn}^{(2)} \cdot b_n &= \gamma_m^{(2)} \qquad (m=1, 2, \dots, 5) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystem sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{mn}^{(1)} &= \sum_{\nu=0}^{23} r_\nu'^{\,m+n} \cdot \cos\,(m\varphi_\nu') \cdot \cos\,(n\,\varphi_\nu') \\ \beta_{mn}^{(1)} &= \sum_{\nu=0}^{23} r_\nu'^{\,m+n} \cdot \cos\,(m\varphi_\nu') \cdot \sin\,(n\,\varphi_\nu') \\ \alpha_{mn}^{(2)} &= \sum_{\nu=0}^{23} r_\nu'^{\,m+n} \cdot \sin\,(m\varphi_\nu') \cdot \cos\,(n\,\varphi_\nu') \\ \beta_{mn}^{(2)} &= \sum_{\nu=0}^{23} r_\nu'^{\,m+n} \cdot \sin\,(m\varphi_\nu') \cdot \sin\,(n\,\varphi_\nu') \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_m^{(1)} &= \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^{\,m} \cdot \cos\,(m\,\varphi_\nu') \\ \gamma_m^{(2)} &= \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^{\,m} \cdot \sin\,(m\varphi_\nu') \end{aligned}\right\} \tag{19 }$$

Wegen $\alpha_{nm}^{(1)} = \alpha_{mn}^{(1)}$, $\beta_{nm}^{(1)} = \alpha_{mn}^{(2)}$, $\beta_{nm}^{(2)} = \beta_{mn}^{(2)}$ ist die Koeffizientenmatrix von (18) symmetrisch.

Für den Spezialfall des Kreisrandes (alle $r_\nu' = 1$) folgt aus (19), dass nur die in der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix zu (18) stehenden Koeffizienten $\alpha_{mm}^{(1)}$ $(m=0, 1, \dots, 6)$ und $\beta_{mm}^{(2)}$ $(m=1, 2, \dots, 5)$ von Null verschieden sind und die Werte $\alpha_{00}^{(1)} = 24$, $\alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{22}^{(1)} = \cdots = \alpha_{66}^{(1)} = 12$; $\beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(2)} = \cdots = \beta_{55}^{(2)} = 12$ haben.

Bei nicht zu grossen Abweichungen des Randes von der Kreisform werden wir erwarten dürfen, dass dann die Koeffizienten der Hauptdiagonale von (18) doch noch von überwiegender Grösse sein werden. In solchem Falle lässt sich dann das System (18) relativ einfach und schnell iterativ lösen.

Setzt man in (19) die Winkelfunktionswerte ein, so erhält man für die Koeffizienten der linken Seiten von (18) die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{00}^{(1)} &= 24 \\ \alpha_{01}^{(1)} &= (r_0' - r_{12}') + (r_1' - r_{11}' - r_{13}' + r_{23}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_2' - r_{10}' - r_{24}' + r_{22}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\ &\quad + (r_3' - r_9' - r_{15}' + r_{21}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_4' - r_8' - r_{16}' + r_{20}') \cdot \tfrac{1}{2} + (r_5' - r_7' - r_{17}' + r_{19}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \alpha_{02}^{(1)} &= (r_0'^2 - r_6'^2 + r_{12}'^2 - r_{18}'^2) + (r_1'^2 - r_5'^2 - r_7'^2 + r_{11}'^2 + r_{13}'^2 - r_{17}'^2 - r_{19}'^2 + r_{23}'^2) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\ &\quad + (r_2'^2 - r_4'^2 - r_8'^2 + r_{10}'^2 + r_{14}'^2 - r_{16}'^2 - r_{20}'^2 + r_{22}'^2) \cdot \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{03}^{(1)} &= (r_0^{\prime 3} - r_4^{\prime 3} + r_8^{\prime 3} - r_{12}^{\prime 3} + r_{16}^{\prime 3} - r_{20}^{\prime 3}) + \\
&\quad + (r_1^{\prime 3} - r_3^{\prime 3} - r_5^{\prime 3} + r_7^{\prime 3} + r_9^{\prime 3} - r_{11}^{\prime 3} - r_{13}^{\prime 3} + r_{15}^{\prime 3} + r_{17}^{\prime 3} - r_{19}^{\prime 3} - r_{21}^{\prime 3} + r_{23}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\
\alpha_{04}^{(1)} &= (r_0^{\prime 4} - r_3^{\prime 4} + r_6^{\prime 4} - r_9^{\prime 4} + r_{12}^{\prime 4} - r_{15}^{\prime 4} + r_{18}^{\prime 4} - r_{21}^{\prime 4}) + \\
&\quad + (r_1^{\prime 4} - r_2^{\prime 4} - r_4^{\prime 4} + r_5^{\prime 4} + r_7^{\prime 4} - r_8^{\prime 4} - r_{10}^{\prime 4} + r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} - r_{14}^{\prime 4} - r_{16}^{\prime 4} + r_{17}^{\prime 4} + r_{19}^{\prime 4} - r_{20}^{\prime 4} - r_{22}^{\prime 4} + r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{05}^{(1)} &= (r_0^{\prime 5} - r_{12}^{\prime 5}) + (r_1^{\prime 5} - r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} + r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} - \\
&\quad - (r_2^{\prime 5} - r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} + r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (r_3^{\prime 5} - r_9^{\prime 5} - r_{15}^{\prime 5} + r_{21}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \\
&\quad + (r_4^{\prime 5} - r_8^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} + r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_5^{\prime 5} - r_7^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} + r_{19}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
\alpha_{06}^{(1)} &= r_0^{\prime 6} - r_2^{\prime 6} + r_4^{\prime 6} - r_6^{\prime 6} + r_8^{\prime 6} - r_{10}^{\prime 6} + r_{12}^{\prime 6} - r_{14}^{\prime 6} + r_{16}^{\prime 6} - r_{18}^{\prime 6} + r_{20}^{\prime 6} - r_{22}^{\prime 6} \\
\alpha_{11}^{(1)} &= (r_0^{\prime 2} + r_{12}^{\prime 2}) + (r_1^{\prime 2} + r_{11}^{\prime 2} + r_{13}^{\prime 2} + r_{23}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{4}\,(2+\sqrt{3}) + \\
&\quad + (r_2^{\prime 2} + r_{10}^{\prime 2} + r_{14}^{\prime 2} + r_{22}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{3}{4} + (r_3^{\prime 2} + r_9^{\prime 2} + r_{15}^{\prime 2} + r_{21}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{2} + \\
&\quad + (r_4^{\prime 2} + r_8^{\prime 2} + r_{16}^{\prime 2} + r_{20}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{4} + (r_5^{\prime 2} + r_7^{\prime 2} + r_{17}^{\prime 2} + r_{19}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{4}\,(2-\sqrt{3}) \\
\alpha_{12}^{(1)} &= (r_0^{\prime 3} - r_{12}^{\prime 3}) + (r_1^{\prime 3} - r_{11}^{\prime 3} - r_{13}^{\prime 3} + r_{23}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_2^{\prime 3} - r_{10}^{\prime 3} - r_{14}^{\prime 3} + r_{22}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_4^{\prime 3} - r_8^{\prime 3} - r_{16}^{\prime 3} + r_{20}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4} - (r_5^{\prime 3} - r_7^{\prime 3} - r_{17}^{\prime 3} + r_{19}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\alpha_{13}^{(1)} &= (r_0^{\prime 4} + r_{12}^{\prime 4}) + (r_1^{\prime 4} + r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} + r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} - \\
&\quad - (r_3^{\prime 4} + r_4^{\prime 4} + r_8^{\prime 4} + r_9^{\prime 4} + r_{15}^{\prime 4} + r_{16}^{\prime 4} + r_{20}^{\prime 4} + r_{21}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_5^{\prime 4} + r_7^{\prime 4} + r_{17}^{\prime 4} + r_{19}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\alpha_{14}^{(1)} &= (r_0^{\prime 5} - r_{12}^{\prime 5}) + (r_1^{\prime 5} - r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} + r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} - (r_2^{\prime 5} - r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} + r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_3^{\prime 5} - r_9^{\prime 5} - r_{15}^{\prime 5} + r_{21}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - (r_4^{\prime 5} - r_8^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} + r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4} + (r_5^{\prime 5} - r_7^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} + r_{19}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\alpha_{15}^{(1)} &= (r_0^{\prime 6} + r_{12}^{\prime 6}) + (r_1^{\prime 6} + r_4^{\prime 6} + r_5^{\prime 6} + r_7^{\prime 6} + r_8^{\prime 6} + r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} + r_{16}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} + r_{19}^{\prime 6} + r_{20}^{\prime 6} + r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
&\quad - (r_2^{\prime 6} + r_{10}^{\prime 6} + r_{14}^{\prime 6} + r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{3}{4} - (r_3^{\prime 6} + r_9^{\prime 6} + r_{15}^{\prime 6} + r_{21}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{16}^{(1)} &= (r_0^{\prime 7} - r_{12}^{\prime 7}) - (r_2^{\prime 7} - r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} + r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (r_4^{\prime 7} - r_8^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} + r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{22}^{(1)} &= (r_0^{\prime 4} + r_6^{\prime 4} + r_{12}^{\prime 4} + r_{18}^{\prime 4}) + (r_1^{\prime 4} + r_5^{\prime 4} + r_7^{\prime 4} + r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} + r_{17}^{\prime 4} + r_{19}^{\prime 4} + r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_2^{\prime 4} + r_4^{\prime 4} + r_8^{\prime 4} + r_{10}^{\prime 4} + r_{14}^{\prime 4} + r_{16}^{\prime 4} + r_{20}^{\prime 4} + r_{22}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4} \\
\alpha_{23}^{(1)} &= (r_0^{\prime 5} - r_{12}^{\prime 5}) + (r_1^{\prime 5} + r_5^{\prime 5} - r_7^{\prime 5} - r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} + r_{19}^{\prime 5} + r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \\
&\quad + (r_4^{\prime 5} - r_8^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} + r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{24}^{(1)} &= (r_0^{\prime 6} - r_6^{\prime 6} + r_{12}^{\prime 6} - r_{18}^{\prime 6}) + (r_1^{\prime 6} - r_5^{\prime 6} - r_7^{\prime 6} + r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} - r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6} + r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_2^{\prime 6} - r_4^{\prime 6} - r_8^{\prime 6} + r_{10}^{\prime 6} + r_{14}^{\prime 6} - r_{16}^{\prime 6} - r_{20}^{\prime 6} + r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4} \\
\alpha_{25}^{(1)} &= (r_0^{\prime 7} - r_{12}^{\prime 7}) + (r_1^{\prime 7} - r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} + r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_2^{\prime 7} - r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} + r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_4^{\prime 7} - r_8^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} + r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4} - (r_5^{\prime 7} - r_7^{\prime 7} - r_{17}^{\prime 7} + r_{19}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
\alpha_{26}^{(1)} &= (r_0^{\prime 8} + r_6^{\prime 8} + r_{12}^{\prime 8} + r_{18}^{\prime 8}) - (r_2^{\prime 8} + r_4^{\prime 8} + r_8^{\prime 8} + r_{10}^{\prime 8} + r_{14}^{\prime 8} + r_{16}^{\prime 8} + r_{20}^{\prime 8} + r_{22}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2}
\end{aligned}\right\}\quad (20\ \mathrm{a})
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{33}^{(1)} &= (r_0^{\prime 6} + r_4^{\prime 6} + r_8^{\prime 6} + r_{12}^{\prime 6} + r_{16}^{\prime 6} + r_{20}^{\prime 6}) + \\
&\quad + (r_1^{\prime 6} + r_3^{\prime 6} + r_5^{\prime 6} + r_7^{\prime 6} + r_9^{\prime 6} + r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} + r_{15}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} + r_{19}^{\prime 6} + r_{21}^{\prime 6} + r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{34}^{(1)} &= (r_0^{\prime 7} - r_{12}^{\prime 7}) + (r_1^{\prime 7} - r_5^{\prime 7} + r_7^{\prime 7} - r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} + r_{17}^{\prime 7} - r_{19}^{\prime 7} + r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \\
&\quad + (r_3^{\prime 7} - r_9^{\prime 7} - r_{15}^{\prime 7} + r_{21}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_4^{\prime 7} - r_8^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} + r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{35}^{(1)} &= (r_0^{\prime 8} + r_{12}^{\prime 8}) + (r_1^{\prime 8} + r_{11}^{\prime 8} + r_{13}^{\prime 8} + r_{23}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + \\
&\quad + (r_3^{\prime 8} - r_4^{\prime 8} - r_8^{\prime 8} + r_9^{\prime 8} + r_{15}^{\prime 8} - r_{16}^{\prime 8} - r_{20}^{\prime 8} + r_{21}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_5^{\prime 8} + r_7^{\prime 8} + r_{17}^{\prime 8} + r_{19}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \\
\alpha_{36}^{(1)} &= r_0^{\prime 9} - r_4^{\prime 9} + r_8^{\prime 9} - r_{12}^{\prime 9} + r_{16}^{\prime 9} - r_{20}^{\prime 9} \\
\alpha_{44}^{(1)} &= (r_0^{\prime 8} + r_3^{\prime 8} + r_6^{\prime 8} + r_9^{\prime 8} + r_{12}^{\prime 8} + r_{15}^{\prime 8} + r_{18}^{\prime 8} + r_{21}^{\prime 8}) + \\
&\quad + (r_1^{\prime 8} + r_2^{\prime 8} + r_4^{\prime 8} + r_5^{\prime 8} + r_7^{\prime 8} + r_8^{\prime 8} + r_{10}^{\prime 8} + r_{11}^{\prime 8} + r_{13}^{\prime 8} + r_{14}^{\prime 8} + r_{16}^{\prime 8} + r_{17}^{\prime 8} + r_{19}^{\prime 8} + r_{20}^{\prime 8} + r_{22}^{\prime 8} + r_{23}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4} \\
\alpha_{45}^{(1)} &= (r_0^{\prime 9} - r_{12}^{\prime 9}) + (r_1^{\prime 9} - r_{11}^{\prime 9} - r_{13}^{\prime 9} + r_{23}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \\
&\quad + (r_2^{\prime 9} - r_{10}^{\prime 9} - r_{14}^{\prime 9} + r_{22}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + (r_3^{\prime 9} - r_9^{\prime 9} - r_{15}^{\prime 9} + r_{21}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \\
&\quad - (r_4^{\prime 9} - r_8^{\prime 9} - r_{16}^{\prime 9} + r_{20}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4} + (r_5^{\prime 9} - r_7^{\prime 9} - r_{17}^{\prime 9} + r_{19}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
\alpha_{46}^{(1)} &= (r_0^{\prime 10} - r_6^{\prime 10} + r_{12}^{\prime 10} - r_{18}^{\prime 10}) + (r_2^{\prime 10} - r_4^{\prime 10} - r_8^{\prime 10} + r_{10}^{\prime 10} + r_{14}^{\prime 10} - r_{16}^{\prime 10} - r_{20}^{\prime 10} + r_{22}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{55}^{(1)} &= (r_0^{\prime 10} + r_{12}^{\prime 10}) + (r_1^{\prime 10} + r_{11}^{\prime 10} + r_{13}^{\prime 10} + r_{23}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3}) + (r_2^{\prime 10} + r_{10}^{\prime 10} + r_{14}^{\prime 10} + r_{22}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_3^{\prime 10} + r_9^{\prime 10} + r_{15}^{\prime 10} + r_{21}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_4^{\prime 10} + r_8^{\prime 10} + r_{16}^{\prime 10} + r_{20}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_5^{\prime 10} + r_7^{\prime 10} + r_{17}^{\prime 10} + r_{19}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3}) \\
\alpha_{56}^{(1)} &= (r_0^{\prime 11} - r_{12}^{\prime 11}) + (r_2^{\prime 11} - r_{10}^{\prime 11} - r_{14}^{\prime 11} + r_{22}^{\prime 11}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (r_4^{\prime 11} - r_8^{\prime 11} - r_{16}^{\prime 11} + r_{20}^{\prime 11}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{66}^{(1)} &= r_0^{\prime 12} + r_2^{\prime 12} + r_4^{\prime 12} + r_6^{\prime 12} + r_8^{\prime 12} + r_{10}^{\prime 12} + r_{12}^{\prime 12} + r_{14}^{\prime 12} + r_{16}^{\prime 12} + r_{18}^{\prime 12} + r_{20}^{\prime 12} + r_{22}^{\prime 12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{01}^{(1)} &= (r_1' + r_{11}' - r_{13}' - r_{23}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (r_2' + r_{10}' - r_{14}' - r_{22}') \cdot \tfrac{1}{2} + \\
&\quad + (r_3' + r_9' - r_{15}' - r_{21}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_4' + r_8' - r_{16}' - r_{20}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_5' + r_7' - r_{17}' - r_{19}') \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_6' - r_{18}') \\
\beta_{02}^{(1)} &= (r_1^{\prime 2} + r_5^{\prime 2} - r_7^{\prime 2} - r_{11}^{\prime 2} + r_{13}^{\prime 2} + r_{17}^{\prime 2} - r_{19}^{\prime 2} - r_{23}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{2} + \\
&\quad + (r_2^{\prime 2} + r_4^{\prime 2} - r_8^{\prime 2} - r_{10}^{\prime 2} + r_{14}^{\prime 2} + r_{16}^{\prime 2} - r_{20}^{\prime 2} - r_{22}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (r_3^{\prime 2} - r_9^{\prime 2} + r_{15}^{\prime 2} - r_{21}^{\prime 2}) \\
\beta_{03}^{(1)} &= (r_1^{\prime 3} + r_3^{\prime 3} - r_5^{\prime 3} - r_7^{\prime 3} + r_9^{\prime 3} + r_{11}^{\prime 3} - r_{13}^{\prime 3} - r_{15}^{\prime 3} + r_{17}^{\prime 3} + r_{19}^{\prime 3} - r_{21}^{\prime 3} - r_{23}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \\
&\quad + (r_2^{\prime 3} - r_6^{\prime 3} + r_{10}^{\prime 3} - r_{14}^{\prime 3} + r_{18}^{\prime 3} - r_{22}^{\prime 3}) \\
\beta_{04}^{(1)} &= (r_1^{\prime 4} + r_2^{\prime 4} - r_4^{\prime 4} - r_5^{\prime 4} + r_7^{\prime 4} + r_8^{\prime 4} - r_{10}^{\prime 4} - r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} + r_{14}^{\prime 4} - r_{16}^{\prime 4} - r_{17}^{\prime 4} + r_{19}^{\prime 4} + r_{20}^{\prime 4} - r_{22}^{\prime 4} - r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
\beta_{05}^{(1)} &= (r_1^{\prime 5} - r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} - r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_2^{\prime 5} + r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} - r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_3^{\prime 5} + r_9^{\prime 5} - r_{15}^{\prime 5} - r_{21}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \\
&\quad - (r_4^{\prime 5} + r_8^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} - r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (r_5^{\prime 5} + r_7^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} - r_{19}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (r_6^{\prime 5} - r_{18}^{\prime 5})
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_{11}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 2} + r_{5}^{\prime 2} - r_{7}^{\prime 2} - r_{11}^{\prime 2} + r_{13}^{\prime 2} + r_{17}^{\prime 2} - r_{19}^{\prime 2} - r_{23}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_{2}^{\prime 2} + r_{4}^{\prime 2} - r_{8}^{\prime 2} - r_{10}^{\prime 2} + r_{14}^{\prime 2} + r_{16}^{\prime 2} - r_{20}^{\prime 2} - r_{22}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + (r_{3}^{\prime 2} - r_{9}^{\prime 2} + r_{15}^{\prime 2} - r_{21}^{\prime 2}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\beta_{12}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 3} + r_{11}^{\prime 3} - r_{13}^{\prime 3} - r_{23}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{2}^{\prime 3} + r_{10}^{\prime 3} - r_{14}^{\prime 3} - r_{22}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_{3}^{\prime 3} + r_{9}^{\prime 3} - r_{15}^{\prime 3} - r_{21}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_{4}^{\prime 3} + r_{8}^{\prime 3} - r_{16}^{\prime 3} - r_{20}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_{5}^{\prime 3} + r_{7}^{\prime 3} - r_{17}^{\prime 3} - r_{19}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\beta_{13}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 4} - r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} - r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{2}^{\prime 4} - r_{10}^{\prime 4} + r_{14}^{\prime 4} - r_{22}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_{3}^{\prime 4} - r_{9}^{\prime 4} + r_{15}^{\prime 4} - r_{21}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_{5}^{\prime 4} - r_{7}^{\prime 4} + r_{17}^{\prime 4} - r_{19}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\beta_{14}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 5} + r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} - r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{2}^{\prime 5} + r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} - r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{3}{4} - \\
&\quad - (r_{4}^{\prime 5} + r_{8}^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} - r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 5} + r_{7}^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} - r_{19}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\beta_{15}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 6} - r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} - r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3}) + (r_{2}^{\prime 6} - r_{4}^{\prime 6} + r_{8}^{\prime 6} - r_{10}^{\prime 6} - r_{14}^{\prime 6} - r_{16}^{\prime 6} + r_{20}^{\prime 6} - r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_{3}^{\prime 6} - r_{9}^{\prime 6} + r_{15}^{\prime 6} - r_{21}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_{5}^{\prime 6} - r_{7}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3}) \\
\beta_{21}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 3} + r_{11}^{\prime 3} - r_{13}^{\prime 3} - r_{23}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} + (r_{2}^{\prime 3} + r_{10}^{\prime 3} - r_{14}^{\prime 3} - r_{22}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
&\quad - (r_{4}^{\prime 3} + r_{8}^{\prime 3} - r_{16}^{\prime 3} - r_{20}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 3} + r_{7}^{\prime 3} - r_{17}^{\prime 3} - r_{19}^{\prime 3}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} - (r_{6}^{\prime 3} - r_{18}^{\prime 3}) \\
\beta_{22}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 4} + r_{2}^{\prime 4} - r_{4}^{\prime 4} - r_{5}^{\prime 4} + r_{7}^{\prime 4} + r_{8}^{\prime 4} - r_{10}^{\prime 4} - r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} + r_{14}^{\prime 4} - r_{16}^{\prime 4} - r_{17}^{\prime 4} + \\
&\quad + r_{19}^{\prime 4} + r_{20}^{\prime 4} - r_{22}^{\prime 4} - r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \\
\beta_{23}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 5} + r_{5}^{\prime 5} + r_{7}^{\prime 5} + r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} - r_{19}^{\prime 5} - r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \\
&\quad + (r_{2}^{\prime 5} + r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} - r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_{6}^{\prime 5} - r_{18}^{\prime 5}) \\
\beta_{24}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 6} + r_{5}^{\prime 6} - r_{7}^{\prime 6} - r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6} - r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_{2}^{\prime 6} + r_{4}^{\prime 6} - r_{8}^{\prime 6} - r_{10}^{\prime 6} + r_{14}^{\prime 6} + r_{16}^{\prime 6} - r_{20}^{\prime 6} - r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \\
\beta_{25}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 7} + r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} - r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{2}^{\prime 7} + r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} - r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_{4}^{\prime 7} + r_{8}^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} - r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 7} + r_{7}^{\prime 7} - r_{17}^{\prime 7} - r_{19}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\beta_{31}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 4} - r_{11}^{\prime 4} + r_{13}^{\prime 4} - r_{23}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_{3}^{\prime 4} - r_{9}^{\prime 4} + r_{15}^{\prime 4} - r_{21}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2} - \\
&\quad - (r_{4}^{\prime 4} - r_{8}^{\prime 4} + r_{16}^{\prime 4} - r_{20}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 4} - r_{7}^{\prime 4} + r_{17}^{\prime 4} - r_{19}^{\prime 4}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
\beta_{32}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 5} - r_{5}^{\prime 5} - r_{7}^{\prime 5} + r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} + r_{17}^{\prime 5} + r_{19}^{\prime 5} - r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} - (r_{3}^{\prime 5} + r_{9}^{\prime 5} - r_{15}^{\prime 5} - r_{21}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \\
&\quad - (r_{4}^{\prime 5} + r_{8}^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} - r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
\beta_{33}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 6} - r_{3}^{\prime 6} + r_{5}^{\prime 6} - r_{7}^{\prime 6} + r_{9}^{\prime 6} - r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} - r_{15}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6} + r_{21}^{\prime 6} - r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{2} \\
\beta_{34}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 7} + r_{5}^{\prime 7} + r_{7}^{\prime 7} + r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} - r_{17}^{\prime 7} - r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + (r_{4}^{\prime 7} + r_{8}^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} - r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
\beta_{35}^{(1)} &= (r_{1}^{\prime 8} - r_{11}^{\prime 8} + r_{13}^{\prime 8} - r_{23}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{3}^{\prime 8} - r_{9}^{\prime 8} + r_{15}^{\prime 8} - r_{21}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2} + \\
&\quad + (r_{4}^{\prime 8} - r_{8}^{\prime 8} + r_{16}^{\prime 8} - r_{20}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 8} - r_{7}^{\prime 8} + r_{17}^{\prime 8} - r_{19}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}
\end{aligned}
\right\} \quad (20\text{ b})
$$

$$\begin{aligned}
\beta_{41}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 5} + r_{11}^{\prime 5} - r_{13}^{\prime 5} - r_{23}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_{2}^{\prime 5} + r_{10}^{\prime 5} - r_{14}^{\prime 5} - r_{22}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
& - (r_{3}^{\prime 5} + r_{9}^{\prime 5} - r_{15}^{\prime 5} - r_{21}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - (r_{4}^{\prime 5} + r_{8}^{\prime 5} - r_{16}^{\prime 5} - r_{20}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
& + (r_{5}^{\prime 5} + r_{7}^{\prime 5} - r_{17}^{\prime 5} - r_{19}^{\prime 5}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_{6}^{\prime 5} - r_{18}^{\prime 5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{42}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 6} + r_{5}^{\prime 6} - r_{7}^{\prime 6} - r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6} - r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
& - (r_{2}^{\prime 6} + r_{4}^{\prime 6} - r_{8}^{\prime 6} - r_{10}^{\prime 6} + r_{14}^{\prime 6} + r_{16}^{\prime 6} - r_{20}^{\prime 6} - r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{3}^{\prime 6} - r_{9}^{\prime 6} + r_{15}^{\prime 6} - r_{21}^{\prime 6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{43}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 7} - r_{5}^{\prime 7} - r_{7}^{\prime 7} + r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} + r_{17}^{\prime 7} + r_{19}^{\prime 7} - r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} - (r_{2}^{\prime 7} + r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} - r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2} - \\
& - (r_{3}^{\prime 7} + r_{9}^{\prime 7} - r_{15}^{\prime 7} - r_{21}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - (r_{6}^{\prime 7} - r_{18}^{\prime 7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{44}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 8} - r_{2}^{\prime 8} + r_{4}^{\prime 8} - r_{5}^{\prime 8} + r_{7}^{\prime 8} - r_{8}^{\prime 8} + r_{10}^{\prime 8} - r_{11}^{\prime 8} + r_{13}^{\prime 8} - r_{14}^{\prime 8} + r_{16}^{\prime 8} - r_{17}^{\prime 8} + \\
& + r_{19}^{\prime 8} - r_{20}^{\prime 8} + r_{22}^{\prime 8} - r_{23}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{45}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 9} + r_{11}^{\prime 9} - r_{13}^{\prime 9} - r_{23}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} - (r_{2}^{\prime 9} + r_{10}^{\prime 9} - r_{14}^{\prime 9} - r_{22}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
& + (r_{3}^{\prime 9} + r_{9}^{\prime 9} - r_{15}^{\prime 9} - r_{21}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_{4}^{\prime 9} + r_{8}^{\prime 9} - r_{16}^{\prime 9} - r_{20}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
& + (r_{5}^{\prime 9} + r_{7}^{\prime 9} - r_{17}^{\prime 9} - r_{19}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (r_{6}^{\prime 9} - r_{18}^{\prime 9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{51}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 6} - r_{11}^{\prime 6} + r_{13}^{\prime 6} - r_{23}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3}) - (r_{2}^{\prime 6} - r_{4}^{\prime 6} + r_{8}^{\prime 6} - r_{10}^{\prime 6} + r_{14}^{\prime 6} - r_{16}^{\prime 6} + r_{20}^{\prime 6} - r_{22}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
& - (r_{3}^{\prime 6} - r_{9}^{\prime 6} + r_{15}^{\prime 6} - r_{21}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_{5}^{\prime 6} - r_{7}^{\prime 6} + r_{17}^{\prime 6} - r_{19}^{\prime 6}) \cdot \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{52}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 7} + r_{11}^{\prime 7} - r_{13}^{\prime 7} - r_{23}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_{2}^{\prime 7} + r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} - r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{3}{4} - \\
& - (r_{3}^{\prime 7} + r_{9}^{\prime 7} - r_{15}^{\prime 7} - r_{21}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_{4}^{\prime 7} + r_{8}^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} - r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
& + (r_{5}^{\prime 7} + r_{7}^{\prime 7} - r_{17}^{\prime 7} - r_{19}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{53}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 8} - r_{11}^{\prime 8} + r_{13}^{\prime 8} - r_{23}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_{2}^{\prime 8} - r_{10}^{\prime 8} + r_{14}^{\prime 8} - r_{22}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \\
& - (r_{3}^{\prime 8} - r_{9}^{\prime 8} + r_{15}^{\prime 8} - r_{21}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_{5}^{\prime 8} - r_{7}^{\prime 8} + r_{17}^{\prime 8} - r_{19}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{54}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 9} + r_{11}^{\prime 9} - r_{13}^{\prime 9} - r_{23}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} - (r_{2}^{\prime 9} + r_{10}^{\prime 9} - r_{14}^{\prime 9} - r_{22}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{3}{4} - \\
& - (r_{4}^{\prime 9} + r_{8}^{\prime 9} - r_{16}^{\prime 9} - r_{20}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{5}^{\prime 9} + r_{7}^{\prime 9} - r_{17}^{\prime 9} - r_{19}^{\prime 9}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{55}^{(1)} = {} & (r_{1}^{\prime 10} + r_{5}^{\prime 10} - r_{7}^{\prime 10} - r_{11}^{\prime 10} + r_{13}^{\prime 10} + r_{17}^{\prime 10} - r_{19}^{\prime 10} - r_{23}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
& - (r_{2}^{\prime 10} + r_{4}^{\prime 10} - r_{8}^{\prime 10} - r_{10}^{\prime 10} + r_{14}^{\prime 10} + r_{16}^{\prime 10} - r_{20}^{\prime 10} - r_{22}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - (r_{3}^{\prime 10} - r_{9}^{\prime 10} + r_{15}^{\prime 10} - r_{21}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\beta_{61}^{(1)} = -(r_{2}^{\prime 7} + r_{10}^{\prime 7} - r_{14}^{\prime 7} - r_{22}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_{4}^{\prime 7} + r_{8}^{\prime 7} - r_{16}^{\prime 7} - r_{20}^{\prime 7}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (r_{6}^{\prime 7} - r_{18}^{\prime 7})$$

$$\beta_{62}^{(1)} = -(r_{2}^{\prime 8} - r_{4}^{\prime 8} + r_{8}^{\prime 8} - r_{10}^{\prime 8} + r_{14}^{\prime 8} - r_{16}^{\prime 8} + r_{20}^{\prime 8} - r_{22}^{\prime 8}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\beta_{63}^{(1)} = -(r_{2}^{\prime 9} - r_{6}^{\prime 9} + r_{10}^{\prime 9} - r_{14}^{\prime 9} + r_{18}^{\prime 9} - r_{22}^{\prime 9})$$

$$\beta_{64}^{(1)} = -(r_{2}^{\prime 10} + r_{4}^{\prime 10} - r_{8}^{\prime 10} - r_{10}^{\prime 10} + r_{14}^{\prime 10} + r_{16}^{\prime 10} - r_{20}^{\prime 10} - r_{22}^{\prime 10}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\beta_{65}^{(1)} = -(r_{2}^{\prime 11} + r_{10}^{\prime 11} - r_{14}^{\prime 11} - r_{22}^{\prime 11}) \cdot \tfrac{1}{2} - (r_{4}^{\prime 11} + r_{8}^{\prime 11} - r_{16}^{\prime 11} - r_{20}^{\prime 11}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (r_{6}^{\prime 11} - r_{18}^{\prime 11})$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_{11}^{(2)} &= (r_1'^2 + r_{11}'^2 + r_{13}'^2 + r_{23}'^2) \cdot \tfrac{1}{4}\,(2 - \sqrt{3}) + (r_2'^2 + r_{10}'^2 + r_{14}'^2 + r_{22}'^2) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_3'^2 + r_9'^2 + r_{15}'^2 + r_{21}'^2) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_4'^2 + r_8'^2 + r_{16}'^2 + r_{20}'^2) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_5'^2 + r_7'^2 + r_{17}'^2 + r_{19}'^2) \cdot \tfrac{1}{4}\,(2 + \sqrt{3}) + (r_6'^2 + r_{18}'^2) \\
\beta_{12}^{(2)} &= (r_1'^3 - r_{11}'^3 - r_{13}'^3 + r_{23}'^3) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{3}} + (r_2'^3 - r_{10}'^3 - r_{14}'^3 + r_{22}'^3) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_3'^3 - r_9'^3 - r_{15}'^3 + r_{21}'^3) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + (r_4'^3 - r_8'^3 - r_{16}'^3 + r_{20}'^3) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_5'^3 - r_7'^3 - r_{17}'^3 + r_{19}'^3) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \\
\beta_{13}^{(2)} &= (r_1'^4 + r_{11}'^4 + r_{13}'^4 + r_{23}'^4) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \\
&\quad + (r_2'^4 + r_3'^4 + r_9'^4 + r_{10}'^4 + r_{14}'^4 + r_{15}'^4 + r_{21}'^4 + r_{22}'^4) \cdot \tfrac{1}{2} - \\
&\quad - (r_5'^4 + r_7'^4 + r_{17}'^4 + r_{19}'^4) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} - (r_6'^4 + r_{18}'^4) \\
\beta_{14}^{(2)} &= (r_1'^5 - r_{11}'^5 - r_{13}'^5 + r_{23}'^5) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} + (r_2'^5 - r_{10}'^5 - r_{14}'^5 + r_{22}'^5) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_4'^5 - r_8'^5 - r_{16}'^5 + r_{20}'^5) \cdot \tfrac{3}{4} - (r_5'^5 - r_7'^5 - r_{17}'^5 + r_{19}'^5) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\
\beta_{15}^{(2)} &= (r_1'^6 + r_2'^6 + r_5'^6 + r_7'^6 + r_{10}'^6 + r_{11}'^6 + r_{13}'^6 + r_{14}'^6 + r_{17}'^6 + r_{19}'^6 + r_{22}'^6 + r_{23}'^6) \cdot \tfrac{1}{4} - \\
&\quad - (r_4'^6 + r_8'^6 + r_{16}'^6 + r_{20}'^6) \cdot \tfrac{3}{4} + (r_6'^6 + r_{18}'^6) \\
\beta_{22}^{(2)} &= (r_1'^4 + r_5'^4 + r_7'^4 + r_{11}'^4 + r_{13}'^4 + r_{17}'^4 + r_{19}'^4 + r_{23}'^4) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_2'^4 + r_4'^4 + r_8'^4 + r_{10}'^4 + r_{14}'^4 + r_{16}'^4 + r_{20}'^4 + r_{22}'^4) \cdot \tfrac{3}{4} + (r_3'^4 + r_9'^4 + r_{15}'^4 + r_{21}'^4) \\
\beta_{23}^{(2)} &= (r_1'^5 - r_5'^5 + r_7'^5 - r_{11}'^5 - r_{13}'^5 + r_{17}'^5 - r_{19}'^5 + r_{23}'^5) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + (r_2'^5 - r_{10}'^5 - r_{14}'^5 + r_{22}'^5) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_3'^5 - r_9'^5 - r_{15}'^5 + r_{21}'^5) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\
\beta_{24}^{(2)} &= (r_1'^6 - r_5'^6 - r_7'^6 + r_{11}'^6 + r_{13}'^6 - r_{17}'^6 - r_{19}'^6 + r_{23}'^6) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_2'^6 - r_4'^6 - r_8'^6 + r_{10}'^6 + r_{14}'^6 - r_{16}'^6 - r_{20}'^6 + r_{22}'^6) \cdot \tfrac{3}{4} \\
\beta_{25}^{(2)} &= (r_1'^7 - r_{11}'^7 - r_{13}'^7 + r_{23}'^7) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (r_2'^7 - r_{10}'^7 - r_{14}'^7 + r_{22}'^7) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \\
&\quad - (r_3'^7 - r_9'^7 - r_{15}'^7 + r_{21}'^7) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - (r_4'^7 - r_8'^7 - r_{16}'^7 + r_{29}'^7) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_5'^7 - r_7'^7 - r_{17}'^7 + r_{19}'^7) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\
\beta_{33}^{(2)} &= (r_1'^6 + r_3'^6 + r_5'^6 + r_7'^6 + r_9'^6 + r_{11}'^6 + r_{13}'^6 + r_{15}'^6 + r_{17}'^6 + r_{19}'^6 + {}'^6_{21} + r_{23}'^6) \cdot \tfrac{1}{2} + \\
&\quad + (r_2'^6 + r_6'^6 + r_{10}'^6 + r_{14}'^6 + r_{18}'^6 + r_{22}'^6) \\
\beta_{34}^{(2)} &= (r_1'^7 + r_5'^7 - r_7'^7 - r_{11}'^7 - r_{13}'^7 - r_{17}'^7 + r_{19}'^7 + r_{23}'^7) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + (r_2'^7 - r_{10}'^7 - r_{14}'^7 + r_{22}'^7) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
\beta_{35}^{(2)} &= (r_1'^8 + r_{11}'^8 + r_{13}'^8 + r_{23}'^8) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \\
&\quad + (r_2'^8 - r_3'^8 - r_9'^8 + r_{10}'^8 + r_{14}'^8 - r_{15}'^8 - r_{21}'^8 + r_{22}'^8) \cdot \tfrac{1}{2} - \\
&\quad - (r_5'^8 + r_7'^8 + r_{17}'^8 + r_{19}'^8) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} - (r_6'^8 + r_{18}'^8) \\
\beta_{44}^{(2)} &= (r_1'^8 + r_2'^8 + r_4'^8 + r_5'^8 + r_7'^8 + r_8'^8 + r_{10}'^8 + r_{11}'^8 + r_{13}'^8 + r_{14}'^8 + r_{16}'^8 + r_{17}'^8 + r_{19}'^8 + r_{20}'^8 + \\
&\quad + r_{22}'^8 + r_{23}'^8) \cdot \tfrac{3}{4}
\end{aligned}
\right\} \tag{20 c}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\beta_{45}^{(2)} &= (r_1'^9 - r_{11}'^9 - r_{13}'^9 + r_{23}'^9) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} + (r_2'^9 - r_{10}'^9 - r_{14}'^9 + r_{22}'^9) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \\
&\quad + (r_4'^9 - r_8'^9 - r_{16}'^9 + r_{20}'^9) \cdot \tfrac{3}{4} - (r_5'^9 - r_7'^9 - r_{17}'^9 + r_{19}'^9) \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
\beta_{55}^{(2)} &= (r_1'^{10} + r_{11}'^{10} + r_{13}'^{10} + r_{23}'^{10}) \cdot \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3}) + (r_2'^{10} + r_{10}'^{10} + r_{14}'^{10} + r_{22}'^{10}) \cdot \tfrac{1}{4} + \\
&\quad + (r_3'^{10} + r_9'^{10} + r_{15}'^{10} + r_{21}'^{10}) \cdot \tfrac{1}{2} + (r_4'^{10} + r_8'^{10} + r_{16}'^{10} + r_{20}'^{10}) \cdot \tfrac{3}{4} + \\
&\quad + (r_5'^{10} + r_7'^{10} + r_{17}'^{10} + r_{19}'^{10}) \cdot \tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3}) + (r_6'^{10} + r_{18}'^{10})
\end{aligned}\right\}$$

Vergleich von (19) und (19′) zeigt, dass man $\gamma_m^{(1)}$ aus $\alpha_{m,o}^{(1)} = \alpha_{o,m}^{(1)}$ und $\gamma_m^{(2)}$ aus $\alpha_{m,o}^{(2)} = \beta_{o,m}^{(1)}$ gewinnen kann, indem man in den letzteren Ausdrücken $r_\nu'^m$ durch $\delta z_\nu \cdot r_\nu'^m$ ersetzt.

Die Bestimmung der Korrektur unserer Näherungslösung führt also auf ein System von 12 Gleichungen mit 12 Unbekannten, das sich umso leichter durch Iteration auflösen lässt, je weniger die Randkurve in der (x, y)- bzw. (x', y')-Ebene von einem Kreise abweicht.

Das Gleichungssystem (18) vereinfacht sich erheblich, wenn der Rand in der (x', y')-Ebene in bezug auf eine oder auf beide Koordinatenachsen symmetrisch ist. Im Falle der Symmetrie des Randes in bezug auf nur eine Koordinatenachse zerfällt das System (18) in zwei getrennte Systeme von 7 bzw. 5 Gleichungen für die a_n bzw. b_n einzeln, da dann die $\beta_{m,n}^{(1)}$ und mithin auch die $\alpha_{m,n}^{(2)}$ sämtlich verschwinden. Die Koeffizienten dieser beiden Systeme gewinnt man aus (20 a) und (20 c) unmittelbar, wenn man $r'_{24-\nu} = r'_\nu$ (x'-Achse als Symmetrieachse) bzw. $r'_{6+\nu} = r'_{6-\nu}$ und $r'_{18+\nu} = r'_{18-\nu}$ (y'-Achse als Symmetrieachse) setzt.

Ist der Rand in bezug auf beide Achsen symmetrisch, so zerfällt (18) sogar in vier getrennte Systeme: ein System für a_0, a_2, a_4, a_6, eins für a_1, a_3, a_5, eins für b_1, b_3, b_5, und eins für b_2, b_4 allein. Und zwar erhält man in diesem Falle anstelle von (18) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&24\,a_0 + a_2 \cdot (2\,r_0'^2 + 2\sqrt{3} \cdot r_1'^2 + 2\,r_2'^2 - 2\,r_4'^2 - 2\sqrt{3} \cdot r_5'^2 - 2\,r_6'^2) + \\
&\qquad + a_4 \cdot (2\,r_0'^4 + 2\,r_1'^4 - 2\,r_2'^4 - 4\,r_3'^4 - 2\,r_4'^4 + 2\,r_5'^4 + 2\,r_6'^4) + \\
&\qquad + a_6 \cdot (2\,r_0'^6 - 4\,r_2'^6 + 4\,r_4'^6 - 2\,r_6'^6) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \\
&a_0 \cdot (2\,r_0'^2 + 2\sqrt{3} \cdot r_1'^2 + 2\,r_2'^2 - 2\,r_4'^2 - 2\sqrt{3} \cdot r_5'^2 - 2\,r_6'^2) + \\
&\qquad + a_2 \cdot (2\,r_0'^4 + 3\,r_1'^4 + r_2'^4 + r_4'^4 + 3\,r_5'^4 + 2\,r_6'^4) + \\
&\qquad + a_4 \cdot (2\,r_0'^6 + \sqrt{3} \cdot r_1'^6 - r_2'^6 + r_4'^6 - \sqrt{3} \cdot r_5'^6 - 2\,r_6'^6) + \\
&\qquad + a_6 \cdot (2\,r_0'^8 - 2\,r_2'^8 - 2\,r_4'^8 + 2\,r_6'^8) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^2 \cdot \cos(2\,\varphi'_\nu)
\end{aligned}\right\} \quad (21\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_0 \cdot (2\, r_0'^4 + 2\, r_1'^4 - 2\, r_2'^4 - 4\, r_3'^4 - 2\, r_4'^4 + 2\, r_5'^4 + 2\, r_6'^4) + \\
&\qquad + a_2 \cdot (2\, r_0'^6 + \sqrt{3} \cdot r_1'^6 - r_2'^6 + r_4'^6 - \sqrt{3} \cdot r_5'^6 - 2\, r_6'^6) + \\
&\qquad + a_4 \cdot (2\, r_0'^8 + r_1'^8 + r_2'^8 + 4\, r_3'^8 + r_4'^8 + r_5'^8 + 2\, r_6'^8) + \\
&\qquad + a_6 \cdot (2\, r_0'^{10} + 2\, r_2'^{10} - 2\, r_4'^{10} - 2\, r_6'^{10}) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^4 \cdot \cos\, (4\, \varphi_\nu') \\
&a_0 \cdot (2\, r_0'^6 - 4\, r_2'^6 + 4\, r_4'^6 - 2\, r_6'^6) + a_2 \cdot (2\, r_0'^8 - 2\, r_2'^8 - 2\, r_4'^8 + 2\, r_6'^8) + \\
&\qquad + a_4 \cdot (2\, r_0'^{10} + 2\, r_2'^{10} - 2\, r_4'^{10} - 2\, r_6'^{10}) + \\
&\qquad + a_6 \cdot (2\, r_0'^{12} + 4\, r_2'^{12} + 4\, r_4'^{12} + 2\, r_6'^{12}) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^6 \cdot \cos\, (6\, \varphi_\nu')
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 \cdot (2\, r_0'^2 + (2 + \sqrt{3})\, r_1'^2 + 3\, r_2'^2 + 2\, r_3'^2 + r_4'^2 + (2 - \sqrt{3})\, r_5'^2) + \\
&\qquad + a_3 \cdot (2\, r_0'^4 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_1'^4 - 2\, r_3'^4 - 2\, r_4'^4 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_5'^4) + \\
&\qquad + a_5 \cdot (2\, r_0'^6 + r_1'^6 - 3\, r_2'^6 - 2\, r_3'^6 + r_4'^6 + r_5'^6) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu' \cdot \cos\, \varphi_\nu' \\
&a_1 \cdot (2\, r_0'^4 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_1'^4 - 2\, r_3'^4 - 2\, r_4'^4 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_5'^4) + \\
&\qquad + a_3 \cdot (2\, r_0'^6 + 2\, r_1'^6 + 2\, r_3'^6 + 4\, r_4'^6 + 2\, r_5'^6) + \\
&\qquad + a_5 \cdot (2\, r_0'^8 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_1'^8 + 2\, r_3'^8 - 2\, r_4'^8 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}\, r_5'^8) = \\
&\qquad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^3 \cdot \cos\, (3\, \varphi_\nu') \\
&a_1 \cdot (2\, r_0'^6 + r_1'^6 - 3\, r_2'^6 - 2\, r_3'^6 + r_4'^6 + r_5'^6) + \\
&\qquad + a_3 \cdot (2\, r_0'^8 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_1'^8 + 2\, r_3'^8 - 2\, r_4'^8 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_5'^8) + \\
&\qquad + a_5 \cdot (2\, r_0'^{10} + (2 - \sqrt{3})\, r_1'^{10} + 3\, r_2'^{10} + r_4'^{10} + (2 + \sqrt{3})\, r_5'^{10}) = \\
&\qquad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^5 \cdot \cos\, (5\, \varphi_\nu')
\end{aligned}\right\} \quad (21\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_1 \cdot ((2 - \sqrt{3})\, r_1'^2 + r_2'^2 + 2\, r_3'^2 + 3\, r_4'^2 + (2 + \sqrt{3}) \cdot r_5'^2 + 2\, r_6'^2) + \\
&\qquad + b_3 \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_1'^4 + 2\, r_2'^4 + 2\, r_3'^4 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_5'^4 - 2\, r_6'^4) + \\
&\qquad + b_5 \cdot (r_1'^6 + r_2'^6 - 2\, r_3'^6 - 3\, r_4'^6 + r_5'^6 + 2\, r_6'^6) = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu' \cdot \sin\, \varphi_\nu' \\
&b_1\, (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_1'^4 + 2\, r_2'^4 + 2\, r_3'^4 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_5'^4 - 2 \cdot r_6'^4) + \\
&\qquad + b_3 \cdot (2\, r_1'^6 + 4\, r_2'^6 + 2\, r_3'^6 + 2\, r_5'^6 + 2\, r_6'^6) + \\
&\qquad + b_5 \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r_1'^8 + 2\, r_2'^8 - 2\, r_3'^8 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r_5'^8 - 2\, r_6'^8) = \\
&\qquad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^3 \cdot \sin\, (3\, \varphi_\nu')
\end{aligned}\right\} \quad (21\,\mathrm{c})$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_1 (r_1'^6 + r_2'^6 - 2\,r_3'^6 - 3\,r_4'^6 + r_5'^6 + 2\,r_6'^6) + \\
&\quad + b_3 \cdot (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot r_1'^8 + 2\,r_2'^8 - 2\,r_3'^8 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot r_5'^8 - 2\,r_6'^8) + \\
&\quad + b_5 \cdot ((2+\sqrt{3})\,r_1'^{10} + r_2'^{10} + 2\,r_3'^{10} + 3\,r_4'^{10} + (2-\sqrt{3})\,r_5'^{10} + 2\,r_6'^{10}) = \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^5 \cdot \sin\,(5\,\varphi_\nu')
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_2 \cdot (r_1'^4 + 3\,r_2'^4 + 4\,r_3'^4 + 3\,r_4'^4 + r_5'^4) + b_4 \cdot (\sqrt{3}\cdot r_1'^6 + 3\,r_2'^6 - 3\,r_4'^6 - \sqrt{3}\cdot r_5'^6) = \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^2 \cdot \sin\,(2\,\varphi_\nu') \\
&b_2 \cdot (\sqrt{3}\cdot r_1'^6 + 3\,r_2'^6 - 3\,r_4'^6 - \sqrt{3}\cdot r_5'^6) + b_4 \cdot (3\,r_1'^8 + 3\,r_2'^8 + 3\,r_4'^8 + 3\,r_5'^8) = \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{23} \delta z_\nu \cdot r_\nu'^4 \cdot \sin\,(4\,\varphi_\nu')
\end{aligned}\right\} \quad (21\,\mathrm{d})$$

Diese Gleichungen lassen sich selbst in dem Falle, dass der Rand erheblich von der Kreisform abweicht und eine iterative Auflösung nicht mehr möglich ist, unschwer und schnell auflösen. Dass eine starke Abweichung von der Kreisform die iterative Auflösung der obigen Systeme unmöglich machen kann, erkennt man aus (21 a) bis (21 d) sofort, wenn man als Rand z. B. eine Ellipse mit der grossen Achse $a' = 1$ und der kleinen Achse $b' < 1$ wählt.

Hat man durch Auflösung des Systems (18) bzw. daraus im Symmetriefalle abgeleiteter Systeme die Koeffizienten a_n und b_n berechnet, so kann man die dann bestimmte Korrektur (16) leicht wieder in die Form einer nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Doppelreihe:

$$\tilde{z} = \sum_{\substack{l,\,m \\ l+m \leq 6}}^{0\cdots 6} \tilde{Z}_{l,\,m}\, P_l(\xi) \cdot P_m(\eta) \tag{22}$$

bringen.

Es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{00} &= a_0 + \frac{1}{3}(m_2^2 - n_2^2)\cdot a_2 + \left(\frac{1}{5}m_2^4 - \frac{2}{3}m_2^2 n_2^2 + \frac{1}{5}n_2^4\right)\cdot a_4 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{7}m_2^6 - m_2^4 n_2^2 + m_2^2 n_2^4 - \frac{1}{7}n_2^6\right)\cdot a_6 \\
\tilde{Z}_{02} &= -\frac{2}{3}n_2^2\cdot a_2 - 4\,n_2^2\left(\frac{1}{3}m_2^2 - \frac{1}{7}n_2^2\right)\cdot a_4 - n_2^2\left(2\,m_2^4 - \frac{20}{7}m_2^2 n_2^2 + \frac{10}{21}n_2^4\right)\cdot a_6 \\
\tilde{Z}_{04} &= \frac{8}{35}n_2^4\cdot a_4 + \frac{8}{7}n_2^4\left(m_2^2 - \frac{3}{11}n_2^2\right)\cdot a_6
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{06} &= -\frac{16}{231}\,n_2^6\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{20} &= \frac{2}{3}\,m_2^2\cdot a_2+4\,m_2^2\left(\frac{1}{7}\,m_2^2-\frac{1}{3}\,n_2^2\right)\cdot a_4+m_2^2\left(\frac{10}{21}\,m_2^4-\frac{20}{7}\,m_2^2\,n_2^2+2\,n_2^4\right)\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{22} &= -\frac{8}{3}\,m_2^2\,n_2^2\cdot a_4-\frac{40}{7}\,m_2^2\,n_2^2\,(m_2^2-n_2^2)\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{24} &= \frac{16}{7}\,m_2^2\,n_2^4\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{40} &= \frac{8}{35}\,m_2^4\cdot a_4+\frac{8}{7}\,m_2^4\left(\frac{3}{11}\,m_2^2-n_2^2\right)\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{42} &= -\frac{16}{7}\,m_2^4\,n_2^2\cdot a_6\\
\tilde{Z}_{60} &= \frac{16}{231}\,m_2^6\cdot a_6
\end{aligned}\right\}\quad (23\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{01} &= n_2\cdot b_1+n_2\left(m_2^2-\frac{3}{5}\,n_2^2\right)\cdot b_3+n_2\left(m_2^4-2\,m_2^2\,n_2^2+\frac{3}{7}\,n_2^4\right)\cdot b_5\\
\tilde{Z}_{03} &= -\frac{2}{5}\,n_2^3\cdot b_3-\frac{4}{3}\,n_2^3\left(m_2^2-\frac{1}{3}\,n_2^2\right)\cdot b_5\\
\tilde{Z}_{05} &= \frac{8}{63}\,n_2^5\cdot b_5\\
\tilde{Z}_{21} &= 2\,m_2^2\,n_2\cdot b_3+4\,m_2^2\,n_2\left(\frac{5}{7}\,m_2^2-n_2^2\right)\cdot b_5\\
\tilde{Z}_{23} &= -\frac{8}{3}\,m_2^2\,n_2^3\cdot b_5\\
\tilde{Z}_{41} &= \frac{8}{7}\,m_2^4\,n_2\cdot b_5
\end{aligned}\right\}\quad (23\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{10} &= m_2\cdot a_1+m_2\left(\frac{3}{5}\,m_2^2-n_2^2\right)\cdot a_3+m_2\left(\frac{3}{7}\,m_2^4-2\,m_2^2\,n_2^2+n_2^4\right)\cdot a_5\\
\tilde{Z}_{12} &= -2\,m_2\,n_2^2\cdot a_3-4\,m_2\,n_2^2\left(m_2^2-\frac{5}{7}\,n_2^2\right)\cdot a_5\\
\tilde{Z}_{14} &= \frac{8}{7}\,m_2\,n_2^4\cdot a_5\\
\tilde{Z}_{30} &= \frac{2}{5}\,m_2^3\cdot a_3+\frac{4}{3}\,m_2^3\left(\frac{1}{3}\,m_2^2-n_2^2\right)\cdot a_5
\end{aligned}\right\}\quad (23\,\mathrm{c})$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{32} &= -\frac{8}{3} m_2^3 n_2^2 \cdot a_5 \\
\tilde{Z}_{50} &= \frac{8}{63} m_2^5 \cdot a_5
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Z}_{11} &= 2\, m_2 n_2 \cdot b_2 + \frac{12}{5} m_2 n_2 (m_2^2 - n_2^2) \cdot b_4 \\
\tilde{Z}_{13} &= -\frac{8}{5} m_2 n_2^3 \cdot b_4 \\
\tilde{Z}_{15} &= 0 \\
\tilde{Z}_{31} &= \frac{8}{5} m_2^3 n_2 \cdot b_4 \\
\tilde{Z}_{33} &= 0 \\
\tilde{Z}_{51} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (23\,\mathrm{d})$$

Die Konstanten m_2 und n_2 sind hierbei durch (5) definiert. Die Koffizienten $\tilde{Z}_{15}$, $\tilde{Z}_{33}$ und $\tilde{Z}_{51}$ verschwinden, da in (16) λ nur bis 5 läuft.

Durch Addition von (15) und (22) erhält man dann die numerische Lösung des Dirichletschen Problems.

Das in II und III beschriebene Verfahren zur numerischen Berechnung des Dirichletschen Problems lässt sich auch dann noch in entsprechender Weise anwenden, wenn wir in (7) mehr Glieder, als in II vorgesehen ist, mitzunehmen gezwungen sind, um die Funktion $f(\xi, \eta)$ genügend genau anzunähern.

Muss man z. B. in (7) i und k von 0 bis 6 $(i+k \leqq 6)$ laufen lassen, so hat man l und m in (8) von 0 bis 8 $(l+m \leqq 8)$ zu erstrecken. Man hat dann statt $\sum_{\nu=0}^{6} (\nu+1) = 28$ jetzt $\sum_{\nu=0}^{8} (\nu+1) = 45$ unbekannte Koeffizienten $Z_{l,m}$. Die aus der Differentialgleichung (6) dann resultierenden 28 Bedingungsgleichungen zerfallen jetzt analog zu (9 a) bis (9 d) in vier Systeme von 10, 6, 6 und 6 Gleichungen.

Die noch zusätzlich benötigten 17 Gleichungen für die $Z_{l,m}$ gewinnt man dann im Falle der ersten Näherung wieder durch eine analoge trigonometrische Interpolation. Diese 17 Gleichungen zerfallen analog zu (13 a) bis (13 d) wieder in vier Systeme von diesmal 5, 4, 4 und 4 Gleichungen. Auch hier ist wieder eine sukzessive Auflösung der resultierenden 15, 10, 10 und 10 Gleichungen möglich.

Die Korrektur der ersten Näherung erfordert jetzt, falls der Rand nicht achsensymmetrich ist, die Auflösung eines Systems von 16 linearen Gleichungen.

Auch die Fälle, dass man in (7) i und k von 0 bis 8 ($i+k \leqq 8$) oder von 0 bis 10 ($i+k \leqq 10$) zu erstrecken hat, lassen sich mit entsprechendem rechnerischem Mehraufwand ganz analog behandeln.

IV. Ein Beispiel

Gesucht sei diejenige Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 1, \tag{24}$$

die längs des aus zwei Parabeln zusammengesetzten Randes:

$$\eta = \pm (1 - \xi^2) \tag{25}$$

die Werte:

$$z = \tfrac{1}{2} \xi^2 + \cosh \xi \cdot \cos (1 - \xi^2) \tag{26}$$

annimmt.

Da dieses Problem offenbar die Lösung

$$z = \tfrac{1}{2} \xi^2 + \cosh \xi \cdot \cos \eta \tag{27}$$

hat, werden wir in der Lage sein, unsere numerische Näherungslösung mit der exakten Lösung (27) zu vergleichen.

In diesem Beispiel sind sowohl der Rand (25) als auch die Randwerte (26) symmetrisch in bezug auf beide Koordinatenachsen.

Zur Berechnung der ersten Näherung unserer Lösung haben wir die Randwerte (26), die durch folgende Tabelle:

TABELLE 1

φ:	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
z:	2,04308	1,75209	1,45899	1,16667	0,88192	0,64252	0,54030

als Funktion des Polarwinkels gegeben sind, längs der Radiusvektoren auf den Einheitskreis zu verschieben. Die Fourier-Analyse nach Thompson ergibt als einzige von Null verschiedene Fourierkoeffizienten für die auf den Kreisrand verschobenen Randwerte:

$$C_0 = 1{,}21087; \quad C_2 = 0{,}75139.$$

Einsetzen dieser Werte in (14 a) ergibt:

$$Z_{00} = 1{,}12754, \quad Z_{02} = -0{,}33426, \quad Z_{20} = 0{,}66760. \tag{28}$$

Alle übrigen $Z_{i,k}$ verschwinden. Die erste Näherung unserer Lösung lautet dann:

$$\left.\begin{aligned} z^{(1)}(\xi,\eta) = 1{,}12754\, P_0(\xi)\cdot P_0(\eta) - 0{,}33426\, P_0(\xi)\cdot P_2(\eta) \\ + 0{,}66760\, P_2(\xi)\cdot P_0(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Längs des Randes (25) nimmt $z^{(1)}(\xi,\eta)$ die folgenden Werte an:

TABELLE 2

φ :	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$z^{(1)}$:	1,96227	1,69995	1,43285	1,15185	0,85594	0,58382	0,45948

Durch Subtraktion der Werte der Tabelle 2 von denen der Tabelle 1 ergeben sich die noch längs des Randes (25) erforderlichen Korrekturen δz der ersten Näherung:

TABELLE 3

φ :	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
δz:	0,08081	0,05214	0,02614	0,01482	0,02598	0,05870	0,08082

Da nicht nur der Rand (25), sondern auch die Randwerte (26) selbst achsensymmetrisch sind, so sind in (16) nur die Koeffizienten a_0, a_2, a_4 und a_6 von Null verschieden, so dass wir nur das System (21 a) zu betrachten haben. Dieses lautet in unserem Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} 24\, a_0 - 0{,}57882\, a_2 + 2{,}25097\, a_4 + 0{,}61062\, a_6 &= 1{,}03438 \\ -0{,}57822\, a_0 + 9{,}94186\, a_2 - 0{,}33349\, a_4 + 2{,}38090\, a_6 &= -0{,}04709 \\ 2{,}25097\, a_0 - 0{,}33349\, a_2 + 7{,}40895\, a_4 - 0{,}32265\, a_6 &= 0{,}39686 \\ 0{,}61062\, a_0 + 2{,}38090\, a_2 - 0{,}32265\, a_4 + 6{,}09122\, a_6 &= 0{,}01557 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Da die Glieder in der Hauptdiagonale überwiegen, lässt es sich iterativ auflösen. Als Lösung ergibt sich:

$$a_0 = 0{,}03912, \quad a_2 = -0{,}00140, \quad a_4 = 0{,}04168, \quad a_6 = 0{,}00139. \tag{31}$$

Einsetzen dieser Werte in (23 a) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{Z}_{00} = 0{,}02801, \quad \tilde{Z}_{02} = -0{,}03030, \quad \tilde{Z}_{04} = 0{,}01069, \quad \tilde{Z}_{06} = -0{,}00010 \\ &\tilde{Z}_{20} = -0{,}03322, \quad \tilde{Z}_{22} = -0{,}11115, \quad \tilde{Z}_{24} = 0{,}00318 \\ &\tilde{Z}_{40} = 0{,}00837, \quad \tilde{Z}_{42} = -0{,}00318 \\ &\tilde{Z}_{60} = 0{,}00010 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Durch Addition von (28) und (32) ergeben sich dann die Legendreschen Koeffizienten der Lösung unseres Beispiels. Die Lösung selbst lautet dann:

$$\left.\begin{aligned} z(\xi,\eta) = {} & 1{,}15555\, P_0(\xi)\, P_0(\eta) - 0{,}36456\, P_0(\xi)\, P_2(\eta) + 0{,}01069\, P_0(\xi)\, P_4(\eta) - \\ & \qquad - 0{,}00010\, P_0(\xi)\, P_6(\eta) + \\ & + 0{,}63438\, P_2(\xi)\, P_0(\eta) - 0{,}11115\, P_2(\xi)\, P_2(\eta) + 0{,}00318\, P_2(\xi)\, P_4(\eta) + \\ & + 0{,}00837\, P_4(\xi)\, P_0(\eta) - 0{,}00318\, P_4(\xi)\, P_2(\eta) + \\ & + 0{,}00010\, P_6(\xi)\, P_0(\eta) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Die folgenden Tabellen 4 und 5 bringen für das Innere und den Rand unseres Bereiches einen Vergleich dieser Näherungslösung (33) mit der exakten Lösung (27).

TABELLE 4

		$\xi = 0$	$\xi = 0{,}2$	$\xi = 0{,}4$	$\xi = 0{,}6$	$\xi = 0{,}8$	$\xi = 1$
$\eta = 1$	(33)	0,54029					
	(27)	0,54030					
$\eta = 0{,}8$	(33)	0,69671	0,73069	0,83320			
	(27)	0,69671	0,73069	0,83319			
$\eta = 0{,}6$	(33)	0,82533	0,86189	0,97224	1,15839		
	(27)	0,82534	0,86190	0,97225	1,15842		
$\eta = 0{,}4$	(33)	0,92106	0,95954	1,07573	1,27188		
	(27)	0,92106	0,95955	1,07573	1,27189		
$\eta = 0{,}2$	(33)	0,98006	1,01973	1,13952	1,34183	1,63077	
	(27)	0,98007	1,01974	1,13952	1,34184	1,63078	
$\eta = 0$	(33)	1,00000	1,04007	1,16107	1,36547	1,65744	2,04308
	(27)	1	1,04007	1,16107	1,36547	1,65743	2,04308

TABELLE 5

		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 45^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 75^\circ$	$\varphi = 90^\circ$
Rand:	(33)	2,04308	1,75211	1,45899	1,16665	0,88193	0,64254	0,54029
	(27)	2,04308	1,75209	1,45899	1,16667	0,88192	0,64252	0,54030

Zusammenfassung

Durch Doppelreihenentwicklung nach Legendreschen Polynomen wird die Lösung des Dirichletschen Problems mittels Picard-Iteration für einen beliebigen symmetrischen oder unsymmetrischen Rand numerisch durchgeführt. Für die erste Näherung der

Lösung werden die Randwerte auf eine die Randkurve möglichst eng umschliessende Ellipse übertragen. Diese erste Näherung wird korrigiert durch Addition von Lösungen der homogen gemachten Differentialgleichung (Laplacesche Differentialgleichung), die den Fehler längs der Randkurve nach der Methode der kleinsten Quadrate zu einem Minimum machen. Die Berechnung dieser Korrektur wird besonders einfach im Falle eines achsensymmetrischen Randes. Ein Beispiel erläutert das Vorgehen.