ÜBER DIE LÖSUNG DES CAUCHYPROBLEMS FÜR LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT HILFE VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN

TEIL 1: STABILE SYSTEME VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN (1)

VON

HEINZ-OTTO KREISS

Stockholm

Einleitung

1.1. Die Lösung des Cauchyproblems für partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von zugeordneten Differenzengleichungen wurde schon mehrmals behandelt, so in den Arbeiten von Courant, Friedrichs und Lewy [1], von Lax und Richtmyer [7] und von anderen (z. B. John [3], Mĕimann [9], O'Brien [11], Ryabénkii [12]). Während in allen diesen Arbeiten die Existenz von Differenzapproximationen, deren Lösungen gegen die Lösung des entsprechenden Differentialgleichungsproblems konvergieren, nur für spezielle Differentialgleichungen gezeigt wurde, so wollen wir das Problem für lineare Differentialgleichungssysteme allgemein behandeln.

Wir werden zeigen, wie man zu Anfangswertproblemen zugeordnete Differenzengleichungen konstruiert, aus denen sich bestimmte Aussagen über die Sachgemässheit des Problems und die Existenz der Lösungen der Differentialgleichungen ergeben, und wie man diese Lösungen mit Hilfe der Differenzengleichungen beliebig genau approximiert.

1.2. Gegeben sei das System von linearen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + b(x, t) = P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + b(x, t). \tag{1.2.1}$$

(1) Teil 2 folgt in Kürze.

(2) Diese Arbeit hat der Verfasser im Institut für Mathematik der Kgl. Technischen Hochschule in Stockholm geschrieben, während er Stipendiat des schwedischen technischen Forschungsrats war.

12 – 593802. *Acta mathematica*. 101. Imprimé le 18 juin 1959.

Darin bedeuten:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ Punkte im reellen s-dimensionalen Raum R_s, t die Zeitvariable, $u(x,t)$ und $b(x,t)$ von den angegebenen Argumenten abhängige Funktionenvektoren im komplexen n-dimensionalen Raum, und $P_\nu(x,t,\partial/\partial x)$ ein homogener Differentialoperator ν-ter Ordnung, den man daher auch in der Form:

$$\left.\begin{aligned} P_\nu\left(x,\, t\, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \sum_{\Sigma \nu_i = \nu} A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x,\, t) \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_s^{\nu_s}}, \\ A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x,\, t) & \text{ komplexe } n \cdot n\text{-Matrizen,} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

schreiben kann.

Als Anfangswerte für die Zeit $t = 0$ besitze das System die Werte

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x_i < +\infty.$$

Von den Koeffizienten des Systems (1.2.1) setzen wir voraus, dass sie im ganzen (x,t)-Raum definiert sind und hinreichend oft nach allen Variablen differenzierbar sind, und dass alle diese Ableitungen in jedem endlichen (t)-Bereich gleichmässig beschränkt sind. Von den Anfangswerten nehmen wir an, dass sie in einem geeigneten Banachraum liegen. Die im einzelnen benötigten Regularitätsvoraussetzungen werden wir jeweils bei den betreffenden Sätzen angeben.

1.3. Es sollen nun die Lösungen des Systems (1.2.1) mit Hilfe von Differenzengleichungen konstruiert werden. Dazu betrachten wir geeignete Systeme von Differenzengleichungen

$$u(x, t + k, k) = \{\mathrm{I} + \lambda Q(x, t, h)\} u(x, t, k) + k b(x, t), \tag{1.3.1}$$

von denen wir voraussetzen:

1) Die Anfangswerte sind dieselben wie bei dem System (1.2.1), d. h.

$$u(x, 0, k) = f(x),$$

und für die Koeffizienten von (1.3.1) gelten dieselben Voraussetzungen wie bei dem System (1.2.1).

2) $Q(x, t, h)$ ist ein Differenzenoperator der Art:

$$Q(x,\, t,\, h)\, u = \sum a_{j_1 \ldots j_s}(x,\, t,\, h)\, u\,(x + h\, e_{j_1 \ldots j_s},\, t,\, k), \tag{1.3.2}$$

wobei

a) $e_{j_1 \dots j_s} = \sum_{i=1}^{n} j_i e_i$, ist, e_i i-ter Einheitsvektor, j_i ganze Zahlen;

b) $a_{j_1 \dots j_s}(x, t, h)$ quadratische $n \cdot n$ Matrizen sind, und

c) die Summe nur endlich viele Glieder enthält.

3) Das Verhältnis zwischen dem Zeitschritt k und der m-ten Potenz der Gitterkonstanten h ist konstant, also:

$$\lambda = \frac{k}{h^m} = \text{konst.}\ (^1) \tag{1.3.3}$$

1.4. Wählen wir dann eine reelle Zahl $T > 0$, und setzen wir $k = T/2^n$, $n = 1, 2, \dots$, so definieren wir damit eine Schar von Differenzengleichungssystemen (1.3.1). Dadurch erhalten wir aber für jedes k eine Funktion $u(x,t,k)$, die in allen Punkten t mit $0 \leqslant t = \nu k \leqslant T$ definiert ist. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen $\lim_{k \to 0} u(x,t,k)$ existiert, und eine Lösung des Anfangswertproblems (1.2.1.) darstellt(²). Notwendig dazu ist, dass die Differenzengleichungssysteme für $k \to 0$ formal in das Differentialgleichungssystem übergehen, d.h. für alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen u ist

$$\lim_{k \to 0} \frac{\lambda}{k} Q(x, t, h)\, u = P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u. \tag{1.4.1}$$

Solche Scharen von Differenzengleichungssysteme nennen wir dann dem Differentialgleichungssystem zugeordnet. Diese formale Konvergenz ist aber im allgemeinen nicht hinreichend, wie schon Courant, Friedrichs und Lewy [1] festgestellt haben. Die von ihnen untersuchten Scharen von Differenzengleichungen mussten ausserdem noch stabil sein. Lax und Richtmyer [7] haben dann für sehr allgemeine lineare sachgemässe Anfangswertprobleme gezeigt, dass die Stabilität die sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Funktionen $u(x,t,k)$ gegen die Lösung des Differentialgleichungssystems ist; allerdings mussten sie die Existenz und gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösungen voraussetzen. (Vergleiche auch Měimann [9], Ryabénkii [12].)

1.5. In diesem Teil der Arbeit wollen wir stabile Scharen von Differenzengleichungssystemen konstruieren, die homogenen linearen Systemen von Differentialgleichungen

---

(¹) Auf Differenzengleichungen der Art (1.3.1) wird man geführt, wenn man die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt: z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{durch} \quad \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{durch} \quad \frac{u(x + h e_i) - u(x - h e_i)}{2h}$$

und die so entstehenden Gleichungen mit k multipliziert und $k/h^m = \lambda$ setzt.

(²) Dass wir $k = T/2^n$ setzen, ist reine Bequemlichkeit. Man kann zeigen, dass die hier betrachtete Konvergenz unabhängig davon ist, wie k gegen Null geht.

(1.2.1) ($b(x,t) = 0$) zugeordnet sind. Um den oben erwähnten Satz von Lax und Richtmyer ausnutzen zu können, benutzen wir deren Stabilitätsdefinition:

Gegeben sei eine homogene Schar von Differenzengleichungen (1.3.1):

$$u(x, t+k, k) = \{\mathrm{I} + \lambda Q(x, t, h)\} u(x, t, k). \tag{1.5.1}$$

Als Anfangswerte zu einem beliebigen Zeitpunkt t mit $0 \leqslant t = \nu k < T$ lassen wir alle in einem Banachraum B_0 vorkommenden Funktionen $g(x)$ zu, und nehmen an, dass $Q(x,t,h)$ für jedes feste t und k eine Transformation im Raum B_0 ist. Dann nennen wir die Schar (1.5.1) bezüglich des Intervalls $(0, T)$ und des Banachraums B_0 *stabil*, wenn es eine Konstante $D > 0$ gibt, so dass für alle k, für alle t_1 und t_2 mit

$$0 \leqslant t_1 = \nu_1 k \leqslant t_2 = \nu_2 k \leqslant T$$

und für alle durch (1.5.1) und den Raum B_0 bestimmten Funktionen $u(x, t, k)$ gilt:

$$\|u(x, t_2, k)\| \leqslant D \|u(x, t_1, k)\|. \tag{1.5.2}$$

($\| \ \|$ bezeichnet die Norm des Banachraumes.)

Für Scharen von Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten beweisen wir die Stabilität durch eine stärkere Forderung, nämlich, dass es eine von t, u, k unabhängige Konstante C gibt, so dass

$$\|u(x, t+k, k)\| \leqslant (1 + Ck) \cdot \|u(x, t, k)\|. \tag{1.5.3}$$

Solche Scharen nennen wir *stark stabil.*

Wahrscheinlich ist (1.5.3) keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit. Man kann vermuten, dass (1.5.3) aus (1.5.2) folgt, wenn man zu einer anderen geeigneteren Norm übergeht. Der Vorteil von (1.5.3) besteht darin, dass man nur die lokalen Eigenschaften der Differenzengleichungen zu untersuchen braucht.

1.6. Im zweiten Kapitel betrachten wir Systeme (1.2.1) mit konstanten Koeffizienten. Als Banachraum B_0 wählen wir den Hilbertraum H_0 aller im ganzen R_s quadratisch integrierbaren Funktionen. Wir werden zu jedem sachgemässen Cauchyproblem eine zugeordnete stabile Schar von Differenzengleichungen angeben, deren Lösungen nach dem Satz von Lax und Richtmyer gegen die Lösung des Differentialgleichungssystems konvergieren.

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir dann umgekehrt zeigen, dass aus der Stabilität einer zugeordneten Schar von Differenzengleichungen auch die Sachgemässheit des Cauchyproblems folgt. Damit haben wir dann bewiesen, dass Sachgemässheit eines Cauchyproblems und Existenz einer zugeordneten stabilen Schar von Differenzengleichungssystemen äquivalente Aussagen sind.

Im Kapitel 3 benutzen wir die im vorhergehenden Kapitel konstruierten Scharen, um ein hinreichendes Kriterium für Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten anzugeben, dass eine bezüglich H_0 stabile zugeordnete Schar von Differenzengleichungen existiert. Dieses Kriterium kann man, nach einem Gedanken von J. Leray [8] wesentlich verallgemeinern, wenn man anstatt der speziellen Norm $(u,u)^{\frac{1}{2}}$ von H_0 eine allgemeinere Norm $(u,Bu)^{\frac{1}{2}}$ benutzt, und es ist zu vermuten, dass alle Differentialgleichungssysteme, für die das Cauchyproblem bezüglich eines hinreichend umfassenden Hilbertraumes sachgemäss ist, einem solchen Kriterium genügen.

Im Kapitel 4 betrachten wir dann die Scharen von Differenzengleichungen, die hermitischen Systemen von Differentialgleichungen zugeordnet sind. Diese Differentialgleichungssysteme sind dadurch definiert, dass alle Matrizen in der Gleichung (1.2.2) hermitisch sind. Sie sind eine direkte Verallgemeinerung der von K. Friedrichs [2] untersuchten symmetrischen Systeme 1. Ordnung. Wir formen das im Kapitel 3 gegebene Kriterium um und sehen, dass es die Existenz einer bezüglich H_0 stabilen Differenzapproximation für eine ziemlich umfangreiche Klasse von hermitischen Differentialgleichungssystemen sichert.

1.7. Nun ist es nicht selbstverständlich, dass für alle Systeme von Differentialgleichungen, denen wir stabile Scharen von Differenzengleichungen zuordnen können, das Cauchyproblem sachgemäss ist, oder dass deren Lösungen die geforderten Regularitätsvoraussetzungen erfüllen, damit man den Satz von Lax und Richtmyer anwenden kann. Wir werden daher im 2. Teil unter gewissen Einschränkungen die Konvergenz der Lösungen der Differenzengleichungen zeigen und erhalten damit Beweise für die Existenz von (zumindestens verallgemeinerten) Lösungen des Cauchyproblems.

2. Differenzengleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

2.0. Bezeichnungen. Sind $u,v \in H_0$, so wird das Skalarprodukt durch

$$(u, v) = \int_{R_s} u^* \cdot v \, dx = \int_{R_s} \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i \cdot v_i \, dx$$

und die Norm $\|u\|$ durch

$$\|u\|^2 = (u, u) = \int_{R_s} |u|^2 \, dx$$

definiert.

Ist A eine Matrix, so ist ihre Norm

$$|A| = \overline{\sup_{|w|=1}} |A w|.$$

Mit A^* wird die zu A adjungierte Matrix bezeichnet.

2.1. (Abschnitt 2.1 entspricht P. D. Lax und R. D. Richtmyer [7], S. 275–281, so dass die Darstellung hier sehr konzentriert ist.)

Macht man für die Lösungen von (1.3.1) wie üblich (vgl. z. B. auch Todd [13] und die dort angegebene Literatur) den Ansatz:

$$u(x, t, k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}s} \int_{R_s} e^{i\omega x} \psi(t, \omega, k)\, d\omega; \quad \omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} \text{ reell,}$$

so erhält man aus (1.3.1) und (1.3.2) für $\psi(t, \omega, k)$

$$\psi(t+k, \omega, k) = \{I + \lambda \sum a_{j_1 \ldots j_s}(h)\, e^{ih \sum j_\nu \omega_\nu}\} \psi(t, \omega, k) = B(k, \omega)\, \psi(t, \omega, k),$$

also
$$\psi(t + l k, \omega, k) = B(k, \omega)^l \psi(t, \omega, k).$$

Da
$$\|u(x, t, k)\|^2 = \int_{R_s} |\psi(t, \omega, k)|^2 d\omega, \tag{2.1.1}$$

so ist die Schar von Differenzengleichungen (1.3.1) dann und nur dann stabil, falls es eine Konstante K gibt, so dass für alle ω, k und für alle ganzen Zahlen l mit $0 \leqslant l \cdot k \leqslant T$ gilt:

$$|(B(k, \omega))^l| \leqslant K. \tag{2.1.2}$$

Daraus erhält man die v. Neumann-Bedingung: Die Schar (1.3.1) ist höchstens dann stabil, falls für die Eigenwerte $\varkappa_i$ von $B(k,\omega)$ gilt: Es gibt eine Konstante C, so dass für alle k

$$|\varkappa_i| \leqslant 1 + Ck.$$

2.2. Nun ist das v. Neumann-Kriterium nur notwendig, nicht hinreichend. Man braucht nur das Beispiel ($x \in R_1$, $n = 2$)

$$u(x, t+k, k) = I u(x, t, k) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \{u(x+h, t, k) - 2u(x, t, k) + u(x-h, t, k)\}$$

zu betrachten. Für alle ω sind die Eigenwerte $\varkappa_i = 1$. Also ist das v. Neumann-Kriterium erfüllt. Für $\omega h = \frac{1}{2}\pi$ erhält man aber

$$B(k, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also
$$B(k,\omega)^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen daher ausserdem berücksichtigen, wie und auf welche Normalform man $B(k,\omega)$ transformieren kann.

2.3. In einer vorausgehenden Arbeit (Kreiss [5]) haben wir folgendes notwendige und hinreichende algebraische Kriterium für die Stabilität bewiesen:

SATZ 1. *Dann und nur dann ist die Schar* (1.3.1) *mit konstanten Koeffizienten stabil, falls es eine nichtsinguläre Transformation $S(k,\omega)$ und eine Konstante K gibt, so dass für alle ω und k gilt:*

1) $|S(k,\omega)| \leqslant K, \quad |S^{-1}(k,\omega)| \leqslant K;$

2) $S(k,\omega)\, B(k,\omega)\, S^{-1}(k,\omega) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & g_{12} & \cdots & g_{1n-1} & g_{1n} \\ 0 & \varkappa_2 & \cdots & g_{2n-1} & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdots & 0 & \varkappa_n \end{pmatrix};$

3) $|\varkappa_i| \leqslant 1 + Kk$ (v. Neumann-Bedingung);

4) $|g_{ij}| \leqslant K(k + |1 - |\varkappa_i||)$.

Nun ist dieses Kriterium in manchen Fällen nicht besonders übersichtlich und leicht anwendbar. Es ist daher von Interesse, explizit eine Methode anzugeben, stabile Scharen von Differenzengleichungen zu konstruieren.

2.4. Wir geben zunächst ein Beispiel, um die Konstruktionsmethode zu erläutern: Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad u(x,0) = f(x); \qquad f(x),\ \frac{d f(x)}{dx} \in H_0. \tag{2.4.1}$$

Ordnet man dieser die Schar

$$\left.\begin{aligned} u(x, t+k, k) = \{I + \lambda\,\Delta(2h)\}\, u(x,t,k); \qquad \Delta(2h)\, u = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2}; \\ u(x,0,k) = f(x) \end{aligned}\right\} \tag{2.4.2}$$

zu, so konvergieren ihre Lösungen im allgemeinen nicht gegen die Lösung von (2.4.1), obwohl (2.4.2) formal für $k \to 0$ in (2.4.1) übergeht. Die Schar (2.4.2) ist nämlich für kein $\lambda > 0$ stabil. Wäre es stabil, so müsste nach (2.1.2)

$$|1 + i\lambda \sin \omega h|^l$$

für alle ωh und irgend ein $\lambda > 0$ gleichmässig beschränkt sein, und das ist der Ausdruck offensichtlich nicht.

Ersetzt man aber (2.4.2) durch

$$u(x, t+k, k) = \{I + \sigma\Delta^2(2h) + \lambda\Delta(2h)\}u(x, t, k);\text{(1)} \quad \sigma = \text{konst.} > 0, \tag{2.4.3}$$

so konvergiert (2.4.3) immer noch formal für jedes σ gegen die Differentialgleichung (2.4.1). (2.4.3) ist aber bei geeigneter Wahl von σ und λ stabil.

Nach (2.1.2) muss

$$|1 - \sigma \sin^2 \omega h + i\lambda \sin \omega h|^l$$

gleichmässig beschränkt sein. Das können wir aber dadurch erreichen, dass wir λ und σ so wählen, dass für alle ω

$$|1 - \sigma \sin^2 \omega h + i\lambda \sin \omega h| \leqslant 1$$

ist.

Wir haben also durch Hinzufügung von Gliedern höherer Ordnung erreicht, dass die instabile Schar (2.4.2) in die stabile Schar (2.4.3) übergeht.

2.5. Es bereitet nun keine Schwierigkeiten, mit Hilfe dieser Methode zu jedem im Hilbertraum H_0 sachgemässen Cauchyproblem eine stabile Schar von Differenzengleichungssystemen zu konstruieren.

Es bezeichne $\Delta_j(2h)$ den Differenzenoperator

$$\Delta_j(2h)\, u(x) = \frac{u(x+e_j h) - u(x - e_j h)}{2}.$$

Dann ist
$$\Delta_j(2h)\, a\, e^{i\omega k} = i\, a\, e^{i\omega x} \sin \omega_j h; \quad (a \text{ konst.}).$$

Wir approximieren die Differentialoperatoren (1.2.2)

$$P_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum A_{\nu_1 \dots \nu_s} \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_s^{\nu_s}}$$

durch die Differenzenoperatoren

$$P_\nu(\Delta(2h)) = \frac{1}{h^\nu} \sum A_{\nu_1 \dots \nu_s} \Delta_1^{\nu_1}(2h) \dots \Delta_s^{\nu_s}(2h)$$

und betrachten die dem homogenen Differentialgleichungssystem (1.2.1) zugeordnete Schar:

---

(1) Dies entspricht der bekannten Viskositätsmethode. Siehe z. B. v. Neumann und Richtmyer [10].

$$u(x, t+k, k) = \{I(1-(-1)^p \sigma \sum_{j=1}^{s} \Delta_j^{2p}(2h)) + \lambda \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(\Delta(2h))\} u(x, t, k). \quad (2.5.1)$$

Dabei ist p irgend eine ganze Zahl mit $m < 2p \leqslant 2m$ und σ eine Konstante > 0, die wir genau so wie λ geeignet wählen. (Man beachte, dass (2.5.1) für beliebige $\lambda, \sigma > 0$ (1.2.1) zugeordnet ist.) Macht man jetzt nach 2.1 den Ansatz:

$$u(x, t, k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}s} \int_{R_s} e^{i\omega x} \psi(t, \omega, k)\, d\omega,$$

so folgt

$$\psi(t+k, \omega, k) = \{\mathrm{I}(1-\sigma \sum_{j=1}^{s} (\sin \omega_j h)^{2p}) + \lambda \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(i \sin \omega h)\} \psi(t, \omega, k), \quad (2.5.2)$$

wobei $$\sin \omega h = \{\sin \omega_1 h, \ldots, \sin \omega_s h\}.$$

Es gibt nun einen Vektor $\hat{\omega}$, so dass

$$\sin \omega h = \hat{\omega} h, \quad \text{wobei} \quad |\hat{\omega}_j h| \leqslant 1. \quad (2.5.3)$$

Daraus folgt:

$$\psi(t+k, \omega, k) = \{I(1-\sigma \sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j h)^{2p}) + \lambda h^m \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu(i\hat{\omega})\} \psi(t, \omega, k). \quad (2.5.4)$$

Nun haben wir in einer anderen Arbeit (Kreiss [4]) folgendes Kriterium für die Sachgemässheit des Cauchyproblems bewiesen:

Satz 2. *Das Cauchyproblem für homogene Differentialgleichungssysteme* (1.2.1) *ist dann und nur dann sachgemäss, wenn es hermitesche Matrizen $Q(\omega)$ und Konstanten $\delta_i > 0$ gibt, so dass für alle ω und alle Vektoren v gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \delta_1 v^* v \leqslant v^* Q(\omega) v \leqslant \delta_2 v^* v; \\ \text{b)} & v^* \{Q(\omega) \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu(i\omega) + \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu^*(i\omega) Q(\omega)\} v \leqslant \delta_3 v^* Q(\omega) v. \end{array}\right\} \quad (2.5.5)$$

Aus (2.5.4) folgt für jedes ω, wenn wir zur Abkürzung

$$\sum P_\nu(i\hat{\omega}) = P(i\hat{\omega}), \qquad \psi_1^* Q(\hat{\omega}) \psi_1 = |\psi_1|_Q^2$$

setzen,

$$|\psi(t+k, \omega, k)|_Q^2 = |\psi(t, \omega, k)|_Q^2 + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV},$$

wobei

$$\mathrm{I} = \lambda h^m \{1 - \sigma \sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j h)^{2p}\} \psi^* (t, \omega, k) \{Q(\hat{\omega}) P(i\hat{\omega}) + P^*(i\hat{\omega}) Q(\hat{\omega})\} \psi(t, \omega, k);$$

$$\mathrm{II} = -2\sigma \sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j h)^{2p} |\psi(t, \omega, k)|_Q^2;$$

$$\mathrm{III} = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j h)^{2p}\right)^2 |\psi(t, \omega, k)|_Q^2;$$

$$\mathrm{IV} = \lambda^2 h^{2m} |P(i\hat{\omega}) \psi(t, \omega, k)|_Q^2.$$

Da $P(i\hat{\omega})$ ein Polynom von $\hat{\omega}$ der Ordnung m ist, gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{IV} &\leqslant \lambda^2 K h^{2m} \left(\sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j)^{2m} + 1\right) |\psi(t, \omega, k)|_Q^2 \\ &= \lambda^2 K \sum_{j=1}^{s} (\hat{\omega}_j h)^{2m} |\psi(t, \omega, k)|_Q^2 + K k^2 |\psi(t, \omega, k)|_Q^2. \end{aligned}\right\} \quad (2.5.6)$$

Wegen $|\hat{\omega}_j h| \leqslant 1$ ist für $\sigma \leqslant s^{-1}$

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} \leqslant \tfrac{1}{2}\,\mathrm{II},$$

und da $2p \leqslant 2m$ ist, können wir dann nach (2.5.6) $\lambda > 0$ so bestimmen, dass

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} \leqslant K k^2 |\psi(t, \omega, k)|_Q^2.$$

Nach (2.5.5b) gilt aber für $\sigma \leqslant s^{-1}$

$$\mathrm{I} \leqslant \delta_3 k |\psi(t, \omega, k)|_Q^2.$$

Also ist
$$|\psi(t + k, \omega, k)|_Q^2 \leqslant (1 + \text{konst.} \cdot k) |\psi(t, \omega, k)|_Q^2.$$

Aus (2.5.5a) und der Parsevalschen Gleichung ergibt sich so, dass (2.5.1) für solche σ und λ stabil ist. Damit haben wir bewiesen:

SATZ 3. *Zu jedem System von Differentialgleichungen, für das das Cauchyproblem sachgemäss ist, gibt es eine stabile zugeordnete Schar von Differenzengleichungen. Eine solche Schar ist* (2.5.1) *bei geeigneter Wahl von λ und σ.*(1)

3. Differenzengleichungssysteme mit variablen Koeffizienten

In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse des vorigen Kapitels auf Systeme mit variablen Koeffizienten verallgemeinern. Als Anfangswerte lassen wir, wenn nichts anderes

(1) Für hyperbolische Systeme 1. Ordnung hat P. D. Lax [6] die Stabilität von 2.5.1 für einen sogar grösseren λ-Bereich gezeigt. Vergleiche auch Kreiss [5].

ausdrücklich vorausgesetzt wird, wieder alle Funktionen $\in H_0$ zu. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, wollen wir die Untersuchung in einem festen t-Intervall $(0, T)$ durchführen.

3.0. Bezeichnungen (vgl. auch 2.0).

1) Neben
$$\Delta_j(2h)\,u = \frac{u(x+e_j h) - u(x-e_j h)}{2}$$
betrachten wir auch die Operatoren
$$E_j(2h)\,u = \frac{u(x+h\,e_j) + u(x-h\,e_j)}{2}.$$
Man beachte, dass diese Operatoren miteinander vertauschbar sind, und dass
$$\|E_j u\| \leqslant \|u\|.$$

2) Wir sagen, dass eine Matrix $A(x,t) \in C_\nu$, wenn alle ihre Koeffizienten im t-Intervall $(0,T)$ ν mal nach allen x_i differenzierbar sind und alle diese Ableitungen im Intervall $(0,T)$ und im ganzen x-Raum R_s gleichmässig beschränkt sind.

3.1. In diesem Abschnitt beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei die Matrix $A(x) \in C_\nu$, $\nu \geqslant 3$, und $u(x), v(x) \in H_0$. Es bezeichne $\Delta(2h)$ irgend einen der Differenzenoperatoren $\Delta_j(2h)$ und $\partial/\partial x$, $E(2h)$ die entsprechenden Operatoren $\partial/\partial x_j$, $E_j(2h)$. Dann gilt:*
$$\begin{aligned}(u, A\,\Delta(2h)\,v) &= -(\Delta(2h)\,u,\ A_1 v) - h\,(E(2h)\,u,\ A_2 v)\\ &= -(\Delta(2h)\,u,\ A_1 v) - h\,(u,\ A_2 v) - 2h\,(\Delta^2(h)\,u,\ A_2 v),\end{aligned} \tag{3.1.1}$$
wobei
$$\left.\begin{aligned}A_1(x) &= A(x) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}\\ A_2(x) &= \frac{\partial A(x)}{\partial (x)} + \frac{h^2}{2!}\frac{1}{h}\int_0^h \frac{(h-\tau)^2}{h^2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}(A(x+\tau) + A(x-\tau))\,d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{3.1.2}$$

Beweis: Es sei e der dem Differenzenoperator $\Delta(2h)$ entsprechende Einheitsvektor. Dann ist:
$$\begin{aligned}(u, A\,\Delta(2h)\,v) &= \frac{1}{2}\int_{R_s} u^*(x)\,A(x)\,v(x+he)\,dx - \frac{1}{2}\int_{R_s} u^*(x)\,A(x)\,v(x-he)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{R_s} u^*(x-he)\,A(x-he)\,v(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{R_s} u^*(x+he)\,A(x+he)\,v(x)\,dx.\end{aligned}$$

Aus der Taylorschen Formel angewandt auf $A(x \pm h e)$ ergibt sich die erste Gleichung. Die zweite entsteht aus der ersten durch einfache algebraische Umformung.

Hilfssatz 2. *Wir betrachten den Ausdruck:*

$$S = -\sum_{j=1}^{s} \| \Delta_j^p(h) u \|^2 + \lambda h^\mu \operatorname{Real} \{(P_1(E) Q_1(\Delta) u, A(x) P_2(E) Q_2(\Delta) u)\}, \tag{3.1.3}$$

wobei gilt:

1) *$P_i(E)$ sind Polynome in $E_j(h)$ und $E_j(2h)$ mit konstanten Koeffizienten.*

2) *$Q_i(\Delta)$ sind Monome in $\Delta_j(h)$, $\Delta_j(2h)$ der Ordnung $\nu_i > 0$, deren Koeffizienten gleich 1 sind.*

3) *μ ist eine ganze Zahl $\geqslant 0$ und $\mu + \nu_1 + \nu_2 \geqslant 2p$.*

4) *$A(x)$ ist eine Matrix $\in C_\varrho$ mit $\varrho = \operatorname{Max}\{0, p-\mu-\nu_1+3, p-\mu-\nu_2+3\}$.*

Dann gibt es eine Konstante $\lambda_0 > 0$, so dass für alle λ mit $|\lambda| \leqslant \lambda_0$

$$S \leqslant \text{konst.} \cdot h^{2p} \|u\|^2.$$

Die Konstante hängt dabei nur von λ_0, den Abschätzungen für $A(x)$ und ihren Ableitungen $\leqslant \varrho$-ter Ordnung und von den Abschätzungen für die Koeffizienten der Polynome P_i ab (in der Max. Norm).

Ist speziell $\mu > 0$, so kann man λ_0 beliebig gross wählen.

Beweis: Der obige Satz ist richtig für Ausdrücke

$$S = -\| \Delta_j^p(h) u \|^2 + \lambda C h^\mu \| \Delta_j^{\nu_1}(h) u \|^2,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Denn ist
$$u = (2\pi)^{-\frac{1}{2}s} \int_{R_s} e^{i\omega x} \psi(\omega)\, d\omega,$$

so folgt
$$\| \Delta_j^p(h) u \|^2 = \int_{R_s} |\psi(\omega)|^2 \sin^{2p} \tfrac{1}{2}\omega h\, d\omega,$$

also
$$S = -\int_{R_s} |\psi(\omega)|^2 (\sin^{2p} \tfrac{1}{2}\omega h - \lambda C h^\mu \sin^{2\nu_1} \tfrac{1}{2}\omega h)\, d\omega$$

$$\leqslant -\int_{R_s} |\psi(\omega)|^2 \sin^{2p-\mu} \tfrac{1}{2}\omega h\, (\sin^\mu \tfrac{1}{2}\omega h - \lambda C h^\mu)\, d\omega,$$

und für die zwei Möglichkeiten $\mu = 0$, $\mu \neq 0$ gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} \mu=0, & \text{dann ist } S\leqslant 0 & \text{für } \lambda\leqslant 1/C; \\ \mu>0, & \text{dann ist } S\leqslant h^{2p}\cdot\sqrt[\mu]{(\lambda C)^{2p}}\cdot\|u\|^2 & \text{für beliebige } \lambda. \end{array}\right\} \tag{3.1.4}$$

Ebenso leicht beweist man die Abschätzung für den allgemeineren Ausdruck 3.1.3, wenn man ausserdem

$$\mu+\nu_i\geqslant p, \quad i=1,2, \tag{3.1.5}$$

voraussetzt. Dann kann man nämlich $\mu=\mu_1+\mu_2$ so aufspalten, dass

$$\mu_i+\nu_i\geqslant p, \quad i=1,2, \quad \mu_i \text{ ganze Zahlen } \geqslant 0,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} S &\leqslant -\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^p(h)u\|^2+\lambda h^{\mu}\,|P_1(E)Q_1(\Delta)u,\ A(x)P_2(E)Q_2(\Delta)u| \\ &\leqslant -\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^p(h)u\|^2+\lambda\cdot\text{konst.}\left(\sum_{j=1}^{s}D h^{\mu_1}\|\Delta_j^{\nu_1}(h)u\|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{D}h^{\mu_2}\|\Delta_j^{\nu_2}(h)u\|\right) \\ &\leqslant -\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^p(h)u\|^2+\lambda\frac{s^2}{2}\cdot\text{konst.}\left\{D^2h^{2\mu_1}\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^{\nu_1}(h)u\|^2+\frac{1}{D^2}h^{2\mu_2}\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^{\nu_2}(h)u\|^2\right\}, \end{aligned}$$

wobei D eine beliebige Konstante $\neq 0$ ist.

Ist $\mu_1=\mu_2=0$ oder sind beide $\mu_i>0$, so könen wir $D=1$ setzen und die Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten Bemerkung. Ist genau eins der $\mu_i=0$, so kann man trotzdem die Abschätzung für beliebig grosses $|\lambda|$ benutzen; man muss dann aber D geeignet wählen.

Nun können wir den Satz ohne Einschränkung durch vollständige Induktion nach der Ordnung μ der h-Potenz zeigen. Für $\mu\geqslant 2p$ ist alles klar. Sei der Satz für $\mu=\mu_0$, $0<\mu_0\leqslant 2p$ bewiesen. Dann beweisen wir, dass er auch für $\mu=\mu_0-1$ gilt.

Nach Hilfssatz 1 können wir die Differenzenoperatoren von der einen Seite des Skalarproduktes auf die andere überführen und so erreichen, dass 3.1.5 erfüllt ist, d. h. wir können S auf einen Ausdruck

$$S=-\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^p(h)u\|^2+\lambda h^{\mu_0-1}\,\text{Real}\,(\hat P_1(E)\hat Q_1(\Delta)u,\ A(x)\hat P_2(E)\hat Q_2(\Delta)u)+\lambda h^{\mu_0}\times$$

$$\times\{\text{ähnliche Ausdrücke, auf die wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können}\}$$

zurückführen, wobei

$$\hat\nu_i+\mu_0-1\geqslant p, \quad i=1.2; \quad \hat\nu_1+\hat\nu_2+\mu_0-1\geqslant 2p; \quad (\hat\nu_i=\text{Ordnung von } \hat Q_i).$$

Daraus folgt aber die Behauptung.

3.2. Gegeben sei ein homogenes System von Differentialgleichungen 1.2.1. Wir geben zunächst ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer zugeordneten, stark stabilen Schar von Differenzengleichungen an und zeigen dann, dass das Differenzanalogon dieses Kriteriums auch hinreichend ist.

Es sei $$u(x,t+k,k) = \{I + \lambda Q(x,t,h)\} u(x,t,k)$$

irgend eine 1.2.1 zugeordnete stark stabile Schar von Differenzengleichungen, d. h.

a) für alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen ist

$$\lim_{k\to 0} \frac{\lambda}{k} Q(x,t,h)\, u = P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u;$$

b) es gibt eine Konstante K, so dass für alle k, t und alle u

$$\|(I + \lambda Q) u\|^2 \leqslant (1 + Kk) \|u\|^2.$$

Aus Eigenschaft b) folgt, dass

$$2 \operatorname{Real}(u, \lambda Q u) + \|\lambda Q u\|^2 \leqslant Kk \|u\|^2,$$

also auch $$2 \operatorname{Real}\left(u, \frac{\lambda}{k} Q u\right) \leqslant K \|u\|^2.$$

Aus Eigenschaft a) und der letzten Ungleichung folgt dann:

SATZ 4. *Damit zu einem System von Differentialgleichungen* 1.2.1 *eine stark stabile Schar von Differenzengleichungen existiert, ist notwendig, dass für alle u, die im Definitionsbereich von $P(x,t,\partial/\partial x)$ liegen, gilt:*

$$\operatorname{Real}(u, Pu) \leqslant K \|u\|^2; \quad K = \textit{Konstante, unabhängig von } u, t.$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass das Differenzanalogon dieses Kriteriums auch hinreichend ist.

Wir ordnen dem homogenen System von Differentialgleichungen 1.2.1 die Schar

$$u(x, t+k, k) = \left\{ I - (-1)^p \sigma \sum_{j=1}^{s} \Delta_j^{2p}(h) + \lambda \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(x, t, \Delta(2h)) \right\} u(x,t,k) \quad (3.2.1)$$

zu, wobei

a) $p = [\frac{1}{2}(m+2)]$ ist, ($[\nu]$ = grösste ganze Zahl $\leqslant \nu$);

b) σ, λ geeignet gewählte Konstanten >0 sind;

c) die Koeffizienten $A_{\nu_1 \dots \nu_s}(x,t)$ der Operatoren $P_\nu \in C_{\nu+3}$ sind.

Dann gilt: $\qquad \| u(x, t+k, k)\|^2 = \| u(x, t, k)\|^2 + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 2\lambda \operatorname{Real}\left(u(x, t, k), \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(x, t, \Delta(2h))\, u(x, t, k)\right) - \frac{\sigma}{3}\sum_{j=1}^{s} \|\Delta_j^p(h)\, u(x, t, k)\|^2;\\
\mathrm{II} &= \sigma^2 \left\|\sum_{j=1}^{s} \Delta_j^{2p}(h)\, u(x, t, k)\right\|^2 + \lambda^2 \|P_m(x, t, \Delta(2h))\, u(x, t, k)\|^2 -\\
&\quad - (-1)^p\, 2\lambda\sigma \operatorname{Real}\left(\sum_{j=1}^{s} \Delta_j^{2p}(h)\, u(x, t, k), P_m(x, t, \Delta(2h))\, u(x, t, k)\right) -\\
&\quad - \frac{4\sigma}{3}\sum_{j=1}^{s} \|\Delta_j^p(h)\, u(x, t, k)\|^2;\\
\mathrm{III} &= -\frac{\sigma}{3}\sum_{j=1}^{s} \|\Delta_j^p(h)\, u(x, t, k)\|^2 + \text{Glieder, die proportional } h \text{ und von so hoher Ord-}\\
&\quad \text{nung in den } \Delta_j \text{ sind, so dass nach Hilfssatz 2}\\
\mathrm{III} &\leqslant h^{2p}\, \text{konst.} \cdot \|u(x, t, k)\|^2 \leqslant k \cdot \text{konst.} \cdot \|u(x, t, k)\| \quad \text{bei jeder Wahl von } \sigma, \lambda > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.2}$$

Ebenso kann man nach Hilfssatz 2 (Vergleiche auch den Beweis für Satz 3) σ und $\lambda > 0$ so wählen, dass auch für II eine Abschätzung

$$\mathrm{II} \leqslant k \cdot \text{konst.} \cdot \|u(x, t, k)\|^2 \tag{3.2.3}$$

gilt. Dabei sind die Konstanten unabhängig von u, t und k. Wir brauchen also nur noch den Ausdruck I zu untersuchen. Daraus folgt

Satz 5. *Gibt es zu jedem $\mu > 0$ eine Konstante K, so dass für alle $u \in H_0$, alle $t \in (0, T)$ und alle k*

$$T = \operatorname{Real}\left(u, \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(x, t, \Delta(2h))\, u\right) \leqslant k K \|u\|^2 + \mu \sum_{j=1}^{s} \|\Delta_j^p(h)\, u\|^2,$$

so ist (3.2.1) *für alle $\lambda, \sigma > 0$ stabil, für die* (3.2.3) *gilt.*

Wir sehen die Bedeutung der Glieder $\sigma(-1)^p \sum_{j=1}^{s} \Delta_j^{2p}(h)\, u$. Sie sorgen dafür, dass alle Glieder, die nur durch die Differenzapproximation hineinkommen, auf die Stabilität keinen Einfluss haben, und dass diese nur von der Differentialgleichung abhängt.(1)

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich speziell für parabolische Systeme:

(1) In den Anwendungen wird man häufig auch andere stabilitätserzeugende Glieder benutzen, um so für die numerische Berechnung bequemere oder genauere Formeln zu erhalten.

Satz 6. *Ist* $m = 2q$, *und gibt es Konstanten* $\delta_i > 0$, *so dass für alle* $u \in H_0$ *und alle* k

$$\text{Real}\,(u, P_m(x, t, \Delta(2h)u) \leqslant -\delta_1 \sum_{j=1}^{s} \|\Delta_j^q(2h)u\|^2 + \delta_2 k \|u\|^2,$$

so ist 3.2.1 *für alle die* $\sigma, \lambda > 0$ *stabil, für die* (3.2.3) *gilt.*(1)

Beispiel. Gegeben sei das System

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t) u.$$

Nach Satz 6 ist die zugeordnete Schar (3.2.1) bei geeigneter Wahl von $\sigma, \lambda > 0$ stabil, wenn die Eigenwerte von $A(x, t) + A^*(x, t)$ grösser als eine Konstante $\delta > 0$ sind.

3.3. Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes kann man verallgemeinern, wenn man statt der L_2-Norm (u, u) allgemeinere Normen (u, Bu) verwendet. Hierbei sind B selbstadjungierte Operatoren, die positiv definit sind, d. h. es gibt eine Konstante $\delta > 0$, so dass

$$(u, Bu) \geqslant \delta(u, u).$$

Die Norm kann auch von t abhängen. Man verlange dann aber zweckmässig, dass sie bezüglich t gleichmässig lipschitzbeschränkt ist, das soll heissen: es gibt eine Konstante K_0, so dass für alle $t_i \in (0, T)$ und alle zugelassenen u

$$|(u, B(t_1)u) - (u, B(t_2)u)| \leqslant |t_1 - t_2| \cdot K_0(u, B(t_1)u).$$

Wichtig ist es, dass für diese so verallgemeinerte Norm ein dem Hilfssatz 2 entsprechender Satz gilt. Ist z. B.

$$B = \sum_{\nu=0}^{2p} B_\nu \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$ B_ν = homogene Differentialoperatoren der Ordnung ν, deren Koeffizienten $\in C_\mu$ mit hinreichend grossem μ,

ein Differentialoperator, für den es Konstanten δ_1, $\delta_2 > 0$ gibt, so dass für alle u, für die Bu existiert,

$$\delta_1 \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{j=1}^{s} \left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial x_j^\nu} \right\|^2 \leqslant (u, Bu) \leqslant \delta_2 \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{j=1}^{s} \left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial x_j^\nu} \right\|^2,$$

so gibt es einen solchen analogen Hilfssatz, und man kann zeigen, dass die Schar (3.4.1) bei geeigneter Wahl von $\sigma, \lambda > 0$ bezüglich dieser Norm stabil ist, wenn es eine Konstante K

(1) In diesem Fall kann man sogar $\sigma = 0$ setzen und erhält Stabilität, wenn man λ hinreichend klein wählt.

gibt, so dass für alle u mit existierendem Bu und für alle k

$$(Bu, \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu u) + (u, B \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu u) \leqslant K k (u, Bu).$$

4. Hermitesche Systeme von Differenzengleichungen

Wir setzen jetzt voraus, dass die Koeffizienten $A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t)$ des Differentialgleichungssystems (1.2.1) hermitesche Matrizen sind (wobei wir dieselben Regularitätsvoraussetzungen machen wie im vorigem Kapitel), und wollen untersuchen, wann die Schar (3.2.1) stabil ist. Wir nehmen immer an, dass $\lambda, \sigma > 0$ so gewählt sind, dass (3.2.3) gilt, und brauchen daher nur den Ausdruck T des Satzes 5 zu untersuchen.

4.1. Aus Satz 5 ergibt sich:

SATZ 7. *Für hermitesche Systeme* 1. *Ordnung* (*also* $m = 1$) *ist die Schar* (3.2.1) *stabil.*

Beweis. Schreibt man

$$P_1(x, t, \Delta(2h)) = \sum_{\nu=1}^{s} A_\nu(x, t)\, \Delta_\nu(2h), \quad A_\nu \text{ hermitesch } \in C_3,$$

so folgt aus Hilfssatz 1

$$(u, A_\nu \Delta_\nu(2h)\, u) = -(A_\nu \Delta_\nu(2h)\, u, u) + O(h); \; |O(h)| \leqslant \text{konst.} \cdot h \cdot \| u \|^2.$$

Also ist, da $\lambda = k/h = \text{konst.}$,

$$|(u, A_\nu \Delta_\nu(2h) u) + (A_\nu \Delta_\nu(2h) u, u)| \leqslant k \cdot \text{konst.} \cdot \| u \|^2,$$

wobei die Konstante nicht von k, t und u abhängt.

4.2. Hilfssatz 1 kann man jetzt benutzen, um Satz 5 für hermitesche Systeme eine für die Anwendung oft bequemere Form zu geben.

Da wir nur an der Stabilität interessiert sind, führen wir zur bequemen Schreibweise Äquivalenzen ein. Wir sagen: zwei Skalarprodukte F und G sind äquivalent,

$$F \simeq G,$$

falls für alle $u \in H_0$

$$|F - G| \leqslant \mu \sum_{j=1}^{s} \| \Delta_j^p(h)\, u \|^2 + k \cdot \text{konst.} \cdot \| u \|^2, \quad p = [\tfrac{1}{2}(m+2)]$$

bei jeder Wahl von $\mu > 0$. Hierbei darf die Konstante (bei festem F, G) nur von μ abhängen. Sie braucht aber nicht beschränkt zu bleiben, wenn $\mu \to 0$. Man sieht leicht ein, dass folgende Rechenregeln gelten:

1) Aus $F_1 \simeq G_1$, $F_2 \simeq G_2$ folgt $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \simeq \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$; λ_1, λ_2 beliebige Konstanten.

2) Aus $F_1 \simeq G_1$, $G_1 \simeq G_2$ folgt $F_1 \simeq G_2$.

3) Aus $F_1 \simeq G_1$ folgt $G_1 \simeq F_1$.

Das Rechnen mit Äquivalenzen bedeutet nichts anderes, als dass man alle Glieder, die auf die Stabilität keinen Einfluss haben, vernachlässigt, und man kann speziell in Satz 5 T durch einen äquivalenten Ausdruck ersetzen. Wendet man Hilfssatz 1 auf Ausdrücke

$$\lambda h^{m-\nu}(u, P_{\nu-1} \cdot \Delta_j(2h)\, u)$$

an, wobei

$$P_{\nu-1} = \sum_{\Sigma \nu_i = \nu-1} A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t)\, \Delta_1^{\nu_1}(2h) \ldots \Delta_s^{\nu_s}(2h), \qquad A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t) \in C_{3+\nu},$$

so folgt wegen (3.2.1 a) nach Hilfssatz 1

$$\lambda h^{m-\nu}(u, P_{\nu-1} \cdot \Delta_j(2h)\, u) \simeq -\lambda h^{m-\nu} \left\{ (\Delta_j(2h)\, u, P_{\nu-1} u) + h \left(u, \frac{\partial P_{\nu-1}}{\partial x_j} \cdot u \right) \right\}^{(1)}, \tag{4.2.1}$$

wobei

$$\frac{\partial P_{\nu-1}}{\partial x_j} = \sum_{\Sigma \nu_i = \nu-1} \frac{\partial A}{\partial x_j} \Delta_1^{\nu_1}(2h) \ldots \Delta_s^{\nu_s}(2h).$$

Man kann also genau so rechnen als ob

$$\Delta_j(2h) = h \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Wendet man (4.2.1) mehrmals auf den Ausdruck T des Satzes 5 an, so folgt aus dem alternierenden Charakter von (4.2.1) und aus der Hermitezität der $A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t)$ der

SATZ 7. *Für den Ausdruck*

$$T = \operatorname{Real}\left(u, \sum_{\nu=0}^{m} h^{m-\nu} P_\nu(x, t, \Delta(2h))\, u \right)$$

gilt eine äquivalente Darstellung

$$T \simeq \sum_{\mu=0}^{[\frac{1}{2}m]} \sum_{\varrho} h^{m-2\mu} (Q_{\varrho\mu}(x, t, \Delta(2h))\, u, R_{\varrho\mu}(x, t, \Delta(2h))\, u).$$

Dabei sind die $Q_{\varrho\mu}$, $R_{\varrho\mu}$ homogene Differenzenoperatoren in den $\Delta_j(2h)$ der Ordnung μ, deren Koeffizienten nur von den l-ten Ableitungen der $A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t)$ abhängen, für die

(1) Die Äquivalenz (4.2.1) gilt natürlich auch, wenn die $A_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x, t)$ nicht hermitesch sind.

$$2\mu=\sum_{i=1}^{s}\nu_i-l$$

ist.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber alle Darstellungen sind äquivalent. Ist für irgend eine Darstellung

$$T\leqslant k\delta\|u\|^2,\quad \delta=\text{Konstante, unabhängig von } k \text{ und } u,$$

so ist (3.2.1) stabil. Aus Hilfssatz 2 folgt daraus:

SATZ 9. *Ist*

$$\sum_{\varrho}(Q_{\varrho\mu}(x,t,\Delta(2h))u,\ R_{\varrho\mu}(x,t,\Delta(2h))u)\leqslant-\delta_1\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^{\mu}(2h)u\|^2+\delta_2 k\|u\|^2,\qquad \mu=[\tfrac{1}{2}m],$$

oder was dasselbe ist:

a) *für* $m\equiv 0$ (*mod* 2)

$$\text{Real}\,(u,P_m(x,t,\Delta(2h))u)\leqslant-\delta_3\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^{\frac{1}{2}m}(2h)u\|^2+\delta_4 k\|u\|^2;$$

b) *für* $m\equiv 1$ (*mod* 2)

$$\text{Real}\,\{(u,P_m(x,t,\Delta(2h))u)+h(u,P_{m-1}(x,t,\Delta(2h))u)\}$$
$$\leqslant-\delta_5 h\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_j^{\mu}(2h)u\|^2+\delta_6 k\|u\|^2,\quad \mu=[\tfrac{1}{2}m],$$

wobei die δ_i *von* u *und* k *unabhängige Konstanten* >0 *sind, so ist die Schar* (3.2.1) *stabil*(1).

4.3. Um die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zu erläutern, wollen wir zwei Beispiele betrachten.

Beispiel 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{s}\left(A_j(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+B_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+Cu. \tag{4.3.1}$$

Nach (4.2.1) gilt für T

$$T=\text{Real}\left\{\sum_{j=1}^{s}((u,A_j(x,t)\Delta_j^2(2h)u)+h(u,B_j(x,t)\Delta_j(2h)u))+h^2(u,Cu)\right\}$$
$$\simeq-\sum_{j=1}^{s}(\Delta_j(2h)u,\ A_j(x,t)\Delta_j(2h)u).$$

(1) Man beachte besonders, dass im Fall b) der Operator P_{m-1} entscheidend für die Stabilität sein kann.

Also ist die (4.3.1) zugeordnete Schar (3.2.1) stabil, falls die Eigenwerte der $A(x,t)$ für alle x, t grösser oder gleich 0 sind.

Beispiel 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s} A_j(x, t) \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} + B_j(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + C_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + D u. \tag{4.3.2}$$

Nach (4.2.1) gilt:

$$T \simeq \sum_{j=1}^{s} \left(\Delta_j(2h) u, \left\{ \frac{\partial A_j(x, t)}{\partial x_j} - B_j(x, t) \right\} \Delta_j(2h) u \right).$$

Daraus folgt, dass die (4.3.2) zugeordnete Schar (3.2.1) stabil ist, wenn die Eigenwerte von

$$\frac{\partial A_j(x, t)}{\partial x_j} - B_j(x, t), \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

für alle x, t kleiner oder gleich 0 sind.

4.4. Eine einfachere Form erhalten die obigen Resultate, wenn man die Differentialgleichung (1.2.1) in einer besonderen Form schreibt. Um das Prinzip klar zu machen, beschränken wir uns auf den Fall $s = 1$. Daraus ersieht man dann, wie die Ergebnisse für mehrere x-Variablen lauten.

Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu} = \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}m]} A_{2\nu} \frac{\partial^{2\nu} u}{\partial x^{2\nu}} + \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}(m-1)]} A_{2\nu+1} \frac{\partial^{2\nu+1} u}{\partial x^{2\nu+1}}; \tag{4.4.1}$$

dieses kann man in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}m]} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(\hat{A}_{2\nu} \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu} \right) + \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}(m-1)]} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left\{ \hat{A}_{2\nu+1} \frac{\partial^{\nu+1} u}{\partial x^{\nu+1}} \right\} + \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x^{\nu+1}} \left\{ \hat{A}_{2\nu+1} \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu} \right\} \tag{4.4.2}$$

schreiben, wenn die $A_\nu \in C_\mu$ mit hinreichend grossem μ.

Eine (4.4.2) zugeordnete Schar von Differenzengleichungen ist

$$\begin{aligned} u(x, t+k, k) = {} & \{I - \sigma(-1)^p \Delta^{2p}(h)\} u(x, t, k) + \\ & + \lambda \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}m]} h^{m-2\nu} \Delta^\nu(2h) \{\hat{A}_{2\nu} \Delta^\nu(2h) u(x, t, k)\} + \\ & + \lambda \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}(m-1)]} h^{m-2\nu-1} [\Delta^\nu(2h) \{A_{2\nu+1} \Delta^{\nu+1}(2h) u(x, t, k)\} + \\ & + \Delta^{\nu+1}(2h) \{\hat{A}_{2\nu+1} \Delta^\nu(2h) u(x, t, k)\}]. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Ebenso wie oben ergibt sich, dass 4.4.3 bei geeigneter Wahl von σ und λ stabil ist, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}m]} (-1)^\nu h^{m-2\nu} (\Delta^\nu (2h) u, \hat{A}_{2\nu}(x,t) \Delta^\nu (2h) u) \leq k\delta \|u\|^2, \tag{4.4.4}$$

wobei δ eine Konstante unabhängig von k und u ist. Denn nach Hilfssatz 1 ist

$$\text{Real}\,(u, \Delta^\nu (2h)(\hat{A}_{2\nu+1}(x,t) \Delta^{\nu+1}(2h) u) + \Delta^{\nu+1}(2h)(\hat{A}_{2\nu+1}(x,t)\Delta^\nu(2h) u)) = 0.$$

Interessant ist es zu bemerken, dass für konstante $\hat{A}_\nu(x,t)$, (4.4.4) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Cauchyproblem für (4.4.2) richtig gestellt ist. (Vergleiche [4].)

Literatur

[1]. Courant, R., Friedrichs, K. O. & Lewy, H., Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.*, 100 (1928), 32–74.

[2]. Friedrichs, K. O., Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 (1954), 345–392.

[3]. John, F., On integration of parabolic equations by difference methods. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 (1952), 155–211.

[4]. Kreiss, H. O., Über sachgemässe Cauchyprobleme für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. *Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm*, Nr 127 (1958).

[5]. ——, Über die approximative Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. *Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm*, Nr 128 (1958).

[6]. Lax, P. D., Differential equations, difference equations and matrix theory. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 175–194.

[7]. Lax, P. D. & Richtmyer, R. D., Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956), 267–293.

[8]. Leray, J., (A) Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients. *Princeton, Institute for Advanced Studies*, Fall, 1952. (B) On linear hyperbolic equations with variable coefficients on vector spaces. *Princeton, Annals of Mathematics Studies*, Vol. 33, 1954.

[9]. Měimann, N. N., On the theory of partial differential equations. *Doklady Akad. Nauk SSSR (NS)*, 97 (1954), 593–596.

[10]. v. Neumann, J. & Richtmyer, R. D., A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. Appl. Phys.*, 21 (1950), 232–237.

[11]. O'Brien, G. G., Hyman, M. A. & Kaplan, S. A., A study of numerical solution of partial differential equations. *J. Math. Phys.*, 29 (1951), 211–251.

[12]. Rýabenkii, V. S., On the application of the method of finite differences to the solution of Cauchy's problem. *Doklady Akad. Nauk SSSR (NS)*, 86 (1952), 1071–1074.

[13]. Todd, J., A direct approach to the problem of stability in the numerical solution of partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956), 597–612.