ZUR ISOPERIMETRISCHEN UNGLEICHUNG AUF GEKRÜMMTEN FLÄCHEN[1]

VON

ALFRED HUBER

in Zürich

Auf einer Riemannschen Fläche R sei eine konforme Metrik

$$ds = e^{u(z)} |dz| \tag{1}$$

($z =$ Ortsuniformisierende) definiert. (Ein konformer Parameterwechsel $z = \varphi(\zeta)$ soll also die Transformation $\tilde{u}(\zeta) = u(\varphi(\zeta)) + \log|\varphi'(\zeta)|$ bewirken, so dass

$$ds = e^{u(z)} |dz| = e^{\tilde{u}(\zeta)} |d\zeta|$$

invariant bleibt.) Dabei werde vorausgesetzt, dass u sich lokal als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lässt[2]

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z) \tag{2}$$

($z =$ Ortsuniformisierende).

In bekannter Weise (F. Riesz [10]) sind den Funktionen u_1 und u_2 positive Massenbelegungen, μ_1 und μ_2, zugeordnet (vgl. Formeln (6) und (7) dieser Arbeit). Natürlich hängen diese von der Wahl der Zerlegung (2) ab. (Letztere ist nie eindeutig bestimmt; man kann beispielsweise stets dieselbe subharmonische Funktion zu u_1 und u_2 addieren.) Hingegen darf die Differenz

$$\mu(e) = \mu_1(e) - \mu_2(e) \tag{3}$$

als eine auf der Riemannschen Fläche definierte, vollständig additive Mengenfunktion aufgefasst werden. Der Wert von μ ist nämlich unabhängig davon, welche Darstellung (2) und welche Uniformisierende z man wählt.

---

[1] Diese Arbeit wurde zur Hauptsache an der University of Maryland in College Park (Maryland) ausgeführt und unterstützt durch die United States Air Force unter Contract No. AF 18 (600)-573.

[2] Dies ist z. B. stets dann erfüllt, wenn u von der Klasse C^2 ist. Bezüglich Definition und allgemeine Eigenschaften subharmonischer Funktionen verweisen wir auf das Buch von T. Radó [9].

Es bezeichne $\mu(e)=\mu^+(e)-\mu^-(e)$ die Jordansche Zerlegung (siehe [11], p. 11), welche dadurch ausgezeichnet ist, dass für eine beliebige Borelmenge e und eine willkürliche Darstellung (3) stets $\mu^+(e)\leqq\mu_1(e)$ und $\mu^-(e)\leqq\mu_2(e)$ ist.

Sei nun γ eine lokal rektifizierbare[1] Jordankurve auf R, welche ein einfach zusammenhängendes Gebiet ω umschliesse. Wir führen die Abkürzung $\alpha=\mu^-(\omega)$ ein.

Satz. *Die Ungleichung*

$$\Big(\int_\gamma e^u\,|dz|\Big)^2\geqq 4\pi(1-\alpha)\iint_\omega e^{2u}\,dx\,dy \qquad (z=x+iy) \tag{4}$$

ist stets erfüllt. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $\alpha<1$ *und*

$$u(z)=\log|\Phi'(z)\,(\Phi(z))^{-\alpha}|+c, \tag{5}$$

wobei $w=\Phi(z)$ *eine beliebige konforme Abbildung von* ω *auf* $|w|<1$ *und* c *eine willkürliche reelle Konstante bedeuten.*

Die Integrale in (4) sind nicht notwendigerweise endlich. Wir behaupten lediglich: Ist $\alpha<1$, und existiert das linke Integral, so existiert auch das rechte und die Ungleichung ist erfüllt.

Obiger Satz ist im Wesentlichen bereits bekannt. Er findet sich in etwas spezieller Form in [7] (vgl. hierzu auch Fussnote 3 in [8]). In der vorliegenden Arbeit soll nun ein besonders einfacher Beweis gegeben werden. Um unnötige Längen zu vermeiden, beschränken wir uns darauf, den Kern der Überlegung wiederzugeben, und überlassen verschiedene (hauptsächlich durch Fragen des Randverhaltens bei konformer Abbildung verursachte) technische Details dem Leser.

Zunächst schliessen wir aus den lokalen Voraussetzungen auf die Existenz einer Zerlegung (2), welche in ganz $\omega\cup\gamma$ gültig ist. Wir dürfen ausserdem verlangen, dass $\mu_1\equiv\mu^+$ und $\mu_2\equiv\mu^-$.

F. Riesz [10] hat die Existenz der Darstellungen

$$u_1(z)=h_1(z)-\int_\omega g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta) \tag{6}$$

und

$$u_2(z)=h_2(z)-\int_\omega g(z,\zeta)\,d\mu_2(e_\zeta) \tag{7}$$

in ω bewiesen. Dabei bezeichnen g die Greensche Funktion von ω und h_1 (bzw. h_2) die beste harmonische Majorante von u_1 (bzw. u_2) in diesem Gebiet. Wir definieren

$$h(z)=h_1(z)-h_2(z). \tag{8}$$

[1] d.h. zu jedem Punkt p auf γ und jeder zugehörigen Ortsuniformisierenden z gebe es einen (bezüglich z) rektifizierbaren, p enthaltenden, offenen Teilbogen von γ. In schlichten Bereichen ist dies mit der Rektifizierbarkeit im Grossen gleichbedeutend.

Wir machen nun die Annahme, dass der Rand γ von ω analytisch und dass h auch auf γ harmonisch sei. Von diesen zusätzlichen Voraussetzungen kann man sich mit Hilfe bekannter Methoden befreien, worauf wir aber hier nicht eingehen.

Wir behandeln zuerst den speziellen Fall, da μ_1 identisch verschwindet und μ_2 eine Punktmasse ist.

HILFSSATZ. *Sei* $u(z) = h(z) + \alpha g(z, \zeta_0)$, *wobei* $\zeta_0 \in \omega$ *und* $0 \leqq \alpha < 1$. *Dann ist*

$$\Big(\int_\gamma e^u |dz|\Big)^2 \geqq 4\pi(1-\alpha)\iint_\omega e^{2u}\, dx\, dy. \tag{9}$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn

$$u(z) = \log |\Phi'(z)(\Phi(z))^{-\alpha}| + c. \tag{10}$$

Dabei bezeichnet $w = \Phi(z)$ *eine beliebige konforme Abbildung von* ω *auf* $|w| < 1$, *welche im Falle* $\alpha > 0$ *die Zusatzbedingung* $\Phi(\zeta_0) = 0$ *zu erfüllen hat.* c *ist eine willkürliche reelle Konstante.*

Zum Beweise nehmen wir vorerst an, dass $\omega = [|z| < 1]$ und $\zeta_0 = 0$ sei. Wir definieren

$$f(z) = \exp\{h(z) + i h^*(z)\}, \tag{11}$$

wobei h^* eine beliebige (bis auf eine additive Konstante bestimmte), zu h konjugiert harmonische Funktion bedeutet. (9) ist äquivalent mit

$$\Big(\int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\Theta})|\, d\Theta\Big)^2 \geqq 4\pi(1-\alpha)\int_0^1\int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 r^{1-2\alpha}\, dr\, d\Theta. \tag{12}$$

Diese Ungleichung verifizieren wir unter Anwendung einer von Carleman stammenden Schlussweise [4]. Wir setzen

$$\varphi(z) = \sqrt{f(z)} = \exp\{(h(z) + i h^*(z))/2\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\gamma z^\nu.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

wobei

$$c_\nu = a_0 a_\nu + a_1 a_{\nu-1} + \cdots + a_\nu a_0.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\Theta})|\, d\Theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu\Theta}\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu e^{-i\nu\Theta}\Big) d\Theta$$

$$= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 \tag{13}$$

und $$\int_0^1 \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r e^{i\Theta})|^2 r^{1-2\alpha}\, dr\, d\Theta$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu\Theta}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_\nu r_\nu e^{-i\nu\Theta}\right) r^{1-2\alpha}\, dr\, d\Theta$$

$$= \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|c_\nu|^2}{\nu+1-\alpha}. \tag{14}$$

Nun ist aber

$$(1-\alpha)\,|c_\nu|^2 = (1-\alpha)\,|a_0 a_\nu + a_1 a_{\nu-1} + \cdots + a_\nu a_0|^2$$
$$\leqq (1-\alpha)(\nu+1)(|a_0|^2 |a_\nu|^2 + |a_1|^2 |a_{\nu-1}|^2 + \cdots + |a_\nu|^2 |a_0|^2)$$
$$\leqq (\nu+1-\alpha)(|a_0|^2 |a_\nu|^2 + |a_1|^2 |a_{\nu-1}|^2 + \cdots + |a_\nu|^2 |a_0|^2). \tag{15}$$

Daraus schliesst man $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|c_\nu|^2}{\nu+1-\alpha} \leqq \frac{1}{1-\alpha}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2\right]^2. \tag{16}$$

(12) folgt nun unmittelbar aus (13), (14) und (16).

Zur Diskussion der Gleichheit unterscheiden wir zwei Fälle:

(I) $\alpha = 0$.

Aus der Gleichheit in (12) — und damit in (15) — folgt

$$a_0 a_\nu = a_1 a_{\nu-1} = \cdots = a_\nu a_0$$

für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Daraus schliessen wir, dass $a_\nu / a_{\nu-1} = \text{const.}$, somit $a_\nu = a_0 q^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi(z) = a_0/(1-qz)$ und $f(z) = a_0^2/(1-qz)^2$. Da offenbar $a_0 = \varphi(0) \neq 0$, ist die Transformation $w = F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ bilinear, bildet also $|z| < 1$ auf das Innere eines Kreises in der w-Ebene ab. Durch geeignete Wahl von z_0 können wir erreichen, dass $w = 0$ dessen Mittelpunkt ist. Dann ist $F(z) = C\Psi(z)$, wobei $w = \Psi(z)$ eine konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ und C eine positive Konstante bedeuten. Daraus folgt $f(z) = C\Psi'(z)$. Mithin

$$u(z) = h(z) = \log|\Psi'(z)| + \log C, \tag{17}$$

d.h. u lässt sich auf die postulierte Art darstellen. Die Umkehrung ist leicht zu beweisen.

(II) $0 < \alpha < 1$.

Aus (15) folgt, dass

$$|a_0|^2 |a_\nu|^2 + |a_1|^2 |a_{\nu-1}|^2 + \cdots + |a_\nu|^2 |a_0|^2 = 0$$

für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Da $a_0 = \varphi(0) \neq 0$, impliziert dies $a_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Die Funktionen φ, f und h sind also konstant und es gilt

$$u(z) = \alpha g(0, z) + c = -\alpha \log |z| + c. \tag{18}$$

Dies ist die behauptete Darstellung, denn im betrachteten Fall ist $\Phi(z) = e^{i\Theta} z$ (Θ reell). Der Beweis der Umkehrung ist trivial.

Sind die Annahmen $\omega = [|z| < 1]$ und $\zeta_0 = 0$ nicht erfüllt, so betrachten wir die Funktion

$$u_0(w) = u(\Phi_0^{-1}(w)) - \log |\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(w))|. \tag{19}$$

Dabei bedeute $w = \Phi_0(z)$ eine beliebige konforme Abbildung von ω auf $|w| < 1$, welche im Falle $\alpha > 0$ die Bedingung $\Phi_0(\zeta_0) = 0$ befriedige. Wie man leicht verifiziert, fällt u_0 unter den soeben erledigten Spezialfall. Ferner ist offenbar

$$\int_\gamma e^u |dz| = \int_{|w|=1} e^{u_0} |dw|$$

und

$$\iint_\omega e^{2u}\, dx\, dy = \iint_{|w|<1} e^{2u_0}\, du\, dv \qquad (w = u + iv).$$

Wir schliessen:

(I) $\alpha = 0$. (9) ist erfüllt. Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$u_0(w) = \log |\Psi'(w)| + c, \tag{20}$$

wobei Ψ einen beliebigen konformen Automorphismus von $|w| < 1$ bezeichnet. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (19) und (20) finden wir nach leichter Umformung

$$u(z) = \log \left| \frac{d}{dz} \Psi(\Phi_0(z)) \right| + c.$$

Dies ist äquivalent mit (10).

(II) $0 < \alpha < 1$. (9) ist befriedigt. Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn

$$u_0(w) = \log |\Psi'(w)(\Psi(w))^{-\alpha}| + c, \tag{21}$$

wobei $\Psi = e^{i\Theta} w$ (Θ reell). Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (19) und (21) gelangt man wieder zur Darstellung (10). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun gehen wir dazu über, die Punktmasse μ_2 zu verschmieren. Betrachten wir zunächst den Fall, da μ_2 aus endlich vielen Einzelmassen besteht: $p_1\alpha$ in ζ_1, $p_2\alpha$ in $\zeta_2, \ldots, p_m\alpha$ in ζ_m, $\sum_1^m p_i = 1$, $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Aus der Hölderschen Ungleichung (siehe z.B. [6], p. 140] und dem Hilfssatz schliessen wir

$$\iint_\omega \exp\left\{2\,h(z)+2\int_\omega g(z,\zeta)\,d\mu_2(e_\zeta)\right\}dx\,dy$$

$$=\iint_\omega \prod_{i=1}^{m}\left[\exp\left\{2\,h(z)+2\,\alpha\,g(z,\zeta_i)\right\}\right]^{p_i}dx\,dy$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m}\left[\iint_\omega \exp\left\{2\,h(z)+2\,\alpha\,g(z,\zeta_i)\right\}dx\,dy\right]^{p_i}$$

$$\leq \frac{1}{4\pi(1-\alpha)}\left(\int_\gamma e^{h(z)}\,|dz|\right)^2. \tag{22}$$

Aus einem naheliegenden Grenzübergang ersieht man sodann, dass die resultierende Abschätzung für beliebige Massenverteilungen μ_2 gültig ist. Ferner ist

$$\int_\gamma e^{h(z)}\,|dz|=\int_\gamma e^{u(z)}\,|dz| \tag{23}$$

und, trivialerweise,

$$\int_\omega g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta)\geq 0. \tag{24}$$

Ungleichung (4) folgt nun aus (6), (7), (22), (23) und (24).

Man verifiziert leicht, dass für alle Funktionen von der Form (5) in (4) das Gleichheitszeichen steht. Ferner findet man, dass unter denjenigen Funktionen, für welche μ_1 identisch verschwindet und μ_2 aus einer Einzelmasse besteht, Gleichheit nur für jene der Form (5) gilt. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass Gleichheit in (4) nur dann möglich ist, falls $\mu_1(\omega)=0$ und μ_2 in einem Punkte konzentriert ist. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist evident: $\mu_1(\omega)>0$ bewirkt Ungleichheit in (24) und kann nicht auf Gleichheit in (4) führen. Die Behauptung, dass ein Verschmieren der Masse μ_2 die Gleichheit in (4) verunmöglicht, ist etwas schwieriger zu beweisen. Wir verzichten auf eine Wiedergabe dieser Abschätzung, welche sich wiederum auf eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung stützt, und verweisen den Leser statt dessen auf ([8], pp. 579–581), wo eine durchaus analoge Überlegung ausführlich dargestellt wurde.

Auf die flächentheoretische Deutung der Ungleichung (4) wurde in [7] hingewiesen, insbesondere auf die Tatsache, dass dieselbe eine Erweiterung der isoperimetrischen Ungleichungen von E. F. Beckenbach und T. Radó [2] und von F. Fiala [5] darstellt. In diesem Zusammenhang ist noch eine Arbeit von G. Bol [3] zu erwähnen, in welcher die Fialasche Ungleichung in anderer Richtung verallgemeinert wurde. Vor allem aber sind die Forschungen von A. D. Alexandrow aufzuführen, dessen neueste isoperimetrische Ungleichung ([1], p. 514) die unsrige umfasst. Die in [1], [3] und [5] verwendeten (geometrischen) Methoden sind sowohl voneinander, als auch von der unsrigen (funktionentheoretischen) gänzlich verschieden.

Es sei hier noch hervorgehoben, dass die von Carleman herrührende isoperimetrische Ungleichung für Minimalflächen [4] den Ausgangspunkt für die erwähnten Untersuchungen bildete.

Herrn Prof. Dr. M. Riesz sind wir für eine wichtige Anregung zu herzlichem Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

[1]. A. D. ALEXANDROW, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
[2]. E. F. BECKENBACH und T. RADÓ, Subharmonic functions and surfaces of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 (1933), 662–674.
[3]. G. BOL, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen. *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung,* 51 (1941), 219–257.
[4]. T. CARLEMAN, Zur Theorie der Minimalflächen. *Math. Z.*, 9 (1921), 154–160.
[5]. F. FIALA, Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. *Comment. Math. Helv.*, 13 (1940–41), 293–346.
[6]. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD und G. PÓLYA, *Inequalities.* Cambridge University Press, second edition, 1952.
[7]. A. HUBER, On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature. *Ann. Math.*, 60 (1954), 237–247.
[8]. ——, On an inequality of Fejér and Riesz. *Ann. Math.*, 63 (1956), 572–587.
[9]. T. RADÓ, *Subharmonic Functions.* Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. V: 1, Springer, Berlin, 1937.
[10]. F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, I und II. *Acta Math.* 48 (1926), 329–343 und 54 (1930), 321–360.
[11]. S. SAKS, *Theory of the Integral.* New York, 1937.