# THEORIE DER NORMALFLÄCHEN

## Ein isotopiekriterium für den kreisknoten

VON

WOLFGANG HAKEN

*München* (1)

### Vorwort

Die Theorie der Normalflächen beschäftigt sich mit Flächen in 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Sie ergibt eine Methode, nach der sich bei vorgelegter (berandeter oder unberandeter) 3-dimensionaler Mannigfaltigkeit entscheiden läßt, ob Flächen mit bestimmten Eigenschaften in dieser Mannigfaltigkeit liegen. Es besteht eine Reihe von Analogien zwischen der Theorie der Normalflächen und der Homologietheorie. Dies wird in der folgenden Einleitung genauer ausgeführt werden.

Eine der Anwendungen dieser Methode ist die Lösung des Kreisknotenproblems, d. h. die Angabe eines Verfahrens, nach dem sich entscheiden läßt, ob es zu einer vorgegebenen geschlossenen Linie im 3-dimensionalen Raum ein (singularitätenfreies) Elementarflächenstück gebe, das von dieser Linie berandet wird, ob die Linie also eine Kreislinie sei. Aus dem von Papakyriakopoulos [7] bewiesenen Dehnschen Lemma folgt, daß der Kreisknoten dadurch charakterisiert ist, daß sein Außenraum die freie Gruppe von einer Erzeugenden zur Fundamentalgruppe hat. Auf Grund dieses Satzes gestattet das Kreislinienkriterium zugleich die Entscheidung, ob die Fundamentalgruppe des Außenraums einer gegebenen Knotenlinie die freie Gruppe von einer Erzeugenden sei. Ist also umgekehrt ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen einer Gruppe gegeben, das eine solche Form hat, daß es sich von der Projektion einer Knotenlinie ablesen läßt (siehe z. B. [9]), so läßt sich durch Anwendung des Kreislinienkriteriums auf diese Knotenlinie entscheiden, ob es sich um die freie Gruppe von einer Erzeugenden handele. Damit ist ein Spezialfall des Wortproblems der Gruppentheorie gelöst.

---

(1) In einer Kurzfassung vorgetragen auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1954 in Amsterdam.

Weitere Anwendungen (insbesondere ein Verfahren zur Entscheidung, ob zwei geschlossene Linien miteinander verkettet seien, sowie die Verallgemeinerung des Kreislinienkriteriums für Linien in *beliebigen* 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten) sollen in später folgenden Arbeiten dargestellt werden (siehe [5]).

## Inhaltsübersicht



## Einleitung

## Vergleich der Theorie der Normalflächen mit der Homologietheorie

Die Theorie der Normalflächen ist bis zu einem gewissen Grade analog der Homologietheorie und der Theorie der Fundamentalgruppe [12]; man könnte sie entsprechend als Isotopietheorie bezeichnen. In der Homologietheorie und der Theorie der Fundamentalgruppe werden geometrische Gebilde (Ketten bzw. Wege) betrachtet, die in der vorgelegten Mannigfaltigkeit liegen. Sie werden durch Äquivalenzrelationen in Homologie- bzw. Homotopieklassen eingeteilt. Diese Klassen bilden Gruppen, die nur von der topologischen Struktur der gegebenen Mannigfaltigkeit abhängig sind. Durch die Homologietheorie wurde die Klassifizierung der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Die meisten Fragen der 3-dimensionalen Topologie ließen sich jedoch bisher mit den Hilfsmitteln der Homologietheorie und der Homotopietheorie nicht lösen. Hier scheinen stärkere Hilfsmittel erforderlich zu sein. Die Einteilung der Ketten in Homologieklassen ist anscheinend eine zu grobe Klassenbildung, um über die Struktur 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten vollständigen Aufschluß geben zu können. Eine feinere Einteilung ist nun die in *Isotopieklassen*, und es ergibt sich die Frage, ob und wie weit sich der Homologietheorie eine Isotopietheorie an die Seite stellen lasse. Von besonderem Interesse sind dabei die Isotopieklassen singularitätenfreier 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in einer gegebenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Die Theorie der Normalflächen stellt eine Möglichkeit dar, dieses Problem anzugreifen. Ihr Aufbau läßt sich durch einen Vergleich mit der Homologietheorie näher erläutern, wie im folgenden kurz dargestellt werden soll.

a) Sowohl in der Homologietheorie als auch in der Theorie der Normalflächen wird ausgegangen von einer beliebigen, aber fest vorgegebenen Zerlegung $\Gamma$ der gegebenen 3-dim Mannigfaltigkeit $M^3$. In der Homologietheorie werden $d$-dim Ketten ($d \doteq 0, 1, 2, 3$) betrachtet, für die die $d$-dim Elemente aus $\Gamma$ eine Basis bilden. In der Theorie der Normalflächen besteht die entsprechende Aufgabe darin, 2-dim Mannigfaltigkeiten durch Elemente aus $\Gamma$ darzustellen und zwar so, daß dabei die Isotopieklassen festgelegt werden. Kommt also etwa ein 2-dim Element aus $\Gamma$ in einer solchen Mannigfaltigkeit mehrfach vor, so genügt es — im Gegensatz zur Homologietheorie — nicht, lediglich die Vielfachheit anzugeben, mit der es vorkommt, sondern es muß festgelegt werden, wie die einzelnen Exemplare mit den übrigen in der Darstellung vorkommenden Flächenstücken zusammenhängen. Eine ähnliche Situation liegt in der Theorie der Fundamentalgruppe vor. Hier ist ein Weg allein durch die Vielfachheiten, mit denen er die einzelnen Kanten aus $\Gamma$ durchläuft, noch nicht eindeutig bestimmt, sondern es muß auch die Reihenfolge festgelegt werden, was durch Angabe eines „Wortes" geschehen kann. Bei 2-dim Mannigfaltigkeiten lassen sich die Zusammenhangsverhältnisse nicht so einfach beschreiben. Hier wird in der Theorie der Normalflächen folgendermaßen vorgegangen: Wird ein 2-dim Element $E^2$ aus $\Gamma$ bei der Darstellung einer 2-dim Mannigfaltigkeit mehrmals benötigt, so wird eine entsprechende Anzahl von miteinander punktfremden Elementarflächenstücken betrachtet, die „nahe benachbart und parallel" zu $E^2$ in $M^3$ liegen. So wird für alle 2-dim Elemente aus $\Gamma$ verfahren und die so erhaltenen (sämtlich miteinander punktfremden) Flächenstücke werden schließlich durch kleine Flächenstücke, die „in der Nähe" der 1- und 0-dim Elemente aus $\Gamma$ liegen, miteinander verbunden, so daß eine singularitätenfreie 2-dim Mannigfaltigkeit entsteht, deren Isotopieklasse in $M^3$ damit ohne weitere Angaben festliegt.

Um diese Methode exakt anwenden zu können, wird der Begriff der Normalfläche definiert: Man umgibt die Eckpunkte von $\Gamma$ mit kleinen Kugeln, die als P-Raumstücke bezeichnet werden. Dann werden die außerhalb dieser P-Raumstücke verbleibenden Mittelteile der 1-dim Elemente aus $\Gamma$ mit kleinen Zylinderstücken (sogenannten K-Raumstücken) umgeben, die in kleinen Elementarflächenstücken an die P-Raumstücke angrenzen. Schließlich werden kleine Umgebungen um die verbleibenden Mittelteile der 2-dim Elemente aus $\Gamma$ (sogenannte F-Raumstücke) ausgezeichnet. Die P-, K- und F-Raumstücke bilden zusammen mit den verbleibenden Mittelteilen der 3-dim Elemente aus $\Gamma$ eine Zerlegung $\Theta$ von $M^3$, die als eine Normalzerlegung bezüglich $\Gamma$ bezeichnet wird. Eine Normalfläche soll nun ganz in den P-, K- und F-Raumstücken verlaufen und diese jeweils in einzelnen miteinander punktfremden Elementarflächenstücken schneiden, deren Inneres im Inneren und deren Ränder im Rande des betreffenden P-, K- bzw. F-Raumstückes liegen. Diese Elementarflächenstücke bezeichnen wir als P-, K- bzw. F-Normalflächenstücke. Die F-Normalflächenstücke sollen dabei in den F-Raumstücken „ähnlich" liegen, wie die entsprechenden Mittelteile der 2-dim Elemente aus $\Gamma$, von denen die betreffenden F-Raumstücke Umgebungen sind. — „Ähnlich" ist dabei folgendermaßen definiert: Eine semilineare Abbildung von $M^3$ auf sich selbst, bei der jedes Element aus $\Theta$ auf sich selbst abgebildet wird, heißt eine Ähnlichkeitsabbildung bezüglich $\Theta$. Zwei beliebige 2-dim *Mannigfaltigkeiten in $M^3$ werden einander ähnlich bezüglich $\Theta$ genannt*, wenn sie sich durch eine Ähnlichkeitsabbildung bezüglich $\Theta$ aufeinander abbilden lassen. Ähnliche Flächen sind dabei immer kombinatorisch äquivalent und schneiden darüberhinaus die einzelnen Elemente aus $\Theta$ in gleicher Weise. — Damit ist definiert, was es heißen soll, daß Flächenstücke in $M^3$ „nahe benachbart und parallel" zu den 2-dim Elementen aus $\Gamma$ liegen. Die P- und K-Normalflächenstücke verbinden nun die F-Normalflächenstücke miteinander und es wird noch gefordert, daß niemals zwei F-Normalflächenstücke, die in einem und demselben F-Raumstück liegen, durch ein P- oder K-Normalflächenstück miteinander verbunden werden sollen. Dies entspricht der Forderung in der Theorie der Fundamentalgruppe, daß ein (reduzierter) Weg niemals eine Kante unmittelbar hintereinander in beiden Richtungen durchlaufen soll. Wir fordern von den Normalflächen weiter, daß sie entweder unberandet seien und im Innern von $M^3$ liegen, oder berandet seien und ihr Inneres im Inneren und ihr Rand im Rande von $M^3$ liege.

Vergleicht man nun die Normalflächen mit den geschlossenen Ketten der Homologietheorie und den geschlossenen reduzierten Wegen der Theorie der Fundamentalgruppe, so ist zu bemerken, daß eine Normalfläche durch die Anzahlen ihrer F-Normalflächenstücke und durch die Angabe, wie diese F-Normalflächenstücke durch P- und K-Normalflächenstücke miteinander verbunden sind, noch nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Angaben gelten vielmehr für eine ganze Klasse von einander bezüglich $\Theta$ ähnlichen Normalflächen in gleicher Weise (und, wie sich zeigen läßt, für *nur* eine solche Klasse). Da nun zwei bezüglich $\Theta$ ähnliche Normalflächen auch in $M^3$ zueinander isotop sind, erscheint es zweckmäßig, die Normalflächen zu Ähnlichkeitsklassen bezüglich $\Theta$ zusammenzufassen. Dann kann man sagen, daß dem Begriff der geschlossenen Kette bzw. des geschlossenen reduzierten Weges der Begriff der Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen entspricht.

b) Die Normalflächen beziehen sich, ebenso wie die Ketten in der Homologietheorie, auf eine beliebig vorgegebene Zerlegung $\Gamma$ von $M^3$. Die Willkür, die in der Auswahl dieser Zerlegung $\Gamma$ liegt, muß beseitigt werden, um zu topologischen Invarianten von $M^3$ zu gelangen. Hierzu beweist man in der Homologietheorie, daß es zu jeder (singulären) Kette, die in $M^3$ liegt, mindestens eine homologe Kette gibt, die sich aus Elementen der gegebenen Zerlegung $\Gamma$ aufbauen läßt, daß man also bei beliebiger Wahl von $\Gamma$ aus jeder Homologieklasse mindestens einen Repräsentanten erfaßt.

Was nun die Normalflächen anbelangt, so erfaßt man sicher nicht aus jeder Isotopieklasse von Flächen in $M^3$ einen Repräsentanten. Dies wäre aber auch gar nicht erstrebenswert, da wir uns ja nur für solche Isotopieklassen von Flächen in $M^3$ interessieren, deren Vorhandensein $M^3$ vor anderen Mannigfaltigkeiten auszeichnet, für Flächen also, die so in $M^3$ liegen, wie dies nicht in *jeder* 3-dim Mannigfaltigkeit möglich ist. Die beliebig vielen und beliebig kompliziert verknoteten Henkel, die man an jede Fläche in jedem 3-dim Raumelement ansetzen kann, stellen für uns nur einen unerwünschten Ballast dar. Eine Fläche, die frei von derartigen Henkeln ist, läßt sich durch folgende Eigenschaft charakterisieren: Ist $L$ eine geschlossene doppelpunktfreie Linie, die in der Fläche $F$ zweiseitig liegt und in $F$ kein Elementarflächenstück berandet, so gibt es im Außenraum $M^3 - F$ von $F$ kein (offenes) Elementarflächenstück, das von $L$ berandet wird. Gilt außerdem noch, daß $F$ keine 2-dim Sphäre ist, die in $M^3$ ein Raumelement berandet, so bezeichnen wir $F$ als inkompressibel in $M^3$. Nach Sätzen von Alexander [1] und Fox [3] gibt es in der 3-dim Sphäre keine inkompressiblen Flächen. Die in $M^3$ etwa vorhandenen inkompressiblen Flächen zeichnen $M^3$ also mindestens vor der 3-dim Sphäre aus und stellen somit etwas für die topologische Struktur von $M^3$ Charakteristisches dar.

Wir können uns auch auf folgenden Standpunkt stellen: Wir fragen nur nach denjenigen Flächentypen, die erhalten bleiben, wenn die in $M^3$ liegenden Flächen innerhalb 3-dimensionaler Raumelemente beliebig abgeändert werden. Eine derartige Abänderung bezeichnen wir als eine $\xi$-Operation und verstehen darunter folgendes: $F$ sei eine Fläche in $M^3$, $E$ sei ein beliebiges 3-dim Raumelement in $M^3$, dessen Rand von $F$ in miteinander punktfremden geschlossenen Linien $L_i$ geschnitten wird. Wir entfernen nun aus $F$ den gesamten Durchschnitt mit $E$ und setzen in die dadurch entstandenen Lochränder $L_i$ miteinander punktfremde in $E$ liegende Elementarflächenstücke ein. Es läßt sich nun zeigen, daß *jede* in $M^3$ liegende Fläche durch $\xi$-Operationen in eine Normalfläche überführt werden kann. Bezeichnen wir zwei Flächen als gleichwertig, wenn sie sich durch $\xi$-Operationen in eine und dieselbe Fläche überführen lassen, so entspricht diese Äquivalenzrelation damit der Homologierelation in der Homologietheorie.

Wie werden nun die inkompressiblen Flächen in $M^3$ durch $\xi$-Operationen verändert? Die durch eine $\xi$-Operation entstehende Fläche braucht nicht mehr zusammenhängend zu sein. Es läßt sich jedoch zeigen(1) daß sie stets eine zusammenhängende Komponente besitzt, die zu der ursprünglichen Fläche isotop, oder wenigstens, wie wir sagen wollen, quasiisotop ist. Isotop ist diese Fläche stets dann, wenn für $M^3$ gilt, daß jede in $M^3$ liegende 2-dim Sphäre in $M^3$ ein Raumelement berandet. In diesem Falle erfaßt man also aus jeder Isotopieklasse von inkompressiblen Flächen mindestens einen Repräsentanten, wenn man die Normalflächen bezüglich einer beliebigen Zerlegung $\Gamma$ (und einer beliebigen Normalzerlegung $\Theta$) betrachtet. Damit erschiene die Bezeichnung als Isotopietheorie gerechtfertigt. Im allgemeinen Fall erfaßt man zu jeder inkompressiblen Fläche in $M^3$ wie gesagt nur eine quasiisotope. Wir verstehen dabei unter einer quasiisotopen Deformation in $M^3$ die Ersetzung eines Elementarflächenstückes $E_1$ aus einer Fläche $F$ durch ein anderes in $M^3$ liegendes Elementarflächenstück $E_2$ mit gleichem Rand, so daß das Innere von $E_2$ mit $E_1$ und mit $F$ punktfremd ist. Berandet jede 2-dim Sphäre in $M^3$ ein Raumelement, so ist quasiisotop gleich isotop. Für den Fall, daß $F$ eine 2-dim Sphäre ist, die kein Raumelement in $M^3$ berandet, verlangen wir von einer quasiisotopen Deformation noch zusätzlich, daß die dabei entstehende 2-dim Sphäre ebenfalls kein Raumelement in $M^3$ berande.

Damit ist die Willkür, die in der Wahl der Zerlegung $\Gamma$ liegt, als nicht wesentlich erwiesen(2).

c) In der Homologietheorie lassen sich die $d$-dim Ketten (ihrer Definition nach) als ganzzahlige Vektoren darstellen, wobei die $d$-dim Elemente der Zerlegung $\Gamma$ eine Basis

(1) Dies wird erst in einer späteren Arbeit bewiesen werden (siehe [5] Satz 2).

(2) Eine 3-Mannigfaltigkeit, in der jede 2-Sphäre ein 3-Element berandet, wird nach H. Kneser [6] als *irreduzibel* bezeichnet; dabei existiert in jeder reduziblen 3-Mannigfaltigkeit $M^3$ ein System von 2-Sphären, das $M^3$ in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten $M_k^3$ aufspaltet, deren Homöomorphieklassen eindeutig festliegen. Auf diese Kneserschen Resultate aufbauend ist inzwischen bewiesen worden [5], daß sich mit Hilfe der Theorie der Normalflächen stets ein solches Sphärensystem *konstruieren* läßt. Damit läßt sich die Untersuchung beliebiger 3-Mannigfaltigkeiten auf die irreduzibler 3-Mannigfaltigkeiten zurückführen, so daß man auch in diesem Falle durch Betrachtung der Normalflächen alle Isotopieklassen von inkompressiblen Flächen erfassen kann.

bilden. Sollen nur die geschlossenen Ketten erfaßt werden, so müssen die Komponenten dieser Vektoren noch bestimmten Bedingungen genügen. Für die geschlossenen Ketten läßt sich ebenfalls eine Basisdarstellung angeben: Jede geschlossene Kette läßt sich erhalten als Linearkombination endlich vieler geschlossener Ketten mit ganzzahligen Koeffizienten.

In der Theorie der Fundamentalgruppe sind die geschlossenen Wege nicht mehr durch Linearkombinationen darstellbar, sondern nur durch Worte aus nichtkommutativen Erzeugenden. Im Gegensatz dazu lassen sich die Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen wieder durch Vektoren darstellen. Wie bereits gesagt wurde, ist die Ähnlichkeitsklasse einer Normalfläche durch die Anzahlen der F-Normalflächenstücke noch keineswegs eindeutig bestimmt, da diese F-Normalflächenstücke noch in verschiedener Weise durch P- und K-Normalflächenstücke miteinander verbunden werden können. Sind aber umgekehrt alle P-Normalflächenstücke gegeben, so läßt sich zeigen, daß dadurch eine Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen festgelegt ist. Teilen wir alle möglichen P-Normalflächenstücke in Ähnlichkeitsklassen ein, so zeigt sich, daß es nur endlich viele solche Ähnlichkeitsklassen gibt, die wir als die P-Klassen bezüglich $\Theta$ bezeichnen. Nun gilt weiter, daß eine Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen bereits dann festliegt, wenn nur die *Anzahlen* der P-Normalflächenstücke aus den einzelnen P-Klassen vorgegeben sind. Diese Anzahlen, die wir kurz als die P-Zahlen bezeichnen, bilden also einen Vektor mit nicht-negativ-ganzzahligen Komponenten, der die P-Klassen zur Basis hat. Nun entspricht zwar jeder Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen genau ein solcher P-Zahlenvektor und die betrachtete Ähnlichkeitsklasse ist durch diesen Vektor eindeutig bestimmt, aber umgekehrt entspricht nicht jedem nicht-negativ-ganzzahligen Vektor mit den P-Klassen als Basis eine Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen. Ein solcher Vektor muß vielmehr noch zwei Bedingungen erfüllen. Erstens dürfen von Null verschiedene Komponenten nur bei solchen P-Klassen stehen, die sich „miteinander vertragen", d. h. aus denen sich miteinander punktfremde Repräsentanten auswählen lassen. Der Vektor heißt dann verträglich. Das Erfülltsein dieser Bedingung läßt sich bei gegebenem Vektor stets nachprüfen. Zweitens müssen gewisse homogene lineare Gleichungen, die sogenannten P-Gleichungen, erfüllt sein, die dafür sorgen, daß sich die P-Normalflächenstücke durch K- und F-Normalflächenstücke zu einer Normalfläche ergänzen lassen. Man erhält damit den Satz, daß die Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen eineindeutig den verträglichen Lösungen der P-Gleichungen entsprechen.

Für die nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems läßt sich nun eine Basis angeben, so daß sich jede nicht-negativ-ganzzahlige Lösung aus gewissen nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen durch Linearkombination mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten darstellen läßt. Dabei ist bemerkenswert, daß diese endlich vielen Fundamentallösungen eindeutig bestimmt sind.

Wir können also die nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen der P-Gleichungen ermitteln und unter ihnen diejenigen aussuchen, die verträglich sind. Jeder dieser Lösungen entspricht dann genau eine Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen. Wir erhalten somit eine endliche Anzahl von ausgezeichneten Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen, die wir als die Fundamentalklassen (bezüglich der gegebenen Zerlegung $\Gamma$ und der Normalzerlegung $\Theta$) bezeichnen. Diese Fundamentalklassen stellen in gewisser Weise eine Basis für alle Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen dar und lassen sich daher vergleichen mit einer Basis der geschlossenen Ketten in der Homologietheorie: Wir können sagen, eine Ähnlichkeitsklasse $\mathfrak{F}$ von Normalflächen sei die „Summe" der Ähnlichkeitsklassen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, wenn der P-Zahlenvektor von $\mathfrak{F}$ die Summe der P-Zahlenvektoren von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist. Dann läßt sich jede Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen als nicht-negativ-ganzzahlige Linearkombination der Fundamentalklassen erhalten. Diese Addition von Ähnlichkeitsklassen ist offenbar assoziativ und kommutativ, es existiert jedoch zu keinem Element ein reziprokes, da negative P-Zahlenvektoren nicht erklärt sind. Die Addition zweier Ähnlichkeitsklassen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist außerdem nicht in jedem Falle möglich, sondern nur dann, wenn die Summe der P-Zahlenvektoren von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ wieder einen verträglichen Vektor ergibt, wenn also $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, wie wir sagen wollen, miteinander verträglich sind. Während in der Homologietheorie die geschlossenen Ketten eine Gruppe bilden, reicht es bei den Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen also nicht einmal ganz zur Halbgruppen-Eigenschaft. Dafür aber besitzen die Ähnlichkeitsklassen von Normalflächen eine Eigenschaft, die die geschlossenen Ketten nicht haben: Die Eindeutigkeit der Basis. Außerdem gilt der Satz, daß sich bei der Addition zweier Normalflächenklassen die Eulerschen Charakteristiken addieren.

Die Addition zweier miteinander verträglicher Ähnlichkeitsklassen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ von Normalflächen zu einer Klasse $\mathfrak{F}$, die bisher nur algebraisch über die Addition der P-Zahlenvektoren erklärt wurde, besitzt eine interessante geometrische Bedeutung: Man kann aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ je einen Repräsentanten $F_1$ bzw. $F_2$ so auswählen, daß zwischen $F_1$ und $F_2$ nur einfache Durchdringungslinien vorkommen und $F_1$ und $F_2$ zusammen ein Polyeder bilden, das wir als eine Normalfläche mit Singularitäten oder kurz als eine S-Normalfläche bezeichnen. Aus dieser S-Normalfläche geht nun durch eindeutig bestimmte Umschaltungen längs der Durchdringungslinien eine singularitätenfreie Normalfläche $F$ hervor, die in der Summen-Klasse $\mathfrak{F}$ liegt. Die Bemerkung, daß dieser Satz nicht nur für orientierbare, sondern auch für nichtorientierbare 3-Mannigfaltigkeiten gilt, verdanke ich H. Schubert (vgl. [11]).

d) In der Homologietheorie kann man schließlich die Basis der geschlossenen Ketten so transformieren, daß die transformierte Basis eine Homologiebasis enthält. Hierdurch gewinnt man einen Überblick über alle Homologieklassen und erhält die topologisch invarianten Homologiegruppen.

In der Theorie der Normalflächen sind nun Basistransformationen nicht möglich, da die Fundamentalklassen ja eindeutig ausgezeichnet sind. Es muß daher versucht werden, von diesen Fundamentalklassen ausgehend einen Überblick über alle Isotopie- bzw. Quasiisotopieklassen von inkompressiblen Flächen in $M^3$ zu erhalten. Dies ist mindestens bis zu einem gewissen Grade möglich. In der vorliegenden Arbeit wird in dieser Richtung nur der erste Schritt ausgeführt: Ist im Rande der 3-dim Mannigfaltigkeit $M^3$ eine geschlossene Linie $L$ vorgegeben, die sich aus 1-dim Elementen der Zerlegung $\Gamma$ zusammensetzen läßt, so wird bewiesen, daß sich unter den Fundamentalklassen mindestens eine befindet, deren Repräsentanten Bänder von minimaler Charakteristik mit zu $L$ ähnlichen Randlinien sind. Zur Vereinfachung wird dabei noch vorausgesetzt, daß jede in $M^3$ liegende 2-dim Sphäre $M^3$ in zwei Teile zerlege und daß es in $M^3$ keine (singularitätenfreien) projektiven Ebenen gebe. Dieser Satz läßt sich auf den Fall anwenden, daß $M^3$ durch Ausbohren einer geschlossenen Linie $K$ aus der 3-dim Sphäre (oder einer anderen 3-dim Mannigfaltigkeit mit den genannten Eigenschaften) hervorgeht und die Linie $L$ ein Breitenkreis im Randtorus von $M^3$ ist. Dann kann man nach Wahl einer geeigneten Zerlegung $\Gamma$ durch Konstruieren der endlich vielen Fundamentalklassen ein in $L$ eingespanntes Band von minimaler Charakteristik bestimmen und die Linie $K$ ist dann und nur dann eine Kreislinie, wenn dieses Band ein Elementarflächenstück ist.

Mit diesem Ergebnis ist gezeigt, daß die Theorie der Normalflächen wenigstens in einfachen Fällen geeignet ist, über die Struktur 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten Aufschluß zu geben. Wo dagegen die Grenzen ihrer Reichweite liegen, kann noch nicht angegeben werden. Zunächst läßt sich weiter folgender Weg gehen:

Von vielen inkompressiblen Flächentypen kann man beweisen, daß sie, wenn überhaupt in der 3-dim Mannigfaltigkeit vorhanden, stets durch eine der Fundamentalklassen dargestellt werden (bis auf Quasiisotopie). Das Verfahren für diese Beweise ist im Prinzip dasselbe, wie bei dem obengenannten Satz über Bänder minimaler Charakteristik: Aus der Annahme, es gebe eine solche Fläche, folgt, daß es eine entsprechende quasiisotope Normalfläche gibt, liegt diese in keiner der Fundamentalklassen, so läßt sie sich durch Umschaltungen aus zwei einfacheren Normalflächen gewinnen, deren Charakteristiken sich zur Charakteristik der gegebenen Fläche addieren; („einfacher" heißt dabei „eine geringere Anzahl von F-Normalflächenstücken enthaltend"). Der Beweis beruht dann darauf, aus (echten) Teilen dieser beiden einfacheren Normalflächen eine neue Normalfläche zu konstruieren, die einfacher ist als die ursprünglich gegebene, aber dieselben für $M^3$ charakteristischen Eigenschaften besitzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens folgt schließlich die behauptete Existenz einer Normalfläche mit den betreffenden Eigenschaften, die in einer der Fundamentalklassen liegt.

Ist beispielsweise eine Mannigfaltigkeit $M^3$ gegeben, deren Rand $\dot{M}^3$ aus mehreren zusammenhängenden Komponenten besteht — $M^3$ kann etwa durch Ausbohren einer Verkettung aus der 3-dim Sphäre hervorgehen — so läßt sich auf diese Weise feststellen, ob es in $M^3$ eine 2-dim Sphäre gebe, die verschiedene zusammenhängende Komponenten von $\dot{M}^3$ voneinander trennt, d. h. ob alle Komponenten der Verkettung miteinander verkettet seien. Siehe [5]. Allgemeiner läßt sich zeigen: Gibt es in einer Mannigfaltigkeit $M^3$ überhaupt inkompressible Flächen, so besteht mindestens eine der Fundamentalklassen aus inkompressiblen Flächen, und zwar aus solchen minimaler Charakteristik.

Ist $M^3$ eine 3-dim Mannigfaltigkeit und $F$ eine zusammenhängende Komponente des Randes von $M^3$, so gilt: Gibt es in $M^3$ ein Elementarflächenstück $E$, dessen Rand in $F$ liegt, aber kein in $F$ liegendes Elementarflächenstück berandet, so enthalten auch bereits die Fundamentalklassen ein derartiges Elementarflächenstück. Hieraus läßt sich ein Verfahren gewinnen, um festzustellen, ob eine gegebene Henkelfläche $F$ in einer 3-dim Mannigfaltigkeit $M'^3$ inkompressibel sei: Man schneidet $M'^3$ längs $F$ auf, so daß eine neue Mannigfaltigkeit entsteht, die $F$ zweimal im Rande enthält, oder zwei Mannigfaltigkeiten, die $F$ je einmal im Rande enthalten. Dann stellt man fest, ob ein Elementarflächenstück mit den genannten Eigenschaften vorhanden sei.

Damit kommt man der Lösung einer Aufgabe näher, die für die Theorie der Normalflächen sehr wichtig ist: Unter den Fundamentalklassen alle diejenigen auszuwählen, deren Repräsentanten inkompressibel sind. Diese inkompressiblen Fundamentalklassen wären in der Homologietheorie mit einer Homologiebasis zu vergleichen. Es muß allerdings noch untersucht werden, inwieweit sich aus ihnen der angestrebte Überblick über alle Klassen von inkompressiblen Flächen gewinnen läßt.

Da die Untersuchungen der Herleitung von Kriterien dienen, ist es notwendig, daß die entsprechenden Beweise konstruktiv geführt werden. Die Art der angestellten Betrachtungen ermöglicht es, ohne Erhöhung des erforderlichen Aufwandes ausnahmslos alle Beweise konstruktiv zu führen. Dies ist durchgeführt worden, und zur Vereinfachung der Ausdrucksweise möge folgendes vereinbart werden: Die positive Existenzaussage „es gibt...“ ist gleichbedeutend mit „es läßt sich in einer beschränkten Anzahl von Schritten konstruieren ...“, oder allgemein: Wird ein beliebiger Gegenstand $X$ genannt, und ist $X$ nicht ausdrücklich als gegeben vorausgesetzt worden, so ist damit zugleich die Behauptung ausgesprochen, daß sich $X$ konstruieren lasse.

## ERSTES KAPITEL

## Normalzerlegung und Normalflächen

Ziel dieses Kapitels ist es, den Begriff der Normalfläche und die erforderlichen Hilfsbegriffe zu definieren und zu beweisen, daß sich jede Fläche durch $\xi$-Operationen in eine Normalfläche überführen läßt.

### 1. Die verwendeten Grundbegriffe aus der Polyedertheorie

Wir übernehmen die Grundbegriffe der Polyedertheorie von Reidemeister [8] und geben lediglich einige zusätzliche Definitionen, die für die beabsichtigten Untersuchungen zweckmäßig sind.

$\mathfrak{R}^n$ sei ein $n$-dim linearer Raum. Unter „polyederartigen Punktmengen" verstehen wir stets *endliche polyederartige Punktmengen* in $\mathfrak{R}^n$, d. h. Summen von endlich vielen endlichen konvexen Raumstücken in $\mathfrak{R}^n$ (oder die leere Menge). Große lateinische Buchstaben verwenden wir ausschließlich für polyederartige Punktmengen(1), obere Indices stets für deren *Dimension*. $A + B$ bezeichnet die *Summe* von $A$ und $B$, $AB$ den *Durchschnitt* von $A$ und $B$, $A - B = A - (AB)$ die *Differenz* von $A$ und $B$.

DEFINITION 1. Für eine polyederartige Punktmenge $A$ wird definiert:

I. Ist $A$ gleich einer Summe von konvexen Raumstücken $C_1, \ldots, C_s$, so heißt die Summe der abgeschlossenen Hüllen von $C_1, \ldots, C_s$ die *abgeschlossene Hülle von A*.

Für die abgeschlossene Hülle von $A$ verwenden wir die Bezeichnung $\bar{A}$.

II. $A$ heißt dann und nur dann eine polyederartige Punktmenge der *Dimension d*, wenn $\bar{A}$ ein Polyeder der Dimension $d$ ist.

III. Ist $\dot{\bar{A}}$ der Rand des nichtorientierten Polyeders $\bar{A}$, so heißt $\dot{\bar{A}} + \overline{(\bar{A} - A)}$ der *Rand von A*.

Das Symbol $\dot{A}$ bezeichnet stets den Rand von $A$, $\mathring{A} = A - \dot{A}$ das *Innere* von $A$.

IV. $A$ heißt *offen*, wenn $A$ keinen Punkt aus $\dot{A}$ enthält.

V. $A$ heißt eine *offene Mannigfaltigkeit*, wenn $A$ das Innere einer (gegebenenfalls berandeten und gegebenenfalls nicht zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit ist; insbesondere heißt $A$ ein *offenes Raumelement*, wenn $A$ das Innere eines Raumelementes ist.

(1) Ebensogut können darunter auch *Komplexe* im Sinne von Seifert-Threlfall [12] (d. h. topologische Bilder von polyederartigen Punktmengen des Euklidischen Raumes) verstanden werden. In diesem Falle ist unter einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M^3$ eine *kompakte* (berandete oder unberandete) Mannigfaltigkeit im Sinne der mengentheoretischen Topologie zu verstehen. Bei einer $d$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M^d$ mit $d > 3$ muß außerdem noch die Triangulierbarkeit gefordert werden. — Für die betrachteten, in $M^d$ liegenden Punktmengen sind dann die Begriffe „offen", „abgeschlossen" etc. zu verstehen als „offen in $M^d$", „abgeschlossen in $M^d$" etc.

3-dim Raumelemente bezeichnen wir auch kurz als *Raumstücke*, 2-dim Raumelemente als *Flächenstücke*, 1-dimensionale als *Kanten*.

Unter „Zerlegungen" verstehen wir stets *Zerlegungen von polyederartigen Punktmengen in endlich viele (paarweise miteinander punktfremde) polyederartige Punktmengen*. Große griechische Buchstaben (außer Summenzeichen $\Sigma$) verwenden wir ausschließlich für Zerlegungen.

Definition 2. Sind $\Delta_1$ und $\Delta_2$ zwei Zerlegungen einer polyederartigen Punktmenge $A$, so heißt eine Zerlegung $\Delta'$ von $A$ die *Produktzerlegung aus* $\Delta_1$ *und* $\Delta_2$, wenn folgendes gilt: Ist $E_1$ ein Element aus $\Delta_1$, $E_2$ ein Element aus $\Delta_2$, und ist $E_1 E_2$ nicht leer, so ist jede z-Komponente[1] von $E_1 E_2$ ein Element aus $\Delta'$. Für die Produktzerlegung aus $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ schreiben wir $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_s$.

Definition 3. Sind $\Delta_1$ und $\Delta_2$ zwei randtreue Zerlegungen, und besitzt jedes Element von $\Delta_1$ und von $\Delta_2$ eine Dimension, so heißen $\Delta_1$ und $\Delta_2$ zueinander *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Zuordnung $\alpha$ zwischen den Elementen von $\Delta_1$ und den Elementen von $\Delta_2$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a. Zwei einander durch $\alpha$ zugeordnete Elemente besitzen stets gleiche Dimension.

b. Liegt ein Element $E'$ aus $\Delta_i$ $(i = 1, 2)$ im Rande eines Elementes $E''$ aus $\Delta_i$, so liegt das Bildelement von $E'$ im Rande des Bildelementes von $E''$.

Definition 4. $\Delta$ sei eine Zerlegung einer polyederartigen Punktmenge $A$ in die Elemente $E_1, \ldots, E_s$, $B$ eine in $A$ liegende polyederartige Punktmenge. Dann heißt die Zerlegung $\Delta'$ von $B$ in die z-Komponenten von $E_i B$ $(i = 1, \ldots, s)$ die *durch* $\Delta$ *bewirkte Zerlegung von* $B$. Das Symbol $\Delta(B)$ bezeichnet stets die durch $\Delta$ bewirkte Zerlegung von $B$.

Definition 5. $P$ sei ein Polyeder (d. h. eine abgeschlossene polyederartige Punktmenge).

I. Ist $A$ ein beliebiges Polyeder, so heißt die Zerlegung von $P$ in die z-Komponenten von $AP$ und $A - P$ die *durch* $A$ *bewirkte Zerlegung von* $P$.

II. Sind $A_1, \ldots, A_s$ beliebige Polyeder, und sind $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ die durch $A_1, \ldots, A_s$ bewirkten Zerlegungen von $P$, so heißt die Produktzerlegung $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_s$ die *durch* $A_1, \ldots, A_s$ *bewirkte Zerlegung von* $P$.

III. Ist $\Delta$ eine Zerlegung von $P$, und ist $\Delta^*$ die durch $A_1, \ldots, A_s$ bewirkte Zerlegung von $P$, so heißt die Produktzerlegung $\Delta\Delta^*$ die *durch* $A_1, \ldots, A_s$ *bewirkte Unterteilung von* $\Delta$.

---

[1] „z-Komponente" schreiben wir als Abkürzung für zusammenhängende Komponente.

DEFINITION 6. $M^d$ sei eine $d$-dim Mannigfaltigkeit. Eine in $M^d$ liegende $(d-1)$-dim -Mannigfaltigkeit $M^{d-1}$ *liegt transversal in* $M^d$, wenn $M^{d-1}\dot{M}^d = \dot{M}^{d-1}$ ist.

Eine in $M^d$ transversal liegende Mannigfaltigkeit bezeichnen wir kürzer als eine *t-Mannigfaltigkeit in* $M^d$.

DEFINITION 7. $\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung eines Polyeders $P$ in offene Mannigfaltigkeiten. Eine in $P$ liegende Mannigfaltigkeit $M$ *liegt transversal bezüglich* $\Delta$, wenn folgendes gilt: Ist $E^e$ ein $e$-dim Element aus $\Delta$, so ist $ME^e$ entweder leer oder $M\bar{E}^e$ ist eine $(e-1)$-dim t-Mannigfaltigkeit in $\bar{E}^e$.

Ist $\Delta$ eine Zerlegung in offene Raumelemente, so liegt $M$ *elementar bezüglich* $\Delta$, wenn weiter gilt: Ist $E^e$ ein $e$-dim Element aus $\Delta$, und ist $M\,E^e$ nicht leer, so ist jede z-Komponente von $M\bar{E}^e$ ein $(e-1)$-dim abgeschlossenes Raumelement.

DEFINITION 8. Ist $\Delta$ eine randtreue Zerlegung eines Polyeders $A$ in offene Raumelemente, so verstehen wir unter einer *regulären Unterteilung von* $\Delta$ eine simpliziale Zerlegung(1) $\Delta^*$ von $A$, für die folgendes gilt: Ist $E$ ein Element aus $\Delta$, so enthält die Zerlegung $\Delta^*(E)$ genau ein 0-dim Element $p$ und es gibt eine semilineare Abbildung von $\bar{E}$ auf ein abgeschlossenen konvexes Raumstück $C$, durch die $p$ in einen Punkt $q$ übergeht und durch die alle übrigen Elemente von $\Delta^*(E)$ in offene Kegel mit $q$ als Spitze übergehen, d. h. in Elemente, deren abgeschlossene Hüllen Verbindungsprodukte von $q$ mit Elementen in $\dot{C}$ sind.

FOLGERUNG 1. *Zu jeder randtreuen Zerlegung $\Delta$ in offene Raumelemente läßt sich eine reguläre Unterteilung konstruieren.*

(Hierzu sind die 1-dimensionalen, dann die 2-dimensionalen, ... und schließlich die höchstdimensionalen Elemente aus $\Delta$ der Reihe nach geeignet zu unterteilen.)

FOLGERUNG 2. *Ist $\Delta$ eine randtreue Zerlegung eines Polyeders $P$ in offene Raumelemente und ist $\alpha$ eine isomorphe Abbildung von $\Delta$ auf eine randtreue Zerlegung $\Delta'$ eines (nicht notwendig von $P$ verschiedenen) Polyeders $P'$ in offene Raumelemente, so gibt es eine semilineare Abbildung $\beta$ von $P$ und $P'$ aufeinander, durch die jedes Element aus $\Delta$ auf das durch $\alpha$ zugeordnete Element aus $\Delta'$ abgebildet wird. Gibt es Elemente, die durch $\alpha$ auf sich selbst abgebildet werden, so läßt sich $\beta$ so wählen, daß $\beta$ für diese Elemente die Identität ist.*

*Beweis.* Von $\Delta$ und $\Delta'$ gibt es reguläre Unterteilungen $\Delta^*$ und $\Delta'^*$. Diese sind zueinander isomorphe simpliziale Zerlegungen, und zwar gibt es eine solche isomorphe Abbildung $\alpha^*$ von $\Delta^*$ und $\Delta'^*$ aufeinander, daß einander durch $\alpha^*$ zugeordnete Elemente in einander durch $\alpha$ zugeordneten Elementen liegen. Daraus folgt die Behauptung.

---

(1) d. h. eine Zerlegung, die zu einer Simplizialzerlegung eines Polyeders $A'$ isomorph ist.

## 2. Umgebungen

Als weiteres Hilfsmittel benötigen wir einen polyedertopologischen Begriff der ,,kleinen Umgebung" und schließen uns hierin an Whitehead [13] an. Die in [13] für abstrakte Komplexe definierten Begriffe der *regulären Umgebung* (S. 293), der *geometrischen Expansion* und *Kontraktion* (S. 258), sowie der *regulären Expansion* und *Kontraktion* (S. 291) übertragen wir sinngemäß für Polyeder: Ein Polyeder $U$ heißt eine reguläre Umgebung von $A$ in $B$, wenn es eine geeignete simpliziale Zerlegung $\Psi$ von $B$ gibt, so daß $\Psi(A)$ und $\Psi(U)$ Teilmengen von $\Psi$ sind, und so daß der Komplex $\Psi(U)$ im Sinne von [13] eine reguläre Umgebung von $\Psi(A)$ in $\Psi$ ist, usw.

Weiter geben wir folgende Definitionen:

Definition 1. Liegt eine polyederartige Punktmenge $A$ in einer polyederartigen Punktmenge $B$, ist $\Delta$ eine Zerlegung von $B$, und ist $\Delta(A)$ eine Teilmenge von $\Delta$, so heißt die Summe derjenigen Elemente aus $\Delta$, deren abgeschlossene Hüllen mit $A$ nicht punktfremd sind, der *Stern von $A$ in $\Delta$*, abgekürzt $\mathrm{St}(A \mid \Delta)$.

Definition 2. $A$ sei eine polyederartige Punktmenge und liege in einem Polyeder $B$. Dann heißt $U$ eine *Umgebung von $A$ in $B$*, wenn folgendes gilt: Es gibt eine simpliziale Zerlegung $\Delta$ von $B$, so daß $\Delta(A)$ eine Teilmenge von $\Delta$ ist, und eine zweite reguläre Unterteilung $\Delta^{**}$ von $\Delta$, so daß $U = \overline{\mathrm{St}}(A \mid \Delta^{**})$ ist. Insbesondere wird definiert:

a. Ist $\Gamma$ eine beliebige Zerlegung von $B$, so heißt $U$ eine *im Verhältnis zu $\Gamma$ kleine Umgebung von $A$ in $B$*, wenn $\Delta$ eine Unterteilung von $\Gamma$ ist; und allgemeiner:

b. Sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ beliebige Zerlegungen von $B$ umfassenden Polyedern, und sind $P_1, \ldots, P_t$ beliebige weitere Polyeder, so heißt $U$ eine *im Verhältnis zu $\Gamma_1 | \ldots | \Gamma_s | P_1 | \ldots | P_t$ kleine Umgebung von $A$ in $B$*, wenn $U$ klein ist im Verhältnis zu der Produktzerlegung aus $\Gamma_1(B), \ldots, \Gamma_s(B)$ und den durch $P_1, \ldots, P_t$ bewirkten Zerlegungen von $B$.

Definition 3. $M'^{d-1}$ sei eine $(d-1)$-dim Mannigfaltigkeit und liege im Rande einer $d$-dim Mannigfaltigkeit $M^d$. $M''$ sei eine in $\dot{M}'^{d-1}$ liegende $(d-2)$-dim Mannigfaltigkeit oder die leere Menge. $M^{d-1}$ sei gleich $M'^{d-1} - M''$. Dann heißt $M^{*d-1}$ eine zu $M^{d-1}$ *benachbarte Mannigfaltigkeit in $M^d$*, wenn folgendes gilt: Es gibt eine Umgebung $U^d$ von $M^{d-1}$ in $M^d$, so daß $M^{*d-1} = \overline{(\dot{U}^d - \dot{M}^d)}$ ist.

Sind insbesondere $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ Zerlegungen von $M^d$ umfassenden Polyedern und $P_1, \ldots, P_t$ weitere Polyeder, so heißt $M^{*d-1}$ eine *im Verhältnis zu $\Gamma_1 | \ldots | \Gamma_s | P_1 | \ldots | P_t$ nahe zu $M^{d-1}$ benachbarte* Mannigfaltigkeit in $M^d$, wenn $U^d$ eine im Verhältnis zu $\Gamma_1 | \ldots | \Gamma_s | P_1 | \ldots | P_t$ kleine Umgebung ist.

Folgerung 1. *$M^d$ sei eine $d$-dim Mannigfaltigkeit. $A$ sei ein Polyeder in $M^d$. $U$ sei eine Umgebung von $A$ in $M^d$. Dann gilt:*

I. *$U$ ist nach* [13] (*S.* 293/294) *eine reguläre Umgebung von $A$ in $M^d$, also eine $d$-dim Mannigfaltigkeit.*

II. *Ist $A$ geometrisch auf einen Punkt zusammenziehbar, so ist $U$ ein $d$-dim Raumelement.* ([13] *Korollar* In *zu den Theoremen* 22n *und* 23n.)

FOLGERUNG 2. *Ist $M^3$ eine 3-dim Mannigfaltigkeit, $K^1$ eine 1-dim Sphäre in $M^3$ und $U^3$ eine orientierbare Umgebung von $K^1$ in $M^3$, so ist $U^3$ eine Vollring und $K^1$ eine (nichtorientierte) Sehne von $U$ (Definition siehe* [10]).

*Beweis.* 1) Es gibt eine simpliziale Zerlegung von $M^3$, die eine Zerlegung von $K^1$ enthält, und eine zweite reguläre Unterteilung $\Delta^{**}$ von $\Delta$, so daß $U^3 = \overline{\mathrm{St}}(K^1 \,|\, \Delta^{**})$ ist. $\Delta^{**}(K^1)$ besteht aus offenen Kanten $K_1^1, \ldots, K_s^1$ und Punkten $p_1, \ldots, p_s$, so daß bei geeigneter Numerierung $p_i$ und $p_{i+1}$ die Randpunkte von $K_i^1$ sind (wobei $p_{s+1} = p_1$ zu setzen ist). Nun sind die Punktmengen $A_i^3 = \overline{[\mathrm{St}(p_i \,|\, \Delta^{**}) - \mathrm{St}(K_{i-1}^1 \,|\, \Delta^{**})]}$ ($i = 1, \ldots, s$ mit $K_0^1 = K_s^1$) abgeschlossene Raumelemente. Dabei ist der Durchschnitt $\dot{A}_i^3 \dot{A}_{i+1}^3$ ein Elementarflächenstück $F_{i+1}^2$, während $A_i^3$ mit allen $A_k^3$ außer $A_{i-1}^3$ und $A_{i+1}^3$ (mit $A_{s+1}^3 = A_1^3$, $A_0^3 = A_s^3$) punktfremd ist.

2) $\overline{K}_i^1$ ist eine (nichtorientierte) unverknotete Sehne [10] in $A_i^3$.

(Beweis: In $\dot{\mathrm{St}}(p_i \,|\, \Delta^{**})$ läßt sich ein beliebiger Streckenzug $W^1$ wählen, der $p_{i+1}$ und $p_{i-1}$ miteinander verbindet und aus 1-dim Elementen $E_1^1, \ldots, E_t^1$ aus $\Delta^{**}$ besteht. Zu jedem solchen Element $E_j^1$ gibt es genau ein 2-dim Element $E_j^2$ in $\Delta^{**}$, das $E_j^1$ und $p_i$ im Rande enthält. Die Summe $\sum_{j=1}^{t} \overline{E}_j^2$ ist also ein Flächenstück mit dem Rand $W^1 + \overline{K}_i^1 + \overline{K}_{i-1}^1$. Ist $E_t^1$ dasjenige Element unter den $E_j^1$, das $p_{i-1}$ im Rande enthält, so liegt $K_{i-1}^1$ in $\dot{E}_t^2$ und das Flächenstück $\sum_{j=1}^{t-1} \overline{E}_j^2$ liegt in $A_i^3$ und wird berandet von $K_i^1$ und einem in $\dot{A}_i^3$ verlaufenden Streckenzug, der die Randpunkte $p_i$ und $p_{i+1}$ von $K_i^1$ miteinander verbindet. Damit ist 2 bewiesen.)

3) Aus 1 und 2 folgt durch Induktion, daß $\sum_{i=1}^{s-1} A_i^3$ ein 3-dim Raumelement $A'^3$ ist und $\sum_{i=1}^{s-1} \overline{K}_i^1$ eine unverknotete Sehne in $A'^3$. Daraus folgt, daß $U^3 = A'^3 + A_s^3$ ein Vollring ist und $K^1$ eine Seele von $U^3$, wzbw.

FOLGERUNG 3. *Sind $U_1$ und $U_2$ Umgebungen eines Polyeders $A$ in einem Polyeder $B$, so gibt es eine semilineare Abbildung $\beta$ von $B$ auf sich selbst, durch die $U_1$ und $U_2$ aufeinander abgebildet werden, so daß $A$ identisch auf sich selbst abgebildet wird. Ist $\Xi$ eine Zerlegung von $B$ und sind $P_1, \ldots, P_s$ beliebige Polyeder, so daß $U_1$ und $U_2$ klein sind im Verhältnis zu $\Xi \,|\, P_1 \,|\, \ldots \,|\, P_s$, so läßt sich $\beta$ insbesondere so wählen, daß die Elemente von $\Xi$ und die Polyeder $P_1 B, \ldots, P_s B$ auf sich selbst abgebildet werden.*

*Beweis.* Es gibt per Definition simpliziale Zerlegungen $\Delta_1$ und $\Delta_2$ von $B$, reguläre Unterteilungen $\Delta_1^*$ und $\Delta_2^*$ von $\Delta_1$ bzw. $\Delta_2$ und reguläre Unterteilungen $\Delta_1^{**}$ und $\Delta_2^{**}$ von

$\Delta_1^*$ bzw. $\Delta_2^*$, so daß $U_1 = \overline{\mathrm{St}}(A\,|\,\Delta_1^{**})$ und $U_2 = \overline{\mathrm{St}}(A|\Delta_2^{**})$ ist und so daß $\Delta_1$ und $\Delta_2$ Unterteilungen von $\Xi$ sind und Zerlegungen der Polyeder $A$, $P_1B,\ldots,P_sB$ enthalten. Nun sei $U_3$ eine im Verhältnis zu $\Delta_1^*\,|\,\Delta_2^*$ kleine Umgebung von $A$ in $B$. Dann gibt es isomorphe Abbildungen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ mit folgenden Eigenschaften:

a. Ist $E$ ein Element aus $\Delta_i^*$ $(i = 1, 2)$, das entweder in $A$ liegt oder dessen abgeschlossene Hülle mit $A$ punktfremd ist, so wird $E$ durch $\alpha_i$ sich selbst zugeordnet.

b. Ist $E^e$ ein $e$-dim Element aus $\Delta_i^*$, das nicht in $A$ liegt und dessen abgeschlossene Hülle mit $A$ nicht punktfremd ist, so sind $(E^e \mathring{U_i})$ und $(E^e \mathring{U_3})$ offene $e$-dim Raumelemente und werden durch $\alpha_i$ einander zugeordnet; ferner werden $(E^e \dot{U_i})\,E^e$ und $(E^e \dot{U_3})\,E^e$, sowie $E^e - U_i$ und $E^e - U_3$ einander durch $\alpha_i$ zugeordnet.

Damit gibt es semilineare Abbildungen $\beta_i$ von $B$ auf sich selbst, so daß zwei durch $\alpha_i$ einander zugeordnete Elemente stets aufeinander abgebildet werden. Durch $\beta_i$ werden $U_i$ und $U_3$ aufeinander abgebildet, während die Elemente von $\Delta_i^*$ (also auch die Elemente von $\Xi$ und die Polyeder $A$, $P_1B,\ldots,P_sB$) jeweils in sich selbst übergehen. Aus $\beta_1$ und $\beta_2$ ergibt sich eine Abbildung $\beta$ mit den geforderten Eigenschaften, womit Folgerung 3 bewiesen ist.

Folgerung 4. *$U$ sei eine im Verhältnis zu $\Xi\,|\,P$ kleine Umgebung von $A$ in $B$. $P'$ sei ein Polyeder, das innerhalb einer kleinen Umgebung von $U$ mit $P$ übereinstimmt, d. h. es gebe eine im Verhältnis zu $P$ kleine Umgebung $U'$ von $U$ in $B$, so daß $P'U' = PU$ ist. Dann ist $U$ auch klein im Verhältnis zu $\Xi\,|\,P'$.*

*Beweis.* $\Pi$ sei die durch $P$ bewirkte Zerlegung von $B$, $\Pi'$ die durch $P'$ bewirkte. Es gibt eine simpliziale Unterteilung $\Delta$ von $\Xi\Pi$, eine reguläre Unterteilung $\Delta^*$ von $\Delta$ und eine reguläre Unterteilung $\Delta^{**}$ von $\Delta^*$, so daß $U = \overline{\mathrm{St}}(\mathrm{A}\,|\,\Delta^{**})$ ist. $U''$ sei eine im Verhältnis zu $\Delta^*$ kleine Umgebung von $U$ in $U'$. Nun läßt sich eine beliebige randtreue Unterteilung von $\Delta^*\Pi'(\overline{B - U''})$ in offene Raumelemente konstruieren. Die Elemente dieser Unterteilung bilden zusammen mit den Elementen von $\Delta^*(U'' - [\overline{B - U''}])$ eine randtreue Unterteilung $\Psi$ von $\Delta^*\Pi'$ in offene Raumelemente. Eine reguläre Unterteilung $\Psi^*$ von $\Psi$ ist also eine simpliziale Unterteilung von $\Delta^*\Pi'$. Nun sei $\Psi^{***}$ eine zweite reguläre Unterteilung von $\Psi^*$ und $U^*$ sei gleich $\overline{\mathrm{St}}(A\,|\,\Psi^{***})$. Damit gibt es eine semilineare Abbildung $\beta$ von $B$ auf sich selbst, durch die $U$ und $U^*$ aufeinander abgebildet werden und durch die die einzelnen Elemente von $\Psi$ jeweils in sich selbst übergehen. (Dies läßt sich ebenso zeigen, wie im Beweis von Folgerung 3 die Existenz der Abbildungen $\beta_i$; es ist statt $\Delta_i^*$ lediglich $\Psi$ zu schreiben.) Die Elemente von $\Psi^*$ gehen also durch $\beta$ in Elemente einer simplizialen Unterteilung $\Psi^{*\prime}$ von $\Psi$ über und die Elemente von $\Psi^{***}$ in Elemente einer zweiten regulären Unterteilung $\Psi^{***\prime}$ von $\Psi^{*\prime}$, wobei dann $U = \overline{\mathrm{St}}(A\,|\,\Psi^{***\prime})$ ist. Also ist $U$ per Definition klein im Verhältnis zu $\Xi\,|\,P'$, wzbw.

Folgerung 5. *Sind $P_1, \ldots, P_s$ miteinander punktfremde Polyeder in $B$ und sind $U_1, \ldots, U_s$ miteinander punktfremde im Verhältnis zu $\Xi$ kleine Umgebungen von $P_1, \ldots, P_s$ in $B$, so ist $U_1 + \ldots + U_s$ eine im Verhältnis zu $\Xi$ kleine Umgebung von $P_1 + \ldots + P_s$ in $B$.*

*Beweis.* Es gibt simpliziale Unterteilungen $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ von $\Xi$, reguläre Unterteilungen $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_s^*$ von $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ und reguläre Unterteilungen $\Delta_1^{**}, \ldots, \Delta_s^{**}$ von $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_s^*$, so daß $U_i = \overline{\mathrm{St}}\,(P_i\,|\,\Delta_i^{**})$ ist $(i = 1, \ldots, s)$. $U'$ sei eine im Verhältnis zu $\Delta_1^* \ldots \Delta_s^*$ kleine Umgebung von $U_1 + \ldots + U_s$ in $B$. Die $U_i$ enthaltende z-Komponente von $U'$ werde mit $U_i'$ bezeichnet. Nun wird eine beliebige randtreue Unterteilung von $\Delta_1^* \ldots \Delta_s^*\,(\overline{B - U'})$ in offene Raumelemente konstruiert. Die Elemente dieser Unterteilung und der Zerlegungen $\Delta_i^*\,(U_i' - [\overline{B - U'}])$ bilden zusammen eine randtreue Zerlegung $\Psi$ von $B$ in offene Raumelemente. Nun wird (wie beim Beweis von Folgerung 4) eine dritte reguläre Unterteilung $\Psi^{***}$ und eine Umgebung $U^* = \overline{\mathrm{St}}\,(P_1 + \ldots + P_s\,|\,\Psi^{***})$ konstruiert, sowie eine semilineare Abbildung $\beta$ von $B$ auf sich selbst, durch die $U_1 + \ldots + U_s$ und $U^*$ aufeinander abgebildet werden und die Elemente von $\Psi$ in sich selbst übergehen. Durch $\beta$ geht $\Psi^{***}$ in eine Zerlegung $\Psi^{***\prime}$ über, wobei $U_1 + \ldots + U_s = \overline{\mathrm{St}}\,(P_1 + \ldots + P_s\,|$ $|\,\Psi^{***\prime})$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

## 3. Die Normalzerlegung

Wir definieren nun den Begriff der Normalzerlegung. Da die Normalzerlegungen die Grundlage der folgenden Betrachtungen bilden, führen wir für die Elemente der Normalzerlegungen besondere Kurzbezeichnungen ein.

Definition. $\Gamma$ sei eine randtreue Zerlegung einer 3-dim Mannigfaltigkeit $M^3$ in offene Raumelemente. $E_1^0, \ldots, E_s^0$, $E_1^1, \ldots, E_t^1$, $E_1^2, \ldots, E_u^2$, $E_1^3, \ldots, E_v^3$ seien die Elemente aus $\Gamma$. Dann heißt eine randtreue Zerlegung $\Theta$ von $M^3$ in offene Raumelemente eine *Normalzerlegung bezüglich* $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. Die Hauptelemente aus $\Theta$ sind Raumstücke $P_1^3, \ldots, P_s^3$, $K_1^3, \ldots, K_t^3$, $F_1^3, \ldots, F_u^3$, $R_1^3, \ldots, R_v^3$ mit folgenden Eigenschaften:

a.1. $\overline{P}_1^3, \ldots, \overline{P}_s^3$ sind im Verhältnis zu $\Gamma$ kleine Umgebungen von $\overline{E}_1^0, \ldots, \overline{E}_s^0$ in $M^3$ und sind paarweise miteinander punktfremd.

a.2. $\overline{K}_1^3, \ldots, \overline{K}_t^3$ sind im Verhältnis zu $\Gamma\,|\,\overline{P}_1^3\,|\ldots|\,\overline{P}_s^3$ kleine Umgebungen von

$$\overline{\left[E^1_1 - \sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i\right]}, \;\dots,\; \overline{\left[E^1_t - \sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i\right]} \quad \text{in} \quad \overline{\left[M^3 - \sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i\right]}$$

und sind paarweise miteinander punktfremd.

a.3. $\overline{F}^3_1, \dots, \overline{F}^3_u$ sind im Verhältnis zu $\Gamma|\overline{P}^3_1|\dots|\overline{P}^3_s|\overline{K}^3_1|\dots|\overline{K}^3_1$ kleine Umgebungen von

$$\overline{\left[E^2_1 - \left(\sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i + \sum_{j=1}^{t} \overline{K}^3_j\right)\right]}, \;\dots,\; \overline{\left[E^2_u - \left(\sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i + \sum_{j=1}^{t} \overline{K}^3_j\right)\right]} \quad \text{in} \quad \overline{\left[M^3 - \left(\sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i + \sum_{j=1}^{t} \overline{K}^3_j\right)\right]}$$

und sind paarweise miteinander punktfremd.

a.4. $R^3_1, \dots, R^3_v$ sind die $z$-Komponenten von

$$M^3 - \left(\sum_{i=1}^{s} \overline{P}^3_i + \sum_{j=1}^{t} \overline{K}^3_j + \sum_{k=1}^{u} \overline{F}^3_k\right),$$

so daß $R^3_l$ $(l = 1, \dots, v)$ in $E^3_l$ liegt.

b. Sind $Q^3_1, \dots, Q^3_m$ $(m = 1, 2, 3$ oder $4)$ Hauptelemente aus $\Theta$, so ist $(\overline{Q}^3_1 \dots \overline{Q}^3_m)^\circ$ entweder leer oder ein Element aus $\Theta$, und ebenfalls ist $(\overline{Q}^3_1 \dots \overline{Q}^3_m \dot{M}^3)^\circ$ entweder leer oder ein Element aus $\Theta$.

Insbesondere werden für die Elemente aus $\Theta$ folgende Bezeichnungen eingeführt:

a. $P^3_1, \dots, P^3_s$ heißen die *P-Raumstücke* aus $\Theta$, $K^3_1, \dots, K^3_t$ die *K-Raumstücke*, $F^3_1, \dots, F^3_u$ die *F-Raumstücke* und $R^3_1, \dots, R^3_v$ die *R-Raumstücke* aus $\Theta$.

b.1. Ist $G^2 = (\dot{Q}^3_1 \dot{Q}^3_2)^\circ$ ein Element aus $\Theta$, und ist $Q^3_1$ ein P- und $Q^3_2$ ein K-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $G^2$ ein *PK-Flächenstück* aus $\Theta$; sind $Q^3_1$ und $Q^3_2$ ein P- und ein F-, ein P- und ein R-, ein K- und ein F-, ein K- und ein R- oder ein F- und ein R-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $G^2$ entsprechend ein *PF-*, *PR-*, *KF-*, *KR-* bzw. *FR-Flächenstück* aus $\Theta$.

b.2. Ist $G^2 = (\dot{Q}^3 \dot{M}^3)^\circ$ ein Element aus $\Theta$, und ist $Q^3$ ein P-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $G^2$ ein *P$\dot{M}$-Flächenstück* aus $\Theta$; ist $Q^3$ ein K- oder ein F-Raumstück, so heißt $G^2$ entsprechend ein *K$\dot{M}$-* bzw. *F$\dot{M}$-Flächenstück* aus $\Theta$.

c.1. Ist $N^1 = (\dot{Q}^3_1 \dot{Q}^3_2 \dot{Q}^3_3)^\circ$ ein Element aus $\Theta$, und sind $Q^3_1$, $Q^3_2$ und $Q^3_3$ ein P-, ein K- und ein F-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $N^1$ eine *PKF-Kante* aus $\Theta$; sind $Q^3_1$, $Q^3_2$ und $Q^3_3$ ein P-, ein K- und ein R-, ein P-, ein F- und ein R- oder ein K-, ein F- und ein R-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $N^1$ entsprechend eine *PKR-*, *PFR-*, bzw- *KFR-Kante* aus $\Theta$.

c.2. Ist $N^1 = (Q_1^3 Q_2^3 \dot{M}^3)^\circ$ ein Element aus $\Theta$, und sind $Q_1^3$ und $Q_2^3$ ein P- und ein K-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $N^1$ eine *PK$\dot{M}$-Kante* aus $\Theta$; sind $Q_1^3$ und $Q_2^3$ ein P- und ein F- oder ein K- und ein F-Raumstück aus $\Theta$, so heißt $N^1$ entsprechend eine *PF$\dot{M}$-* bzw. *KF$\dot{M}$-Kante* aus $\Theta$.

FOLGERUNG. *Ist $\Gamma$ eine randtreue Zerlegung einer 3-dim Mannigfaltigkeit $M^3$ in offene Raumelemente, so gibt es eine Normalzerlegung von $M^3$ bezüglich $\Gamma$.*

## 4. Normalflächen

Wir definieren nun als Normalfläche bezüglich $\Theta$ und $\Gamma$ eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$, die die Elemente einer Normalzerlegung $\Theta$ in einer bestimmten Weise schneidet. Und zwar ist eine Normalfläche mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke aus $\Theta$ punktfremd und schneidet die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in sogenannten F-Normalflächenstücken, womit die „Parallelität“ zu den 2-dim Elementen aus $\Gamma$ festgelegt ist. Für die Durchschnitte mit den abgeschlossenen Hüllen der P- und K-Raumstücke werden weitere Bedingungen gestellt. Durch Abstufung dieser letztgenannten Bedingungen werden als Vorstufen zur Normalfläche die Begriffe der Halbnormalfläche und der Quasinormalfläche eingeführt, die für die weiteren Untersuchungen ebenfalls benötigt werden. Hierbei darf eine Halbnormalfläche die abgeschlossene Hülle eines P- oder K-Raumstückes $Q^3$ in einer beliebigen 2-dim Mannigfaltigkeit schneiden, die lediglich transversal in $\bar{Q}^3$ liegen muß. Eine Quasinormalfläche darf $\bar{Q}^3$ nur in Flächenstücken schneiden, deren Ränder in $\dot{Q}^3$ noch gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Für eine Normalfläche tritt als wesentliche Forderung hinzu, daß sie $\bar{Q}^3$ nicht in sogenannten Falten schneiden darf, d. h. in Flächenstücken, die zwei F-Normalflächenstücke miteinander verbinden, die in der abgeschlossenen Hülle eines und desselben F-Raumstückes liegen. Ferner wird in $\Theta$ eine Hilfsorientierung definiert, die es gestattet, in jedem F-Raumstück $F^3$ die einzelnen „parallelen“ F-Normalflächenstücke einer Normalfläche eindeutig in der Reihenfolge zu numerieren, in der sie in $\bar{F}^3$ liegen. Ist eine Normalfläche berandet, so wird ihr Rand entsprechend als eine Normallinie bezeichnet. Für den folgenden Teil der Arbeit gelte:

VORAUSSETZUNG. $M^3$ sei eine zusammenhängende 3-dim Mannigfaltigkeit. $\Gamma$ sei eine randtreue Zerlegung von $M^3$ in offene Raumelemente. $\Theta$ sei eine Normalzerlegung bezüglich $\Gamma$.

Unter „P-Raumstücken“ „F-Raumstücken“ usw. verstehen wir, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, Elemente aus $\Theta$.

DEFINITION 1. Eine abgeschlossene Kante $H^1$ heißt eine *PF-*, *KF-*, oder *K$\dot{M}$-Normalkante* bezüglich $\Theta, \Gamma$, wenn folgendes gilt:

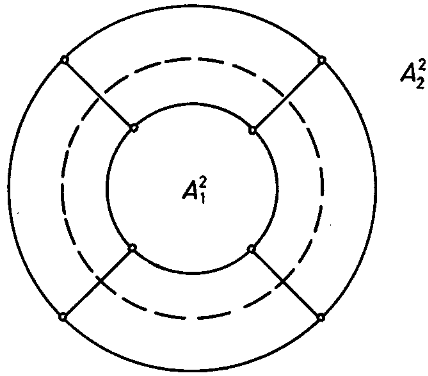



Fig. 1. Ebenes Bild von $\Theta(\dot{F}^3)$. $\dot{F}^2$ gestrichelt. ($A_1^2$ und das unendliche Gebiet $A_2^2$ stellen die beiden in $\dot{F}^3$ liegenden FR-Flächenstücke bzw. das FR- und das F$\dot{M}$-Flächenstück dar. Die übrigen Gebiete bedeuten die PF- und KF-Flächenstücke.)

a. $H^1$ liegt transversal in der abgeschlossenen Hülle eines PF-, KF-, bzw. K$\dot{M}$-Flächenstückes $H^2$.

b. Sind $N_1^1$ und $N_2^1$ die beiden in $\dot{H}^2$ liegenden PKF- bzw. PK$\dot{M}$-Kanten, so enthalten $N_1^1$ und $N_2^1$ genau je einen Randpunkt von $H^1$.

Definition 2. Ein abgeschlossenes Flächenstück $F^2$ heißt ein *F-Normalflächenstück* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt (siehe Fig. 1):

a. $F^2$ liegt transversal in der abgeschlossenen Hülle eines F-Raumstückes $F^3$ und liegt elementar bezüglich $\Theta$.

b. $\dot{F}^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der in $\dot{F}^3$ liegenden FR- und F$\dot{M}$-Flächenstücke punktfremd.

c. Ist $H^2$ ein PF- oder KF-Flächenstück in $\dot{F}^3$, so ist $\dot{F}^2\overline{H}^2$ eine PF- bzw. KF-Normalkante.

Definition 3. Eine abgeschlossene Kante $G^1$ heißt eine *PK*- oder *PM-Quasinormalkante* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $G^1$ liegt transversal in der abgeschlossenen Hülle eines PK- bzw. P$\dot{M}$-Flächenstückes $G^2$.

b. $\dot{G}^1$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der in $\dot{G}^2$ liegenden PKR- bzw. PF$\dot{M}$-Kanten punktfremd.

Insbesondere wird definiert:

I. $G^1$ heißt eine *PK*- bzw. *P$\dot{M}$-Falte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn beide Randpunkte von $G^1$ in einer und derselben Kante $N^1$ aus $\Theta(\dot{G}^2)$ liegen.

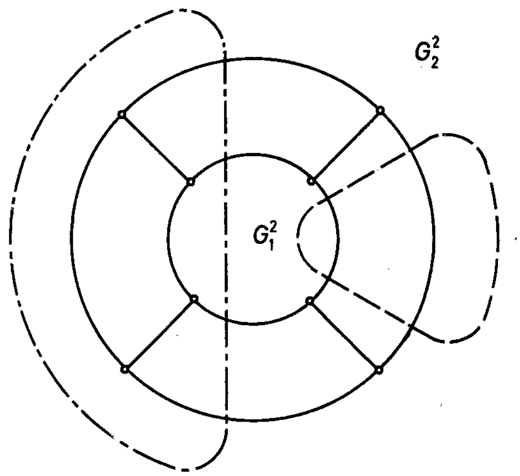



Fig. 2. Ebenes Bild von $\Theta(\dot{K}^3)$, $\dot{K}^2$ gestrichelt für den Fall einer K-Falte, strichpunktiert für den Fall eines K-Normalflächenstückes. ($G_1^2$ und das unendliche Gebiet $G_2^2$ stellen die beiden in $\dot{K}^3$ liegenden PK-Flächenstücke dar.)

I.1. $G^1$ heißt eine *innere PK-Falte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $N^1$ eine PKF-Kante ist.

I.2. $G^1$ heißt eine *PK-Randfalte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $N^1$ eine PK$\dot{M}$-Kante ist.

II. $G^1$ heißt eine *PK-* bzw. *P$\dot{M}$-Normalkante* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $G^1$ keine PK- bzw. P$\dot{M}$-Falte ist.

Definition 4. Ein abgeschlossenes Flächenstück $K^2$ heißt ein *K-Quasinormalflächenstück* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $K^2$ liegt transversal in der abgeschlossenen Hülle eines K-Raumstückes $K^3$ und liegt elementar bezüglich $\Theta$.

b. $\dot{K}^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der in $\dot{K}^3$ liegenden KR-Flächenstücke und KF$\dot{M}$-Kanten punktfremd.

c. Ist $H^2$ ein in $\dot{K}^3$ liegendes KF- oder K$\dot{M}$-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $\dot{K}^2\overline{H}^2$ eine KF- bzw. K$\dot{M}$-Normalkante(1).

d. Ist $G^2$ ein in $\dot{K}^3$ liegendes PK-Flächenstück, so ist $\dot{K}^2\overline{G}^2$ eine PK-Quasinormalkante. (Siehe Fig. 2.)

Insbesondere wird definiert:

I. $K^2$ heißt eine *K-Falte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn es in $\dot{K}^3$ ein KF- oder K$\dot{M}$-Flächenstück $H^2$ gibt, so daß $\dot{K}^2\overline{H}^2$ nicht zusammenhängend ist. (Siehe Fig. 2.)

(1) $\dot{K}^2\overline{H}^2$ darf auch leer sein. (Die leere Menge besitzt null z-Komponenten.)

I.1. $K^2$ heißt eine *innere K-Falte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $H^2$ ein KF-Flächenstück ist.

I.2. $K^2$ heißt eine *K-Randfalte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $H^2$ ein K$\dot{\text{M}}$-Flächenstück ist.

II. $K^2$ heißt ein *K-Normalflächenstück* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $K^2$ keine K-Falte ist. (Vgl. Fig. 2.)

DEFINITION 5. Ein abgeschlossenes Flächenstück $P^2$ heißt ein *P-Quasinormalflächenstück* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $P^2$ liegt transversal in der abgeschlossenen Hülle eines P-Raumstückes $P^3$ und liegt elementar berzüglich $\Theta$.

b. $\dot{P}^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der in $\dot{P}^3$ liegenden PR-Flächenstücke und PF$\dot{\text{M}}$-Kanten punktfremd.

c. Ist $H^2$ ein in $\dot{P}^3$ liegendes PF-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $\dot{P}^2\overline{H}^2$ eine PK- bzw. P$\dot{\text{M}}$-Quasinormalkante.

Insbesondere wird definiert:

I. $P^2$ heißt eine *innere P-Falte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn es in $\dot{P}^3$ ein PF-Flächenstück $H^2$ gibt, so daß $\dot{P}^2\overline{H}^2$ nicht zusammenhängend ist.

II. $P^2$ heißt eine *P-Randfalte* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $\dot{P}^3$ ein P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $J^2$ enthält, so daß $\dot{P}^2\overline{J}^2$ nicht zusammenhängend oder eine P$\dot{\text{M}}$-Falte ist. Ist $P^2$ eine innere Falte oder eine Randfalte, so heißt $P^2$ allgemein eine Falte. (Eine P-Falte kann dabei innere Falte und Randfalte zugleich sein.)

III. $P^2$ heißt ein *P-Normalflächenstück* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn $P^2$ keine P-Falte ist.

DEFINITION 6. Eine bezüglich $\Theta$ transversal liegende t-Mannigfaltigkeit $M^2$ in $M^3$ heißt eine *Halbnormalfläche* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $M^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd.

b. Ist $F^3$ ein F-Raumstück, so ist jede z-Komponente von $M^2 F^3$ ein F-Normalflächenstück.

Weiter wird definiert:

I. $M^2$ heißt eine *Quasinormalfläche* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn darüberhinaus gilt: Ist $Q^3$ ein P- oder ein K-Raumstück, so ist jede z-Komponente von $M^2\overline{Q}^3$ ein P- bzw. ein K-Quasinormalflächenstück.

II. $M^2$ heißt eine *Normalfläche* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn weiter gilt:

Ist $Q^3$ ein P- oder ein K-Raumstück, so ist jede z-Komponente von $M^2\overline{Q}^3$ ein P- bzw. ein K-Normalflächenstück.

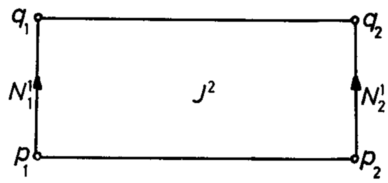



Fig. 3. Orientierung von $N_1^1$ und $N_2^1$ in $\dot{J}^2$.

DEFINITION 7.

I. Eine in $\dot{M}^3$ liegende 1-dim Mannigfaltigkeit $M^1$ heißt eine *Quasinormallinie* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $M^1$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der FṀ-Flächenstücke punktfremd.

b. Ist $J^2$ ein KṀ-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $M^1\bar{J}^2$ eine KṀ-Normalkante.

c. Ist $G^2$ ein PṀ-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $M^1\bar{G}^2$ eine PṀ-Quasinormalkante.

II. Eine Quasinormallinie $M^1$ heißt eine *Normallinie* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt: Ist $G^2$ ein PṀ-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $M^1\bar{G}^2$ eine PṀ-Normalkante.

III. Eine Normallinie $M^1$ heißt insbesondere eine *einfache Normallinie* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt: Ist $H$ ein Element aus $\Theta(\dot{M}^3)$, so besteht $M^1H$ aus höchstens einer z-Komponente.

DEFINITION 8. Eine Orientierung $\omega$ der PKF- und der PKṀ-Kanten aus $\Theta$ heißt eine *Hilfsorientierung in* $\Theta$, wenn folgendes gilt: Sind $N_1^1$ und $N_2^1$ zwei PKF- oder zwei PKṀ-Kanten mit den Randpunkten $p_1$, $q_1$ bzw. $p_2$, $q_2$, und ist $N_1^1$ von $p_1$ nach $q_1$ orientiert, so gilt:

a. Liegen $N_1^1$ und $N_2^1$ im Rande eines F-Raumstückes $F^3$, und liegen $p_1$ und $p_2$ in Rande eines und desselben FR- oder FṀ-Flächenstückes aus $\dot{F}^3$, so ist $N_2^1$ von $p_2$ nach $q_2$ orientiert.

b. Liegen $N_1^1$ und $N_2^1$ im Rande eines KṀ-Flächenstückes $J^2$, und liegen $p_1$ und $p_2$ im Rande einer und derselben KFṀ-Kante, so ist $N_2^1$ von $p_2$ nach $q_2$ orientiert. (Siehe Fig. 3.)

DEFINITION 9. $\omega$ sei eine Hilfsorientierung in $\Theta$.

I. Ist eine PKF- oder PKṀ-Kante $N^1$ mit den Randpunkten $p$ und $q$ von $p$ nach $q$ orientiert, so heißt $p$ der *Anfangspunkt von* $N^1$ bezüglich $\omega$.

II. Ist $A$ ein in $M^3$ liegendes Polyeder, so wird definiert:

II.1. Ist $N^1$ eine PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante, und sind die z-Komponenten von $A\bar{N}^1$ Punkte $p_1, \ldots, p_s$, die im Sinne von $\omega$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N^1$ liegen, so heißt $p_i$ $(i=1, \ldots, s)$ der bezüglich $\omega$ *i-te Punkt von $A$ in $N^1$*.

II.2. Ist $J^2$ ein PF-, KF- oder K$\dot{M}$-Flächenstück, und sind die z-Komponenten von $A\bar{J}^2$ Normalkanten $E_1^1, \ldots, E_s^1$, so daß die Randpunkte von $E_i^1$ die bezüglich $\omega$ $i$-ten Punkte in den entsprechenden PKF- bzw. PK$\dot{M}$-Kanten sind, so heißt $\mathring{E}_i^1$ die besüglich $\omega$ *i-te Kante von $A$ in $J^2$* und $E_i^1$ die *i-te Kante von $A$ in $\bar{J}^2$*.

III.3. Ist $F^3$ ein F-Raumstück, und sind die z-Komponenten von $A\bar{F}^3$ F-Normalflächenstücke $F_1^2, \ldots, F_s^2$, so daß die Schnittpunkte von $\dot{F}_i^2$ mit den PKF-Kanten jeweils die bezüglich $\omega$ $i$-ten Punkte sind, so heißt $\mathring{F}_i^2$ das bezüglich $\omega$ *i-te Flächenstück von $A$ in $F^3$* und $F_i^2$ das bezüglich $\omega$ *i-te Flächenstück von $A$ in $\bar{F}^3$*.

FOLGERUNG 1. *Aus den Definitionen der Normalkanten und Normalflächenstücke folgt speziell:*

I. *Ist $Q$ eine PK- oder P$\dot{M}$-Normalkante oder ein P-, K- oder F-Normalflächenstück, so gibt es keine PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante, die mehr als einen Punkt aus $Q$ enthält.*

II. *$K^3$ sei ein K-Raumstück. $G_1^2$ und $G_2^2$ seien die beiden in $\dot{K}^3$ liegenden PK-Flächenstücke. $K^2$ sei ein in $\bar{K}^3$ liegendes K-Quasinormalflächenstück. Dann gilt:*

II.1. $[\dot{K}^3 - (G_1^2 + G_2^2)]\dot{K}^2$ *besteht aus genau zwei Kanten, deren jede genau einen in $\dot{G}_1^2$ und einen in $\dot{G}_2^2$ liegenden Randpunkt besitzt und eine KF- oder K$\dot{M}$-Normalkante ist.* (*Vgl. Fig.* 2.)

II.2. *Ist $K^2$ eine K-Falte, so sind $\dot{K}^2\bar{G}_1^2$ und $\dot{K}^2\bar{G}_2^2$ PK-Falten; und zwar sind $\dot{K}^2\dot{G}_1^2$ und $\dot{K}^2\dot{G}_2^2$ innere Falten, wenn $K^2$ eine innere Falte ist, und Randfalten, wenn $K^2$ eine Randfalte ist.*

FOLGERUNG 2.

I. *$M^2$ sei eine Halbnormalfläche. $\dot{M}^2$ sei leer oder eine einfache Normallinie. Dann gilt: Ist $A$ eine in $M^2$ liegende P-, K- oder PK-Falte, so ist $A$ eine innere Falte.*

II. *Ist $M^2$ eine Quasinormalfläche, und gibt es keine in $M^2$ liegende Falte, so ist $M^2$ eine Normalfläche.*

III. *Es gibt (mindestens) eine Normalfläche bezüglich $\Theta$, $\Gamma$.*

*Beweis.* $R^3$ sei ein R-Raumstück aus $\Theta$, $U^3$ sei eine im Verhältnis zu $\Theta$ kleine Umgebung von $\bar{R}^3$ in $M^3$. Dann ist $\dot{U}^3$ eine Normalfläche, womit III bewiesen ist.

IV. *Eine in $\dot{M}^3$ liegende nicht berandete Mannigfaltigkeit $M^1$, die sich als Summe von* 0- *und* 1-*dim Elementen aus $\Gamma$ darstellen läßt, ist eine einfache Normallinie.*

FOLGERUNG 3.

I. *Es gibt eine Hilfsorientierung in* $\Theta$.

II. Ist $\omega$ *eine Hilfsorientierung in* $\Theta$, $E^d$ *eine PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante oder ein PF-, KF- oder K$\dot{M}$-Flächenstück oder ein F-Raumstück, und ist A ein in* $M^3$ *liegendes Polyeder, so daß die z-Komponenten von* $A\bar{E}^d$ *für* $d=1$ *in* $E^d$ *liegende Punkte sind, für* $d=2$ *Normalkanten und für* $d=3$ *F-Normalflächenstücke, so gilt: Es gibt genau eine Numerierung* $E_1$, $E_2$, $\ldots, E_s$ *der z-Komponenten von* $A\bar{E}^d$, *so daß* $E_i$ $(i=1,\ldots,s)$ *das bezüglich* $\omega$ *i-te Element von* $A$ *in* $\bar{E}^d$ *ist.*

*Beweis.* Für $d=1$ ist nichts zu beweisen. Ist $d=2$ oder 3, so gilt:

In $\dot{E}^d$ sei $N^1$ eine PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante mit dem Anfangspunkt $q$ bezüglich $\omega$. Jede z-Komponente von $A\bar{E}^d$ besitzt genau einen in $N^1$ liegenden Randpunkt. $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sei die Numerierung der Punkte aus $AN^1$, bei der $p_i$ der bezüglich $\omega$ $i$-te Punkt von $A$ in $N^1$ ist. Jeder Punkt $p_i$ liegt dabei im Rande genau einer z-Komponente $E_i$ von $A\bar{E}^d$.

$E_i$ ist das bezüglich $\omega$ $i$-te Element von $A$ in $\bar{E}^d$. Daraus folgt II.

## 5. Die Herstellung von Normalflächen

Um eine beliebige 2-dim Mannigfaltigkeit $M^2$, die transversal in $M^3$ liegt, in eine Normalfläche zu überführen, verwenden wir sogenannte $\xi$-Operationen.

Um die Betrachtungen zu vereinfachen, setzen wir voraus, daß der Rand der gegebenen Mannigfaltigkeit $M^2$ entweder leer oder eine einfache Normallinie sei. Die dann erhaltenen Ergebnisse reichen zum Beweise des Kreislinien-Kriteriums aus. Zu der Behauptung, daß die „charakteristischen" Eigenschaften $M^2$ bei $\xi$-Operationen erhalten bleiben, wird an dieser Stelle nur folgendes nachgewiesen: Ist $M^2$ zusammenhängend und von einer (in $\dot{M}^3$ liegenden) 1-dim Sphäre $Y^1$ berandet, so entsteht bei einer beliebigen $\xi$-Operation, die an $M^2$ vorgenommen wird, unter anderem immer eine zusammenhängende 2-dim Mannigfaltigkeit $M'^2$, die ebenfalls von $Y^1$ berandet wird, und deren Charakteristik nicht größer ist als die Charakteristik von $M^2$.

Als ein Maß für die „Kompliziertheit" einer Normalfläche oder Halbnormalfläche $M^2$ verwenden wir die Anzahl der F-Normalflächenstücke, die in $M^2$ liegen, die sogenannte F-Zahl von M². Es läßt sich dann zeigen: Ist die gegebene Mannigfaltigkeit $M^2$ bereits eine Halbnormalfläche, so läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in eine Normalfläche $M'^2$ überführen, deren F-Zahl nicht größer ist als die von $M^2$. Enthält $M^2$ insbesondere eine Falte, so läßt sich erreichen, daß die F-Zahl von $M'^2$ kleiner ist als die von $M^2$. Mit diesen Ergebnissen ist das Ziel des ersten Kapitels erreicht.

18 – 61173051. *Acta mathematica*. 105. Imprimé le 3 juillet 1961.

Definition 1. $M_1^2$ sei eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$. $M_2$ sei entweder leer oder eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$. Dann geht $M_2$ aus $M_1^2$ durch eine *$\xi$-Operation in $M^3$* hervor, wenn es in $M^3$ ein abschlossenes Raumstück $E^3$ gibt, so daß folgendes gilt:

a. $M_1^2 E^3$ ist entweder leer oder eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $E^3$.

b. $M_2 - \mathring{E}^3 = M_1^2 - \mathring{E}^3$.

c. Ist $M_1^2 \dot{E}^3$ leer, so ist $M_2 E^3$ leer. Ist $M_1^2 \dot{E}^3$ nicht leer, so ist $M_2 E^3$ eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $E^3$, deren Rand gleich $M_1^2 \dot{E}^3$ ist, und die aus paarweise miteinander punktfremden abgeschlossenen Flächenstücken besteht.

Definition 2. Ist $M^2$ eine 2-dim Mannigfaltigkeit, so heißt die Anzahl der in $M^2$ liegenden F-Normalflächenstücke die *F-Zahl von $M^2$* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$.

Folgerung. *Ist $M^2$ eine Normalfläche, so ist die F-Zahl von $M^2$ größer als Null.*

Satz 1. *$M^2$ sei eine zusammenhängende t-Mannigfaltigkeit in $M^3$, $\dot{M}^2$ sei eine 1-dim Sphäre. $M'^2$ gehe aus $M^2$ durch eine endliche Folge von $\xi$-Operationen in $M^3$ hervor. Dann gibt es genau eine z-Komponente $M^{*2}$ von $M'^2$, die eine t-Mannigfaltigkeit in $M^3$ mit $\dot{M}^{*2} = \dot{M}^2$ ist. Dabei ist die Charakteristik $c^*$ von $M^{*2}$ nicht größer als die Charakteristik $c$ von $M^2$.*

*Beweis.* Es genügt, den Fall zu betrachten, daß $M'^2$ aus $M^2$ durch eine einzige $\xi$-Operation hervorgeht. Dann folgt Satz 1 durch Induktion.

Es gibt also in $M^3$ ein abgeschlossenen Raumstück $E^3$, so daß folgendes gilt:

a. $M^2 E^3$ ist entweder leer oder eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $E^3$.

b. $M'^2 - \mathring{E}^3 = M^2 - \mathring{E}^3$.

c. Ist $M^2 \dot{E}^3$ leer, so ist $M'^2 E^3$ leer. Ist $M^2 \dot{E}^3$ nicht leer, so ist $M'^2 E^3$ eine 2-dim *t*-Mannigfaltigkeit in $E^3$, deren Rand gleich $M^2 \dot{E}^3$ ist, und die aus paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken besteht.

Damit gilt weiter:

1) Ist $M^2 E^3$ leer, so ist nichts zu beweisen.

2) Ist $M^2 E^3$ nicht leer, so gilt: Es gibt eine z-Komponente $Z$ von $M^2 - \mathring{E}^3$, die $\dot{M}^2$ enthält. ($Z$ ist nicht notwendig eine 2-dim Mannigfaltigkeit, da $\dot{E}^3 \dot{M}^3$, und damit auch $\dot{M}^2 \dot{E}^3$, nicht leer zu sein brauchen.) $Z \dot{E}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_t^1$. Damit besteht $\overline{(M^2 - Z)}$ aus höchstens $t$ z-Komponenten. (Denn ergänzt man $M^2$ durch ein beliebiges mit $M^3$ punktfremdes offenes Flächenstück $F^2$ mit $\dot{F}^2 = \dot{M}^2$ zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit, so wird

diese durch $S_1^1, \ldots, S_t^1$ in höchstens $t+1$ z-Komponenten zerlegt, deren eine $Z+F^2$ als abgeschlossene Hülle besitzt.) Also besitzt $\overline{(M^2-Z)}$ eine Charakteristik, die nicht kleiner als $-t$ ist. Daraus folgt, daß die Charakteristik von $Z$ nicht größer als $c+t$ ist. $M'^2\,E^3$ enthält $t$ paarweise miteinander punktfremde abgeschlossene Flächenstücke $T_1^2, \ldots, T_t^2$, so daß $\dot{T}_i^2$ $(i=1, \ldots, t)$ gleich $S_i^1$ ist. Die Mannigfaltigkeit $M^{*2}=Z+T_1^2+\ldots+T_t^2$ ist damit eine z-Komponente von $M'^2$ mit $\dot{M}^{*2}=\dot{M}^2$, und die Charakteristik $c^*$ von $M^{*2}$ ist nicht größer als $c$. Also besitzt $M^{*2}$ die geforderten Eigenschaften.

Mit Nr. 1 und 2 ist die Behauptung bewiesen.

HILFSSATZ 1. *$N^d$ sei eine d-dim Mannigfaltigkeit mit $d=2$ oder 3, deren Rand eine $(d-1)$-dim Sphäre $R^{d-1}$ enthält. $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ seien randtreue Zerlegungen von $N^d$ umfassenden Polyedern; $P_1, \ldots, P_t$ seien beliebige Polyeder. $S^{d-2}$ sei eine in $R^{d-1}$ liegende $(d-2)$-dim Mannigfaltigkeit, die aus $v$ paarweise miteinander punktfremden $(d-2)$-dim Sphären $S_1^{d-2}, \ldots, S_v^{d-2}$ besteht, so daß im Falle $d=2$ je zwei der Punktepaare $S_1^{d-2}, \ldots, S_v^{d-2}$ einander in $R^{d-1}$ nicht trennen, $p$ sei ein beliebiger in $R^{d-1}-S^{d-2}$ liegender Punkt. Dann folgt:*

*Es gibt eine $(d-1)$-dim t-Mannigfaltigkeit $M^{d-1}$ in $N^d$, die aus $v$ paarweise miteinander punktfremden Raumelementen $T_1^{d-1}, \ldots, T_v^{d-1}$ besteht, so daß folgendes gilt:*

a. $\dot{T}_i^{d-1}=S_i^{d-2}$ $(i=1, \ldots, v)$.

b. *$S_i^{d-2}$ berandet in $R^{d-1}$ ein $(d-1)$-dim offenes Raumelement $E_i^{d-1}$, das $p$ nicht enthält, und $T_i^{d-1}$ ist ein im Verhältnis zu $\Delta_1|\ldots|\Delta_s|P_1|\ldots|P_t$ nahe zu $E_i^{d-1}$ benachbartes abgeschlossenes Raumelement in $N^d$.*

*Beweis.* 1) Jede Sphäre $S_i^{d-2}$ $(i=1, \ldots, v)$ berandet in $R^{d-1}$ genau ein offenes $(d-1)$-dim Raumelement $E_i^{d-1}$, das $p$ nicht enthält.

2) Die Sphären $S_i^{d-2}$ lassen sich in einer solchen Reihenfolge $S_{i_1}^{d-2}, \ldots, S_{i_v}^{d-2}$ anordnen, daß $S_{i_j}^{d-2}$ $(j=1, \ldots, v)$ mit den Elementen $\bar{E}_{i_{j+1}}^{d-1}, \ldots, \bar{E}_{i_v}^{d-1}$ punktfremd ist.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, Nr. 2 sei für $v=w$ bewiesen, folgt für $v=w+1$:

2.1) Es gibt eine Sphäre $S_k^{d-2}$ $(k=1, \ldots, w+1)$, die in keinem der Elemente $\bar{E}_1^{d-1}, \ldots, \bar{E}_{w+1}^{d-1}$ außer $\bar{E}_k^{d-1}$ liegt.

Beweis: $R^{d-1}-(E_1^{d-1}+\ldots+E_{w+1}^{d-1})$ ist eine ($p$ enthaltende und im Falle $d=2$ nicht notwendig zusammenhängende) $(d-1)$-dim Mannigfaltigkeit $Z^{d-1}$, deren Rand aus Sphären $S_{k_1}^{d-2}, \ldots, S_{k_u}^{d-2}$ $(k_1, \ldots, k_u=1, \ldots, w+1;\ u\geqslant 1)$ gebildet wird. Diese Sphären besitzen die für $S_k^{d-2}$ geforderte Eigenschaft.

2.2) Die $w$ von $S_k^{d-2}$ verschiedenen Sphären $S_1^{d-2}, \ldots, S_{w+1}^{d-2}$ lassen sich nach Induktionsvoraussetzung in einer Reihenfolge $S_{l_1}^{d-2}, \ldots, S_{l_w}^{d-2}$ anordnen, so daß $S_{l_z}^{d-2}$ $(z=1, \ldots, w)$ mit den Raumelementen $\bar{E}_{l_{z+1}}^{d-1}, \ldots, \bar{E}_{l_w}^{d-1}$ punktfremd ist. Wird $k=i_1$, $l_1=i_2$, $l_2=i_3$, $\ldots$, $l_w=i_{w+1}$ gesetzt, so ist $S_{i_1}^{d-2}, \ldots, S_{i_{w+1}}^{d-2}$ eine Reihenfolge mit den in Nr. 2 für $v=w+1$ geforderten Eigenschaften.

Damit ist Nr. 2 durch Induktion bewiesen.

3) Es lassen sich nun der Reihe nach transversal in $N^d$ liegende $(d-1)$-dim Raumelemente $T_{i_1}^{d-1}, \ldots, T_{i_v}^{d-1}$ konstruieren, so daß $T_{i_j}^{d-1}$ ein im Verhältnis zu

$$\Delta_1 | \ldots | \Delta_s | P_1 | \ldots | P_t | T_{i_1}^{d-1} | \ldots | T_{i_{j-1}}^{d-1}$$

nahe zu $E_{i_j}^{d-1}$ benachbartes Raumelement in $N^d$ ist (also mit $T_{i_1}^{d-1}, \ldots, T_{i_{j-1}}^{d-1}$ punktfremd).

Die Mannigfaltigkeit $M^{d-1}=T_1^{d-1}+\ldots+T_v^{d-1}$ besitzt die in der Behauptung genannten Eigenschaften, womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Ist $M^2$ eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$, so folgt:*

I. *$M^2$ läßt sich durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M'^2$ mit $\dot{M}'^2=\dot{M}^2$ überführen, die mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd ist.*

II. *$\dot{M}^2$ sei mit den abgeschlossenen Hüllen der $F\dot{M}$-Flächenstücke punktfremd. Dann läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M'^2$ mit $\dot{M}'^2=\dot{M}^2$ überführen, so daß $M'^2$ mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd ist und die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken schneidet.*

III. *$M^2$ sei mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd und schneide die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken. Die F-Zahl von $M^2$ sei $f$. $\dot{M}^2$ sei leer oder eine Quasinormallinie. Dann läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Quasinormalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2=\dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl ebenfalls gleich $f$ ist.*

IV. *$M^2$ sei eine Halbnormalfläche mit der F-Zahl $f$. In $M^2$ liege eine innere P-, K- oder PK-Falte X. Dann läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M'^2$ mit $\dot{M}'^2=\dot{M}^2$ überführen, die mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd ist und die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken schneidet, so daß die F-Zahl von $M'^2$ nicht größer als $f-2$ ist.*

*Beweis.* $R_1^3, \ldots, R_s^3$ seien die R-Raumstücke aus $\Theta$, $F_1^3, \ldots, F_t^3$ die F-Raumstücke, $K_1^3, \ldots, K_u^3$ die K-Raumstücke und $P_1^3, \ldots, P_v^3$ die P-Raumstücke. Zur Abkürzung sei $M'^3 = \bar{P}_1^3 + \ldots + \bar{P}_v^3 + \bar{K}_1^3 + \ldots + \bar{K}_u^3$ und $M''^3 = M'^3 + \bar{F}_1^3 + \ldots + \bar{F}_t^3$.

1) *Beweis von I.* Es gibt eine Folge von t-Mannigfaltigkeiten $M_0^2, \ldots, M_s^2$ in $M^2$ mit den Eigenschaften:

a. $M_0^2 = M^2$.

b. $M_i^2$ $(i = 1, \ldots, s)$ ist mit $\bar{R}_1^3, \ldots, \bar{R}_i^3$ punktfremd.

c. Ist $i < s$, so geht $M_{i+1}^2$ aus $M_i^2$ durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ hervor und es ist $\dot{M}_{i+1}^2 = \dot{M}^2$.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, die ersten $m$ Folgenglieder seien gegeben $(m < s)$, folgt: $U^3$ sei eine im Verhältnis zu $\Theta \mid M_m^2$ kleine Umgebung von $\bar{R}_{m+1}^3$ in $M^3$. $M_m^2 \dot{U}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_a^1$. In $U^3$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine t-Mannigfaltigkeit $T^2$, die aus $a$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1^2, \ldots, T_a^2$ besteht, so daß $\dot{T}_j^2 = S_j^1$ $(j = 1, \ldots, a)$ ist, und so daß $T_j^2$ im Verhältnis zu $\Theta$ nahe zu einem offenen Flächenstück in $\dot{U}^3$ benachbart ist (also mit $\bar{R}_{m+1}^3$ punktfremd ist). Die Mannigfaltigkeit $M_{m+1}^2 = (M_m^2 - \mathring{U}^3) + \mathring{T}^2$ besitz die für das $(m+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften. Damit ist die Existenz der Folge durch Induktion bewiesen.

Da das letzte Folgenglied $M_s^2$ die für $M'^2$ geforderten Eigenschaften besitzt, ist I damit bewiesen.

2) *Beweis von II.*

2.1) $M^2$ läßt sich nach dem bereits bewiesenen Teil I dieses Hilfssatzes durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M^{*2}$ mit $\dot{M}^{*2} = \dot{M}^2$ überführen, die mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd ist.

2.2) Es gibt eine Folge von t-Mannigfaltigkeiten $M_0^2, \ldots, M_t^2$ in $M^3$ mit den Eigenschaften:

a. $M_1^2 = M^{*2}$.

b. $M_i^2$ $(i = 1, \ldots, t)$ ist mit $\bar{R}_1^3, \ldots, \bar{R}_s^3$ punktfremd und schneidet $\bar{F}_1^3, \ldots, \bar{F}_i^3$ in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken, und es ist $\dot{M}_i^2 = \dot{M}^2$.

c) $M_i^2$ geht aus $M_{i-1}^2$ durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ hervor.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, die ersten $m$ Folgenglieder seien gegeben $(m < t)$, folgt: $U^3$ sei eine im Verhältnis zu $\Theta \mid M_m^2$ kleine Umgebung von $\bar{F}_{m+1}^3$ in $M''^3$. Die beiden in $\dot{F}_{m+1}^3$ liegenden FR- bzw. F$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke seien $J_1^2$ und $J_2^2$ (sie liegen in $\dot{U}^3$ und sind mit $M_{m+1}^2$ punktfremd). $M_m^2 \dot{U}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_b^1$, $p$ sei ein in $J_1^2$ liegender Punkt. In $U_3$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine t-Mannigfaltigkeit $T^2$, die aus $b$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1^2, \ldots, T_b^2$ besteht, so daß folgendes gilt: $\dot{T}_j^2$ ist gleich $S_j^1$ $(j=1, \ldots, b)$, und $S_j^1$ berandet in $\dot{U}^3$ ein offenes Flächenstück $E_j^2$, das $p$ nicht enthält (so daß also $E_j^2 \dot{F}_{m+1}^3$ entweder leer oder gleich $\bar{J}_2^2$ ist); $T_j^2$ ist ein im Verhältnis zu $\Theta$ nahe zu $E_j^2$ benachbartes abgeschlossenes Flächenstück (wobei $T_j^2 \bar{F}_{m+1}^3$ entweder leer oder ein F-Normalflächenstück ist).

Die Mannigfaltigkeit $M_{m+1}^2 = (M_m^2 - \mathring{U}^3) + \mathring{T}^2$ besitzt die für das $(m+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften. Damit ist 2.2 durch Induktion bewiesen.

2.3) Da $M_t^2$ die für $M'^2$ geforderten Eigenschaften besitzt, ist II damit bewiesen.

3) *Beweis von III.*

3.1) $M^2$ läßt sich durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M^{*2}$ mit $\dot{M}^2 = \dot{M}^{*2}$ überführen, die ebenfalls mit $\bar{R}_1^3, \ldots, \bar{R}_s^3$ punktfremd ist und $\bar{F}_1^3, \ldots, \bar{F}_t^3$ in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken schneidet, so daß $M^{*2}$ ferner $\bar{K}_1^3, \ldots, \bar{K}_u^3$ in paarweise miteinander punktfremden K-Quasinormalflächenstücken schneidet und die F-Zahl $f$ besitzt.

Beweis: Es gibt eine Folge von t-Mannigfaltigkeiten $M_0^2, \ldots, M_u^2$ in $M^3$ mit den Eigenschaften:

a. $M_0^2 = M^2$.

b. $M_i^2$ ist mit $\bar{R}_1^3, \ldots, \bar{R}_s^3$ punktfremd, schneidet $\bar{F}_1^3, \ldots, \bar{F}_t^3$ in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken und $\bar{K}_1^3, \ldots, \bar{K}_i^3$ in paarweise miteinander punktfremden K-Quasinormalflächenstücken und besitz die F-Zahl $f$; $(i=1, \ldots, u)$.

c. $M_i^2$ geht aus $M_{i-1}^2$ durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ hervor und es ist $\dot{M}_i^2 = \dot{M}^2$.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, die ersten $l$ Folgenglieder seien gegeben, $(l<u)$, folgt: $U^3$ sei eine im Verhältnis zu $\Theta | M_l^2$ kleine Umgebung von $\bar{K}_{l+1}^3$ in $M'^3$. Die beiden in $\dot{K}_{l+1}^3$ liegenden PK-Flächenstücke seien $G_1^2$ und $G_2^2$. $\dot{K}_{l+1}^3 - (G_1^2 + G_2^2)$ ist ein Kreisring $Q^2$ in $\dot{U}^3$. $M_1^2 \dot{U}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Spären $S_1^1, \ldots, S_c^1$. $p$ sei ein beliebiger in $Q^2 - M_1^2$ liegender Punkt. In $U^3$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine t-Mannigfaltigkeit $T^2$, die aus $c$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1^2, \ldots, T_c^2$ mit $\dot{T}_j^2 = S_j^1$ $(j=1, \ldots, c)$ besteht, so daß folgendes gilt: $S_j^1$ berandet in $\dot{U}^3$ ein offenes Flächenstück $E_j^2$, das $p$ nicht enthält (so daß also jede z-Komponente von $E_j^2 \mathring{Q}^2$ ein offenes Flächenstück ist, das von zwei KF- bzw. K$\dot{M}$-Normalkanten und von einer in $\mathring{G}_1^2$ und einer in $\mathring{G}_2^2$ liegenden Kante berandet wird); $T_j^2$ ist ein im Verhältnis zu $\Theta$ nahe zu $E_j^2$ benachbartes Flächenstück (wobei jede z-Komponente von $T_j^2 \bar{K}_{l+1}^3$ ein K-Quasinormalflächenstück ist).

Die Mannigfaltigkeit $M_{l+1}^2 = (M_l^2 - \mathring{U}^3) + \mathring{T}^2$ besitzt die für das $(l+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften. Damit ist die Existenz der Folge durch Induktion bewiesen.

Da $M_u^2$ die für $M^{*2}$ genannten Eigenschaften besitzt, ist 3.1 damit bewiesen.

3.2) $M^{*2}$ läßt sich durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Quasinormalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl gleich $f$ ist, womit III bewiesen ist.

Beweis: Es gibt eine Folge von $t$-Mannigfaltigkeiten $M_0'^2, \ldots, M_v'^2$ in $M^3$ mit folgenden Eigenschaften:

a. $M_0'^2 = M^{*2}$.

b. $M_k'^2$ $(k = 1, \ldots, v)$ ist mit $\bar{R}_1^3, \ldots, \bar{R}_s^3$ punktfremd, schneidet $\bar{F}_1^3, \ldots, \bar{F}_t^3$ in F-Normalflächenstücken, $\bar{K}_1^3, \ldots, \bar{K}_u^3$ in K-Quasinormalflächenstücken und $\bar{P}_1^3, \ldots, \bar{P}_k^3$ in P-Quasinormalflächenstücken und besitzt die F-Zahl $f$.

c. $M_k'^2$ geht aus $M_{k-1}'^2$ durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ hervor und es ist $\dot{M}_k'^2 = \dot{M}^2$.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, die ersten $m$ Folgenglieder seien gegeben $(m < v)$, folgt: $M_m'^2 \dot{P}_{m+1}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1'^1, \ldots, S_e'^1$. In $\bar{P}_{m+1}^3$ gibt es eine t-Mannigfaltigkeit $T'^2$, die aus $e$ paarweise miteinander punktfremden abgeschlossenen Flächenstücken $T_1'^2, \ldots, T_e'^2$ besteht, so daß $\dot{T}_j^2 = S_j^1$ ist $(j = 1, \ldots, e)$. Die Mannigfaltigkeit $M_{m+1}'^2 = (M_m'^2 - P_{m+1}^3) + \mathring{T}'^2$ besitzt die für das $(m+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften. Damit ist die Existenz der Folge durch Induktion bewiesen.

Da $M_v'^2$ die für $M'^2$ genannten Eigenschaften besitzt, ist 3.2 bewiesen.

4) *Beweis von IV.*

4.1) Ist $X$ eine P-Falte, so gilt:

4.1.1) $\mathring{X}$ liegt in einem P-Raumstück $P^3$. In $\dot{P}^3$ liegt (mindestens) ein PF-Flächenstück $J^2$, so daß $\dot{X}\bar{J}^2$ aus mehreren PF-Normalkanten besteht. Das $J^2$ im Rande enthaltende F-Raumstück sei $F^3$. Die in $\dot{J}^2$ liegenden PKF-Kanten seien $N_1^1$ und $N_2^1$. Das $N_i^1$ $(i = 1, 2)$ im Rande enthaltende PK-Flächenstück sei $G_i^2$.

$\omega$ sei eine Hilfsorientierung in $\Theta$. Die (bezüglich $\omega$) erste und die zweite Kante von $\dot{X}$ in $\bar{J}^2$ seien $A_1^1$ und $A_2^1$ (siehe Fig. 4). Die $A_1^1$ bzw. $A_2^1$ im Rande enthaltenden F-Normalflächenstücke aus $M^2$ seien $F_1^2$ und $F_2^2$.

Die in $\dot{F}^3$ liegenden PF- und KF-Flächenstücke und PKF-Kanten bilden zusammen einen offenen Kreisring $Q^2$. $\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2$ berandet in $Q^2$ einen offenen Kreisring $Q'^2$. $Q'^2 J^2$ ist ein offenes Flächenstück $J'^2$, das $A_1^1$ und $A_2^1$ im Rande enthält (vgl. Fig. 4) und mit $\dot{X}$ punktfremd ist. $F_1^2 + F_2^2 + Q'^2$ berandet in $\bar{F}^3$ ein offenes Raumstück $F'^3$.

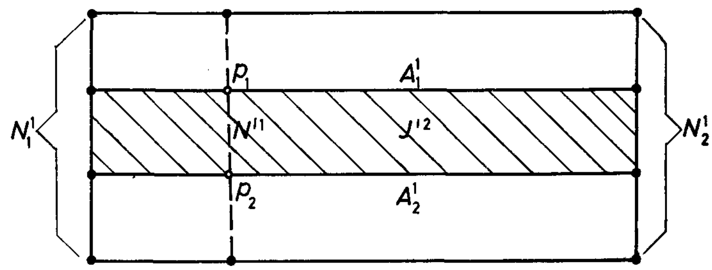



Fig. 4. $A_1^1$ und $A_2^1$ in $\bar{J}^2$; $\dot{G}^{*2}J^2$ gestrichelt, $J'^2$ schraffiert dargestellt.

$G^{*2}$ sei ein im Verhältnis zu $\Theta \,|\, M^2$ nahe zu $\bar{G}_1^2$ benachbartes Flächenstück in $\bar{P}^3$. $\dot{G}^{*2}A_j^1$ $(j = 1, 2)$ ist ein Punkt $p_j$. $\dot{G}^{*2}J'^2$ ist eine offene Kante $N'^1$ (vgl. Fig. 4).

4.1.2) Aus $M^2$ läßt sich durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ eine Halbnormalfläche $M^{*2}$ hervorbringen, für die gilt:

a. $M^{*2} - P^3 = M^2 - P^3$.

b. Eine der z-Komponenten von $M^{*2}G^{*2}$ ist eine Kante $Y^1$ mit den Randpunkten $p_1$ und $p_2$.

*Beweis.* $M^2\dot{P}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_g^1$, so daß bei geeigneter Numerierung $\dot{X} = S_1^1$ ist. $\dot{P}^3 - S_1^1$ besteht aus zwei offenen Flächenstücken $E_1^2$ und $E'^2$, so daß bei geeigneter Bezeichnung die Kante $N'^1$ in $E_1^2$ liegt (also eine z-Komponente von $E_1^2\dot{G}^{*2}$ ist). $p'$ sei ein beliebiger in $E'^2 - M^2$ liegender Punkt. In $\bar{P}^3$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine t-Mannigfaltigkeit $T^2$, die aus $g$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1^2, \ldots, T_g^2$ mit $\dot{T}_k^2 = S_k^1$ besteht, so daß folgendes gilt: $S_k^1$ berandet in $\dot{P}^3$ ein offenes Flächenstück $E_k^2$, das $p'$ nicht enthält, und $T_k^2$ ist ein im Verhältnis zu $\Theta \,|\, G^{*2}$ nahe zu $E_k^2$ benachbartes Flächenstück.

Damit gibt es eine z-Komponente $Y^1$ von $T_1^2G^{*2}$, die eine im Verhältnis zu $\Theta$ nahe

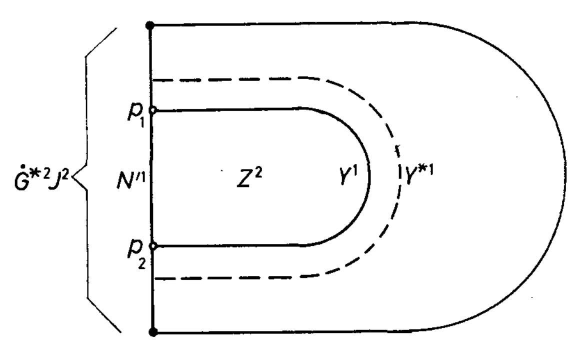



Fig. 5. $Y^1$ und $Y^{*1}$ in $G^{*2}$.

zu $N'^1$ benachbarte Kante in $G^{*2}$ ist (siehe Fig. 5). Die Mannigfaltigkeit $M^{*2} = (M^2 - P^3) + \mathring{T}^2$ besitzt die geforderten Eigenschaften, womit 4.1.2 bewiesen ist.

4.1.3) $Y^1 + N'^1$ berandet in $G^{*2}$ ein offenes Flächenstück $Z^2$ (vgl. Fig. 5). $U^3$ sei eine im Verhältnis zu $\Theta \,|\, M^{*2} \,|\, G^{*2}$ kleine Umgebung von $\overline{F}'^3 + \overline{Z}^2$ in $M^3$. $\dot{U}^3 \overline{F}^3$ besteht aus zwei mit $M^{*2}$ punktfremden Flächenstücken $F_1^{*2}$ und $F_2^{*2}$. $\dot{U}^3 G^{*2}$ ist eine mit $M^{*2}$ punktfremde Kante $Y^{*1}$.

4.1.4) Aus $M^{*2}$ läßt sich durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ eine t-Mannigfaltigkeit $M'^2$ hervorbringen, für die gilt:

a. $M'^2 - \mathring{U}^3 = M^{*2} - \mathring{U}^3$.

b. $M'^2 U^3$ ist mit $\overline{F}^3$ punktfremd.

*Beweis.* $M^{*2} \dot{U}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^{*1}, \ldots, S_h^{*1}$. Die Punktmenge $W^* = F_1^{*2} + F_2^{*2} + Y^{*1}$ ist zusammenhängend und liegt in $\dot{U}^3 - M^{*2}$. $p^*$ sei ein beliebiger in $W^*$ liegender Punkt. Damit gibt es in $U^3$ nach Hilfssatz 1 eine t-Mannigfaltigkeit $T'^2$, die aus $h$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1'^2, \ldots, T_h'^2$ mit $\dot{T}_l'^2 = S_l^{*1}$ $(l = 1, \ldots, h)$ besteht, so daß folgendes gilt: $S_l^{*1}$ berandet in $\dot{U}^3$ ein offenes Flächenstück $E_l'^2$, das $p^*$ (und damit auch $W^*$) nicht enthält, und $T_l'^2$ ist ein im Verhältnis zu $\Theta$ nahe zu $E_l'^2$ benachbartes Flächenstück (also mit $\overline{F}^3$ punktfremd). Die Mannigfaltigkeit $M'^2 = (M^{*2} - \mathring{U}^3) + \mathring{T}'^2$ besitzt die geforderten Eigenschaften, womit 4.1.4 bewiesen ist.

4.1.5) Da die F-Zahl von $M^{*2}$ gleich $f$ ist und $M^{*2}$ die beiden in $U^3$ liegenden F-Normalflächenstücke $F_1^2$ und $F_2^2$ enthält, ist die F-Zahl von $M'^2$ höchstens gleich $f-2$. Damit besitzt $M'^2$ die in der Behauptung IV genannten Eigenschaften, und IV ist für den Fall bewiesen, daß $X$ eine P-Falte ist.

4.2) Ist $X$ eine PK-Falte, so gilt:

$M^2$ läßt sich durch eine $\xi$-Operation in $M^3$ in eine Halbnormalfläche $M^{*2}$ mit $\dot{M}^{*2} = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl ebenfalls gleich $f$ ist, und die eine innere P-Falte enthält.

*Beweis.* $X$ liegt im Rande eines P-Raumstückes $P^3$. $M^2 \dot{P}^3$ besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_w^1$, so daß bei geeigneter Numerierung $X$ in $S_1^1$ liegt. In $\overline{P}^3$ gibt es (nach Hilfssatz 1) eine t-Mannigfaltigkeit $T^2$, die aus $w$ paarweise miteinander punktfremden Flächenstücken $T_1^2, \ldots, T_w^2$ besteht, so daß $\dot{T}_m^2 = S_m^1$ $(m = 1, \ldots, w)$ ist. Die Mannigfaltigkeit $M^{*2} = (M^2 - \mathring{P}^3) + \mathring{T}^2$ besitzt die geforderten Eigenschaften, da $T_1^2$ eine innere P-Falte ist, wzbw.

Damit folgt IV nach 4.1.

4.3) Ist $X$ eine K-Falte, so liegen in $\dot{X}$ zwei innere PK-Falten. Daraus folgt IV nach 4.2.

Mit 4.1, 4.2 und 4.3 ist Teil IV der Behauptung bewiesen.

Mit Nr. 1 bis 4 ist Hilfssatz 2 bewiesen.

HAUPTSATZ 1 (*Normalflächensatz*). *$M^2$ sei eine 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$, deren Rand leer oder eine einfache Normallinie ist. Dann folgt:*

I. *$M^2$ läßt sich durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Normalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = \dot{M}^2$ überführen.*

II. *Ist $M^2$ eine Halbnormalfläche mit der F-Zahl $f$, so läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Normalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl nicht größer als $f$ ist.*

III. *Ist $M^2$ eine Halbnormalfläche mit der F-Zahl $f$, und enthält $M^2$ eine P-, K- oder PK-Falte, so läßt sich $M^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Normalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl kleiner als $f$ ist.*

*Beweis.* 1) Ist $M^2$ keine Halbnormalfläche, so läßt sich $M^2$ nach Hilfssatz 2, II und III durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Quasinormalfläche $M^{*2}$ mit $\dot{M}^{*2} = \dot{M}^2$ überführen. Ist $M^2$ eine Halbnormalfläche, so wird $M^2 = M^{*2}$ gesetzt. Die F-Zahl von $M^{*2}$ sei $f^*$.

2) Es gibt eine Folge $M_1^2, \ldots, M_i^2, \ldots$, von Halbnormalflächen mit den F-Zahlen $f_1, \ldots, f_i, \ldots$, mit den Eigenschaften:

a. $M_1^2 = M^{*2}$.

b. Gibt es eine in $M_i^2$ liegende P-, K- oder PK-Falte, so geht $M_{i+1}^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ aus $M_i^2$ hervor, und es ist $f_{i+1} \leqslant f_i - 2$ und $\dot{M}_{i+1}^2 = \dot{M}^2$.

c. Gibt es keine in $M_i^2$ liegende P-, K- oder PK-Falte, und ist $M_i^2$ keine Normalfläche, so geht $M_{i+1}^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ aus $M_i^2$ hervor und ist eine Quasinormalfläche mit $f_{i+1} = f_i$ und $\dot{M}_{i+1}^2 = \dot{M}^2$.

d. Ist $M_i^2$ eine Normalfläche, so bricht die Folge nach $M_i^2$ ab.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, die ersten $m$ Folgenglieder seien gegeben, und $M_m^2$ sei keine Normalfläche, folgt:

Gibt es eine in $M_m^2$ liegende P-, K- oder PK-Falte, so läßt sich $M_m^2$ nach Hilfssatz 2, IV durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine t-Mannigfaltigkeit $M_m'^2$ mit $\dot{M}_m'^2 = \dot{M}^2$ überführen, die mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd ist und die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in F-Normalflächenstücken schneidet, so daß die F-Zahl von $M_m'^2$ nicht größer als $f_m - 2$ ist; $M_m'^2$ läßt sich nach Hilfssatz 2,III durch weitere $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Quasinormalfläche $M_{m+1}^2$ mit $\dot{M}_{m+1}^2 = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl ebenfalls nicht größer als $f_m - 2$ ist.

Gibt es keine in $M_m^2$ liegende P-, K- oder PK-Falte, so läßt sich $M_m^2$ nach Hilfssatz 2,III durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Quasinormalfläche $M_{m+1}^2$ mit $\dot{M}_{m+1}^2 = \dot{M}^2$ überführen, deren F-Zahl gleich $f_m$ ist.

In jedem Falle besitzt $M^2_{m+1}$ die für das $(m+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften, womit Nr. 2 durch Induktion bewiesen ist.

3) Da $f_{2j+1} \leqslant f^* - 2j$ ist, bricht die Folge $M^2_1, \ldots, M^2_i, \ldots,$ nach höchstens $f^*$ Gliedern ab. Gibt es in $M^{*2}$ eine P-, K- oder PK-Falte, so bricht die Folge nicht nach $M^2_1$ ab, und es ist $f_k < f_1$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Daraus folgt, daß das letzte Folgenglied eine Normalfläche $M'^2$ mit den in Teil I, II, bzw. III der Behauptung genannten Eigenschaften ist und Hauptsatz 1 ist damit bewiesen.

## 6. Schlußbemerkung zum ersten Kapitel

Die Untersuchungen dieses Kapitels sind nur soweit geführt worden, wie es zur Herleitung des Kreislinien-Kriteriums notwendig ist. Sie lassen sich in verschiedenen Richtungen weiterführen und verallgemeinern, wie in späteren Arbeiten dargestellt werden soll:

a. Es läßt sich der in der Einleitung genannte Satz beweisen, daß aus jeder inkompressiblen Fläche in $M^3$ bei Anwendung von beliebigen $\xi$-Operationen stets eine quasiisotope Fläche entsteht.

b. Der Hauptsatz 1 läßt sich von der Voraussetzung befreien, daß der Rand der gegebenen 2-dim Mannigfaltigkeit leer oder eine einfache Normallinie sein solle. Hierzu müssen außer den $\xi$-Operationen noch sogenannte Rand-$\xi$-Operationen herangezogen werden, die es gestatten, den Rand einer 2-dim t-Mannigfaltigkeit in $M^3$ zu verändern.

c. Die Zerlegung $\Gamma$ von $M^3$ wurde vorausgesetzt als eine Zerlegung in offene Raumelemente. Alle angestellten Betrachtungen lassen sich verallgemeinern für den Fall, daß $\Gamma$ eine Zerlegung in „offene Raumelemente mit Randsingularitäten" ist. Eine solche Zerlegung ist beispielsweise die bekannte Zerlegung eines Linsenraumes in ein Raumstück, ein Flächenstück, eine Kante und einen Eckpunkt. Die Normalzerlegung bezüglich einer solchen Zerlegung eines Linsenraumes hat eine sehr einfache Struktur, und es läßt sich folgendes zeigen: Handelt es sich um einen Linsenraum $(p, q)$ mit ungeradem $p$, so gibt es keine Normalfläche bezüglich der genannten Normalzerlegung. Daraus folgt aber, daß es in einem derartigen Linsenraum keine inkompressible Fläche gibt und keine 2-dim Sphäre, die kein Raumstück berandet. Damit ist die Gültigkeit des erwähnten Lemmas von Fox und des Satzes von Alexander für „ungerade" Linsenräume nachgewiesen.

d. Die Betrachtungen lassen sich in gewisser Weise dimensionsmäßig verallgemeinern. Es lassen sich insbesondere $d$-dim Linsenräume definieren, und es ergibt sich der Satz, daß in „ungeraden $d$-dim Linsenräumen" jede $(d-1)$-dim Mannigfaltigkeit „reduzibel" ist, d. h. sich durch geeignet definierte „$d$-dim $\xi$-Operationen" in die leere Menge überführen läßt [4].

## ZWEITES KAPITEL

# Ähnlichkeitsklassen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Ähnlichkeitsklasse von Normalflächen definiert, und die in der Einleitung angegebenen Zusammenhänge zwischen den nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen der P-Gleichungen werden hergeleitet.

### 1. Ähnlichkeitsabbildungen

Wir haben zunächst die Ähnlichkeit zweier Mannigfaltigkeiten bezüglich einer Zerlegung $\Delta$ zu definieren.

DEFINITION. $\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in offene Raumelemente. $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ seien randtreue Zerlegungen zweier polyederartiger Punktmengen $B_1$ bzw. $B_2$ in offene Raumelemente. Dann wird definiert:

I. Gibt es eine isomorphe Abbildung $\eta$ von $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ aufeinander, so heißt $\eta$ eine *Ähnlichkeitsabbildung von* $\Lambda_1$ *und* $\Lambda_2$ *aufeinander bezüglich* $\Delta$, wenn folgendes gilt: Sind $E_1$ und $E_2$ zwei einander durch $\eta$ zugeordnete Elemente aus $\Lambda_1$ bzw. $\Lambda_2$, so liegen $E_1$ und $E_2$ in einem und demselben Element aus $\Delta$.

II. $M_1^d$ und $M_2^d$ seien zwei bezüglich $\Delta$ elementar liegende Mannigfaltigkeiten und $\Omega_1$ und $\Omega_2$ die durch $M_1^d$ bzw. $M_2^d$ bewirkten Unterteilungen von $\Delta$. Dann heißen $M_1^d$ und $M_2^d$ einander *ähnlich* bezüglich $\Delta$, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega_1$ und $\Omega_2$ aufeinander bezüglich $\Delta$ gibt, durch die $\Delta(M_1^d)$ und $\Delta(M_2^d)$ aufeinander abgebildet werden.

III. Die Klassen einander bezüglich $\Delta$ ähnlicher Mannigfaltigkeiten heißen die *Ähnlichkeitsklassen* bezüglich $\Delta$, oder kürzer die $\Delta$-*Klassen*.

FOLGERUNG. *$\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung einer Mannigfaltigkeit $M^d$ in offene Raumelemente. Dann gilt:*

I. *Sind $\Lambda$ und $\Lambda'$ randtreue Zerlegungen zweier polyederartiger Punktmengen $B_1$ bzw. $B_2$ in offene Raumelemente, so läßt sich entscheiden, ob es eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Lambda$ und $\Lambda'$ aufeinander bezüglich $\Delta$ gebe, da es nur endlich viele eineindeutige Abbildungen von $\Lambda$ und $\Lambda'$ aufeinander gibt.*

II. *Für bezüglich $\Delta$ elementar in $M^d$ liegende Mannigfaltigkeiten ist die Relation der Ähnlichkeit bezüglich $\Delta$ reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

III. *$M^e$ und $M'^e$ seien zwei bezüglich $\Delta$ elementar in $M^d$ liegende Mannigfaltigkeiten. $\Omega$ und $\Omega'$ seien die durch $M^e$ bzw. $M'^e$ bewirkten Unterteilungen von $\Delta$. Dann gilt:*

III.1. *Es gibt höchstens eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega$ und $\Omega'$ aufeinander bezüglich $\Delta$, durch die $\Delta(M^e)$ und $\Delta(M'^e)$ aufeinander abgebildet werden.*

III.2. *$M^e$ und $M'^e$ sind einander dann und nur dann ähnlich bezüglich $\Delta$, wenn folgendes gilt: Ist $E$ ein Element aus $\Delta$, und ist $M^eE$ nicht leer, so sind $M^e\bar{E}$ und $M'^e\bar{E}$ einander ähnlich bezüglich $\Delta$.*

*Beweis.* Die Folgerungen I und II ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. Es sind noch III.1 und III.2 zu beweisen.

1) Beweis von III.1: Aus der Annahme, $\eta$ und $\eta^*$ seien zwei verschiedene Ähnlichkeitsabbildungen mit den genannten Eigenschaften, folgt:

1.1) Es gibt (mindestens) ein 0-dim Element $p$ aus $\Omega$, das durch $\eta$ einem 0-dim Element $p'$ aus $\Omega'$ zugeordnet wird und durch $\eta^*$ einem Element $p^{*\prime}$ aus $\Omega'$, das von $p'$ verschieden ist.

Beweis: Es gibt (mindestens) ein Element $E^f$ aus $\Omega$, das durch $\eta$ einem Element $E'^f$ aus $\Omega'$ zugeordnet wird und durch $\eta^*$ einem Element $E^{*\prime f}$ aus $\Omega'$, das von $E'^f$ verschieden ist. Dabei liegen $E'^f$ und $E^{*\prime f}$ in einem und demselben Element $D$ aus $\Delta$. Für $f > 0$ gilt nun weiter:

1.1.1) Liegt $E'^f$ in $M'^e$, so sind $\bar{E}'^f$ und $\bar{E}^{*\prime f}$ zwei verschiedene z-Komponenten von $\bar{D}M'^e$, und es gilt: $\Omega'(\bar{E}'^f)$ enthält mindestens ein 0-dim Element $p'$. Das $p'$ durch $\eta$ zugeordnete Element aus $\Omega$ sei $p$. Dann liegt das $p$ durch $\eta^*$ zugeordnete Element $p^{*\prime}$ in $\bar{E}^{*\prime f}$ und ist damit von $p'$ verschieden.

1.1.2) Liegt $E'^f$ nicht in $M'^e$, so ist $D$ $f$-dimensional, und $E'^f$ und $E^{*\prime f}$ sind zwei voneinander verschiedene z-Komponenten von $D - M'^e$. Dabei gilt: $\bar{E}'^f$ enthält (mindestens) ein 1-dim Element $G'^1$ aus $\Omega'$, das nicht in $M'^e$ und nicht in $\bar{E}^{*\prime f}$ liegt; ein solches Element findet sich stets in $(\dot{E}'^f\dot{D})^\circ$. Das $G'^1$ durch $\eta$ zugeordnete Element aus $\Omega$ sei $G^1$. Dann liegt das $G^1$ durch $\eta^*$ zugeordnete Element $G^{*\prime 1}$ in $\bar{E}^{*\prime f}$ und ist damit von $G'^1$ verschieden. $G'^1$ und $G^{*\prime 1}$ liegen in einem und demselben Element $F^1$ aus $\Delta$. $G'^1$ besitzt daher mindestens einen Randpunkt $p'$, der nicht zugleich Randpunkt von $G^{*\prime 1}$ ist. Der $p'$ durch $\eta$ zugeordnete Punkt sei $p$. Dann ist der $p$ durch $\eta$ zugeordnete Punkt $p^{*\prime}$ von $p'$ verschieden.

Mit 1.1.1 und 1.1.2 ist 1.1 bewiesen.

1.2) $p$, $p'$ und $p^{*\prime}$ liegen in einem und demselben 1-dim Element $F^1$ aus $\Delta$, (da $p$ kein 0-dim Element aus $\Delta$ sein kann). Ist $\psi$ eine beliebige Orientierung der Kante $\bar{F}^1$, und liegt $p$ im Sinne von $\psi$ als $i$-ter Punkt von $M^eF^1$ in $F^1$, so ist mindestens einer der Punkte $p'$, $p^{*\prime}$ im Sinne von $\psi$ nicht der $i$-te Punkt von $M'^eF^1$ in $F^1$. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $\eta$ und $\eta^*$ Ähnlichkeitsabbildungen bezüglich $\Delta$ seien, die damit falsch ist. Hiermit ist III.1 bewiesen.

2) Beweis von III.2: Es ist noch zu beweisen, daß $M^e$ und $M'^e$ einander dann bezüglich $\Delta$ ähnlich sind, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist. $E_1, \ldots, E_s$ seien die nicht mit

$M^e$ punktfremden Elemente aus $\Delta$, $F_1, \ldots, F_t$ die mit $M^e$ punktfremden. $\eta_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ sei die (nach III.1 eindeutig bestimmte) Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega(\bar{E}_i)$ und $\Omega'(\bar{E}_i)$ aufeinander bezüglich $\Delta$, durch die $\Delta(M^e \bar{E}_i)$ und $\Delta(M'^e \bar{E}_i)$ aufeinander abgebildet werden. Dann bilden die Abbildungen $\eta_1, \ldots, \eta_s$ und die Abbildungen $F_j \leftrightarrow F_j$ (für alle $j = 1, \ldots, t$) zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega$ und $\Omega'$ aufeinander bezüglich $\Delta$, durch die $\Delta(M^e)$ und $\Delta(M'^e)$ aufeinander abgebildet werden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 2. Ein Ähnlichkeitskriterium

Liegen zwei Mannigfaltigkeiten $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ elementar bezüglich einer Zerlegung $\Delta$ einer Mannigfaltigkeit $M^d$, und gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta$ von $\Delta(M^{d-1})$ und $\Delta(M'^{d-1})$ aufeinander bezüglich $\Delta$, so folgt daraus im allgemeinen noch nicht, daß $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ einander ähnlich bezüglich $\Delta$ seien. Wird jedoch die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß es in $\Delta(M^{d-1})$ kein 1-dim Element gebe, dessen beide Randpunkte in einem und demselben Element aus $\Delta$ liegen, so folgt die Ähnlichkeit von $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ aus der Existenz von $\eta$. Dieser Sachverhalt ist von entscheidender Bedeutung für die folgenden Untersuchungen. Denn ist $M^2$ eine Normalfläche bezüglich $\Theta$, so ist die genannte Zusatzbedingung für $\Theta(M^2)$ stets erfüllt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Fälle $d = 2$ und 3, da wir im folgenden nur diese zu betrachten haben.

Hilfssatz 3. *$\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung einer Mannigfaltigkeit $M^d$ mit $d = 2$ oder 3 in offene Raumelemente. $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ seien zwei bezüglich $\Delta$ elementar liegende Mannigfaltigkeiten in $M^d$. Ferner gelte: Ist $E^2$ ein 2-dim Element aus $\Delta$, und ist $A^1$ eine z-Komponente von $M^{d-1}E^2$, so liegen die beiden Randpunkte von $A^1$ nicht in einem und demselben Element aus $\Delta$. Dann folgt:*

I. *$M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ sind einander dann und nur dann ähnlich bezüglich $\Delta$, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Delta(M^{d-1})$ und $\Delta(M'^{d-1})$ aufeinander bezüglich $\Delta$ gibt.*

II. *Aus I folgt: $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ sind einander dann und nur dann ähnlich bezüglich $\Delta$, wenn es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den z-Komponenten von $M^{d-1}$ und den z-Komponenten von $M'^{d-1}$ so gibt, daß einander zugeordnete Komponenten einander ähnlich bezüglich $\Delta$ sind.*

*Beweis.* Es ist noch zu beweisen, daß $M^{d-1}$ und $M'^{d-1}$ einander dann bezüglich $\Delta$ ähnlich sind, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta$ von $\Delta(M^{d-1})$ und $\Delta(M'^{d-1})$ aufeinander bezüglich $\Delta$ gibt. Die durch $M^{d-1}$ bzw. $M'^{d-1}$ bewirkten Unterteilungen von $\Delta$ seien $\Omega$ bzw. $\Omega'$.

1) Ist $E^2$ ein 2-dim Element aus $\Delta$ und $M^{d-1}E^2$ nicht leer, so gilt: Die Elemente aus $\Delta(\dot{E}^2)$ seien $E_1^1, \ldots, E_s^1$ und $q_1, \ldots, q_s$, so daß $q_i$ und $q_{i+1}$ die Randpunkte von

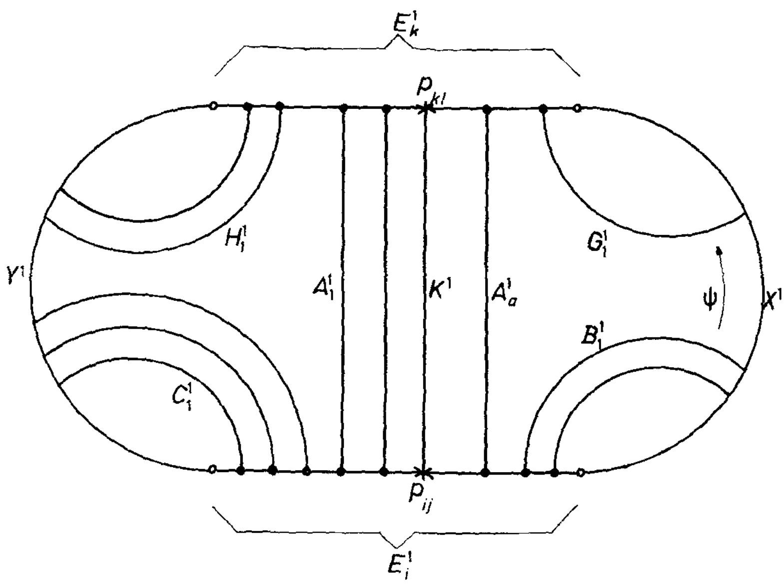



Fig. 6. $\dot{E}^2$ mit den Kanten $A$, $B$, $C$, $G$ und $H$ aus $M^{d-1}$.

$E_i^1$ sind $(i=1, \ldots, s)$, wobei $q_{s+1}=q_1$ zu setzen ist. $\psi$ sei die Orientierung von $\dot{E}^2$, bei der $q_1, E_1^1, \ldots, q_s, E_s^1$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung durchlaufen werden. Dann gilt weiter:

1.1) In $E_i^1$ liegen je gleichviele Punkte $p_{i1}, \ldots, p_{it_i}$ bzw. $p'_{i1}, \ldots, p'_{it_i}$ aus $M^{d-1}$ bzw. $M'^{d-1}$; dabei mögen diese Punkte in der Reihenfolge ihrer Numerierung (bezüglich $\psi$) in $E_i^1$ liegen. Dann enthalten $\Omega(\bar{E}_i^1)$ und $\Omega'(\bar{E}_i^1)$ je $t_i+1$ 1-dim Elemente $E_{i1}^1, \ldots, E_{it_i+1}^1$, bzw. $E_{i1}'^1, \ldots, E_{it_i+1}'^1$, so daß $p_{ij-1}$ und $p_{ij}$ die Randpunkte von $E_{ij}^1$ sind und $p'_{ij-1}$ und $p'_{ij}$ die von $E_{ij}'^1$ $(j=1, \ldots, t_i+1)$, wobei $p_{i0}=p'_{i0}=q_i$ und $p_{it_i+1}=p'_{it_i+1}=q_{i+1}$ zu setzen ist. Dabei bilden die Abbildungen $E_{ij}'^1 \leftrightarrow E_{ij}^1$, $p'_{ik} \leftrightarrow p_{ik}$ (für alle $i=1, \ldots, s$, $j=1, \ldots, t_i+1$; $k=0, \ldots, t_i+1$) zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega'(\dot{E}^2)$ und $\Omega(\dot{E}^2)$ aufeinander bezüglich $\Delta$, die mit $\zeta(\dot{E}^2)$ bezeichnet wird.

1.2) Ist $K^1$ eine z-Komponente von $M^{d-1}E^2$ mit den Randpunkten $p_{ij}$ und $p_{kl}$ $(i, k=1, \ldots, s;\ j=1, \ldots, t_i;\ l=1, \ldots, t_l)$, so ist $i \neq k$ und es gibt eine z-Komponente $K'^1$ von $M'^{d-1}E^2$ mit den Randpunkten $p'_{ij}$ und $p'_{kl}$.

Beweis: Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $k>i$ ist. $\bar{E}_{i+1}^1+\ldots+\bar{E}_{k-1}^1$ ist eine abgeschlossene Kante $X^1$ oder die leere Menge, $\bar{E}_{k+1}^1+\ldots+\bar{E}_s^1+\bar{E}_1^1+\ldots+\bar{E}_{i-1}^1$ eine abgeschlossene Kante $Y^1$ oder die leere Menge (sie Fig. 6). Diejenigen z-Komponenten von $M^{d-1}E^2$, die je einen in $E_i^1$ und je einen in $E_k^1$ liegenden Randpunkt besitzen, seien $A_1^1, \ldots, A_a^1$, wobei die Punkte $\dot{A}_1^1\bar{E}_i^1, \ldots, \dot{A}_a^1\bar{E}_i^1$ im Sinne von $\psi$ in der Reihenfolge der Numerierung in $E_i^1$ liegen mögen. Die z-Komponenten von $M^{d-1}E^2$, die je einen in $E_i^1$ und je einen in $X^1$ bzw. $Y^1$ liegenden Randpunkt besitzen, seien $B_1^1, \ldots, B_b^1$ bzw. $C_1^1, \ldots, C_c^1$, so daß die Punkte $\dot{B}_1^1E_i^1, \ldots, \dot{B}_b^1E_i^1$ bzw. $\dot{C}_1^1E_i^1, \ldots, \dot{C}_c^1E_i^1$ in der Reihenfolge der Numerierung in $E_i^1$ liegen (vgl. Fig. 6). Die z-Komponenten von $M^{d-1}E^2$, die je einen in $E_k^1$ und je einen in $X^1$ bzw. $Y^1$ liegenden Randpunkt besitzen, seien schließlich $G_1^1, \ldots, G_g^1$ bzw. $H_1^1, \ldots, H_h^1$ so daß ihre in $E_k^1$ liegenden Randpunkte in der Reihenfolge der Numerierung in $E_k^1$ liegen. (Dabei können, $b$, $c$, $g$ oder $h$ gleich Null sein.)

Da jede z-Komponente von $M^{d-1}E^2$ durch die Ähnlichkeitsabbildung $\eta$ auf eine z-Komponente von $M'^{d-1}E^2$ abgebildet wird, besitzt $M'^{d-1}E^2$ genau $a$ z-Komponenten $A_1'^1, \ldots, A_a'^1$, die je einen in $E_i^1$ und je einen in $E_k^1$ liegenden Randpunkt besitzen; dabei liegen (bei geeigneter Numerierung) $\dot{A}_1'^1E_i^1, \ldots, \dot{A}_a'^1E_i^1$ in der Reihenfolge der Numerierung in $E_i^1$. Entsprechend besitzt $M'^{d-1}E^2$ $b$ z-Komponenten $B_1'^1, \ldots, B_b'^1$ und $c$ z-Komponenten $C_1'^1, \ldots, C_c'^1$, die je einen in $E_i^1$ und je einen in $X^1$ bzw. $Y^1$ liegenden Randpunkt haben, sowie $g$ z-Komponenten $G_1'^1, \ldots, G_g'^1$ und $h$ z-Komponenten $H_1'^1, \ldots, H_h'^1$, die je einen in $E_k^1$ und je einen in $X^1$ bzw. $Y^1$ liegenden Randpunkt besitzen. Die Punkte $\dot{B}_1'^1E_i^1, \ldots, \dot{B}_b'^1E_i^1$ bzw. $\dot{C}_1'^1E_i^1, \ldots, \dot{C}_c'^1E_i^1$ bzw. $\dot{G}_1'^1E_k^1, \ldots, \dot{G}_g'^1E_k^1$ bzw. $\dot{H}_1'^1E_k^1, \ldots, \dot{H}_h'^1E_k^1$ mögen dabei jeweils in der Reihenfolge der Numerierung in $E_i^1$ bzw. $E_k^1$ liegen.

Da die Randpunktpaare je zweier z-Komponenten von $M^{d-1}E^2$ einander in $\dot{E}^2$ nicht trennen, gilt: Der Punkt $\dot{C}_m^1E_i^1$ ist gleich dem Punkt $p_{im}$ $(m=1, \ldots, c)$; $\dot{A}_u^1E_i^1 = p_{i\,c+u}$ $(u=1, \ldots, a)$, $\dot{B}_v^1E_i^1 = p_{i\,c+a+v}$ $(v=1, \ldots, b)$, $\dot{G}_w^1E_k^1 = p_{kw}$ $(w=1, \ldots, g)$, $\dot{A}_u^1E_k^1 = p_{k\,g+a+1-u}$ und $\dot{H}_z^1E_k^1 = p_{k\,g+a+z}$ $(z=1, \ldots, h)$. Entsprechend ist $\dot{A}_u'^1E_i^1 = p'_{i\,c+u}$, $\dot{A}_u'^1E_k^1 = p'_{k\,g+a+1-u}$, usw. Damit ist $K^1 = A_{j-c}^1$, und die Kante $A_{j-c}'^1$ hat die für $K'^1$ geforderten Eigenschaften, womit 1.2 bewiesen ist.

1.3) Die sämtlichen z-Komponenten von $M^{d-1}E^2$ seien $K_1^1, \ldots, K_z^1$, die von $M'^{d-1}E^2$ seien $K_1'^1, \ldots, K_z'^1$. Dabei läßt sich die Numerierung so wählen, daß die Randpunkte von $K_m'^1$ $(m=1, \ldots, z)$ durch $\zeta(\dot{E}^2)$ auf die von $K_m^1$ abgebildet werden. Dann bilden die Abbildungen $K_m'^1 \leftrightarrow K_m^1$ $(m=1, \ldots, z)$ und die Abbildung $\zeta(\dot{E}^2)$ zusammen eine isomorphe Abbildung, die mit $\vartheta(E^2)$ bezeichnet wird.

1.4) Ist $F^2$ eine z-Komponente von $E^2 - M^{d-1}$, so gibt es genau eine z-Komponente $F'^2$ von $E^2 - M'^{d-1}$, so daß $\Omega(\dot{F}^2)$ und $\Omega'(\dot{F}'^2)$ durch $\vartheta(E^2)$ aufeinander abgebildet werden.

Beweis: $\alpha$) Durch $\vartheta(E^2)$ wird $\Omega(\dot{F}^2)$ auf die Zerlegung $\Omega'(S^1)$ einer 1-dim Sphäre $S^1$ abgebildet. $S^1$ berandet ein in $E^2$ liegendes offenes Flächenstück $F'^2$.

$\beta$) $F'^2$ ist mit $M'^{d-1}$ punktfremd.

Beweis: Aus der Annahme, $F'^2 M'^{d-1}$ sei nicht leer, folgt: In $F'^2$ liegt eine der offenen Kanten $K'^1_m$, wobei deren Randpunkte $p'$ und $q'$ in $S^1$ liegen. Durch $\vartheta(E^2)$ werden $p'$ und $q'$ auf die Randpunkte $p$ and $q$ von $K^1_m$ abgebildet, wobei $p$ und $q$ in $\dot{F}^2$ liegen, während $K^1_m$ nicht in $\dot{F}^2$ liegt. Daraus folgt, daß $K^1_m$ in $F^2$ liegt, und dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $F^2$ mit $M^{d-1}$ punktfremd sei. Also ist die Annahme falsch, und $\beta$ ist damit bewiesen.

Aus $\alpha$ und $\beta$ folgt 1.4.

1.5) Die $z+1$ z-Komponenten von $E^2 - M^{d-1}$ seien $F^2_1, \ldots, F^2_{z+1}$, die von $E^2 - M'^{d-1}$ seien $F'^2_1, \ldots, F'^2_{z+1}$. Dabei läßt sich die Numerierung so wählen, daß $\Omega(\dot{F}^2_i)$ und $\Omega'(\dot{F}'^2_i)$ $(i=1, \ldots, z+1)$ durch $\vartheta(E^2)$ aufeinander abgebildet werden. Dann bilden die Abbildungen $F'^2_i \leftrightarrow F^2_i$ und die Abbildung $\vartheta(E^2)$ zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega'(\bar{E}^2)$ und $\Omega(\bar{E}^2)$ aufeinander bezüglich $\Delta$, die mit $\zeta(E^2)$ bezeichnet wird. Also sind $M'^{d-1}\bar{E}^2$ und $M^{d-1}\bar{E}^2$ einander bezüglich $\Delta$ ähnlich.

2) Für den Fall, daß $d=3$, $E^3$ ein 3-dim Element aus $\Delta$ und $M^{d-1}E^3$ nicht leer ist, gilt:

Die in $\dot{E}^3$ liegenden 2-dim Elemente aus $\Delta$ seien $E^2_1, \ldots, E^2_v$.

2.1) Die Abbildungen $\zeta(E^2_1), \ldots, \zeta(E^2_v)$ bilden zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Omega'(\dot{E}^3)$ und $\Omega(\dot{E}^3)$ aufeinander bezüglich $\Delta$, die mit $\zeta(\dot{E}^3)$ bezeichnet wird.

2.2) Die sämtlichen z-Komponenten von $M^{d-1}E^3$ seien $Z^2_1, \ldots, Z^2_w$. Dann gibt es genau $w$ z-Komponenten $Z'^2_1, \ldots, Z'^2_w$ von $M'^{d-1}E^3$, so daß (bei geeigneter Numerierung) $\Omega'(\dot{Z}'^2_j)$ und $\Omega(\dot{Z}^2_j)$ $(j=1, \ldots, w)$ durch $\zeta(\dot{E}^3)$ aufeinander abgebildet werden. Die Abbildungen $Z'^2_j \leftrightarrow Z^2_j$ und die Abbildung $\zeta(\dot{E}^3)$ bilden zusammen eine isomorphe Abbildung, die mit $\vartheta(E^3)$ bezeichnet wird.

2.3) Die $w+1$ z-Komponenten von $E^3 - M^{d-1}$ seien $R^3_1, \ldots, R^3_{w+1}$, die von $E^3 - M'^{d-1}$ seien $R'^3_1, \ldots, R'^3_{w+1}$. Dabei läßt sich die Numerierung so wählen, daß $\Omega'(\dot{R}'^3_k)$ und $\Omega(\dot{R}^3_k)$ $(k=1, \ldots, w+1)$ durch $\vartheta(E^3)$ aufeinander abgebildet werden. (Dies ergibt sich analog zu 1.4 und 1.5.)

2.4) Die Abbildungen $R'^3_k \leftrightarrow R^3_k$ und die Abbildung $\vartheta(E^3)$ bilden zusammen eine isomorphe Abbildung von $\Omega'(\bar{E}^3)$ und $\Omega(\bar{E}^3)$ aufeinander. Daraus folgt, daß $M'^{d-1}\bar{E}^3$ und $M^{d-1}\bar{E}^3$ einander bezüglich $\Delta$ ähnlich sind.

3) Aus 1.5 bzw. 2.4 folgt, daß $M'^{d-1}$ und $M^{d-1}$ einander bezüglich $\Delta$ ähnlich sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerung 1. *Ist* $E^d$ *ein F-Raumstück oder ein PF-, KF- oder* $K\dot{M}$*-Flächenstück, ist* $M^{d-1}$ *eine Mannigfaltigkeit, die aus a paarweise miteinander punktfremden in* $\bar{E}^d$ *liegenden F-Normalflächenstücken bzw. PF-, KF- oder* $K\dot{M}$*-Normalkanten besteht, und ist* $M'^{d-1}$ *eine weitere Mannigfaltigkeit, die ebenfalls aus a miteinander punktfremden in* $\bar{E}^d$ *liegenden Normalflächenstücken bzw. -Kanten besteht, so sind* $M^{d-1}$ *und* $M'^{d-1}$ *einander ähnlich bezüglich* $\Theta$.

Folgerung 2. *Ist* $K^3$ *ein K-Raumstück, ist* $M^2$ *eine Mannigfaltigkeit, die aus paarweise miteinander punktfremden in* $\bar{K}^3$ *liegenden K-Normalflächenstücken besteht, und ist* $M'^2$ *eine weitere Mannigfaltigkeit, die ebenfalls aus paarweise miteinander punktfremden K-Normalflächenstücken in* $\bar{K}^3$ *besteht, so sind* $M'^2$ *und* $M^2$ *einander dann und nur dann ähnlich bezüglich* $\Theta$, *wenn folgendes gilt: Ist* $G^2$ *ein in* $\dot{K}^3$ *liegendes PK-Flächenstück, so sind* $\dot{M}^2\bar{G}^2$ *und* $\dot{M}'^2\bar{G}^2$ *einander ähnlich bezüglich* $\Theta$.

### 3. P- und PK-Klassen

Wir wenden uns nun den P-Normalflächenstücken und ihren Ähnlichkeitsklassen bezüglich $\Theta$, den sogenannten P-Klassen, zu. Ist $\mathfrak{P}$ eine P-Klasse und $M^2$ eine Normalfläche, so nennen wir die Anzahl der in $M^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{P}$ die $\mathfrak{P}$ entsprechende P-Zahl von $M^2$. Alle P-Zahlen von $M^2$ bilden den sogenannten P-Zahlenvektor von $M^2$. Allgemeiner bezeichnen wir als einen P-Zahlenvektor jedes System von nichtnegativen ganzen Zahlen, die den P-Klassen eineindeutig zugeordnet sind. Einen solchen P-Zahlenvektor nennen wir „verträglich", wenn es eine Menge von P-Normalflächenstücken so gibt, daß aus jeder P-Klasse $\mathfrak{P}_i$ so viele Repräsentanten vorkommen, wie die $\mathfrak{P}_i$ entsprechende Zahl angibt, und daß diese P-Normalflächenstücke paarweise miteinander punktfremd sind.

Die Ähnlichkeitsklasse eines P-Normalflächenstückes $P^2$ ist durch die Ähnlichkeitsklasse von $\dot{P}^2$ bestimmt. Es läßt sich zeigen, daß diese Ähnlichkeitsklasse wiederum bestimmt ist durch die in $\dot{P}^2$ liegenden PK-Normalkanten. Die Ähnlichkeitsklassen der PK-Normalkanten bezeichnen wir entsprechend als die PK-Klassen und definieren analog PK-Zahlen, PK-Zahlenvektoren und die Verträglichkeit von PK-Zahlenvektoren.

Anschließend an die Definitionen zeigen wir, daß es nur eine beschränkte Anzahl von PK-Klassen gibt, und daß sich stets entscheiden läßt, ob ein gegebener PK-Zahlenvektor verträglich sei.

Definition 1. $N_1^1$ sei eine PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante. $N_2^1$ sei eine von $N_1^1$ verschiedene PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante. Dann bilden $N_1^1$ und $N_2^1$ ein *PK-Kantenpaar bezüglich* $\Theta$, $\Gamma$, wenn $N_1^1$ und $N_2^1$ im Rande eines und desselben PK-Flächenstückes liegen.

Definition 2. Eine $\Theta$-Klasse, deren Repräsentanten PK-Normalkanten oder P-Normalflächenstücke sind, heißt eine *PK-* bzw. *P-Klasse* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$.

Definition 3. $(N_1^1, N_2^1)$ sei ein PK-Kantenpaar, $\mathfrak{G}$ sei eine PK-Klasse. Dann *entsprechen* $\mathfrak{G}$ *und* $(N_1^1, N_2^1)$ *einander*, wenn ein Repräsentant aus $\mathfrak{G}$ einen in $N_1^1$ und einen in $N_2^1$ liegenden Randpunkt besitzt.

Definition 4. $M$ sei eine bezüglich $\Theta$ elementar liegende Mannigfaltigkeit. $\mathfrak{P}$ sei eine P- oder PK-Klasse. Dann heißt die Anzahl $x$ der in $M$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{P}$ die $\mathfrak{P}$ *entsprechende P-* bzw. *PK-Zahl von M*.

Definition 5. $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ seien alle P-Klassen oder alle PK-Klassen bezüglich $\Theta$, $\Gamma$. Ein System $\mathfrak{x}$ von nicht-negativen ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_s$ mit einer eineindeutigen Zuordnung dieser Zahlen zu den Klassen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ heißt ein *P-* bzw. *PK-Zahlenvektor* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$. Insbesondere wird definiert:

I. Ist keine der Zahlen $x_1, \ldots, x_s$ größer als 1, so heißt $\mathfrak{x}$ *einfach*.

II. Sind alle Zahlen $x_1, \ldots, x_s$ gleich Null, so heißt $\mathfrak{x}$ *trivial*.

III. Ist $M$ eine Mannigfaltigkeit, so heißt $\mathfrak{x}$ der *P-* bzw. *PK-Zahlenvektor von M* bezüglich $\Theta, \Gamma$, wenn $x_i$ die $\mathfrak{P}_i$ entsprechende P- bzw. PK-Zahl von $M$ ist (für alle $i = 1, \ldots, s$).

IV. Der triviale P- bzw. PK-Zahlenvektor wird als der P- bzw. PK-Zahlenvektor der leeren Menge betrachtet.

V. Ist $\mathfrak{x}$ der P- bzw. PK-Zahlenvektor einer Mannigfaltigkeit $M$, und ist $\mathfrak{M}$ die $\Theta$-Klasse von $M$, so bezeichnen wir $\mathfrak{x}$ als den $\mathfrak{M}$ *entsprechenden P-* bzw. *PK-Zahlenvektor* bezüglich $\Theta$, $\Gamma$ und $\mathfrak{M}$ als eine $\mathfrak{x}$ *entsprechende* $\Theta$*-Klasse*.

Definition 6. Sind $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_s)$ zwei P- bzw. PK-Zahlenvektoren, so daß $x_i$ und $y_i$ der P- bzw. PK-Klasse $\mathfrak{P}_i$ zugeordnet sind (für alle $i = 1, \ldots, s$), so bedeutet die *Summe* $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ den Vektor $(x_1 + y_1, \ldots, x_s + y_s)$ mit der Zuordnung von $x_i + y_i$ zu $\mathfrak{P}_i$.

Definition 7. Ein P- oder PK-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ heißt *verträglich*, wenn es eine Summe $S$ von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken bzw. PK-Normalkanten gibt, so daß $\mathfrak{x}$ der P- bzw. PK-Zahlenvektor von $S$ ist.

Folgerung 1. *Sind* $\mathfrak{x}_1$ *und* $\mathfrak{x}_2$ *zwei P- oder PK-Zahlenvektoren, und ist* $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ *verträglich, so sind auch* $\mathfrak{x}_1$ *und* $\mathfrak{x}_2$ *selbst verträglich.*

Folgerung 2. *Sind* $M_1$ *und* $M_2$ *zwei miteinander punktfremde und bezüglich* $\Theta$ *elementar liegende Mannigfaltigkeiten, und sind* $\mathfrak{x}_1$ *und* $\mathfrak{x}_2$ *die P- oder die PK-Zahlenvektoren von* $M_1$ *bzw.* $M_2$, *so ist* $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ *der P- bzw. PK-Zahlenvektor von* $M_1 + M_2$.

FOLGERUNG 3. *Ist $M^2$ eine Normalfläche, so sind der P- und der PK-Zahlenvektor von $M^2$ nicht trivial.*

SATZ 2. *Es gibt endlich viele PK-Klassen, und zwar gilt: Zu jeder PK-Klasse gibt es genau ein entsprechendes PK-Kantenpaar, und umgekehrt gibt es zu jedem PK-Kantenpaar genau eine entsprechende PK-Klasse.*

SATZ 3. *Es läßt sich entscheiden, ob ein gegebener PK-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ verträglich sei. Und zwar gilt:*

*Sind $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ die (nach Satz 2 endlich vielen) PK-Klassen, sind $\Pi_1, \ldots, \Pi_s$ die diesen entsprechenden PK-Kantenpaare und $x_1, \ldots, x_s$ die entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{x}$, so ist $\mathfrak{x}$ dann und nur dann verträglich, wenn folgendes gilt: Liegen die Kanten zweier Paare $\Pi_i$ und $\Pi_j$ $(i, j = 1, \ldots, s)$ im Rande eines und desselben PK-Flächenstückes $G^2$, sind diese vier Kanten paarweise voneinander verschieden, und trennen die Paare $\Pi_i$ und $\Pi_j$ einander in $\dot{G}^2$, so ist mindestens eine der Zahlen $x_i$, $x_j$ gleich Null.*

*Beweis.*

1) Ist die genannte Bedingung nicht erfüllt, so gibt es zwei Kantenpaare $\Pi_i$, $\Pi_j$, so daß die vier Kanten aus $\Pi_i$ und $\Pi_j$ paarweise voneinander verschieden sind, im Rande eines PK-Flächenstückes $G^2$ liegen und so daß $\Pi_i$ und $\Pi_j$ einander in $\dot{G}^2$ trennen und $x_i$ und $x_j$ von Null verschieden sind. Dann ist $\mathfrak{x}$ nicht verträglich, da es keine miteinander punktfremden $\Pi_i$ und $\Pi_j$ entsprechenden PK-Normalkanten gibt.

2) Ist die genannte Bedingung erfüllt, so ist $\mathfrak{x}$ verträglich.

Beweis:

2.1) $G^2$ sei ein PK-Flächenstück. $N_1^1, \ldots, N_v^1$ seien die in $\dot{G}^2$ liegenden PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten, so daß sie im Sinne einer gegebenen Orientierung $\psi$ von $\dot{G}^2$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung durchlaufen werden. Ist $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ diejenige PK-Klasse, die dem PK-Kantenpaar $(N_j^1, N_k^1)$ $(j, k = 1, \ldots, v)$ entspricht, so wird $x_i$ mit $g_{jk}$ bezeichnet. Dann gibt es in $\bar{G}^2$ eine Summe $S(\bar{G}^2)$ von paarweise miteinander punktfremden PK-Normalkanten

$$\begin{array}{r} G^1_{12,1}, \ldots, G^1_{12,g_{12}}, \ldots, G^1_{1k,1}, \ldots, G^1_{1k,g_{1k}}, \ldots, G^1_{1v,1}, \ldots, G^1_{1v,g_{1v}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^1_{jj+1,1}, \ldots, G^1_{jj+1,g_{jj+1}}, \ldots, G^1_{jv,1}, \ldots, G^1_{jv,g_{jv}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^1_{v-1v,1}, \ldots, G^1_{v-1v,g_{v-1v}}, \end{array}$$

so daß $G^1_{jk,l}$ $(l = 1, \ldots, g_{jk})$ einen in $N_j^1$ und einen in $N_k^1$ liegenden Randpunkt besitzt.

Beweis: Jede Kante $N_j^1$ läßt sich durch $v-2$ Punkte in $v-1$ offene Teilkanten

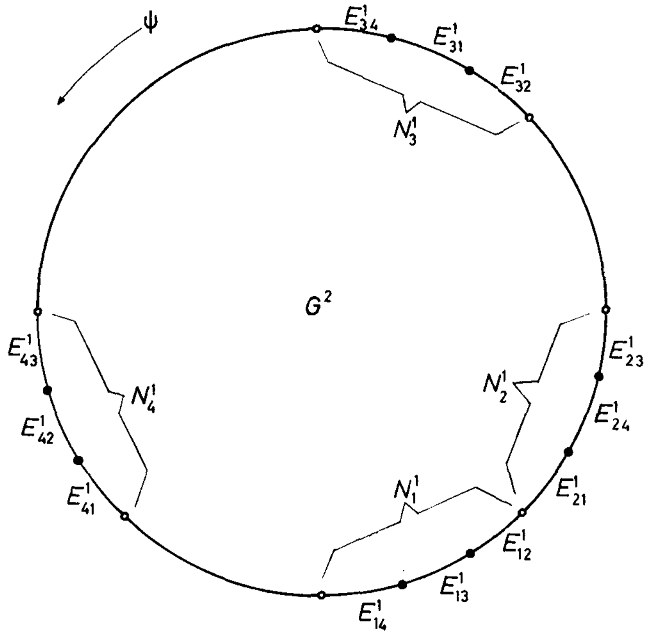



Fig. 7. $\bar{G}^2$ für $v=4$.

$E^1_{jj-1}$, $E^1_{jj-2}$, ..., $E^1_{j1}$, $E^1_{jv}$, $E^1_{jv-1}$, ..., $E^1_{jj+1}$ zerlegen, so daß diese Kanten im Sinne der Orientierung $\psi$ in der angebenen Reichenfolge durchlaufen werden (siehe Fig. 7). In jeder Kante $E^1_{jk}$ lassen sich nun $g_{jk}$ Punkte $p_{jk,1}, \ldots, p_{jk,g_{jk}}$ auszeichnen (für $g_{jk}=0$ also Null Punkte), so daß folgendes gilt: Ist $k>j$, so werden die Punkte im Sinne von $\psi$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung durchlaufen, ist $k<j$, so werden sie in der entgegengesetzten Reihenfolge durchlaufen. Dann trennen je zwei der Punktepaare $(p_{kj,l}, p_{jk,l})$ (für alle $j, k=1, \ldots, v$ mit $k>j$ und $l=1, \ldots, g_{jk}$) einander in $\dot{G}^2$ nicht, und es gibt daher in $\bar{G}^2$ paarweise miteinander punktfremde PK-Normalkanten $G^1_{jk,l}$ mit $\dot{G}^1_{jk,l}=p_{jk,l}+p_{kj,l}$. Damit ist 2.1 bewiesen.

2.2) $G^2_1, \ldots, G^2_u$ seien die PK-Flächenstücke aus $\Theta$. Dann ist $S=S(\bar{G}^2_1)+\ldots+S(\bar{G}^2_u)$ eine Summe von paarweise miteinander punktfremden PK-Normalkanten, so daß $\mathfrak{x}$ der PK-Zahlenvektor von $S$ ist. Damit ist Nr. 2 bewiesen.

Mit Nr. 1 und 3 ist Satz 3 bewiesen.

## 4. Die PK-Gleichungen

Besteht eine Mannigfaltigkeit $S^2$ aus paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken, so gilt notwendig folgende Beziehung: Ist $H^2$ ein PF-Flächenstück, und sind $N^1_1$ und $N^1_2$ die beiden in $\dot{H}^2$ liegenden PKF-Kanten, so schneidet $\dot{S}^2$ $N^1_1$ und $N^1_2$ in je gleichvielen Punkten. Diese Beziehung ist gleichbedeutend damit, daß die PK-Zahlen von $S^2$ ein homogenes lineares Gleichungssystem, die sogenannten PK-Gleichungen, erfüllen. Ist umgekehrt eine nicht-negativ-ganzzahlige Lösung der PK-Gleichungen gegeben, so entspricht dieser höchstens eine $\Theta$-Klasse von Mannigfaltigkeiten der genannten Art. Dies ist der Inhalt des nächsten zu beweisenden Hilfssatzes. Er ermöglicht es uns, zwei Sätze abzuleiten: Erstens, daß es nur eine beschränkte Anzahl von P-Klassen gibt, und zweitens, daß sich bei einem gegebenen P-Zahlenvektor stets entscheiden läßt, ob er verträglich sei.

Definition. $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ seien alle PK-Klassen, $N_1^1, \ldots, N_t^1$ alle PKF-Kanten. $f_{ij}$ sei gleich 1, wenn ein Repräsentant aus $\mathfrak{G}_i$ einen in $N_j^1$ liegenden Randpunkt besitzt ($i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, t$), anderenfalls sei $f_{ij}=0$. $g_{jk}$ ($j, k=1, \ldots, t$) sei gleich 1, wenn $j \neq k$ ist und es ein PF-Flächenstück $H^2$ gibt, so daß $N_j^1$ und $N_k^1$ in $\dot{H}^2$ liegen, anderenfalls sei $g_{jk}=0$. Dann heißt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{s} (f_{ij}-f_{ik})\, g_{jk}\, x_i = 0 \text{ für alle } j, k=1, \ldots t$$

mit einer Zuordnung von $x_i$ zu $\mathfrak{G}_i$ ($i=1, \ldots, s$) das *PK-Gleichungssystem bezüglich* $\Theta, \Gamma$.

Hilfssatz 4.

I. *$S^2$ sei eine Summe von (endlich vielen) paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken, $\mathfrak{S}$ sei die $\Theta$-Klasse von $S^2$. Dann gibt es genau eine $\mathfrak{S}$ entsprechende nichttriviale verträgliche Lösung der PK-Gleichungen.*

II. *Umgekehrt sei $\mathfrak{x}$ eine nichttriviale verträgliche Lösung der PK-Gleichungen. Dann gibt es höchstens eine $\mathfrak{x}$ entsprechende $\Theta$-Klasse $\mathfrak{S}$, deren Repräsentanten Summen von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken sind, und es läßt sich feststellen, ob es eine derartige $\Theta$-Klasse gebe.*

*Beweis.* 1) Die (nach Satz 2 endlich vielen) PK-Klassen seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$, die PKF-Kanten aus $\Theta$ seien $N_1^1, \ldots, N_t^1$. Es lassen sich Zahlen $f_{ij}$ und $g_{jk}$ ($i = 1, \ldots, s; j, k = 1, \ldots, t$) bestimmen, so daß die in der letzten Definition genannten Beziehungen gelten.

2) *Beweis von* I.

2.1) Der PK-Zahlenvektor von $S^2$ sei $\mathfrak{x}$, die $\mathfrak{G}_i$ entsprechende PK-Zahl von $S^2$ sei $x_i$ ($i=1, \ldots, s$).

2.2) Ist $S'^2$ zu $S^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$, so ist der PK-Zahlenvektor von $S'^2$ ebenfalls gleich $\mathfrak{x}$.

2.3) $\mathfrak{x}$ erfüllt die Gleichungen $\sum_{i=1}^{s} (f_{ij}-f_{ik})\, g_{jk}\, x_i = 0$ ($j, k=1, \ldots, t$).

Beweis: Für $g_{jk}=0$ ist nichts zu beweisen. Ist $g_{jk}=1$, so gilt: $N_j^1$ und $N_k^1$ liegen im Rande eines PF-Flächenstückes $H^2$. Daher bestehen $\dot{S}^2 N_j^1$ und $\dot{S}^2 N_k^1$ aus je gleichvielen Punkten, d.h. die Anzahlen $\sum_{i=1}^{s} f_{ij} x_i$ und $\sum_{i=1}^{s} f_{ik} x_i$ sind einander gleich, womit 2.3 bewiesen ist.

Aus 2.1, 2.2 und 2.3 folgt I.

3) *Beweis von* II. Die $\mathfrak{G}_i$ entsprechende Komponente von $\mathfrak{x}$ sei $x_i$. Dann gilt:

3.1) Es läßt sich feststellen, ob es eine Summe $S^2$ von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken gebe, so daß $\mathfrak{x}$ der PK-Zahlenvektor von $S^2$ ist.

Beweis:

3.1.1) Es gibt eine Summe $A^1$ von paarweise miteinander punktfremden PK-Normalkanten, so daß $\mathfrak{x}$ der PK-Zahlenvektor von $A^1$ ist.

3.1.2) Ist $H^2$ ein PF-Flächenstück, so gilt: Die in $\dot{H}^2$ liegenden PKF-Kanten seien $N_j^1$ und $N_k^1$. In $N_j^1$ und $N_k^1$ liegen je gleichviele Randpunkte von $A^1$, da wegen $g_{jk}=1$ die Anzahlen

$$\sum_{i=1}^{s} f_{ij} x_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{s} f_{ik} x_i$$

einander gleich sind. Es gibt also in $\bar{H}^2$ eine Summe $B(H^2)$ von paarweise miteinander punktfremden PF-Normalkanten, so daß $\dot{B}(H^2)=\dot{A}^1 N_j^1+\dot{A}^1 N_k^1$ ist.

3.1.3) $P_1^3, \ldots, P_u^3$ seien die P-Raumstücke, $J_1^2, \ldots, J_v^2$ die P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke und $H_1^2, \ldots, H_w^2$ die PF-Flächenstücke aus $\Theta$. Dann ist $A^1+B(H_1^2)+\ldots+B(H_w^2)$ eine 1-dim t-Mannigfaltigkeit $K^1$ in der Mannigfaltigkeit $Q^2=(\dot{P}_1^3+\ldots+\dot{P}_u^3)-(J_1^2+\ldots+J_v^2)$, und $\mathfrak{x}$ ist der PK-Zahlenvektor von $K^1$. Die z-Komponenten von $K^1$ seien $K_1^1, \ldots, K_a^1$. Dann gilt:

$\alpha$) Gilt für alle $j=1, \ldots, t$ und $l=1, \ldots, a$, daß $N_j^1 K_l^1$ entweder leer oder ein einzelner Punkt sei, so gibt es eine Mannigfaltigkeit $S^2$ mit den geforderten Eigenschaften.

Beweis: Ist $J^2$ ein P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück, so gilt: Die z-Komponenten von $K^1$, die berandet sind und deren Randpunkte in $\dot{J}^2$ liegen, seien $K_{m_1}^1, \ldots, K_{m_b}^1$. Da die Randpunktpaare je zweier Kanten $K_{m_g}^1, K_{m_h}^1$ $(g, h=1, \ldots, b)$ einander in $\dot{J}^2$ nicht trennen, gibt es in $\bar{J}^2$ $b$ paarweise miteinander punktfremde P$\dot{\text{M}}$-Normalkanten $L_1^1, \ldots, L_b^1$, so daß $\dot{L}_g^1=\dot{K}_{m_g}^1$ ist. Die Summe $L_1^1+\ldots+L_b^1$ wird mit $S(J^2)$ bezeichnet.

$S^1=K^1+S(J_1^2)+\ldots+S(J_v^2)$ ist eine Mannigfaltigkeit, deren z-Komponenten $a$ 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_a^1$ sind, die in den Rändern der P-Raumstücke liegen. In den abgeschlossenen Hüllen der P-Raumstücke gibt es daher (nach Hilfssatz 1) $a$ paarweise miteinander punktfremde P-Normalflächenstücke $P_1^2, \ldots, P_a^2$, so daß $\dot{P}_1^2 = S_1^1$ ist. Der PK-Zahlenvektor von $S^2 = P_1^2 + \ldots + P_a^2$ ist gleich $\mathfrak{x}$. Damit ist $\alpha$ bewiesen.

$\beta$) Gibt es eine PKF-Kante $N_j^1$ und eine Komponente $K_l^1$, so daß $N_j^1 K_l^1$ mehr als einen Punkt enthält, so gibt es keine Mannigfaltigkeit $S^2$ mit den geforderten Eigenschaften.

Beweis: $\beta$.1) $K'^1$ sei eine beliebige 1-dim t-Mannigfaltigkeit in $Q^2$ mit den $K^1$ entsprechenden Eigenschaften:

a. Ist $G^2$ ein PK-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $K'^1\bar{G}^2$ eine PK-Normalkante.

b. Ist $H^2$ ein PF-Flächenstück, so ist jede z-Komponente von $K'^1\bar{H}^2$ eine PF-Normalkante.

c. Ist $R^2$ ein PR-Flächenstück, so ist $K'^1\bar{R}^2$ leer.

d. Der PK-Zahlenvektor von $K'^1$ ist gleich $\mathfrak{x}$.

Dann besitzt $K'^1$ eine zu $K_l^1$ bezüglich $\Theta$ ähnliche z-Komponente $K_l'^1$, so daß $N_j^1 K_l'^1$ mehr als einen Punkt enthält.

Beweis: Ist $G^2$ ein PK-Flächenstück, so sind $K^1\bar{G}^2$ und $K'^1\bar{G}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$, wie aus Hilfssatz 3,II folgt. — Ist $H^2$ ein PF-Flächenstück, so bestehen $K^1\bar{H}^2$ und $K'^1\bar{H}^2$ aus je gleichvielen PF-Normalkanten und sind einander daher bezüglich $\Theta$ ähnlich. Daraus folgt $\beta$.1.

$\beta$.2) Aus der Annahme, $S^2$ sei eine Summe von P-Normalflächenstücken und besitze den PK-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$, folgt: $\dot{S}^2Q^2$ ist eine 1-dim t-Mannigfaltigkeit in $Q^2$ mit den unter $\beta$.1 für $K'^1$ genannten Eigenschaften $a, b, c$ und $d$. Also gibt es eine z-Komponente von $\dot{S}^2Q^2$, die mehr als einen Punkt aus $N_j^1$ enthält. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, daß die z-Komponenten von $S^2$ P-Normalflächenstücke seien. Also ist die Annahme falsch und $\beta$ bewiesen.

Mit 3.1.1, 3.1.2 und 3.1.3 $\alpha$ und $\beta$ ist 3.1 bewiesen.

3.2) Sind $S^2$ und $S'^2$ zwei Summen von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken, so daß $\mathfrak{x}$ der PK-Zahlenvektor von $S^2$ und von $S'^2$ ist, so sind $S^2$ und $S'^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis:

3.2.1) Ist $G^2$ ein PK-Flächenstück, so sind $\dot{S}^2\bar{G}^2$ und $\dot{S}'^2\bar{G}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$ (wie aus Hilfssatz 3, II folgt).

3.2.2) Ist $H^2$ ein PF-Flächenstück, so sind $\dot{S}^2\bar{H}^2$ und $\dot{S}'^2\bar{H}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$ (da sie aus je gleichvielen PF-Normalkanten bestehen).

3.2.3) Ist $J^2$ ein P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück, so sind $\dot{S}^2\bar{J}^2$ und $\dot{S}'^2\bar{J}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis: $N_1^1, \ldots, N_u^1$ seien die in $\dot{J}^2$ liegenden $P\dot{M}$-Kanten. Das $J^2$ im Rand enthaltende P-Raumstück sei $P^3$. Da $\dot{S}^2(\dot{P}^3 - J^2)$ und $\dot{S}'^2(\dot{P}^3 - J^2)$ einander nach 3.2.1 und 3.2.2 bezüglich $\Theta$ ähnlich sind, gibt es (nach Hilfssatz 3, II) eine eineindeutige Zuordnung zwischen den z-Komponenten $K_1^1, \ldots, K_v^1$ von $\dot{S}^2(\dot{P}^3 - J^2)$ und den z-Komponenten $K_1'^1, \ldots, K_v'^1$ von $\dot{S}'^2(\dot{P}^3 - J^2)$, so daß (bei geeigneter Numerierung) $K_l'^1$, und $K_l^1$ einander bezüglich $\Theta$ ähnlich sind $(l = 1, \ldots, v)$. Bei geeigneter Numerierung sind $K_1^1, \ldots, K_w^1$ und entsprechend $K_1'^1, \ldots, K_w'^1$ die berandeten unter den Komponenten $K_l^1$ und $K_l'^1$. Die Randpunkte von $K_m^1$ $(m = 1, \ldots, w)$ seien $p_m$ und $q_m$, die von $K_m'^1$ $p_m'$ und $q_m'$. Dann liegen (bei geeigneter Bezeichnung) $p_m$ und $p_m'$ in einer und derselben Kante $N_{i_m}^1$, $q_m$ und $q_m'$ in einer und derselben Kante $N_{j_m}^1$ $(i_m, j_m = 1, \ldots, u)$, wobei $i_m \neq j_m$ ist. $\dot{S}^2 \bar{J}^2$ besteht damit aus $w$ paarweise miteinander punktfremden $P\dot{M}$-Normalkanten $L_1^1, \ldots, L_w^1$, so daß $p_m$ und $q_m$ die Randpunkte von $L_m^1$ sind; entsprechend besteht $\dot{S}'^2 \bar{J}^2$ aus $w$ $P\dot{M}$-Normalkanten $L_1'^1, \ldots, L_w'^1$, so daß $p_m'$ und $q_m'$ die Randpunkte von $L_m'^1$ sind. Also bilden die Abbildungen $\mathring{L}_m^1 \leftrightarrow \mathring{L}_m'^1$, $p_m \leftrightarrow q_m'$ und $q_m \leftrightarrow q_m'$ (für alle $m = 1, \ldots, w$) zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Theta(\dot{S}^2 \bar{J}^2)$ und $\Theta(\dot{S}'^2 \bar{J}^2)$ aufeinander bezüglich $\Theta$. Daraus folgt 3.2.3 nach Hilfssatz 3, I.

3.2.4) Ist $P^3$ ein P-Raumstück, so sind $S^2 \bar{P}^3$ und $S'^2 \bar{P}^3$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis: Es gibt nach 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 eine eineindeutige Zuordnung zwischen den z-Komponenten $Z_1^1, \ldots, Z_u^1$ von $\dot{S}^2 \dot{P}^3$ und den z-Komponenten $Z_1'^1, \ldots, Z_u'^1$ von $\dot{S}'^2 \dot{P}^3$, so daß (bei geeigneter Numerierung) $Z_l^1$ und $Z_l'^1$ einander bezüglich $\Theta$ ähnlich sind $(l = 1, \ldots, u)$. Dabei sei $\alpha_l$ die Ähnlichkeitsabbildung von $\Theta(Z_l^1)$ und $\Theta(Z_l'^1)$ aufeinander bezüglich $\Theta$. $Z_l^1$ berandet eine z-Komponente $Q_l^2$ von $S^2 \bar{P}^3$, $Z_l'^1$ eine z-Komponente $Q_l'^2$ von $S'^2 \bar{P}^3$. Dann bilden die Abbildungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_u$ und die Abbildungen $\mathring{Q}_l^2 \leftrightarrow \mathring{Q}_l'^2$ zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Theta(S^2 \bar{P}^3)$ und $\Theta(S'^2 \bar{P}^3)$ aufeinander bezüglich $\Theta$. Daraus folgt 3.2.4 nach Hilfssatz 3, I.

3.2.5) Die P-Raumstücke aus $\Theta$ seien $P_1^3, \ldots, P_z^3$. Aus 3.2.4 folgt, daß $S^2$ und $S'^2$ einander bezüglich $\Theta(\bar{P}_1^3 + \ldots + \bar{P}_z^3)$, also auch bezüglich $\Theta$, ähnlich sind. Damit ist 3.2 bewiesen.

Aus 3.1 und 3.2 folgt II.

Satz 4. *Es gibt nur endlich viele P-Klassen, und zwar gilt:*

I. *Ist* $\mathfrak{P}$ *eine P-Klasse, so gibt es genau eine* $\mathfrak{P}$ *entsprechende einfache verträgliche Lösung der PK-Gleichungen.*

II. *Ist umgekehrt* $\mathfrak{x}$ *eine der endlich vielen einfachen verträglichen Lösungen der PK-*

*Gleichungen, so gibt es nach Hilfssatz* 4, II *höchstens eine* $\mathfrak{x}$ *entsprechende P-Klasse, und es läßt sich feststellen, ob dies der Fall sei.*

*Beweis.* Nach Hilfssatz 4, I gibt es genau eine $\mathfrak{P}$ entsprechende verträgliche Lösung der PK-Gleichungen. Dabei ist $\mathfrak{x}$ einfach, da ein Repräsentant aus $\mathfrak{P}$ höchstens einen Repräsentanten aus einer und derselben PK-Klasse im Rand enthalten kann. Damit ist I bewiesen. II folgt unmittelbar aus Hilfssatz 4,II.

SATZ 5. *Es läßt sich entscheiden, ob ein gegebener P-Zahlenvektor* $\mathfrak{x}$ *verträglich sei.*

*Beweis.* 1) Die (nach Satz 4 endlich vielen) P-Klassen seien $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, die (nach Satz 2 endlich vielen) PK-Klassen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$. Die $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{x}$ seien $x_1, \ldots, x_s$. Es lassen sich Zahlen $a_{ij}$ (für alle $i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, t$) bestimmen, so daß $a_{ij} = 1$ ist, wenn die Repräsentanten aus $\mathfrak{P}_i$ Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$ im Rande enthalten, und gleich Null, wenn dies nicht der Fall ist. Dann bilden die Zahlen $y_1 = \sum_{i=1}^{s} a_{i1} x_i, \ldots, y_t = \sum_{i=1}^{s} a_{it} x_i$ mit einer Zuordnung zu $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$ einen PK-Zahlenvektor $\mathfrak{G}$.

2) Ist $\mathfrak{y}$ keine verträgliche Lösung der PK-Gleichungen (worüber sich nach Satz 3 entscheiden läßt), so ist nach Hilfssatz 4,I auch $\mathfrak{x}$ nicht verträglich.

3) Ist $\mathfrak{y}$ eine verträgliche Lösung der PK-Gleichungen, so läßt sich nach Hilfssatz 4,II feststellen, ob es eine $\mathfrak{y}$ entsprechende $\Theta$-Klasse $\mathfrak{S}$ gebe, deren Repräsentanten P-Normalflächenstücke sind. Dabei gilt:

3.1) Gibt es keine $\Theta$-Klasse $\mathfrak{S}$ mit den genannten Eigenschaften, so ist $\mathfrak{x}$ nicht verträglich.

3.2) Gibt es eine $\Theta$-Klasse $\mathfrak{S}$ mit den genannten Eigenschaften, und ist $S^2$ ein Repräsentant aus $\mathfrak{S}$, so gilt: $\mathfrak{x}$ ist dann und nur dann verträglich, wenn der P-Zahlenvektor von $S^2$ gleich $\mathfrak{x}$ ist.

Beweis: Ist $\mathfrak{x}$ der P-Zahlenvektor von $S^2$, so ist $\mathfrak{x}$ per Definition verträglich. Ist der P-Zahlenvektor von $S^2$ von $\mathfrak{x}$ verschieden, so folgt aus der Annahme, es gäbe eine Summe $S'^2$ von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$: Der PK-Zahlenvektor von $S'^2$ ist gleich $\mathfrak{y}$, also ist nach Hilfssatz 4,II $S'^2$ zu $S^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$. Also ist $\mathfrak{x}$ auch der P-Zahlenvektor von $S^2$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch.

Insgesamt ist damit 3.2 bewiesen.

Mit Nr. 2, 3.1 und 3.2 ist Satz 5 bewiesen.

## 5. Die P-Gleichungen

Ist $M^2$ eine Normalfläche, so gilt folgendes: Ist $K^3$ ein K-Raumstück, und sind $G_1^2$ und $G_2^2$ die beiden in $\dot{K}^3$ liegenden PK-Flächenstücke, so enthält jede z-Komponente von $M^2 \bar{K}^3$ genau eine z-Komponente von $M^2 \bar{G}_1^2$ und genau eine z-Komponente von $M^2 \bar{G}_2^2$ im Rande. Diese Beziehung läßt sich auch so ausdrücken, daß die P-Zahlen von $M^2$ ein homogenes lineares Gleichungssystem erfüllen, das wir analog zu den PK-Gleichungen als das System der P-Gleichungen bezeichnen. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jeder verträglichen Lösung der P-Gleichungen genau eine $\Theta$-Klasse von Normalflächen entspricht. Diese eineindeutige Zuordnung zwischen $\Theta$-Klassen von Normalflächen und verträglichen Lösungen der P-Gleichungen stellt das hauptsächliche Ergebnis dieses Kapitels dar.

Wir stellen nun die P-Gleichungen auf, beweisen dann einen Hilfssatz über 1-dim Mannigfaltigkeiten in Kreisringen und anschließend den angekündigten Zuordnungssatz.

DEFINITION. $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ seien alle P-Klassen, $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$ alle PK-Klassen. $\Pi_1, \ldots, \Pi_t$ seien die $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$ entsprechenden PK-Kantenpaare. Dann heißt das homogene lineare Gleichungssystem

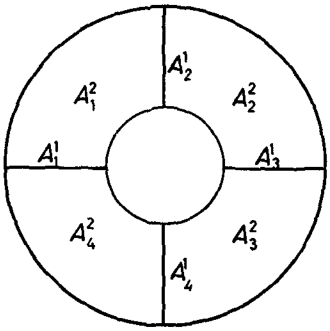
$$\sum_{i=1}^{s} (a_{ij} - a_{ik})\, b_{jk}\, x_i = 0 \quad \text{für alle} \quad j,\, k = 1, \ldots, t$$

mit einer Zuordnung von $x_i$ zu $\mathfrak{P}_i$ (für alle $i = 1, \ldots, s$) das *P-Gleichungssystem bezüglich* $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt: $a_{ij}$ ist gleich 1, wenn die Repräsentanten aus $\mathfrak{P}_i$ je einen Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$ im Rande enthalten, anderenfalls ist $a_{ij} = 0$. $b_{jk}$ ist gleich 1, wenn $j \neq k$ ist, und wenn es im Rande eines K-Raumstückes ein KF-Flächenstück $H_1^2$ und ein KF- oder KM-Flächenstück $H_2^2$ gibt, so daß in $\dot{H}_1^2$ und in $\dot{H}_2^2$ genau je eine Kante aus $\Pi_j$ und genau je eine Kante aus $\Pi_k$ liegen, anderenfalls ist $b_{jk} = 0$.

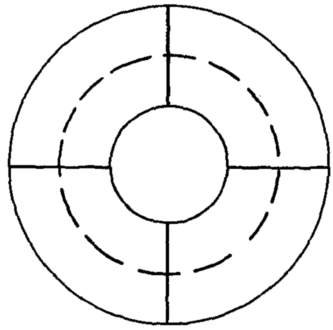
HILFSSATZ 5. *Ein offener Kreisring $R^2$ sei randtreu zerlegt in offene Flächenstücke $A_1^2, \ldots, A_s^2$ $(s > 2)$ und offene Kanten $A_1^1, \ldots, A_s^1$, so daß $\dot{A}_i^2 R^2 = A_i^1 + A_{i+1}^1$ ist $(i = 1, \ldots, s$, wobei $A_{s+1}^1 = A_1^1$ zu setzen ist. Siehe Fig. 8 a). In $\bar{R}^2$ liege eine 1-dim Mannigfaltigkeit $M^1$ mit folgenden Eigenschaften: $M^1 \bar{A}_i^2$ ist entweder leer, oder jede z-Komponente von $M^1 \bar{A}_i^2$ ist eine in $\bar{A}_i^2$ transversal liegende Kante, deren beide Randpunkte nicht in einer und derselben Kante $A_i^1$ oder $A_{i+1}^1$ liegen. $M^1$ sei zusammenhängend. Dann folgt:*

I. *Ist $M^1$ eine 1-dim Sphäre, so bestehen $M^1 A_i^2$ und $M^1 A_i^1$ aus genau je einer z-Komponente (siehe Fig. 8 b).*

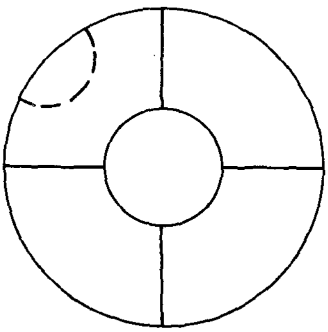
II. *Ist $M^1$ eine abgeschlossene Kante, deren beide Randpunkte in einer und derselben z-Komponente von $\dot{R}^2$ liegen, so gilt bei geeigneter Numerierung der $A_i^1$ und $A_i^2$: $M^1$ läßt sich zerlegen in offene Kanten $K_1^1, \ldots, K_t^1$ mit $t$ zwischen 1 und $s+1$ und Punkte*



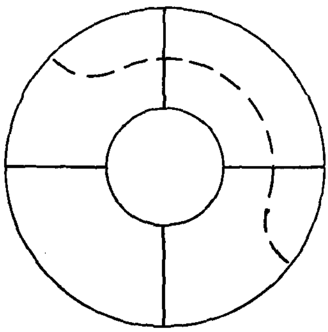

a. $A_i^2$ und $A_i^1$ in $\bar{R}^2$.



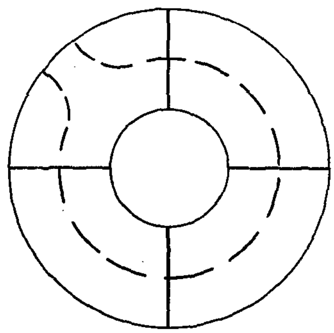
b. $M^1$ als 1-dim Sphäre.



c.1. $t = 1$.



c.2. $t = 3$.



c.3. $t = 5 = s + 1$.

c. $M^1$ als abgeschlossene Kante.

Fig. 8. $\bar{R}^2$ für $s = 4$, ($M^1$ gestrichelt eingezeichnet).

$p_1, \ldots, p_{t+1}$, *so daß* $p_j$ *und* $p_{j+1}$ *die Randpunkte von* $K_j^1$ *sind* ($j = 1, \ldots, t$) *und so daß folgendes gilt* (*siehe Fig.* 8 c): $K_j^1$ *ist eine z-Komponente von* $M^1 A_j^2$, *wobei* $A_{s+1}^2 = A_1^2$ *zu setzen ist;* $p_k$ ($k = 2, \ldots, t$) *ist gleich* $M^1 A_k^1$; $p_1$ *und* $p_{t+1}$ *liegen in* $\dot{A}_1^2 \dot{R}^2$ *bzw.* $\dot{A}_t^2 \dot{R}^2$.

*Beweis.* 1) Die beiden $R^2$ berandenden 1-dim Sphären seien $S^1$ und $S^{*1}$. Für den Fall, daß $M^1$ berandet ist, sei die Bezeichnung so gewählt, daß die Randpunkte von $M^1$ in $S^1$ liegen. $\Delta$ sei die Zerlegung von $\bar{R}^2$ in die Elemente $A_i^2$, $A_i^1$, $(\dot{A}_i^2 S^1)^\circ$, $(\dot{A}_i^2 S^{*1})^\circ$, $(\dot{A}_i^1 S^1)$ und $(\dot{A}_i^1 S^{*1})$ ($i = 1, \ldots, s$).

Ist $M^1$ berandet, so besteht $\Delta(M^1)$ aus offenen Kanten $K_1^1, \ldots, K_t^1$ ($t > 0$) und Punkten $p_1, \ldots, p_{t+1}$, so daß $p_j$ und $p_{j+1}$ die Randpunkte von $K_j^1$ sind ($j = 1, \ldots, t$).

Ist $M^1$ nicht berandet, so besteht $\Delta(M^1)$ aus offenen Kanten $K_1^1, \ldots, K_t^1$ und Punkten $p_1, \ldots, p_t$, so daß $p_j$ und $p_{j+1}$ die Randpunkte von $K_j^1$ sind, wenn $p_{t+1} = p_1$ gesetzt wird.

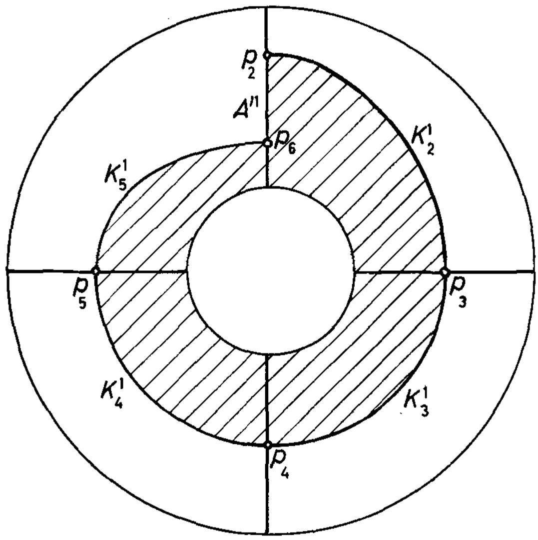



Fig. 9. $R'^2$ (schraffiert) in $\bar{R}^2$ für $s=4$.

2) Die Numerierung der Elemente $A_i^2$, $A_i^1$ läßt sich so wählen, daß $K_1^1$ in $A_1^2$ liegt und, falls $t>1$ ist, $p_2$ in $A_2^1$ liegt. Dann gilt: $K_j^1$ liegt in $A_{k(j)}^2$, wenn $k(j)=j$ modulo $s$ und $1 \leqslant k(j) \leqslant s$ ist; entsprechend liegt $p_j$ in $A_{k(j)}^1$.

3) $M^1 A_2^1$ besteht aus höchstens einem Punkt.

Beweis: Aus der Annahme, $M^1 A_2^1$ bestünde aus mehreren Punkten, folgt: In $A_2^1$ liegen die Punkte $p_2$ und $p_{s+2}$. $p_2$ und $p_{s+2}$ beranden in $A_2^1$ eine offene Kante $A'^1$ (siehe Fig. 9). Die Mannigfaltigkeit $S'^1 = K_2^1 + \ldots + K_{s+1}^1 + A'^1$ ist eine 1-dim Sphäre, so daß $S'^1 + S^{*1}$ in $R^2$ einen offenen Kreisring $R'^2$ berandet (siehe Fig. 9). Da nun $K_{s+2}^1$ in $R'^2$ liegt, $K_t^1$ aber in $R^2 - \bar{R}'^2$, liegen nicht alle Kanten $K_{s+2}^1, K_{s+3}^1, \ldots, K_t^1$ in $R'^2$, sondern es gibt eine Zahl $l$ zwischen $s+3$ und $t$, so daß $K_{s+2}^1, \ldots, K_{l-1}^1$ in $R'^2$ liegen und $K_l^1$ in $R^2 - \bar{R}'^2$ liegt. Damit liegt $p_l$ in $A'^1$, also $K_{l-1}^1$ in $A_2^2$. Daraus folgt, daß $p_{l-1}$ in $A_3^1$ liegt und $p_l$ in $A_2^1$. Dies steht im Widerspruch zu Nr. 2. Also ist die Annahme falsch, womit Nr. 3 bewiesen ist.

4) Ist $M^1$ eine 1-dim Sphäre, so ist $t=0$ modulo $s$ (da $K_t^1$ in $A_s^2$ liegt) und nach Nr. 3 $t<s+2$. Also ist $t=s$. Daraus und aus Nr. 2 folgt Teil I der Behauptung.

Ist $M^1$ berandet, so ist ebenfalls $t<s+2$. Daraus und aus Nr. 2 folgt Teil II. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Hauptsatz 2 (*Zuordnungssatz für Normalflächenklassen*).

I. *Ist $M^2$ eine Normalfläche, und ist $\mathfrak{M}$ die $\Theta$-Klasse von $M^2$, so gibt es genau einen $\mathfrak{M}$ entsprechenden P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$. Dabei ist $\mathfrak{x}$ eine nichttriviale verträgliche Lösung der P-Gleichungen.*

II. *Ist umgekehrt $\mathfrak{x}$ eine beliebige nichttriviale verträgliche Lösung der P-Gleichungen, so gibt es genau eine $\mathfrak{x}$ entsprechende $\Theta$-Klasse $\mathfrak{M}$, deren Repräsentanten Normalflächen sind.*

*Beweis.* 1) Die (nach Satz 4 endlich vielen) P-Klassen seien $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, die (nach Satz 2 endlich vielen) PK-Klassen seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$ und die $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_t$ nach Satz 2 eineindeutig entsprechenden PK-Kantenpaare $\Pi_1, \ldots, \Pi_t$. Dann lassen sich Zahlen $a_{ij}$ und $b_{jk}$ (für alle $i=1, \ldots, s$ und $j, k=1, \ldots, t$) bestimmen, so daß die in der letzten Definition genannten Beziehungen gelten.

2) *Beweis von Teil I.*

2.1) Der P-Zahlenvektor von $M^2$ sei $\mathfrak{x}$, die $\mathfrak{P}_i$ entsprechende P-Zahl von $M^2$ sei $x_i$ $(i=1, \ldots, s)$.

2.2) Ist $M'^2$ zu $M^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$, so ist der P-Zahlenvektor von $M'^2$ ebenfalls gleich $\mathfrak{x}$.

2.3) $\mathfrak{x}$ erfüllt die Gleichungen $\sum\limits_{i=1}^{s} (a_{ij} - a_{ik})\, b_{jk} x_i = 0$.

Beweis: Für den Fall $b_{jk}=0$ ist nichts zu beweisen. Ist $b_{jk}=1$, so gilt: Es gibt ein K-Raumstück $K^3$ und zwei in $\dot K^3$ liegende Flächenstücke $H_1^2$ und $H_2^2$ aus $\Theta$, so daß $\Pi_j$ aus einer in $\dot H_1^2$ liegenden PKF- bzw. PK$\dot{\mathrm{M}}$-Kante $N_1^1$ und einer in $\dot H_2^2$ liegenden PKF- bzw. PK$\dot{\mathrm{M}}$-Kante $N_2^1$ besteht, und so daß $\Pi_k$ entsprechend aus einer in $\dot H_1^2$ liegenden Kante $N_1^{*1}$ und einer in $\dot H_2^2$ liegenden Kante $N_2^{*1}$ besteht. Es gibt daher eine eineindeutige Zuordnung zwischen den in $M^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$ und den in $M^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_k$, so daß einander zugeordnete Repräsentanten im Rande eines und desselben K-Normalflächenstückes aus $M^2 \bar K^3$ liegen. Also sind die Anzahlen

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\, x_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{s} a_{ik}\, x_i$$

dieser Repräsentanten einander gleich, womit 2.3 bewiesen ist.

Aus 2.1, 2.2 und 2.3 folgt I.

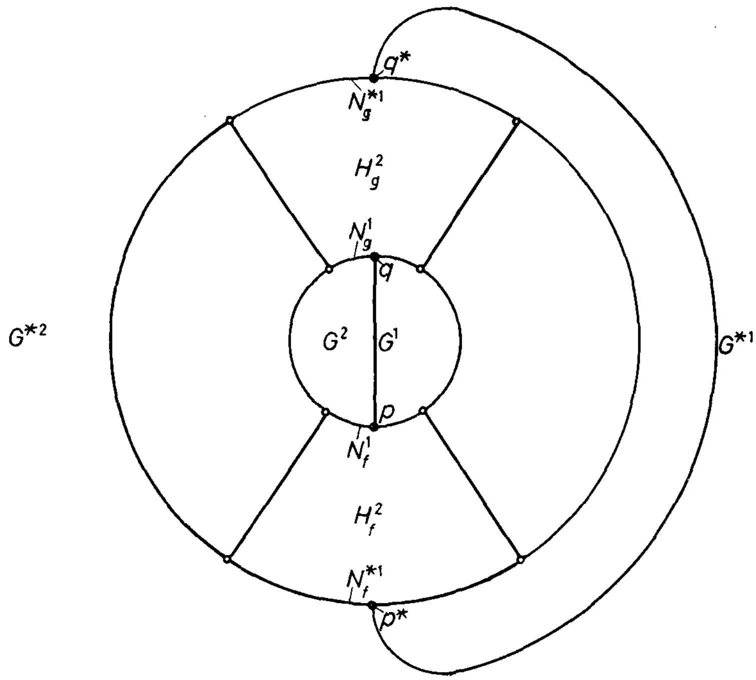



Fig. 10. Ebenes Bild von $\dot{K}^3$ mit den Kanten $G^1$ und $G^{*1}$. (Das unendliche Gebiet stellt $G^{*2}$ dar.)

3) *Beweis von Teil* II. Die $\mathfrak{P}_i$ entsprechende Komponente von $\mathfrak{x}$ sei $x_i$. Dann gilt:

3.1) Es gibt eine Normalfläche $M^2$, deren P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ ist.

Beweis: 3.1.1) Es gibt eine Summe $S^2$ von paarweise miteinander punktfremden P-Normalflächenstücken, deren P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ ist. Ist $Q^2$ ein PK- oder PF-Flächenstück, so wird $S^2\bar{Q}^2$ mit $M(Q^2)$ bezeichnet.

3.1.2) Ist $K^3$ ein K-Raumstück, so gilt: $G^2$ und $G^{*2}$ seien die in $\dot{K}^3$ liegenden PK-Flächenstücke, $H_1^2, \ldots, H_u^2$ die in $\dot{K}^3$ liegenden KF- und K$\dot{M}$-Flächenstücke. $N_1^1, \ldots, N_u^1$ und $N_1^{*1}, \ldots, N_u^{*1}$ seien die in $\dot{G}^2$ bzw. in $\dot{G}^{*2}$ liegenden PKF- bzw. PK$\dot{M}$-Kanten aus $\dot{H}_1^2, \ldots, \dot{H}_u^2$. Dann gilt (vgl. Fig. 10):

$\alpha$) $\omega$ sei eine Hilfsorientierung in $\Theta$. Es gibt eine eineindeutige Zuordnung $\zeta$ zwischen den z-Komponenten von $M(G^2)$ und den z-Komponenten von $M(G^{*2})$, so daß folgendes gilt: Ist $G^1$ eine z-Komponente von $M(G^2)$ mit den Randpunkten $p$ und $q$ (siehe Fig. 10), so daß $p$ der bezüglich $\omega$ $l$-te Punkt von $S^2$ in $N_f^1$ und $q$ der $m$-te Punkt von $S^2$ in $N_g^1$ ist ($f, g = 1, \ldots, u$), so ist $G^1$ durch $\zeta$ eine Komponente $G^{*1}$ mit den Randpunkten $p^*$ und $q^*$ zugeordnet, so daß $p^*$ der $l$-te Punkt von $S^2$ in $N_f^{*2}$ ist und $q^*$ der $m$-te Punkt von $S^2$ in $N_g^{*1}$.

Beweis: $M(G^2)$ und $M(G^{*2})$ sei nicht leer.

$\alpha$.1) Es gibt eine semilineare Abbildung $\lambda$ von $\bar{G}^2$ und $\bar{G}^{*2}$ aufeinander, so daß $N_z^1$ auf $N_z^{*1}$ abgebildet wird (für alle $z = 1, \ldots, u$) und der Anfangspunkt von $N_z^1$ bezüglich $\omega$ auf den Anfangspunkt von $N_z^{*1}$. Durch $\lambda$ wird $M(G^2)$ auf eine Mannigfaltigkeit $M'^1$ in $\bar{G}^{*2}$ abgebildet, so daß folgendes gilt: Ist $G^1$ eine z-Komponente von $M(G^2)$ mit den Randpunkten $p$ und $q$, so daß $p$ der $l$-te Punkt von $S^2$ in $N_f^1$ ist und $q$ der $m$-te Punkt von $S^2$ in $N_g^1$, so wird $G^1$ durch $\lambda$ auf eine z-Komponente $G'^1$ von $M'^1$ mit den Randpunkten $p'$ und $q'$ abgebildet, so daß $p'$ der $l$-te Punkt von $M'^1$ in $N_f^{*1}$ ist und $q'$ der $m$-te Punkt von $M'^1$ in $N_g^{*1}$.

$\alpha$.2) $M'^1$ und $M(G^{*2})$ sind einander ähnlich bezüglich $\Theta$, es gibt also eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta$ bezüglich $\Theta$ zwischen der durch $M'^1$ und der durch $M(G^{*2})$ bewirkten Unterteilung von $\Theta(\bar{G}^{*2})$, durch die $\Theta(M'^1)$ und $\Theta(M(G^{*2}))$ aufeinander abgebildet werden.

Beweis: $\mathfrak{G}_j$ sei eine beliebige PK-Klasse, deren Repräsentanten in $\bar{G}^{*2}$ liegen. $\Pi_j$ besteht dann aus zwei Kanten $N_v^{*1}$ und $N_w^{*1}$ $(v, w = 1, \ldots, u)$. Entsprechend bilden die Kanten $N_v^1$ und $N_w^1$ ein Paar $\Pi_k$. Dann liegen in $\dot{S}^2$ je gleich viele Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$ und $\mathfrak{G}_k$, da wegen $b_{jk} = 1$

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{s} a_{ik} x_i$$

ist. Durch $\lambda$ werden die in $\dot{S}^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_k$ (und nur diese) auf die in $M'^1$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$ abgebildet. Also liegen in $M(G^{*2})$ und in $M'^2$ je gleichviele Repräsentanten aus $\mathfrak{G}_j$. Daraus folgt $\alpha$.2 nach Hilfssatz 3, II.

$\alpha$.3) Aus $\lambda$ und $\eta$ ergibt sich eine Zuordnung $\zeta$ mit den geforderten Eigenschaften. Damit ist $\alpha$ bewiesen.

$\beta$) $S^2 N_f^1$ und $S^2 N_f^{*1}$ $(f = 1, \ldots, u)$ bestehen aus je gleichvielen Punkten $p_{f1}, \ldots, p_{fv_f}$ bzw. $p_{f1}^*, \ldots, p_{fv_f}^*$, wobei diese in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N_f^1$ bzw. $N_f^{*1}$ liegen mögen. In $\bar{H}_f^2$ gibt es $v_f$ paarweise miteinander punktfremde KF- bzw. K$\dot{\text{M}}$-Normalkanten $E_{f1}^1, \ldots, E_{fv_f}^1$, so daß $p_{fh}$ und $p_{fh}^*$ $(h = 1, \ldots, v_f)$ die Randpunkte von $E_{fh}^1$ sind, da die Punktepaare $(p_{f1}, p_{f1}^*), \ldots, (p_{fv_f}, p_{fv_f}^*)$ einander in $\dot{H}_f^2$ nicht trennen. $E_{f1}^1 + \ldots + E_{fv_f}^1$ wird mit $M(H_f^2)$ bezeichnet.

$\gamma$) $M(G^2) + M(G^{*2}) + \sum_{f=1}^{u} M(H_f^2)$ ist entweder leer oder besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären, deren jede genau eine PK-Normalkante aus $\bar{G}^2$ und genau eine aus $\bar{G}^{*2}$ enthält. In $\bar{K}^3$ gibt es daher (nach Hilfssatz 1) eine Menge

$M(K^3)$, die entweder leer ist oder aus paarweise miteinander punktfremden K-Normalflächenstücken besteht, so daß $\dot{M}(K^3) = M(G^2) + M(G^{*2}) + \sum_{f=1}^{u} M(H_f^2)$ ist.

3.1.3) Ist $F^3$ ein F-Raumstück, so gilt: $H_1^2, \ldots, H_w^2$ seien die in $\dot{F}^3$ liegenden PF- und KF-Flächenstücke, $N_1^1, \ldots, N_w^1$ die in $\dot{F}^3$ liegenden PKF-Kanten, so daß $N_m^1$ und $N_{m+1}^1$ in $\dot{H}_m^2$ liegen $(m=1, \ldots, w)$, wobei $N_{w+1}^1 = N_1^1$ zu setzen ist. $M(H_1^2) + \ldots + M(H_w^2)$ ist entweder leer oder besteht aus paarweise miteinander punktfremden 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_c^1$, so daß $S_l^1 H_m^2$ (nach Hilfssatz 5, I) eine Normalkante ist. In $\bar{F}^3$ gibt es daher (nach Hilfssatz 1) $c$ paarweise miteinander punktfremde F-Normalflächenstücke $F_1^2, \ldots, F_c^2$, so daß $\dot{F}_l^2 = S_l^1$ $(l=1, \ldots, c)$ ist. $F_1^2 + \ldots + F_c^2$ wird mit $M(F^3)$ bezeichnet.

3.1.4) $K_1^3, \ldots, K_a^3$ seien alle K-Raumstücke, $F_1^3, \ldots, F_b^3$ alle F-Raumstücke. Dann ist $S^2 + M(K_1^3) + \ldots + M(K_a^3) + M(F_1^3) + \ldots + M(F_b^3)$ eine Normalfläche $M^2$ mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$. Damit ist 3.1 bewiesen.

3.2) Ist $M'^2$ eine Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$, so sind $M'^2$ und $M^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$ (wie aus Hilfssatz 3, II folgt).

Beweis: 3.2.1) ist $P^3$ ein P-Raumstück, so sind $M^2 \bar{P}^3$ und $M'^2 \bar{P}^3$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

3.2.2) Ist $K^3$ ein K-Raumstück, so sind $M^2 \bar{K}^3$ und $M'^2 \bar{K}^3$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis: $G^2$ sei ein in $\dot{K}^3$ liegendes PK-Flächenstück. Dann sind $M^2 \bar{G}^2$ und $M'^2 \bar{G}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$, also sind auch $M^2 \bar{K}^3$ und $M'^2 \bar{K}^3$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

3.2.3) Ist $F^3$ ein F-Raumstück, so sind $M^2 \bar{F}^3$ und $M'^2 \bar{F}^3$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis: $J^2$ sei ein in $\dot{F}^3$ liegendes PF-Flächenstück. $P^3$ sei das $J^2$ im Rande enthaltende P-Raumstück. $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_w}$ seien diejenigen P-Klassen, deren Repräsentanten in $\bar{P}^3$ liegen und mit $J^2$ nicht punktfremd sind. Die Anzahl der z-Komponenten sowohl von $M^2 \bar{J}^2$ als auch von $M'^2 \bar{J}^2$ ist dann $x_{i_1} + \ldots + x_{i_w}$. Also bestehen $M^2 \bar{F}^3$ und $M'^2 \bar{F}^3$ aus je gleichvielen F-Normalflächenstücken und sind einander daher ähnlich bezüglich $\Theta$.

Aus 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 folgt 3.2.

Aus 3.1 und 3.2 folgt II.

## 6. Die nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen

Wir benutzen nun folgende Eigenschaft der nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen homogener linearer Gleichungssysteme:

SATZ 6. *Ist* $(\Sigma)$ *ein endliches homogenes lineares Gleichungssystem mit ganzrationalzahligen Koeffizienten, so gibt es unter den nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen von* $(\Sigma)$ *endlich viele* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ *— wir bezeichnen sie als die* nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen von $(\Sigma)$ *— die durch folgende Eigenschaften eindeutig ausgezeichnet sind:*

a. $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ *sind entweder nichttriviale Lösungen von* $(\Sigma)$, *oder es ist* $s=1$ *und* $\mathfrak{x}_1$ *ist die triviale Lösung.*

b. *Ist* $\mathfrak{x}$ *eine beliebige nicht-negative-ganzzahlige Lösung von* $(\Sigma)$, *so gibt es (mindestens) eine Linearkombination von* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ *mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten* $k_1, \ldots, k_s$, *so daß* $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{s} k_i \mathfrak{x}_i$ *ist.*

c. *Besteht* $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s)$ *nicht nur aus der trivialen Lösung, so gibt es keine Linearkombination* $\sum_{i=1}^{s} c_i \mathfrak{x}_i$ *mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten, so daß* $\mathfrak{x}_j = \sum_{i=1}^{s} c_i \mathfrak{x}_i$ *und* $c_j = 0$ *ist (für irgend ein* $j = 1, \ldots, s$*).*

Der Beweis läßt sich auf Grund folgender Bemerkung führen: Wenn es überhaupt nicht-negativ-rationalzahlige Lösungen von $(\Sigma)$ außer der trivialen Lösung gibt, so entsprechen diesen die Punkte einer „Ecke" eines Zahlenraumes genügend hoher Dimension, deren Scheitel im Nullpunkt liegt. Den nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen entsprechen die ganzzahligen Gitterpunkte dieser Ecke. Auf den 1-dimensionalen Seiten der Ecke sucht man jeweils denjenigen Gitterpunkt auf, der dem Nullpunkt am nächsten liegt. Die diesen Gitterpunkten entsprechenden Lösungen seien $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_v$. Dann läßt sich jede nicht-negativ-rationalzahlige Lösung als Linearkombination der $\mathfrak{b}_j$ mit nicht-negativ-rationalzahligen Koeffizienten darstellen. Nun bestimmt man diejenigen nicht-negativ-ganzzahligen Lösungen $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_w$, deren jede Komponente kleiner ist als die entsprechende Komponente von $\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_v$. Läßt sich eine dieser Lösungen $\mathfrak{g}_k$ als Linearkombination der übrigen mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten darstellen, so wird sie fortgelassen, und dieser Prozess wird so oft wiederholt, wie es möglich ist. Die dann verbleibenden Lösungen sind unter allen Lösungen eindeutig ausgezeichnet und bilden das nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösungssystem von $(\Sigma)$.

FOLGERUNG. *Sind* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ *die nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen der P-Gleichungen, und ist* $M_i^2$ *eine Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor* $\mathfrak{x}_i$ $(i=1, \ldots, s)$, *so ist* $M_i^2$ *zusammenhängend.*

*Beweis:* Aus der Annahme, $M_i^2$ bestünde aus zwei miteinander punktfremden Komponenten $M'^2$ und $M''^2$, folgt: Die P-Zahlenvektoren von $M'^2$ und $M''^2$ seien $\mathfrak{x}'$ bzw. $\mathfrak{x}''$. Dann ist $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}''$, wobei $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ihrerseits nichttriviale Linearkominationen $\sum_{j=1}^{s} c_j' \mathfrak{x}_j$ bzw. $\sum_{j=1}^{s} c_j'' \mathfrak{x}_j$ mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten sind. Damit ist $\mathfrak{x}_i = \sum_{j=1}^{s} (c_j' + c_j'') \mathfrak{x}_j$ mit $c_i' + c_i'' = 0$, also keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, also ist die Annahme falsch und die Behauptung bewiesen.

## Drittes Kapitel

## Normalflächen mit Selbstdurchdringungen

Wir stellen nun die Frage, wie sich eine gegebene Normalfläche $M^2$ aus „einfacheren" Normalflächen aufbauen lasse. Die $\Theta$-Klasse von $M^2$ sei $\mathfrak{M}$, der P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$. Ist $\mathfrak{x}$ keine der endlich vielen Fundamentallösungen der P-Gleichungen, so läßt sich $\mathfrak{x}$ als Summe zweier nicht-negativ-ganzzahliger Lösungen der P-Gleichungen darstellen. Diese Lösungen sind verträglich und entsprechen eineindeutig zwei $\Theta$-Klassen $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ von Normalflächen. Die Repräsentanten aus $\mathfrak{M}_1$ und aus $\mathfrak{M}_2$ sind damit in gewisser Weise „einfacher" als $M^2$.

Es kann nun sein, daß es einen Repräsentanten $M_1^2$ aus $\mathfrak{M}_1$ und einen Repräsentanten $M_2^2$ aus $\mathfrak{M}_2$ so gibt, daß $M_1^2$ und $M_2^2$ miteinander punktfremd sind. Dann ist die Normalfläche $M_1^2 + M_2^2$ ein Repräsentant aus $\mathfrak{M}$, da sie den P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ hat, und da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{M}$ einander eineindeutig entsprechen. $M^2$ ist in diesem Falle also nicht zusammenhängend.

Im allgemeinen gibt es aber keine zwei Repräsentanten $M_1^2$ und $M_2^2$ aus $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$, die miteinander punktfremd sind. Man kann dann lediglich zwei Repräsentanten $M_1^2$ und $M_2^2$ so wählen, daß zwischen ihnen keine Berührungssingularitäten, sondern nur Durchdringungslinien vorkommen. Diese Durchdringungslinien sind entweder unberandet oder enden im Rande von $M_1^2$ und $M_2^2$, also in Doppelpunkten der in $\dot{M}^3$ verlaufenden Linien $\dot{M}_1^2$ und $\dot{M}_2^2$. Längs der Durchdringungslinien kann man nun im Sinne von Dehn [2] Umschaltungen durchführen und die dadurch entstehenden Berührungssingularitäten durch kleine Abänderungen beseitigen. Dabei liegen die Verhältnisse wesentlich einfacher als bei [2], da keine Tripelpunkte auftreten können, die Durchdringungslinien also keine Schnittpunkte besitzen.

Die für uns entscheidende Frage ist nun die, ob man durch geeignete Umschaltungen aus $M_1^2$ und $M_2^2$ eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit gewinnen könne, die a) eine Normalfläche ist und b) den P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ besitzt, also in $\mathfrak{M}$ liegt. Es ergibt sich, daß diese Frage dann zu bejahen ist, wenn $M_1^2$ und $M_2^2$ geeignet gewählt worden sind, d. h. wenn die Durchdringungslinien von $M_1^2$ und $M_2^2$ in einer gewissen Normalform vorliegen. In diesem Falle sind die Umschaltungen, die zu einer Normalfläche führen, eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe dieses Kapitels ist es, den Begriff der „Normalfläche mit Durchdringungslinien" in einer geeigneten Weise zu definieren und nachzuweisen, daß sich bei gegebenen $\Theta$-Klassen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ stets zwei Repräsentanten $M_1^2$ und $M_2^2$ so auswählen lassen, daß sie zusammen eine derartige Normalfläche mit Selbstdurchdringungen, eine sogenannte S-Normalfläche, bilden.

## 1. S-Mannigfaltigkeiten

Eine Mannigfaltigkeit mit Singularitäten definiert man im allgemeinen als Abbildung $\alpha$ einer singularitätenfreien Mannigfaltigkeit $M^d$ in ein Polyeder $A$. Bei den Untersuchungen dieser Arbeit kommen nur Singularitäten von besonders einfacher Art vor: Es treten lediglich Doppelpunkte auf, und Verzweigungspunkte sind ausgeschlossen. Die Doppelpunkte bilden dabei eine $(d-1)$-dim Mannigfaltigkeit. $A$ ist in diesem Falle ein $d$-dim Polyeder, in dem die Umgebung eines beliebigen Punktes $p$ entweder ein $d$-dim Raumelement ist oder aus zwei $d$-dim Raumelementen besteht, die sich in einem $(d-1)$-dim Raumelement schneiden, je nachdem, ob $p$ ein einfacher Punkt oder ein Doppelpunkt ist. Ein solches Polyeder $A$ nennen wir ein S-Polyeder. Darüberhinaus können wir immer voraussetzen, daß ein S-Polyeder $A^d$ in einer $(d+1)$-dim Mannigfaltigkeit $M^{d+1}$ liege. Wir können dann zwischen „Berührungs-" und „Durchdringungssingularitäten" unterscheiden und können fordern, daß nur Durchdringungssingularitäten vorkommen.

Ist unter diesen Voraussetzungen ein S-Polyeder $A^d$ in einer Mannigfaltigkeit $M^{d+1}$ gegeben, so ist dadurch eine Mannigfaltigkeit mit Singularitäten bereits eindeutig bestimmt. D. h. zu $A^d$ lassen sich ein singularitätenfreies Urbild $M^d$ und eine Abbildung $\alpha$ von $M^d$ auf $A^d$ konstruieren, und alle so konstruierten Urbilder und Abbildungen sind zueinander äquivalent. Wir können damit für unsere Untersuchungen den Begriff des singularitätenfreien Urbildes gänzlich entbehren und bezeichnen das Polyeder $A^d$ selbst als eine „$d$-dim Mannigfaltigkeit mit einfachen Durchdringungssingularitäten in $M^{d+1}$", oder kurz als eine S-Mannigfaltigkeit in $M^{d+1}$. Eine in $A^d$ liegende Punktmenge bezeichnen wir als S-zusammenhängend in $A^d/M^{d+1}$, wenn sie als Bild eines zusammenhängenden Teiles eines singularitätenfreien Urbildes von $A^d$ aufgefaßt werden kann. Entsprechend nennen wir eine Teilmenge von $A^d$ eine S-zusammenhängende Komponente, kurz eine Sz-Komponente, von $A^d/M^{d+1}$, wenn sie als Bild einer z-Komponente eines singularitätenfreien Urbildes

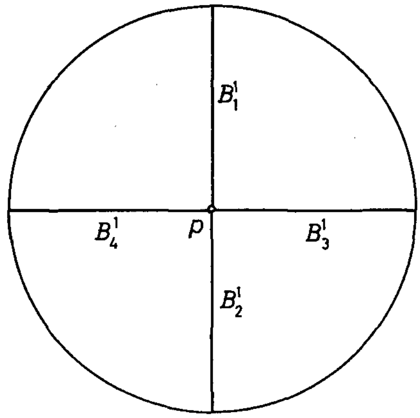



Fig. 11. $U^d$ mit $B_1^{d-1}, \ldots, B_4^{d-1}$ für $d = 2$.

aufgefaßt werden kann. Einige im ersten Kapitel für singularitätenfreie Mannigfaltigkeiten bereits definierte Begriffe erweitern wir sinngemäß für S-Mannigfaltigkeiten. Wir definieren also:

Definition 1. Ein Polyeder $A^d$ heißt ein $d$-dim *S-Polyeder*, wenn folgendes gilt: Ist $p$ ein Punkt in $A^d$, und ist $U$ eine im Verhältnis zu $A^d$ kleine Umgebung von $p$ in $A^d$, so ist $U$ entweder ein abgeschlossenes $d$-dim Raumelement, oder $U$ ist die Summe zweier abgeschlossener $d$-dim Raumelemente $E_1^d$ und $E_2^d$, so daß $E_1^d E_2^d$ ein $(d-1)$-dim ($p$ enthaltendes) Raumelement $E^{d-1}$ ist, das transversal in $E_1^d$ und in $E_2^d$ liegt.

Insbesondere verwenden wir folgende Bezeichnungen: Ist $U$ ein Raumelement, so bezeichnen wir $p$ als einen *einfachen Punkt von* $A^d$; im anderen Falle bezeichnen wir $p$ als einen *Doppelpunkt von* $A^d$. Die Summe aller Doppelpunkte von $A^d$ bezeichnen wir als die *Durchdringung von* $A^d$. Ist speziell $d = 2$, so nennen wir die z-Komponenten der Durchdringung von $A^d$ die *Durchdringungslinien von* $A^d$.

Definition 2. $M^d$ sei eine $d$-dim Mannigfaltigkeit, $A^{d-1}$ sei ein in $M^d$ liegendes $(d-1)$-dim S-Polyeder, $D$ sei die Durchdringung von $A^{d-1}$.

I. Eine in $A^{d-1}$ liegende Kante $W^1$ heißt ein *S-Streckenzug in* $A^{d-1}/M^d$, wenn folgendes gilt:

a. $W^1 D$ ist entweder leer oder besteht aus einzelnen Punkten.

b. Ist $p$ ein in $W^1 D$ liegender Punkt, ist $U^d$ eine im Verhältnis zu $A^{d-1}$ und $W^1$ kleine Umgebung von $p$ in $M^d$, und sind $B_1^{d-1}$, $B_2^{d-1}$, $B_3^{d-1}$ und $B_4^{d-1}$ die z-Komponenten von $(A^{d-1} - D) U^d$, so daß $B_1^{d-1}$ und $B_2^{d-1}$ in verschiedenen z-Komponenten von $U^d - (\bar{B}_3^{d-1} + \bar{B}_4^{d-1})$ liegen (siehe Fig. 11), so ist $(W^1 - p) U^d$ entweder mit $B_1^{d-1}$ und $B_2^{d-1}$ oder mit $B_3^{d-1}$ und $B_4^{d-1}$ punktfremd.

II. Eine Teilmenge $T$ von $A^{d-1}$ heißt *S-zusammenhängend in* $A^{d-1}/M^d$, wenn es zu zwei beliebigen in $T$ liegenden Punkten $p$ und $q$ stets einen in $T$ liegenden S-Streckenzug in $A^{d-1}/M^d$ gibt, der $p$ und $q$ verbindet. Ist $A^{d-1}$ selbst S-zusammenhängend in $A^{d-1}/M^d$, so schreiben wir dafür kürzer „$A^{d-1}$ ist S-zusammenhängend in $M^d$".

III. Eine abgeschlossende Teilmenge $A'^{d-1}$ von $A^{d-1}$ heißt eine *S-Komponente von* $A^{d-1}$ *in* $M^d$, wenn es keinen in $A^{d-1} - A'^{d-1}$ liegenden Punkt $p$ gibt, der sich durch einen S-Streckenzug in $A^{d-1}/M^d$ mit einem in $A'^{d-1} - D$ liegenden Punkt $q$ verbinden läßt.

IV. $A'^{d-1}$ heißt eine *Sz-Komponente von* $A^{d-1}$ *in* $M^d$, wenn $A'^{d-1}$ S-zusammenhängend in $A^{d-1}/M^d$ und eine S-Komponente von $A^{d-1}$ in $M^d$ ist.

V. $A^{d-1}$ heißt eine *S-Mannigfaltigkeit in* $M^d$, wenn folgendes gilt: Ist $D'^{d-2}$ eine z-Komponente von $D$, und ist $U^d$ eine im Verhältnis zu $A^{d-1}$ kleine Umgebung von $D'^{d-2}$ in $M^d$, so gibt es genau zwei Sz-Komponenten von $A^{d-1}\,U^d$ in $U^d$.

VI. $A^{d-1}$ liegt *transversal in* $M^d$, wenn $\dot{A}^{d-1} = A^{d-1}\dot{M}^d$ ist. $A^{d-1}$ heißt dann auch ein *St-Polyeder in* $M^d$.

Definition 3. Ist $\Delta$ eine randtreue Zerlegung eines Polyeders $P$ in offene Mannigfaltigkeiten, und ist $A$ ein in $P$ liegendes S-Polyeder, so liegt $A$ *transversal bezüglich* $\Delta$, wenn folgendes gilt: Ist $E^e$ ein Element aus $\Delta$, so ist $A\,E^e$ entweder leer oder $A\,\bar{E}^e$ ist ein St-Polyeder in $\bar{E}^e$.

Ist $\Delta$ eine Zerlegung in offene Raumelemente, so liegt $A$ *elementar bezüglich* $\Delta$, wenn weiter gilt: Ist $E^e$ ein Element aus $\Delta$, und ist $A\,E^e$ nicht leer, so ist

a. jede Sz-Komponente von $A\,\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$ ein $(e-1)$-dim abgeschlossenes Raumelement,

b. jede z-Komponente der Durchdringung von $A\bar{E}^e$ ein $(e-2)$-dim abgeschlossenes Raumelement.

Definition 4. $A^d$ sei ein S-Polyeder, $\Delta$ sei eine simpliziale Zerlegung von $A^d$, $D$ sei die Durchdringung von $A^d$. $a_i$ sei die Anzahl der $i$-dim Elemente aus $\Delta$, die nicht in $D$ liegen, $b_i$ sei die Anzahl der in $D$ liegenden $i$-dim Elemente aus $\Delta$. Dann bezeichnen wir die Zahl $c = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{i+1}(a_i + 2b_i)$ als die *S-Charakteristik von* $A^d$.

Folgerung. *$A^d$ sei ein S-Polyeder, $D$ sei die Durchdringung von $A^d$. Dann gilt:*

I. *$\dot{A}^d$ ist entweder leer oder ein $(d-1)$-dim S-Polyeder.*

II. *$D$ ist entweder leer oder eine $(d-1)$-dim Mannigfaltigkeit, und es gilt:*

II.1. $\dot{D} = D\dot{A}^d$. II.2. *Die Durchdringung von $\dot{A}^d$ ist gleich $\dot{D}$.*

## 2. Die Normalunterteilung

Wir wollen den Begriff der S-Normalfläche so definieren, daß es längs jeder Durchdringungslinie einer solchen S-Normalfläche eine Umschaltung gibt, durch die wieder eine S-Normalfläche entsteht. Von den Durchdringungslinien kann man in naheliegender Weise verlangen, daß sie mit den abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke punktfremd seien, daß sie die P- und K-Raumstücke in offenen Kanten schneiden, die PK-Flächenstücke in Punkten durchsetzen und, falls sie berandet sind, ihre Randpunkte in P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücken haben. Ein K-Raumstück soll dabei so durchsetzt werden, daß nicht beide Randpunkte einer Schnittkante in einem und demselben PK-Flächenstück liegen. Die S-Normalfläche schneidet dann also die abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke in paarweise miteinander punktfremden F-Normalflächenstücken und die abgeschlossenen Hüllen der P- und K-Raumstücke in S-Mannigfaltigkeiten, von denen zu verlangen ist, daß jede ihrer Sz-Komponenten ein P- bzw. K-Normalflächenstück sei. Entsprechend werden dann die abgeschlossenen Hüllen der PK- und P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke in 1-dim S-Mannigfaltigkeiten geschnitten, deren jede Sz-Komponente eine PK- bzw. P$\dot{\text{M}}$-Normalkante ist.

Man kann bereits an einfachen Beispielen erkennen, daß eine so definierte S-Normalfläche der genannten Umschaltungsforderung im allgemeinen noch nicht genügt. Betrachten wir etwa ein PK-Flächenstück $G^2$, das der Einfachheit halber nur drei PKF-Kanten $N_1^1$, $N_2^1$ und $N_3^1$ im Rande enthalten möge, wie in Fig. 12 dargestellt. Eine gegebene S-Mannigfaltigkeit $M^2$ möge die angegebenen Bedingungen erfüllen und $\bar{G}^2$ in einer Reihe von PK-Normalkanten schneiden. Wird längs einer $G^2$ durchsetzenden Durchdringungslinie $D^1$ von $M^2$ umgeschaltet, so bewirkt dies eine Umschaltung des Schnittes $M^2\bar{G}^2$ in den Schnittpunkten $D^1\bar{G}^2$. Soll unsere Umschaltungsforderung erfüllt sein, so muß es also auch in jedem Doppelpunkt von $M^2\bar{G}^2$ eine Umschaltung geben, durch die aus $M^2\bar{G}^2$ eine S-Mannigfaltigkeit in $\bar{G}^2$ hervorgeht, deren Sz-Komponenten wieder PK-Normalkanten sind. Fig. 12a zeigt zwei PK-Normalkanten mit drei Schnittpunkten. Im Doppelpunkt $p$ gibt es zwei mögliche Umschaltungen. Durch die eine dieser Umschaltungen (in Fig. 12a durch zwei Bögen angedeutet) entsteht eine Kante mit Selbstdurchdringungen, während durch die andere eine Kante entsteht, deren beide Randpunkte in $N_1^1$ liegen (und diese Kanten sind jeweils Sz-Komponenten der entstehenden S-Mannigfaltigkeiten in $\bar{G}^2$). Es gibt in $p$ also keine Umschaltung, die den Forderungen genügen würde. Diese Schwierigkeit ist darin begründet, daß die drei Schnittpunkte in der einen Kante, von $N_1^1$ aus gerechnet, in der Reihenfolge $p$, $p'$, $p''$ liegen und in der anderen Kante in entgegengesetzter Reihenfolge. Man kann nun die zusätzliche Forderung in die Definition der S-Normalfläche aufnehmen, daß ein derartiger Sachverhalt ausgeschlossen sein solle. Daß dies allein auch

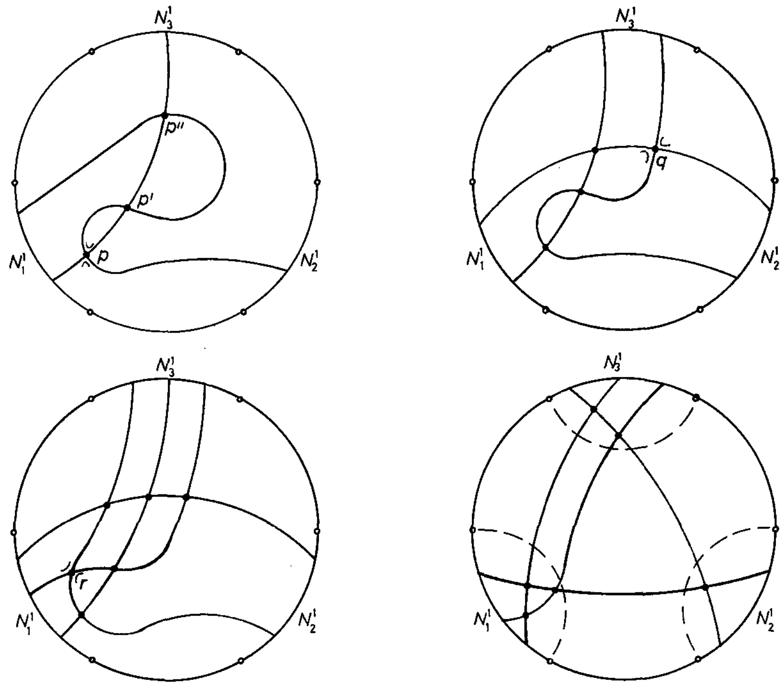



Fig. 12. Beispiele für einander schneidende PK-Normalkanten in $\overline{G}^2$. a. Zwei Kanten. b. Drei Kanten. c. Vier Kanten. d. Vier Kanten mit geordneten Schnittpunkten.

nicht genügt, zeigt Fig. 12b. Hier sind drei PK-Normalkanten mit vier Schnittpunkten dargestellt. Durch Umschalten im Punkte $q$ entstehen nun entweder (im Sinne der Bögen) zwei Kanten wie in Fig. 12a oder eine Kante mit beiden Randpunkten in $N_2^1$. Ein derartiges Kantentripel kann, wie Fig. 12c zeigt, wiederum aus vier Kanten (durch Umschalten in $r$) entstehen, wobei diese vier Kanten paarweise nur je einen Schnittpunkt besitzen.

Die angedeuteten Schwierigkeiten lassen sich dann vermeiden, wenn man verlangt, daß die Schnittpunkte der PK-Normalkanten „geordnet" sein sollen, wie in Fig. 12d für vier Kanten dargestellt worden ist, d. h. es sollen sich in $\overline{G}^2$ miteinander punktfremde Umgebungen der Kanten $N_1^1$, $N_2^1$ und $N_3^1$ abteilen lassen (in Fig. 12d gestrichelt eingezeichnet), die alle Doppelpunkte von $M^2\overline{G}^2$ enthalten, so daß in der Umgebung von $N_i^1$ nur Schnittpunkte solcher PK-Normalkanten liegen, die einen in $N_i^1$ liegenden Randpunkt besitzen. In dieser Forderung ist mit eingeschlossen, daß sich zwei PK-Normalkanten überhaupt nur dann schneiden dürfen, wenn es mindestens eine PKF-Kante gibt, die je einen Randpunkt von beiden PK-Normalkanten enthält. Diese Einschränkung ist für die beabsichtigten Untersuchungen zulässig.

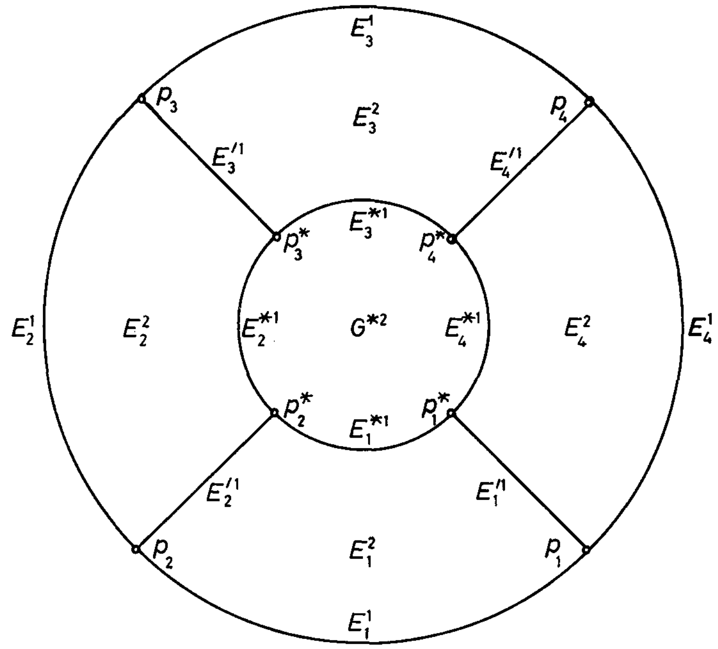



Fig. 13. $\Phi(\bar{G}^2)$ für $s = 4$.

Analoge Forderungen müssen an die „Geordnetheit" der Durchdringungslinien in den P-Raumstücken gestellt werden. Hier liegen die Verhältnisse komplizierter, und wir müssen Umgebungen der PF-, PK- und PṀ-Flächenstücke auszeichnen, in denen die Durchdringungslinien zu verlaufen haben. Wir definieren hierzu den Begriff der Normalunterteilung von $\Theta$(1).

DEFINITION 1. Eine randtreue Unterteilung $\Phi$ von $\Theta$ in offene Raumelemente heißt eine *Normalunterteilung von $\Theta$ bezüglich* $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. Ist $E^d$ ein Element aus $\Theta$, jedoch kein P-Raumstück und kein PK- oder PṀ-Flächenstück, so ist $E^d$ ein Element von $\Phi$.

b. $G^2$ sei ein PK- oder PṀ-Flächenstück. $\Theta(\dot{G}^2)$ bestehe aus Kanten $E_1^1, \ldots, E_s^1$ und Punkten $p_1, \ldots, p_s$, so daß $p_i$ und $p_{i+1}$ die Randpunkte von $E_i^1$ sind ($i = 1, \ldots, s$, wo-

(1) Wie H. Schubert [11] ausgeführt hat, lassen sich die angestrebten Sätze über S-Normalflächen (Hauptsatz 3 und Hauptsatz 4) einfacher erhalten, wenn der Begriff der S-Normalfläche anders definiert wird: Die Durchdringungslinien werden nicht in die P- und K-Raumstücke, sondern in die K- und F-Raumstücke gelegt. Dann wird insbesondere der Begriff der Normalunterteilung entbehrlich.

bei $p_{s+1} = p_1$ zu setzen ist). Dann besteht $\Phi(G^2)$ (siehe Fig. 13) aus offenen Flächenstücken $E_1^2, \ldots, E_s^2$ und $G^{*2}$, aus offenen Kanten $E_1'^1, \ldots, E_s'^1$ und $E_1^{*1}, \ldots, E_s^{*1}$ und aus Punkten $p_1^*, \ldots, p_s^*$, so daß folgendes gilt:

b.1. $\dot{E}_i^2 \dot{G}^2 = \bar{E}_i^1$, $\dot{E}_i^2 \dot{G}^{*2} = \bar{E}_i^{*1}$, $\dot{G}^2 \dot{G}^{*2}$ ist leer.

b.2. $p_i^*$ und $p_{i+1}^*$ sind die Randpunkte von $E_i^{*1}$ (wobei $p_{s+1}^* = p_1^*$ zu setzen ist); $p_i$ und $p_i^*$ sind die Randpunkte von $E_i'^1$. $E_i'^1$ und $E_{i+1}'^1$ liegen in $\dot{E}_i^2$ (wobei $E_{s+1}'^1 = E_1'^1$ zu setzen ist).

c. $P^3$ sei ein P-Raumstück. $\Theta(\dot{P}^3)$ bestehe aus offenen Flächenstücken $E_1^2, \ldots, E_{t_2}^2$, aus Kanten $E_1^1, \ldots, E_{t_1}^1$ und aus Punkten $E_1^0, \ldots, E_{t_0}^0$. Dann besteht $\Phi(P^3)$ aus offenen Raumstücken $E_1'^3, \ldots, E_{t_2}'^3$ und $P^{*3}$, aus offenen Flächenstücken $E_1'^2, \ldots, E_{t_1}'^2$ und $E_1^{*2}, \ldots, E_{t_2}^{*2}$, aus Kanten $E_1'^1, \ldots, E_{t_0}'^1$ und $E_1^{*1}, \ldots, E_{t_1}^{*1}$ und aus Punkten $E_1^{*0}, \ldots, E_{t_0}^{*0}$, so daß (bei geeigneter Numerierung) folgendes gilt:

c.1. Es ist $\dot{E}_i'^{e+1} \dot{P}^3 = \bar{E}_i^e$ und $\dot{E}_i'^{e+1} \dot{P}^{*3} = \bar{E}_i^{*e}$ $(i = 1, \ldots, t_e;\ e = 0, 1, 2)$. $\dot{P}^3 \dot{P}^{*3}$ ist leer.

c.2. Liegt $E_{i_1}^{e_1}$ in $\dot{E}_{i_2}^{e_2}$, so liegt $E_{i_1}'^{e_1+1}$ in $\dot{E}_{i_2}'^{e_2+1}$ und $E_{i_1}^{*e_1}$ in $\dot{E}_{i_2}^{*e_2}$ $(i_1 = 1, \ldots, t_{e_1};$ $i_2 = 1, \ldots, t_{e_2};\ e_1 = 0, 1;\ e_2 = 1, 2)$.

Insbesondere werden für die Elemente aus $\Phi$ folgende Bezeichnungen eingeführt: $Q^d$ sei ein P-Raumstück, ein PK-Flächenstück oder ein P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück.

a. $Q^{*d}$ sei das in $Q^d$ liegende $d$-dim Element aus $\Phi$, dessen Rand mit $\dot{Q}^d$ punktfremd ist. Dann heißt $Q^{*d}$ das *Zentralelement von* $Q^d$ aus $\Phi$.

b. $E^e$ sei ein in $\dot{Q}^d$ liegendes Element aus $\Theta$. $E'^{e+1}$ sei das in $Q^d$ liegende $(e+1)$-dim Element aus $\Phi$, das $\bar{E}^e$ im Rande enthält. $E^{*e}$ sei das in $\bar{E}'^{e+1}$ liegende $e$-dim Element aus $\Phi$, dessen Rand mit $\dot{Q}^d$ punktfremd ist. Dann heißt $E'^{e+1}$ das *in* $Q^d$ *liegende Nebenelement zu* $E^e$ aus $\Phi$, und $E^{*e}$ heißt das *in* $Q^d$ *liegende Parallelelement zu* $E^e$ aus $\Phi$.

Definition 2. Ist $\Phi$ eine Normalunterteilung, so heißt eine Orientierung $\omega^*$ der PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten und der Parallelkanten aus $\Phi$ zu diesen Kanten eine *Hilfsorientierung in* $\Phi$, wenn folgendes gilt:

a. Die Orientierung der PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten ist eine Hilfsorientierung $\omega$ in $\Theta$.

b. Ist $N^1$ eine PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante (siehe Fig. 14) mit den Randpunkten $p$ und $q$, die von $p$ nach $q$ orientiert ist, und ist $N^{*1}$ eine Parallelkante aus $\Phi$ zu $N^1$, so gilt: Es gibt in $\Phi$ genau eine Nebenkante zu $p$, deren von $p$ verschiedener Randpunkt $p^*$ in $\dot{N}^{*1}$ liegt, und genau eine Nebenkante zu $q$, deren von $q$ verschiedener Randpunkt $q^*$ in $\dot{N}^{*1}$ liegt. Dabei ist $N^{*1}$ durch $\omega^*$ von $p^*$ nach $q^*$ orientiert (siehe Fig. 14). Wir bezeichnen $\omega^*$ auch als eine *Erweiterung von* $\omega$ *in* $\Phi$. (Die Definitionen des Anfangspunktes einer orien-

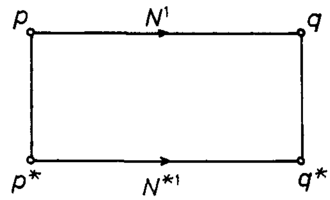



Fig. 14. Orientierung von $N^1$ und $N^{*1}$.

tierten Kante, des $i$-ten Punktes in einer orientierten Kante und der $i$-ten Kante in einem Flächenstück, das zwei orientierte Kanten im Rande enthält, aus dem ersten Kapitel werden völlig analog erweitert.)

### 3. S-Normalflächen

Wir können nun definieren, wie eine S-Normalfläche $M^2$ die P-Raumstücke und die PK- und P$\dot{M}$-Flächenstücke schneiden soll. Ist $Q$ ein P-Raumstück oder ein PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstück, so ist zunächst zu verlangen, daß die Sz-Komponenten von $M^2\overline{Q}$ nicht nur P-Normalflächenstücke bzw. PK- oder P$\dot{M}$-Normalkanten seien, sondern auch die Normalunterteilung $\Phi(\overline{Q})$ „normal" durchsetzen.

Die Durchdringungslinien von $M^2$ sollen die Nebenraumstücke zu den PK-, PF- und P$\dot{M}$-Flächenstücken, sowie die K-Raumstücke, in Kanten schneiden, die nicht beide Randpunkte in einem und demselben Element aus $\Phi$ haben, und sie sollen die Nebenflächenstücke zu den PKF- und PK$\dot{M}$-Kanten in einzelnen Punkten durchdringen.

Um die in Fig. 12a dargestellten Schwierigkeiten zu vermeiden, stellen wir an die Schnitte von $M^2$ mit den Nebenflächenstücken zu den PKF- und PK$\dot{M}$-Kanten noch eine weitere Bedingung, die auf folgendes hinauskommt: Ist $N^2$ ein solches Nebenflächenstück zu einer PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N^1$, und sind $E_1^1$ und $E_2^1$ zwei Sz-Komponenten von $M^2\overline{N}^2$, die einander in mehreren Punkten schneiden, so liegen diese Schnittpunkte in $E_1^1$ und in $E_2^1$, von $N^1$ aus gerechnet, jeweils in der gleichen Reihenfolge. Die 1-dim S-Mannigfaltigkeit $M^2\overline{N}^2$ bezeichnen wir dann (wegen ihrer Ähnlichkeit zu der Projektion eines offenen Zopfes) als „zopfartig" in $\overline{N}^2$. Die Schnitte einer S-Normalfläche $M^2$ mit den abgeschlossenen Hüllen der Elemente aus $\Phi$ und aus $\Theta$ bezeichnen wir als „bezüglich $\Phi$ S-normale" S-Mannigfaltigkeiten.

Definition 1. $E^2$ sei ein abgeschlossenes Flächenstück, $E^1$ und $E^{*1}$ seien zwei in $\dot{E}^2$ liegende abgeschlossene miteinander punktfremde Kanten (siehe Fig. 15). Dann liegt eine 1-dim St-Mannigfaltigkeit $M^1$ in $E^2$ *zopfartig in* $E^2$ *bezüglich* $E^1$ *und* $E^{*1}$, wenn folgendes gilt:

a. Jede Sz-Komponente von $M^1$ in $E^2$ ist eine (doppelpunktfreie) Kante, die genau einen in $\mathring{E}^1$ und genau einen in $\mathring{E}^{*1}$ liegenden Randpunkt besitzt.

b. Für die Doppelpunkte von $M^1$ gibt es eine Numerierung $r_1, \ldots, r_t$, so daß folgendes gilt:

Ist $A^1$ eine Sz-Komponente von $M^1$ in $E^2$ mit dem in $E^1$ liegenden Randpunkt $p$, und liegen $r_i$ und $r_j$ $(i, j = 1, \ldots, t)$ so in $A^1$, daß $r_i$ zwischen $p$ und $r_j$ liegt, so ist $i < j$. (Vgl. Fig. 15.)

Die Numerierung $r_1, \ldots, r_t$ heißt eine *Zopfnumerierung* der Doppelpunkte von $M^1$ bezüglich $E^2$ und $E^1$.

Definition 2. Ist $\Phi$ eine Normalunterteilung von $\Theta$ bezüglich $\Gamma$, so liegt eine Normalfläche $M^2$ *normal bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$, wenn sie elementar bezüglich $\Phi$ liegt und außerdem folgendes gilt:

a. Ist $N^2$ ein Nebenflächenstück zu einer PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N^1$ und ist $N^{*1}$ die in $\dot{N}^2$ liegende Nebenkante zu $N^1$, so ist entweder $M^2 N^2$ leer oder jede z-Komponente von $M^2 \bar{N}^2$ ist eine transversal in $\bar{N}^2$ liegende Kante, deren einer Randpunkt in $N^1$ und deren anderer in $N^{*1}$ liegt.

b. Ist $J^3$ ein Nebenraumstück zu einem PK-, PF- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $J^2$ und ist $J^{*2}$ das Nebenflächenstück zu $J^2$, so ist entweder $M^2 J^3$ leer oder jede z-Komponente von $M^2 \bar{J}^3$ ist ein transversal in $\bar{J}^3$ liegendes Flächenstück, dessen Rand $J^2$ und $J^{*2}$ in genau je einer Kante schneidet (und außerdem genau zwei Kanten enthält, die in voneinander verschiedenen Nebenflächenstücken zu PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kanten liegen).

c. Ist $N^3$ ein Nebenraumstück zu einem PR-Flächenstück, so ist $M^2 \bar{N}^3$ leer.

Von P- und K-Normalflächenstücken, sowie von PK- und P$\dot{\text{M}}$-Normalkanten, die den Bedingungen a, b und c genügen und elementar bezüglich $\Phi$ liegen, sagen wir ebenfalls, daß sie *normal bezüglich* $\Phi$ liegen.

Folgerung. *Es gibt eine Normalunterteilung $\Phi$ von $\Theta$. Ist $M^2$ eine Normalfläche bezüglich $\Theta$, so läßt sich $\Phi$ insbesondere so wählen, daß $M^2$ zugleich S-normal bezüglich $\Phi$ liegt.*

*Beweis.* 1) $Q^d$ sei ein P-Raumstück oder ein PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück. $\Theta(\dot{Q}^d)$ bestehe aus den Elementen $E_1^0, \ldots, E_{t_0}^0$, $E_1^1, \ldots, E_{t_1}^1$, $E_1^2, \ldots, E_{t_2}^2$ (mit $t_2 = 0$ für $d = 2$). $R^d$ sei ein offenes konvexes Raumstück und $\lambda$ eine semilineare Abbildung von $\bar{Q}^d$ und $\bar{R}^d$ aufeinander. Dabei seien $F_1^0, \ldots, F_{t_0}^0$, $F_1^1, \ldots, F_{t_1}^1$, $F_1^2, \ldots, F_{t_2}^2$ die Bilder von $E_1^0, \ldots, E_{t_2}^2$ in $\dot{R}^d$. Das Bild von $M^2 \bar{Q}^d$ sei $M'^{d-1}$. $\Lambda$ sei eine lineare Zerlegung von

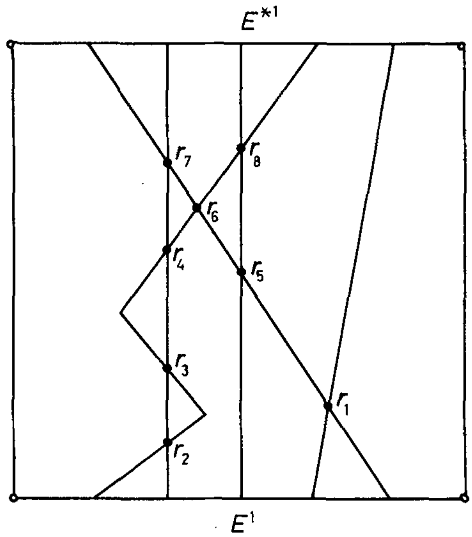



Fig. 15. $E^2$ mit $M^1$ und Zopfnumerierung der Doppelpunkte ($t = 8$).

$\bar{R}^d$, die eine Zerlegung von $M'^{d-1}$ umfaßt. $r$ sei ein beliebiger Punkt in einem $d$-dim Element aus $\Lambda$. Das Verbindungsprodukt aus $r$ und $\bar{F}_i^e$ ist ein abgeschlossenes $(e+1)$-dim Raumelement in $\bar{R}^d$ und sein Inneres wird mit $F_i''^{e+1}$ bezeichnet ($i = 1, \ldots, t_e$, $e = 0, 1, 2$). Das $F_i''^{e+1}$ durch $\lambda$ zugeordnete Bild in $Q^d$ wird mit $E_i''^{e+1}$ bezeichnet, das Bild von $r$ mit $q$. Die Elemente $E_i^e$, $E_i''^{e+1}$ und $q$ bilden eine randtreue Zerlegung $\Psi'$ von $\bar{Q}^d$ in offene Raumelemente, bezüglich derer $M^2\bar{Q}^d$ transversal liegt.

$U^d$ sei eine im Verhältnis zu $\Psi'|M^2$ kleine Umgebung von $\dot{Q}^d$ in $\bar{Q}^d$. $\dot{U}^d E_i''^{e+1}$ wird mit $E_i^{*e}$ bezeichnet, $\mathring{U}^d E_i''^{e+1}$ mit $E_i'^{e+1}$ und $Q^d - U^d$ mit $Q^{*d}$. Dann bilden die Elemente $E_i'^{e+1}$, $E_i^{*e}$ und $Q^{*d}$ eine Zerlegung von $Q^d$, die mit $\Phi(Q^d)$ bezeichnet wird.

2) Sind $Q_1, \ldots, Q_v$ die P-Raumstücke und die PK- und P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke aus $\Theta$ und $Q_1', \ldots, Q_w'$ die übrigen Elemente aus $\Theta$, so bilden die Elemente von $\Phi(Q_1), \ldots, \Phi(Q_v)$ und die Elemente $Q_1', \ldots, Q_w'$ eine Normalunterteilung $\Phi$ von $\Theta$, bezüglich derer $M^2$ normal liegt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für den folgenden Teil der Arbeit gelte:

Voraussetzung. $\Phi$ sei eine Normalunterteilung von $\Theta$ bezüglich $\Gamma$. Unter Nebenflächenstücken, Parallelkanten, Zentralraumstücken usw. verstehen wir, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, Elemente aus $\Phi$.

Definition 3. Eine bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ elementar liegende St-Mannigfaltigkeit $M^2$ in $M^3$ heißt eine *S-Normalfläche bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $M^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd.

b. Ist $F^3$ ein F-Raumstück, so ist jede z-Komponente von $M^2\bar{F}^3$ ein F-Normalflächenstück.

c. Ist $Q^3$ ein K- oder P-Raumstück, so ist entweder $M^2Q^3$ leer oder jede Sz-Komponente von $M^2\bar{Q}^3$ in $\bar{Q}^3$ ist ein bezüglich $\Phi$ normal liegendes K- bzw. P-Normalflächenstück.

d. Ist $D^1$ eine Durchdringungslinie von $M^2$, so gilt:

d.1. $D^1$ ist mit allen denjenigen Elementen aus $\Phi$ punktfremd, die nicht K-Raumstücke oder Nebenraumstücke zu PK-, PF- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücken oder Nebenflächenstücke zu PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kanten sind.

d.2. Ist $K^3$ ein K-Raumstück und $D'^1$ eine z-Komponente von $D^1\bar{K}^3$, so liegt in jedem der beiden PK-Flächenstücke aus $\dot{K}^3$ genau ein Randpunkt von $D'^1$.

d.3. Ist $J^3$ ein Nebenraumstück zu einem PK-, PF- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $J^2$ und $D'^1$ eine z-Komponente von $D^1\bar{J}^3$, so liegen die beiden Randpunkte von $D'^1$ nicht in einem und demselben Element aus $\Phi$ und nicht beide in $J^2$.

d.4. Ist $P^3$ ein P-Raumstück und $D'^1$ eine z-Komponente von $D^1\bar{P}^3$, so liegen die beiden Randpunkte von $D'^1$ nicht in einem und demselben Element aus $\Phi$ und nicht beide in $\dot{P}^3\dot{M}^3$.

e. Ist $N^2$ ein Nebenflächenstück zu einer PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N^1$ und ist $N^{*1}$ die in $\dot{N}^2$ liegende Parallelkante zu $N^1$, so liegt $M^2\bar{N}^2$ zopfartig in $\bar{N}^2$ bezüglich $\bar{N}^1$ und $\bar{N}^{*1}$.

Definition 4. Eine St-Mannigfaltigkeit $M^{d-1}$ in der abgeschlossenen Hülle eines P- oder K-Raumstückes oder eines PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstückes $Q^d$, die den Bedingungen *c*, *d* und *e* aus Definition 3 genügt und elementar bezüglich $\Phi$ liegt, heißt eine *S-normal bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$ *in* $\bar{Q}^d$ *liegende* St-Mannigfaltigkeit.

Definition 5. Eine St-Mannigfaltigkeit $M^2$ in $M^3$ heißt eine *S-Halbnormalfläche bezüglich* $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $M^2$ liegt transversal bezüglich $\Theta$.

b. $M^2$ ist mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd.

c. Ist $F^3$ ein F-Raumstück, so ist jede z-Komponente von $M^2\bar{F}^3$ ein F-Normalflächenstück und enthält keine Doppelpunkte von $M^2$.

Definition 6.

I. Ist $M^2$ eine S-Halbnormalfläche, so heißt die Anzahl der in $M^2$ liegenden F-Normalflächenstücke die *F-Zahl von* $M^2$ bezüglich $\Theta$, $\Gamma$.

II. $M^2$ sei eine bezüglich $\Theta$ elementar liegende S-Mannigfaltigkeit in $M^3$. $\mathfrak{Q}$ sei eine P- oder eine PK-Klasse. $Q$ sei das P-Raumstück bzw. PK- Flächenstück, in dessen abgeschlossener Hülle die Repräsentanten aus $\mathfrak{Q}$ liegen. Dann heißt die Anzahl $x$ derjenigen Sz-Komponenten von $M^2\bar{Q}$ in $\bar{Q}$, die Repräsentanten aus $\mathfrak{Q}$ sind, die $\mathfrak{Q}$ *entsprechende P-*

bzw. *PK-Zahl von* $M^2$ bezüglich $\Theta$, $\Gamma$. Entsprechend heißt die Menge aller P- bzw. aller PK-Zahlen von $M^2$ mit der Zuordnung dieser Zahlen zu den P- bzw. PK-Klassen der *P-* bzw. *PK-Zahlenvektor von* $M^2$ bezüglich $\Theta$, $\Gamma$.

FOLGERUNG 1. *Ist* $M^2$ *eine S-Normalfläche, so folgt:*

I. *Die F-Zahl von* $M^2$ *ist größer als Null.*

II. *Ist* $\dot{M}^2$ *doppelpunktfrei, so ist* $\dot{M}^2$ *eine Normallinie.*

III. $M_1^2, \ldots, M_s^2$ *seien paarweise voneinander verschiedenen Sz-Komponenten von* $M^2$ *in* $M^3$, *so daß* $M^2 = M_1^2 + \ldots + M_s^2$ *ist. Dann folgt:*

III.1. *Sind* $f, f_1, \ldots, f_s$ *die F-Zahlen von* $M^2, M_1^2, \ldots, M_s^2$, *so ist* $f = f_1 + \ldots + f_s$.

III.2. *Ist* $M^2$ *eine S-Normalfläche, und sind* $x, x_1, \ldots, x_s$ *die einer P- oder PK-Klasse* $\mathfrak{Q}$ *entsprechenden P- bzw. PK-Zahlen von* $M^2, M_1^2, \ldots, M_s^2$, *so ist* $x = x_1 + \ldots + x_s$.

FOLGERUNG 2. *Sind* $M_1^2$ *und* $M_2^2$ *S-Normalflächen, und sind die P-Zahlenvektoren von* $M_1^2$ *und* $M_2^2$ *einander gleich, so gilt:*

I. *Die F-Zahlen von* $M_1^2$ *und von* $M_2^2$ *sind einander gleich.*

II. *Ist* $\dot{M}_1^2$ *leer oder eine einfache Normallinie, so ist auch* $\dot{M}_2^2$ *leer oder eine einfache Normallinie.*

FOLGERUNG 3. $Q^d$ *sei ein PK- oder P*$\dot{M}$*-Flächenstück oder ein P- oder K-Raumstück.* $A_1^{d-1}$ *und* $A_2^{d-1}$ *seien zwei normal in* $\bar{Q}^d$ *liegende Elemente. Dann gilt:*

I. $A_1^{d-1}$ *und* $A_2^{d-1}$ *sind einander dann und nur dann ähnlich bezüglich* $\Phi$, *wenn sie einander ähnlich bezüglich* $\Theta$ *sind.*

II. $Q^{*d}$ *sei das Zentralelement von* $Q^d$ ($Q^d$ *also in diesem Falle kein K-Raumstück*). $A_1^{d-1}$ *und* $A_2^{d-1}$ *sind einander dann und nur dann ähnlich bezüglich* $\Phi$, *wenn* $A_1^{d-1}\bar{Q}^{*d}$ *und* $A_2^{d-1}\bar{Q}^{*d}$ *einander bezüglich* $\Phi$ *ähnlich sind.*

*Beweis.* 1) Beweis von I und II für den Fall, daß $Q^d$ ein PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstück $Q^2$ ist:

$p_{1k}$ und $p_{2k}$ seien die Randpunkte von $A_k^1$ $(k = 1, 2)$. $\Phi(\mathring{A}_k^1)$ besteht aus Kanten $A_{1k}^1$, $A_{2k}^1$ und $A_k^{*1}$ und aus Punkten $p_{1k}^*$ und $p_{2k}^*$, so daß $p_{ik}$ und $p_{ik}^*$ die Randpunkte von $A_{ik}^1$ sind $(i, k = 1, 2)$ und $p_{1k}^*$ und $p_{2k}^*$ die von $A_k^{*1}$ (vgl. Fig. 16). Daraus folgen die Behauptungen I und II.

2) Beweis von I für den Fall, daß $Q^d$ ein K-Raumstück $Q^3$ ist:

$G^2$ und $G'^2$ seien die beiden in $\dot{Q}^3$ liegenden PK-Flächenstücke. $\Theta(\mathring{A}_1^2)$ besteht aus vier Kanten $E_{11}^1, \ldots, E_{41}^1$ und vier Punkten $p_{11}, \ldots, p_{41}$, so daß $p_{i1}$ und $p_{i+11}$ die Randpunkte von $E_{i1}^1$ sind ($i = 1, \ldots, 4$ mit $p_{51} = p_{11}$), und so daß $E_{11}^1$ in $G^2$ liegt und $E_{31}^1$ in $G'^2$. Daraus folgt Behauptung I.

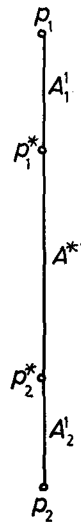



Fig. 16. $\Phi(A^1)$.

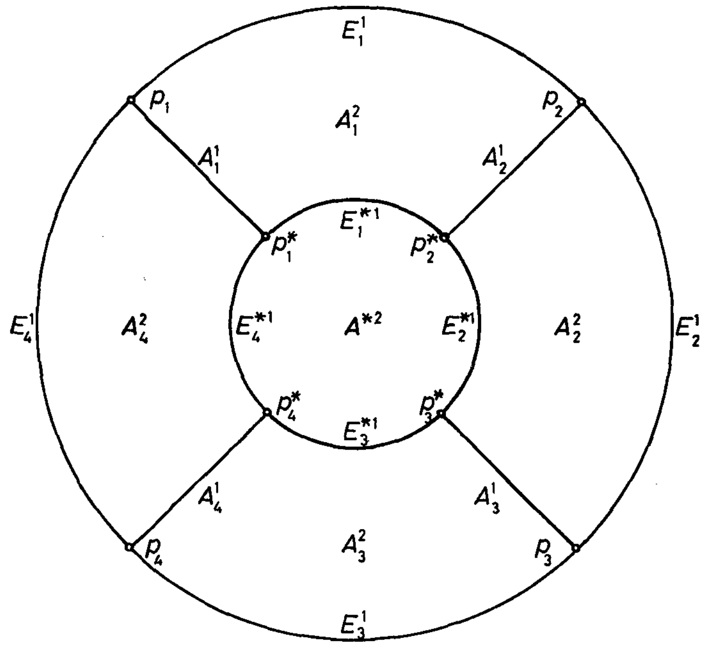



Fig. 17. $\Phi(\mathring{A}^2)$ und $\Theta(\dot{A}^2)$ für $t = 4$.

3) Beweis von I und II für den Fall, daß $Q^d$ ein P-Raumstück $Q^3$ ist:

$\Theta(\dot{A}_1^2)$ besteht (vgl. Fig. 17) aus Kanten $E_{11}^1, \ldots, E_{t1}^1$ und Punkten $p_{11}, \ldots, p_{t1}$, so daß $p_{i1}$ und $p_{i+11}$ die Randpunkte von $E_{i1}^1$ sind ($i = 1, \ldots, t$ mit $p_{t+11} = p_{11}$). $\Phi(\mathring{A}_1^2)$ besteht entsprechend aus offenen Flächenstücken $A_{11}^2, \ldots, A_{t1}^2$ und $A_1^{*2}$, aus Kanten $A_{11}^1, \ldots, A_{t1}^1$, $E_{11}^{*1}, \ldots, E_{t1}^{*1}$ und aus Punkten $p_{11}^*, \ldots, p_{t1}^*$, so daß folgendes gilt: $\dot{A}_{i1}^2 \dot{A}_1^2 = \bar{E}_{i1}^1$, $\dot{A}_{i1}^2 \dot{A}_1^{*2} = \bar{E}_{i1}^{*1}$, $\dot{A}_1^2 \dot{A}_1^{*2}$ ist leer. $p_{i1}^*$ und $p_{i+11}^*$ sind die Randpunkte von $E_{i1}^{*1}$, $p_{i1}$ und $p_{i1}^*$ die von $A_{i1}^1$ (mit $p_{t+11}^* = p_{11}$). Daraus folgen die Behauptungen I und II.

Mit Nr. 1, 2 und 3 ist Folgerung 3 bewiesen.

## 4. Die Konstruktion von S-Normalflächen

Wir haben nun zu zeigen, daß sich aus zwei gegebenen $\Theta$-Klassen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von Normalflächen stets zwei Repräsentanten so auswählen lassen, daß ihre Summe eine S-Normalfläche $M^2$ ist. Sind $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ entsprechenden P-Zahlenvektoren, so setzen wir voraus, daß $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ verträglich sei.

Die Konstruktion von $M^2$ führen wir in drei Schritten durch: Zuerst konstruieren wir die Durchschnitte von $M^2$ mit den abgeschlossenen Hüllen der F-Raumstücke, der KM-Flächenstücke und der Zentral-Raumstücke und -Flächenstücke aus $\Phi$. Diese Durch-

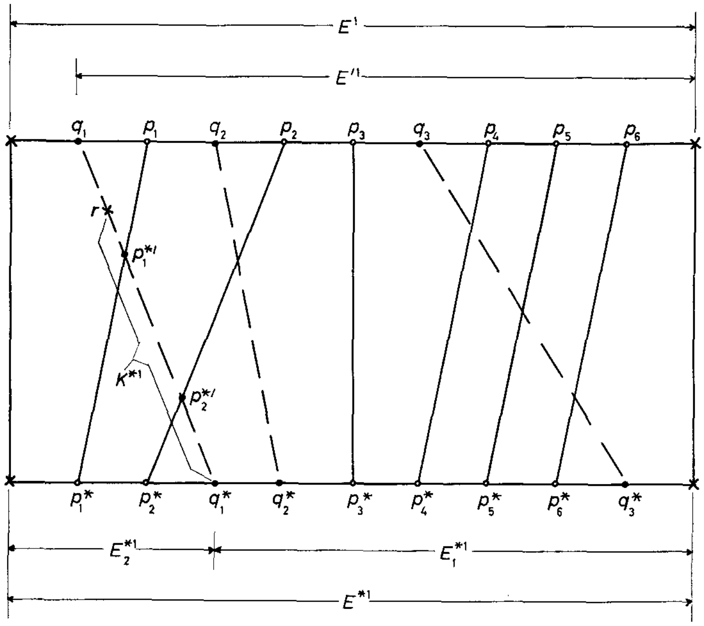



Fig. 18. $E^2$ mit $M^1$ für $s=6$, $t=3$ und $a=2$. ($B_1^1$, $B_2^1$, $B_3^1$ sind gestrichelt.)

schnitte sind singularitätenfreie Mannigfaltigkeiten. Dann konstruieren wir die Durchschnitte von $M^2$ mit den Nebenflächenstücken zu den PKF- und PK$\dot{\mathrm{M}}$-Kanten aus $\Theta$, wobei die Randpunkte dieser Durchschnitte durch den ersten Konstruktionsschritt vorgegeben sind. Schließlich werden die Durchschnitte von $M^2$ mit den K-Raumstücken und den Nebenraumstücken zu den PK-, PF- und P$\dot{\mathrm{M}}$-Flächenstücken aus $\Theta$ konstruiert, deren Ränder durch die vorhergehenden Konstruktionen ja bereits festgelegt sind.

Als Hilfsmittel beweisen wir vorher zwei Hilfssätze über die Konstruktion von speziellen S-Mannigfaltigkeiten in 2- und 3-dim Raumelementen.

HILFSSATZ 6. *$E^2$ sei ein Flächenstück. $E^1$ und $E^{*1}$ seien zwei miteinander punktfremde abgeschlossene Kanten in $\dot{E}^2$. $(p_1, p_1^*)$, $(p_2, p_2^*)$, $\ldots$, $(p_s, p_s^*)$ und $(q_1, q_1^*)$, $\ldots$, $(q_t, q_t^*)$ seien Paare von Punkten in $\dot{E}^2$, wobei eine der Zahlen $s$, $t$ gleich Null sein darf, also eine der Scharen leer, so daß folgendes gilt:*

a. *Die Punkte $p_1, \ldots, p_s, p_1^*, \ldots, p_s^*, q_1, \ldots, q_t, q_1^*, \ldots, q_t^*$ sind paarweise voneinander verschieden.*

b. *$p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$, liegen in $\mathring{E}^1$, $p_1^*, \ldots, p_s^*, q_1^*, \ldots, q_t^*$ in $\mathring{E}^{*1}$.*

c. *$(p_i, p_i^*)$ und $(p_j, p_j^*)$ $(i, j=1, \ldots, s;\ j \neq i)$ trennen einander in $\dot{E}^2$ nicht. $(q_l, q_l^*)$*

21 – 61173051 105. *Acta mathematica.* Imprimé le 3 juillet 1961

*und* $(q_m, q_m^*)$ $(l, m=1; \ldots, t, \ l \neq m)$ *trennen einander ebenfalls nicht. Dann folgt: In* $E^2$ *gibt es eine St-Mannigfaltigkeit* $M^1$, *die aus* $s+t$ *Sz-Komponenten* $A_1^1, \ldots, A_s^1, B_1^1, \ldots, B_t^1$ *in* $E^2$ *besteht, so daß folgendes gilt:*

a. $A_i^1$ $(i=1, \ldots, s)$ *wird von* $p_i$ *und* $p_i^*$ *berandet,* $B_l^1$ $(l=1, \ldots, t)$ *von* $q_l$ *und* $q_l^*$.

b. $A_1^1, \ldots, A_s^1$ *sind paarweise miteinander punktfremd;* $B_1^1, \ldots, B_t^1$ *sind ebenfalls paarweise miteinander punktfremd.*

c. $A_i^1 B_l^1$ *ist entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt.*

d. $M^1$ *liegt zopfartig in* $E^2$ *bezüglich* $E^1$, $E^{*1}$.

*Beweis.* 1) Hilfssatz 6 gilt für $s+t=1$.

2) Aus der Induktionsannahme, der Hilfssatz gelte für $s+t=v$, folgt seine Gültigkeit für $s+t=v+1$.

Beweis: a. Durch geeignete Bezeichnung der Punkte $p_1, \ldots, p_s$, $p_1^*, \ldots, p_s^*$, $q_1, \ldots, q_t$, $q_1^*, \ldots, q_t^*$ (und bei geeigneter Orientierung der Kanten $E^1$ und $E^{*1}$) läßt sich folgendes erreichen (siehe Fig. 18): $p_1, \ldots, p_s$ liegen in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $E^1$. $q_1, \ldots, q_t$ liegen ebenfalls in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $E^1$, wobei $q_1$ in der Reihe vor $p_1$ liegt, falls $t \neq 0$ ist, $p_1^*, \ldots, p_s^*$ und $q_1^*, \ldots, q_t^*$ liegen in der Reihen folge der Numerierung in $E^{*1}$.

b. $q_1$ zerlegt $E^1$ in zwei z-Komponenten, deren abgeschlossene Hüllen Kanten $E'^1$ und $E''^1$ sind, wobei die Punkte $p_1, \ldots, p_s, q_2, \ldots, q_t$ in $\mathring{E}'^1$ liegen (vgl. Fig. 18). $q_1^*$ zerlegt $E^{*1}$ in zwei z-Komponenten, deren abgeschlossene Hüllen Kanten $E_1^{*1}$ und $E_2^{*1}$ sind, so daß $q_2^*, \ldots, q_t^*$ in $\mathring{E}_1^{*1}$ liegen. Von den Punkten $p_1^*, \ldots, p_s^*$ liegen dann $p_1^*, \ldots, p_a^*$ in $\mathring{E}_2^{*1}$ und $p_{a+1}^*, \ldots, p_s^*$ in $E_1^{*1}$ $(a=0, 1, \ldots, s)$. In $E^2$ gibt es eine abgeschlossene Kante $B_1^1$, so daß $\dot{B}_1^1 = B_1^1 \dot{E}^2 = q_1 + q_1^*$ ist. $B_1^1$ zerlegt $E^2$ in zwei z-Komponenten, deren abgeschlossene Hüllen Flächenstücke $E'^2$ und $E''^2$ sind, wobei $E'^1$ und $E_1^{*1}$ in $\dot{E}'^2$ liegen. In $\mathring{B}_1^1$ sei $r$ ein beliebiger Punkt. $r$ zerlegt $\mathring{B}_1^1$ in zwei offene Kanten, deren eine $r$ und $q_1^*$ als Randpunkte hat und mit $K^{*1}$ bezeichnet wird. In $K^{*1}$ wird eine Reihe von $a$ Punkten $p_1^{*\prime}, \ldots, p_a^{*\prime}$ ausgezeichnet, die, von $r$ nach $q_1^*$ gerechnet, in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $K^{*\prime}$ liegen. Die Kante $E_1^{*1} + \bar{K}^{*1}$ wird mit $E^{*\prime 1}$ bezeichnet.

c. In $\dot{E}'^2$ liegen (vgl. Fig. 18) die Punktepaare $(p_1, p_1^{*\prime}), \ldots, (p_a, p_a^{*\prime})$, $(p_{a+1}, p_{a+1}^*)$, $\ldots, (p_s, p_s^*)$ und $(q_2, q_2^*), \ldots, (q_t, q_t^*)$, wobei nach Induktionsannahme gilt: In $E'^2$ gibt es eine St-Mannigfaltigkeit $M'^1$, die aus $v$ Sz-Komponenten $A_1'^1, \ldots, A_s'^1$ und $B_2'^1, \ldots, B_t'^1$ in $E'^2$ besteht, so daß folgendes gilt:

c. 1. $A_i'^1$ $(i=1, \ldots, a)$ wird von $p_i$ und $p_i^{*\prime}$ berandet, $A_j'^1$ $(j=a+1, \ldots, s)$ von $p_j$ und $p_j^*$, $B_k'^1$ $(k=2, \ldots, t)$ von $q_k$ und $q_k^*$.

c. 2. $A_1'^1, \ldots, A_s'^1$ sind paarweise miteinander punktfremd; $B_2'^1, \ldots, B_t'^1$ sind ebenfalls paarweise miteinander punktfremd.

c. 3. $A_l'^1 B_k'^1$ $(l=1, \ldots, s;\ k=2, \ldots, t)$ ist entweder leer oder ein Punkt.

c. 4. $M'^1$ liegt zopfartig in $E'^2$ bezüglich $E'^1$ und $E^{*\prime 1}$.

d. In $\dot{E}''^2$ liegen die Punktepaare $(p_1^*, p_1^{*\prime}), \ldots, (p_a^*, p_a^{*\prime})$, und es gibt in $E''^2$ eine t-Mannigfaltigkeit $M''$, die aus $a$ z-Komponenten $A_1''^1, \ldots, A_a''^1$ besteht, so daß $A_i''^1$ von $p_i^*$ und $p_i^{*\prime}$ berandet wird. (Ist $a=0$, so ist $M''$ die leere Menge.)

e. $M'^1 + M'' + B_1^1$ ist eine St-Mannigfaltigkeit $M^1$ in $E^2$ mit den geforderten Eigenschaften. Denn die abgeschlossenen Kanten $A_1'^1 + A_1''^1, \ldots, A_a'^1 + A_a''^1, A_{a+1}'^1, \ldots, A_s'^1$ einerseits und die abgeschlossenen Kanten $B_1^1, B_2'^1, \ldots, B_t'^1$ andererseits bilden zwei Scharen mit den geforderten Eigenschaften, wobei sich eine Zopfnumerierung der Doppelpunkte von $M^1$ bezüglich $E^2$ und $E^1$ folgendermaßen ergibt: Die Doppelpunkte von $M'^1$ seien $r_1, \ldots, r_m$. Dabei sei die Numerierung eine (nach Induktionsvoraussetzung existierende) Zopfnumerierung bezüglich $E'^2$ und $E'^1$. Dann sind $r_1, \ldots, r_m$ und $p_1^{*\prime}, \ldots, p_a^{*\prime}$ die Doppelpunkte von $M^1$. Wird dann $p_1^{*\prime} = r_{m+1}, \ldots, p_a^{*\prime} = r_{m+a}$ gesetzt, so ist die Numerierung $r_1, \ldots, r_{m+a}$ eine Zopfnumerierung der Doppelpunkte von $M^1$ bezüglich $E^2$ und $E^1$.

Damit ist Nr. 2 bewiesen.

Mit Nr. 1 und 2 ist Hilfssatz 6 durch Induktion bewiesen.

HILFSSATZ 7. *$E^3$ sei ein Raumstück. $S$ und $T$ seien zwei in $\dot{E}^3$ liegende Mannigfaltigkeiten mit folgenden Eigenschaften:*

a. *Die z-Komponenten von $S$ und $T$ sind 1-dim Sphären $S_1^1, \ldots, S_s^1, T_1^1, \ldots, T_t^1$, wobei eine der Zahlen $s, t$ gleich Null sein kann.*

b. *$S_1^1, \ldots, S_s^1, T_1^1, \ldots, T_t^1$ sind die Sz-Komponenten von $S+T$ in $\dot{E}^3$.*

c. *$S_i^1 T_j^1$ $(i=1, \ldots, s;\ j=1, \ldots, t)$ ist entweder leer oder besteht aus genau zwei Punkten.*

*Dann folgt: In $E^3$ gibt es eine St-Mannigfaltigkeit $M^2$, die aus $s+t$ Sz-Komponenten $A_1^2, \ldots, A_s^2, B_1^2, \ldots, B_t^2$ besteht, so daß folgendes gilt:*

a. *$\dot{A}_i^2$ ist gleich $S_i^1$ und $\dot{B}_j^2$ ist gleich $T_j^1$.*

b. *$A_1^2, \ldots, A_t^2$ sind paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke, $B_1^2, \ldots, B_t^2$ sind ebenfalls paarweise miteinander punkfremde Flächenstücke.*

c. *$A_i^2 B_j^2$ ist entweder leer oder eine Kante.*

*Beweis.* 1) Hilfssatz 7 gilt (siehe Hilfssatz 1) für $t=0$.

2) Aus der Induktionsannahme, der Hilfssatz gelte für $t=v$, folgt seine Gültigkeit für $t=v+1$.

Beweis: In $E^3$ gibt es ein abgeschlossenes Flächenstück $B_1^2$, so daß $\dot{B}_1^2 = B_1^2 \dot{E}^3 = T_1^1$ ist. $T_1^1$ zerlegt $\dot{E}^3$ in zwei offene Flächenstücke $F'^2$ und $F''^2$. Entsprechend zerlegt $B_1^2$ $E^3$ in zwei z-Komponenten, deren abgeschlossene Hüllen Raumstücke $E'^3$ und $E''^3$ sind, so daß $\dot{E}'^3 = F'^2 + B_1^2$ und $\dot{E}''^3 = F''^2 + B_1^2$ ist. Von den Sphären $S_1^1, \ldots, S_s^1$ seien $S_{k_1}^1, \ldots, S_{k_a}^1$ die in $F'^2$ liegenden, $S_{l_1}^1, \ldots, S_{l_b}^1$ die in $F''^2$ liegenden und $S_{m_1}^1, \ldots, S_{m_c}^1$ die $T_1^1$ schneidenden. In $B_1^2$ lassen sich $c$ paarweise miteinander punktfremde Kanten $D_{m_1}^1, \ldots, D_{m_c}^1$ auszeichnen, so daß $\dot{D}_{m_w}^1 = D_{m_w}^1 \dot{E}^3 = S_{m_w}^1 T_1^1$ $(w = 1, \ldots, c)$ ist, da je zwei der Punktepaare $S_{m_1}^1 T_1^1, \ldots, S_{m_c}^1 T_1^1$ einander in $T_1^1$ nicht trennen, Dann gilt:

a. $S_{k_1}^1, \ldots, S_{k_a}^1$ und $S_{m_1}^1 F'^2 + D_{m_1}^1, \ldots, S_{m_c}^1 F'^2 + D_{m_c}^1$ sind $a+c$ paarweise miteinander punktfremde 1-dim Sphären in $\dot{E}'^3$ und werden zur Abkürzung mit $S_1'^1, \ldots, S_{s'}'^1$ bezeichnet. Entsprechend sind $S_{l_1}^1, \ldots, S_{l_b}^1$ und $S_{m_1}^1 F''^2 + D_{m_1}^1, \ldots, S_{m_c}^1 F''^2 + D_{m_c}^1$ $b+c$ paarweise miteinander punktfremde 1-dim Sphären in $\dot{E}''^3$ und werden mit $S_1''^1, \ldots, S_{s''}''^1$ bezeichnet.

b. Von den Sphären $T_2^1, \ldots, T_{v+1}^1$ werden die in $F'^2$ liegenden mit $T_1'^1, \ldots, T_{t'}'^1$ bezeichnet und die in $F''^2$ liegenden mit $T_1''^1, \ldots, T_{t''}''^1$. Dabei ist $S_{i'}'^1 T_{j'}'^1$ $(i' = 1, \ldots, s'$; $j' = 1, \ldots, t')$ bzw. $S_{i''}''^1 T_{j''}''^1$ $(i'' = 1, \ldots, s''$; $j'' = 1, \ldots, t'')$ entweder leer oder besteht aus genau zwei Punkten.

c. In $E'^3$ und in $E''^3$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung je eine St-Mannigfaltigkeit $M'$ bzw. $M''$, die aus Sz-Komponenten $A_1'^2, \ldots, A_{s'}'^2, B_1'^2, \ldots, B_{t'}'^2$ bzw. $A_1''^2, \ldots, A_{s''}''^2, B_1''^2, \ldots, B_{t''}''^2$ besteht, so daß folgendes gilt:

c. 1. $\dot{A}_{i'}'^2 = S_{i'}'^1$, $\dot{B}_{j'}'^2 = T_{j'}'^1$, $\dot{A}_{i''}''^2 = S_{i''}''^1$, $\dot{B}_{j''}''^2 = T_{j''}''^1$.

c. 2. $A_1'^2, \ldots, A_{s'}'^2$ bzw. $A_1''^2, \ldots, A_{s''}''^2$ sind paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke, $B_1'^2, \ldots, B_{t'}'^2$ bzw. $B_1''^2, \ldots, B_{t''}''^2$ sind ebenfalls paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke.

c. 3. $A_{i'}'^2 B_{j'}'^2$ bzw. $A_{i''}''^2 B_{j''}''^2$ ist entweder leer oder eine Kante.

d. $M' + M'' + B_1^2$ ist eine St-Mannigfaltigkeit $M^2$ in $E^3$ mit den geforderten Eigenschaften. Denn die Flächenstücke $A_1'^2, \ldots, A_a'^2$, $A_1''^2, \ldots, A_b''^2$ und $A_{a+1}'^2 + A_{b+1}''^2, \ldots, A_{a+c}'^2 + A_{b+c}''^2$ einerseits und die Flächenstücke $B_1'^2, \ldots, B_{t'}'^2$, $B_1''^2, \ldots, B_{t''}''^2$ und $B_1^2$ andererseits bilden (bei geeigneter Bezeichnung) zwei Scharen mit den für $A_1^2, \ldots, A_s^2$ und $B_1^2, \ldots, B_{v+1}^2$ geforderten Eigenschaften.

Damit ist Nr. 2 beweisen.

Hilfssatz 7 ist damit durch Induktion bewiesen.

HAUPTSATZ 3 (Durchdringungssatz für Normalflächen).

*$\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien zwei $\Theta$-Klassen von Normalflächen, die den Lösungen $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ der P-Gleichungen entsprechen. $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2$ sei verträglich. Dann gibt es zwei Repräsentanten $M_1^2$ und $M_2^2$ aus $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$, so daß folgendes gilt:*

*a. $M_1^2+M_2^2$ ist eine S-Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2$.*

*b. $M_1^2$ und $M_2^2$ sind S-Komponenten von $M_1^2+M_2^2$ in $M^3$.*

*Beweis.* $\omega$ sei eine Hilfsorientierung in $\Phi$.

1) Es gibt zwei Normalflächen $M_1'^2$ und $M_2'^2$ aus $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ und eine Normalfläche $M'^2$ aus der $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2$ entsprechenden $\Theta$-Klasse $\mathfrak{M}$, so daß $M_1'^2$, $M_2'^2$ und $M'^2$ normal bezüglich $\Phi$ liegen. (Siehe Hauptsatz 2, II.)

2) Ist $E^d$ ein F-Raumstück oder ein K$\dot{\text{M}}$-Flächenstück, so gilt:

$M'^2\,\bar{E}^d$ besteht aus $a$ $(a=0, 1, \ldots)$ z-Komponenten $F_1^{d-1}, \ldots, F_a^{d-1}$, so daß $F_i^{d-1}$ das bezüglich $\omega$ $i$-te Element von $M'^2$ in $\bar{E}^d$ ist. Ferner besteht $M_1'^2\,\bar{E}^d$ aus $a_1$ z-Komponenten und $M_2'^2\,\bar{E}^d$ aus $a_2$ z-Komponenten, wobei $a_1+a_2=a$ ist.

$F_1^{d-1}+\ldots+F_{a_1}^{d-1}$ und $F_{a_1+1}^{d-1}+\ldots+F_a^{d-1}$ sind zwei miteinander punktfremde Mengen und werden mit $M_1(E^d)$ bzw. $M_2(E^d)$ bezeichnet.

Liegt ein Element $E^e$ aus $\Phi$ in $\dot{E}^d$, so wird $[M_k(E^d)]\,\bar{E}^e$ mit $M_k(E^e)$ $(k=1, 2)$ bezeichnet.

3). Ist $Q^{*d}$ ein Zentralelement eines P-Raumstückes oder PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstückes $Q^d$, so gilt:

3.1) $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_m$ seien diejenigen $\Theta$-Klassen von P-Normalflächenstücken bzw. PK- bzw. P$\dot{\text{M}}$-Normalkanten, deren Repräsentanten in $\bar{Q}^d$ liegen. $a_1, \ldots, a_m$ seien die Anzahlen der in $M'^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_m$. $a_{11}, \ldots, a_{1m}$ und $a_{21}, \ldots, a_{2m}$ seien entsprechend die Anzahlen der in $M_1'^2$ bzw. $M_2'^2$ liegenden Repräsentanten. Dabei ist $a_{1l}+a_{2l}=a_l$ $(l=1, \ldots, m)$.

3.2) Jeder $\Theta$-Klasse $\mathfrak{Q}_l$ $(l=1, \ldots, m)$ wird eine (beliebige) in $\dot{Q}^d$ liegende PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N_l^1$ zugeordnet, die mit den Repräsentanten aus $\mathfrak{Q}_l$ nicht punktfremd ist. Die in $M'^2$ liegenden Repräsentanten aus $\mathfrak{Q}_l$ werden nun mit $Q_{l1}^{d-1}, \ldots, Q_{la_l}^{d-1}$ bezeichnet, so daß die Punkte $p_{l1}=\dot{Q}_{l1}^{d-1}\,N_l^1, \ldots, p_{la_l}=\dot{Q}_{la_l}^{d-1}\,N_l^1$ bezüglich $\omega$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N_l^1$ liegen. Dann wird

$$\sum_{l=1}^{m}(Q_{l1}^{d-1}+\ldots+Q_{la_{1l}}^{d-1})\,\bar{Q}^{*d} \text{ mit } M_1(Q^{*d}) \text{ bezeichnet.}$$

und

$$\sum_{l=1}^{m}(Q_{la_{1l}+1}^{d-1}+\ldots+Q_{la_l}^{d-1})\,\bar{Q}^{*d} \text{ mit } M_2(Q^{*d}).$$

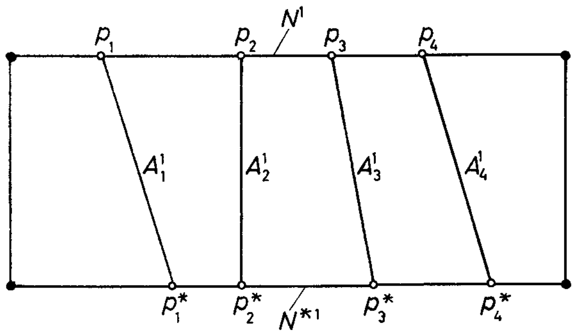



Fig. 19. Unterteilung von $\bar{N}^2$ durch $M_1(N^2)$ für $a = 4$.

Liegt ein Element $E^e$ aus $\Phi$ in $\dot{Q}^{*d}$, so wird $[M_k(Q^{*d})]\bar{E}^e$ $(k=1, 2)$ mit $M_k(E^e)$ bezeichnet.

3.3) $M_k(Q^{*d})$ und $M_k'^2\bar{Q}^{*d}$ sind einander ähnlich bezüglich $\Phi$ (nach Hilfssatz 3, II).

4) Ist $N^2$ ein Nebenflächenstück zu einer PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N^1$ und $N^{*1}$ die in $\dot{N}^2$ liegende Parallelkante zu $N^1$, so gibt es in $\bar{N}^2$ zwei Mannigfaltigkeiten $M_1(N^2)$ und $M_2(N^2)$, so daß folgendes gilt:

a. $M_1(N^2)+M_2(N^2)$ liegt zopfartig in $\bar{N}^2$ bezüglich $\bar{N}^1$ und $\bar{N}^{*1}$. Dabei sind die z-Komponenten von $M_1(N^2)$ und von $M_2(N^2)$ die Sz-Komponenten von $M_1(N^2)+M_2(N^2)$ in $\bar{N}^2$.

b. $[M_k(N^2)]N^1$ $(k=1, 2)$ ist gleich $M_k(N^1)$ und $[M_k(N^2)]N^{*1}=M_k(N^{*1})$.

c. Ist $A^1$ eine z-Komponente von $M_1(N^2)$ und $B^1$ eine z-Komponente von $M_2(N^2)$, so ist $A^1B^1$ entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt.

Beweis: 4.1) $M_1(N^1)$ besteht aus Punkten $p_1, \ldots, p_a$ $(a=0, 1, \ldots)$, wobei diese bezüglich $\omega$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N^1$ liegen mögen (siehe Fig. 19). $M_1(N^{*1})$ besteht aus ebensovielen Punkten $p_1^*, \ldots, p_a^*$, die in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N^{*1}$ liegen mögen. Entsprechend besteht $M_2(N^1)$ aus Punkten $q_1, \ldots, q_b$, und $M_2(N^{*1})$ besteht aus ebensovielen Punkten $q_1^*, \ldots, q_b^*$, die in der Reihenfolge ihrer Numerierung in $N^1$ bzw. $N^{*1}$ liegen.

Beweis: Es ist zu beweisen, daß $M_k(N^1)$ und $M_k(N^{*1})$ aus je gleichvielen Punkten bestehen. $N^2$ liegt in einem P-Raumstück oder PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $Q^d$, wobei $N^{*1}$ im Rande des Zentralelementes $Q^{*d}$ von $Q^d$ liegt. $\dot{N}^1$ liegt dabei im Rande eines F-Raumstückes oder K$\dot{\text{M}}$-Flächenstücks $F^e$. Damit gilt:

a. $M_k(N^1)$ besteht aus ebensovielen Punkten wie $M_k'^2N^1$, da $M_k(F^e)$ und $M_k'^2\bar{F}^e$ aus je gleichvielen z-Komponenten bestehen.

b. $M_k(N^{*1})$ besteht aus ebensovielen Punkten wie $M_k'^2 N^{*1}$, da $M_k(Q^{*d})$ und $M_k'^2 \bar{Q}^{*d}$ einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind.

c. $M_k'^2 N^1$ und $M_k'^2 N^{*1}$ bestehen aus je gleichvielen Punkten.

Daraus folgt 4.1.

4.2) Je zwei der Punktepaare $(p_1, p_1^*), \ldots, (p_a, p_a^*)$ trennen einander in $\dot{N}^2$ nicht. Entsprechend trennen je zwei der Punktepaare $(q_1, q_1^*), \ldots, (q_b, q_b^*)$ einander in $\dot{N}^2$ nicht.

4.3) Nach Hilfssatz 6 gibt es in $\bar{N}^2$ eine St-Mannigfaltigkeit, die aus $a+b$ Sz-Komponen $A_1^1, \ldots, A_a^1, B_1^1, \ldots, B_b^1$ in $\bar{N}^2$ besteht, so daß folgendes gilt:

a. $A_l^1$ $(l=1, \ldots, a)$ wird von $p_l^*$ und $p_l$ berandet (vgl. Fig. 19). $B_m^1$ $(m=1, \ldots, b)$ von $q_m^*$ und $q_m$.

b. $A_1^1, \ldots, A_a^1$ sind paarweise miteinander punktfremd, $B_1^1, \ldots, B_b^1$ sind ebenfalls paarweise miteinander punktfremd. $A_1^1 + \ldots + A_a^1$ und $B_1^1 + \ldots + B_b^1$ werden mit $M_1(N^2)$ bzw. $M_2(N^2)$ bezeichnet.

c. $A_l^1 B_m^1$ ist entweder leer oder ein Punkt.

d. $M_1(N^2) + M_2(N^2)$ liegt zopfartig in $\bar{N}^2$ bezüglich $\bar{N}^1$, $\bar{N}^{*1}$.

$M_1(N^2)$ und $M_2(N^2)$ sind zwei Mannigfaltigkeiten mit den geforderten Eigenschaften. Damit ist Nr. 4 bewiesen.

5) Ist $G^2$ ein PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück mit dem Zentralflächenstück $G^{*2}$, und sind $N_1^1, \ldots, N_s^1$ die in $\dot{G}^2$ liegenden PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten, $N_1^2, \ldots, N_s^2$ die in $G^2$ liegenden Nebenflächenstücke und $N_1^{*1}, \ldots, N_s^{*1}$ die in $G^2$ liegenden Parallelkanten zu $N_1^1, \ldots, N_s^1$, so gilt:

5.1) $M_k(G^{*2}) + M_k(N_1^2) + \ldots + M_k(N_s^2)$ $(k=1, 2)$ wird mit $M_k(G^2)$ bezeichnet und ist zu $M_k'^2 \bar{G}^2$ ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ (wie nach Hilfssatz 3, II folgt).

5.2) Die z-Komponenten von $M_1(G^2)$ und $M_2(G^2)$ sind zugleich die Sz-Komponenten von $M_1(G^2) + M_2(G^2)$ in $\bar{G}^2$.

Beweis: Ist $Z^1$ eine z-Komponente von $M_k(G^2)$, so sind die abgeschlossenen Hüllen der drei 1-dim Elemente aus $\Phi(Z^1)$ S-zusammenhängend in $M_1(G^2) + M_2(G^2)/\bar{G}^2$ und hängen über Randpunkte miteinander zusammen, die keine Doppelpunkte von $M_1(G^2) + M_2(G^2)$ sind. Daraus folgt 5.2.

5.3) $M_1(G^2) + M_2(G^2)$ ist eine S-normal in $\bar{G}^2$ liegende S-Mannigfaltigkeit oder die leere Menge.

5.4) Ist $A_1^1$ eine z-Komponente von $M_1(G^2)$ und $A_2^1$ eine z-Komponente von $M_2(G^2)$, so ist $A_1^1 A_2^1$ entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt.

Beweis: 5.4.1) $\Phi(A_k^1)$ $(k=1,2)$ besteht aus drei offenen Kanten $A_{1k}^1$, $A_{2k}^1$ und $A_k^{*1}$, sowie aus vier Punkten $p_{1k}$, $p_{1k}^*$, $p_{2k}$, $p_{2k}^*$, so daß (bei geeigneter Numerierung) folgendes gilt: $p_{1k}$ und $p_{1k}^*$ sind die Randpunkte von $A_{1k}^1$, $p_{2k}$ und $p_{2k}^*$ die von $A_{2k}^1$, $p_{1k}^*$ und $p_{2k}^*$ die von $A_k^{*1}$; $A_k^{*1}$ ist gleich $A_k^1 G^{*2}$; $p_{1k}$ und $p_{2m}$ $(k, m=1,2)$ liegen in verschiedenen Kanten aus $\Theta$.

5.4.2) Mindestens einer der Durchschnitte $A_{11}^1 A_{12}^1$, $A_{21}^1 A_{22}^1$ ist leer.

Beweis: $\alpha$) 5.4.2 gilt für den Fall, daß $A_1^1$ und $A_2^1$ nicht in derselben $\Theta$-Klasse liegen.

$\beta$) 5.4.2 gilt für den Fall, daß $A_1^1$ und $A_2^1$ in derselben $\Theta$-Klasse $\mathfrak{G}$ liegen.

Beweis: a. Es gibt eine $\mathfrak{G}$ im Sinne von 3.2 zugeordnete PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N_j^1$ $(j=1, \dots, s)$, wobei folgendes gilt:

a.1. Die in $M'^2$ liegenden Repräsentanten $G_1^1, \dots, G_a^1$ aus $\mathfrak{G}$ lassen sich in einer solchen Weise numerieren, daß ihre Schnittpunkte mit $N_j^1$ bezüglich $\omega$ in der Reihenfolge der Numerierung in $N_j^1$ liegen. Dann liegen auch die Durchschnitte von $G_1^1, \dots, G_a^1$ mit $\overline{N}_j^2$ in der Reihenfolge der Numerierung in $\overline{N}_j^2$ und die Durchschnitte mit $N_j^{*1}$ in der Reihenfolge der Numerierung in $N_j^{*1}$.

a.2. Es gibt eine Zahl $a_1$, so daß $G_1^1 \overline{G}^{*2}, \dots, G_{a_1}^1 \overline{G}^{*2}$ in $M_1(G^{*2})$ liegen und $G_{a_1+1}^1 \overline{G}^{*2}, \dots, G_a^1 \overline{G}^{*2}$ in $M_2(G^{*2})$. Dabei liegen keine weiteren Repräsentanten dieser $\Phi$-Klasse in $M_1(G^{*2})$ oder $M_2(G^{*2})$.

b. Einer der beiden Punkte $p_{11}^*$, $p_{21}^*$ ist also gleich $\dot{A}_1^{*1} N_j^{*1}$ und wird mit $p_{l1}^*$ bezeichnet. Entsprechend ist $\dot{A}_2^{*1} N_j^{*1} = p_{l2}^*$, wobei $p_{l1}^*$ in $N_j^{*1}$ (bezüglich $\omega$) vor $p_{l2}^*$ liegt.

Andererseits liegt $p_{l1}$ in $N_j^1$ vor $p_{l2}$. Denn $N_j^1$ liegt im Rande eines F-Raumstückes oder eines K$\dot{\text{M}}$-Flächenstückes $F^d$, und die z-Komponenten von $M_1(F^d)$ liegen in $\overline{F}^d$ (nach Nr. 2) vor den z-Komponenten von $M_2(F^d)$.

Daraus folgt, daß die Punktepaare $(p_{l1}, p_{l1}^*)$ und $(p_{l2}, p_{l2}^*)$ einander in $\dot{N}_j^2$ nicht trennen. Also haben die Kanten $A_{l1}^1$ und $A_{l2}^1$ keinen Schnittpunkt (da sie nach Nr. 4 höchstens einen Schnittpunkt besitzen können). Damit ist $\beta$ bewiesen.

Mit $\alpha$ und $\beta$ ist 5.4.2 bewiesen.

Aus 5.4.1 und 5.4.2 folgt 5.4 nach Nr. 4.

6) Ist $E^3$ ein K-Raumstück oder ein Nebenraumstück zu einem PF-, PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück, so konstruieren wir in $\overline{E}^3$ zwei Mannigfaltigkeiten $M_1(E^3)$ und $M_2(E^3)$:

6.1) a. Ist $E^3$ ein Nebenraumstück zu einem PF-Flächenstück $Q^2$, so gilt: $E^3$ liegt in einem P-Raumstück $P^3$. In $\dot{Q}^2$ liegen zwei PKF-Kanten $N_1^1$ und $N_2^1$; die

Nebenflächenstücke in $P^3$ zu diesen seien $N_1^2$ und $N_2^2$, die Parallelkanten $N_1^{*1}$ und $N_2^{*1}$. Das Parallelflächenstück zu $Q^2$ sei $Q^{*2}$. $M_k(Q^2) + M_k(Q^{*2}) + M_k(N_1^2) + M_k(N_2^2)$ wird mit $M_k(\dot{E}^3)$ bezeichnet.

b. Ist $E^3$ ein Nebenraumstück zu einem PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $Q^2$, so gilt: $E^3$ liegt in einem P-Raumstück $P^3$. Die in $\dot{Q}^2$ liegenden PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten seien $N_1^1, \ldots, N_s^1$, die in $P^3$ liegenden Nebenflächenstücke zu diesen seien $N_1^2, \ldots, N_s^2$, die Parallelkanten $N_1^{*1}, \ldots, N_s^{*1}$. Das Parallelflächenstück zu $Q^2$ sei $Q^{*2}$. Dann wird $M_k(Q^2) + M_k(Q^{*2}) + M_k(N_1^2) + \ldots + M_k(N_s^2)$ mit $M_k(\dot{E}^3)$ bezeichnet.

c. Ist $E^3$ ein K-Raumstück, so gilt: In $\dot{E}^3$ liegen zwei PK-Flächenstücke $Q^2$ und $Q^{*2}$. Die in $\dot{E}^3$ liegenden KF- und K$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke seien $N_1^2, \ldots, N_s^2$. Die offenen Kanten $(\dot{N}_j^2 \dot{Q}^2)^\circ$ $(j = 1, \ldots, s)$ werden mit $N_j^1$ bezeichnet, $(\dot{N}_j^2 \dot{Q}^{*2})^\circ$ mit $N_j^{*1}$ und

$$M_k(Q^2) + M_k(Q^{*2}) + M_k(N_1^2) + \ldots + M_k(N_s^2) \text{ mit } M_k(\dot{E}^3).$$

6.2) Die z-Komponenten von $M_k(\dot{E}^3)$ sind 1-dim Sphären $S_{1k}^1, \ldots, S_{t_k k}^1$, wobei $S_{ik}^1$ $(i = 1, \ldots, t_k)$ genau eine z-Komponente $A_{ik}^1$ von $M_k(Q^2)$ und genau eine z-Komponente $A_{ik}^{*1}$ von $M_k(Q^{*2})$ enthält. Außerdem enthält $S_{ik}^1$ genau je eine z-Komponente aus zwei voneinander verschiedenen Mannigfaltigkeiten $M_k(N_j^2)$.

Beweis: 6.2.1) Es gibt eine eineindeutige Zuordnung $\zeta_k$ zwischen den z-Komponenten von $M_k(Q^2)$ und den z-Komponenten von $M_k(Q^{*2})$, so daß folgendes gilt: Ist $A^1$ eine z-Komponente von $M_k(Q^2)$ und $A^{*1}$ die durch $\zeta_k$ zugeordnete z-Komponente von $M_k(Q^{*2})$, und liegen die Randpunkte $p$ und $q$ von $A^1$ in den Kanten $N_a^1$ bzw. $N_b^1$ $(a, b = 1, \ldots, s$ mit $s = 2$, wenn $Q^2$ ein PF-Flächenstück ist, $a \neq b)$, so liegt ein Randpunkt $p^*$ von $A^{*1}$ in $N_a^{*1}$, der andere Randpunkt $q^*$ in $N_b^{*1}$ und es gilt weiter:

a. Ist $p$ der bezüglich $\omega$ $l$-te Punkt von $M_k(N_a^1)$ in $N_a^1$ und $q$ der $m$-te Punkt von $M_k(N_b^1)$ in $N_b^1$, so ist $p^*$ der $l$-te Punkt von $M_k(N_a^{*1})$ in $N_a^{*1}$ und $q^*$ der $m$-te Punkt von $M_k(N_b^{*1})$ in $N_b^{*1}$.

b. Die bezüglich $\omega$ $l$-te z-Komponente von $M_k(N_a^2)$ in $\overline{N}_a^2$ und die $m$-te z-Komponente von $M_k(N_b^2)$ in $\overline{N}_b^2$ bilden zusammen mit $A^1$ und $A^{*1}$ eine 1-dim Sphäre.

Beweis: $\Psi_k$ sei die durch $M_k(Q^2)$ bewirkte Unterteilung von $\Phi(\overline{Q}^2)$, $\Psi_k^*$ die durch $M_k(Q^{*2})$ bewirkte Unterteilung von $\Phi(\overline{Q}^{*2})$. Entsprechend seien $\Psi_k'$ und $\Psi_k^{*\prime}$ die durch $M_k'^2$ bewirkten Unterteilungen von $\Phi(\overline{Q}^2)$ bzw. $\Phi(\overline{Q}^{*2})$. Es gibt nun eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta_k$ von $\Psi_k$ und $\Psi_k'$ aufeinander bezüglich $\Phi$, durch die $\Phi(M_k(Q^2))$ und $\Phi(M_k'^2 \overline{Q}^2)$ aufeinander abgebildet werden, sowie eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta_k^*$ von $\Psi_k^*$ und $\Psi_k^{*\prime}$ aufeinander, durch die $\Phi(M_k(Q^{*2}))$ und $\Phi(M_k'^2 \overline{Q}^{*2})$ aufeinander abgebildet werden; (dies folgt aus 2 bzw. 5.1 bzw. 3.3).

Es gibt nun eine eineindeutige Zuordnung $\alpha_k$ zwischen den z-Komponenten von $M_k(Q^2)$ und den z-Komponenten von $M_k'^2\bar{Q}^2$, eine eineindeutige Zuordnung $\alpha_k^*$ zwischen den z-Komponenten von $M_k(Q^{*2})$ und den z-Komponenten von $M_k'^2\bar{Q}^{*2}$, sowie eine eineindeutige Zuordnung $\beta_k$ zwischen den z-Komponenten von $M_k'^2\bar{Q}^{*2}$ und den z-Komponenten von $M_k'^2\bar{Q}^2$, so daß folgendes gilt: Werden zwei z-Komponenten einander durch $\alpha_k$ oder $\alpha_k^*$ zugeordnet, so werden die durch $\Phi$ bewirkten Zerlegungen dieser Komponenten durch $\eta_k$ bzw. $\eta_k^*$ aufeinander abgebildet. Werden zwei Komponenten einander durch $\beta_k$ zugeordnet, so liegen sie im Rande einer und derselben z-Komponente von $M_k'^2\bar{E}^3$.

Die Zuordnungen $\alpha_k$, $\beta_k$ und $\alpha_k^*$ ergeben eine Zuordnung $\zeta_k$ mit den geforderten Eigenschaften. Damit ist 6.2.1 bewiesen.

6.2.2) Werden die z-Komponenten von $M_k(Q^2)$ mit $A_{1k}^1, \ldots, A_{t_k k}^1$ bezeichnet, so lassen sich die z-Komponenten von $M_k(Q^{*2})$ mit $A_{1k}^{*1}, \ldots, A_{t_k k}^{*1}$ bezeichnen, so daß $A_{ik}^1$ und $A_{ik}^{*1}$ einander durch $\zeta_k$ zugeordnet werden.

Aus 6.2.1 und 6.2.2 folgt 6.2.

6.3) Die Sphären $S_{11}^1, \ldots, S_{t_1 1}^1, S_{12}^1, \ldots, S_{t_2 2}^1$ sind die Sz-Komponenten von $M_1(\dot{E}^3) + M_2(\dot{E}^3)$ in $\dot{E}^3$.

6.4) Zwei Sphären $S_{l1}^1$ und $S_{m2}^1$ ($l=1, \ldots, t_1$; $m=1, \ldots, t_2$) sind entweder miteinander punktfremd oder besitzen genau zwei gemeinsame Punkte. (Denn $A_{l1}^1 A_{m2}^1$ und $A_{l1}^{*1} A_{m2}^{*1}$ enthalten höchstens je einen Punkt, wobei $A_{l1}^{*1} A_{m2}^{*1}$ im Falle, daß $E^3$ ein Nebenraumstück ist, leer ist; und $S_{l1}^1 S_{m2}^1$ enthält höchstens zwei in Flächenstücken $N_j^2$ liegende Punkte, jedoch im Falle eines K-Raumstückes null.)

6.5) In $\bar{E}^3$ gibt es nach Hilfssatz 7 eine St-Mannigfaltigkeit, die aus $t_1+t_2$ Sz-Komponenten $A_{11}^2, \ldots, A_{t_1 1}^2, A_{12}^2, \cdots, A_{t_2 2}^2$ in $\bar{E}^3$ besteht, so daß folgendes gilt.

a. $\dot{A}_{ik}^2$ ist gleich $S_{ik}^1$.

b. $A_{11}^2, \ldots, A_{t_1 1}^2$ sind paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke, $A_{12}^2, \ldots, A_{t_2 2}^2$ sind ebenfalls paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke.

c. $A_{l1}^2 A_{m2}^2$ ist entweder leer oder ist eine Kante.

$A_{1k}^2 + \ldots + A_{t_k k}^2$ wird mit $M_k(E^3)$ bezeichnet.

7) Ist $P^3$ ein P-Raumstück mit dem Zentralraumstück $P^{*3}$, und sind $J_1^2, \ldots, J_u^2$ die in $\dot{P}^3$ liegenden PF-, PK- und P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke, $J_1^3, \ldots, J_u^3$ die Nebenraumstücke und $J_1^{*2}, \ldots, J_u^{*2}$ die Parallelflächenstücke zu diesen, so gilt:

7.1) $M_k(P^{*3}) + M_k(J_1^3) + \ldots + M_k(J_u^3)$ ($k = 1, 2$) wird mit $M_k(P^3)$ bezeichnet und ist zu $M_k'^2\bar{P}^3$ ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$.

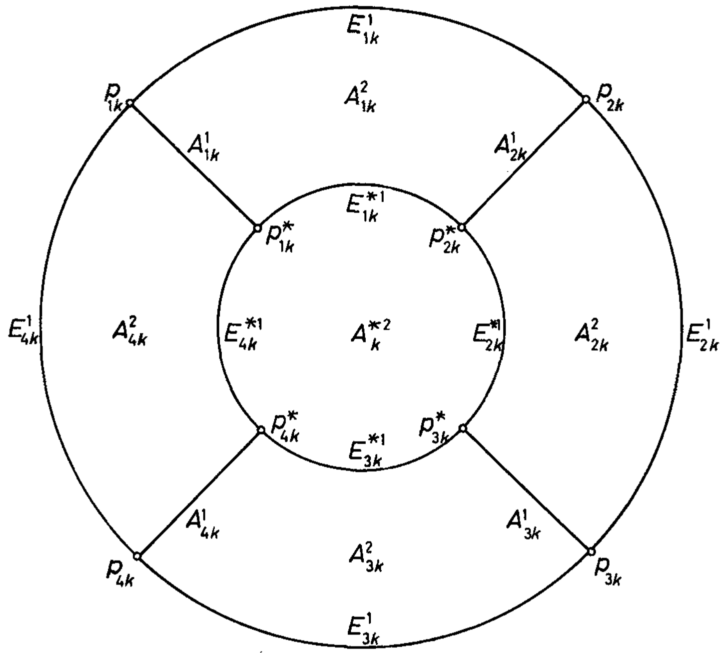



Fig. 20. $A_k^2$ für $s_k = 4$.

Beweis: 7.1.1) Zwischen den z-Komponenten von $M_k(P^{*3})$ und den z-Komponenten von $M_k'^2 P^{*3}$ gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\alpha$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander ähnlich bezüglich $\Phi$ sind (siehe 3.3).

7.1.2) Jede z-Komponente von $M_k(P^3)$ ist ein in $\overline{P}^3$ normal bezüglich $\Phi$ liegendes P-Normalflächenstück.

7.1.3) Zwischen den z-Komponenten von $M_k(P^3)$ und den z-Komponenten von $M_k'^2 \overline{P}^3$ gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\alpha'$, so daß folgendes gilt: Sind zwei Komponenten einander durch $\alpha'$ zugeordnet, so sind ihre Durchschnitte mit $\overline{P}^{*3}$ einander durch $\alpha$ zugeordnet. Dabei sind zwei einander durch $\alpha'$ zugeordnete Komponenten einander ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$. Daraus folgt 7.1 nach Hilfssatz 3, II.

7.2) $M_1(P^3) + M_2(P^3)$ ist eine S-normal in $\overline{P}^3$ liegende S-Mannigfaltigkeit oder die leere Menge. Dabei sind die z-Komponenten von $M_1(P^3)$ und von $M_2(P^3)$ zugleich die Sz-Komponenten von $M_1(P^3) + M_2(P^3)$ in $\overline{P}^3$.

Beweis: 7.2.1) Der Durchschnitt $M_1(P^3)M_2(P^3)$ ist entweder leer oder eine 1-dim Mannigfaltigkeit $D^1$ mit $\dot{D}^1 = D^1 \dot{P}^3$. Dabei liegen die Punkte von $D^1$ ausschließlich in den Elementen $J_1^2, \ldots, J_u^2, J_1^3, \ldots, J_u^3$ und in Nebenflächenstücken zu PKF- und PK$\dot{M}$-Kanten.

7.2.2) Ist $Z^2$ eine z-Komponente von $M_k(P^3)$, so ist $Z^2$ eine Sz-Komponente von $M_1(P^3) + M_2(P^3)$ in $\overline{P}^3$.

Beweis: Die abgeschlossenen Hüllen der 2-dim Elemente aus $\Phi(Z^2)$ sind S-zusammenhängend in $M_1(P^3)+M_2(P^3)/\overline{P}^3$ und lassen sich so in einer Reihe anordnen, daß zwei aufeinander folgende Elemente mindestens eine Randkante gemeinsam haben, also auch Punkte gemeinsam haben, die nicht Doppelpunkte von $M_1(P^3)+M_2(P^3)$ sind. Daraus folgt 7.2.2.

7.2.3) Ist $D'^1$ eine z-Komponente von $D^1$, so ist $D'^1$ berandet, und die beiden Randpunkte von $D'^1$ liegen nicht in einem und demselben Element aus $\Phi$ und liegen nicht beide in $\dot{P}^3\dot{M}^3$.

Beweis: $\alpha$) $D'^1$ liegt im Durchschnitt einer z-Komponente $A_1^2$ von $M_1(P^3)$ und einer z-Komponente $A_2^2$ von $M_2(P^3)$. Dabei gilt (siehe Fig. 20):

a. $\Theta(\dot{A}_k^2)$ $(k=1, 2)$ besteht aus offenen Kanten $E_{1k}^1, \dots, E_{s_k k}^1$ und Punkten $p_{1k}, \dots, p_{s_k k}$, so daß $p_{ik}$ und $p_{i+1\,k}$ $(i=1, \dots, s_k$ mit $p_{s_k+1\,k}=p_{1k})$ die Randpunkte von $E_{ik}^1$ sind.

b. $\Phi(\mathring{A}_k^2)$ besteht aus offenen Flächenstücken $A_{1k}^2, \dots, A_{s_k k}^2$ und $A_k^{*2}$, aus offenen Kanten $A_{1k}^1, \dots, A_{s_k k}^1$ und $E_{1k}^{*1}, \dots, E_{s_k k}^{*1}$ und aus Punkten $p_{1k}^*, \dots, p_{s_k k}^*$, so daß folgendes gilt: $\dot{A}_{ik}^2\dot{A}_k^2=\overline{E}_{ik}^1$ $(i=1, \dots, s_k)$, $\dot{A}_{ik}^2\dot{A}_k^{*2}=E_{ik}^{*1}$, $\dot{A}_k^2\dot{A}_k^{*2}$ ist leer; $p_{ik}^*$ und $p_{i+1k}^*$ (mit $p_{s_k+1k}^*=p_{1k}^*$) sind die Randpunkte von $E_{ik}^{*1}$, $p_{ik}$ und $p_{ik}^*$ die von $A_{ik}^1$; $A_{ik}^1$ und $A_{i+1k}^1$ (mit $A_{s_k+1k}^1=A_{1k}^1$) liegen in $\dot{A}_{ik}^2$.

c. $\Phi(D'^1)$ besteht aus offenen Kanten $D_1^1, \dots, D_t^1$ mit $t>1$ und einzelnen Punkten, so daß $\overline{D}_j^1$ mit $\overline{D}_{j+1}^1$ zusammenhängt $(j=1, \dots, t-1)$. Nach Hilfssatz 5 gilt dabei: Es ist $t\leqslant s_1+1$ und $t\leqslant s_2+1$ und bei geeigneter Numerierung der unter a und b genannten Elemente liegt $D_i^1$ in $A_{i1}^2$ und in $A_{i2}^2$ $(i=1, \dots, t)$, wenn für den Fall, daß $i=s_k+1$ ist, $A_{s_k+1k}^2=A_{1k}^2$ und entsprechend $E_{s_k+1k}^1=E_{1k}^1$ und $E_{s_k+1k}^{*1}=E_{1k}^{*1}$ gesetzt wird.

$\beta$) 7.2.3 gilt für den Fall, daß $A_1^2$ und $A_2^2$ nicht in derselben P-Klasse liegen.

Beweis:

$\beta$.1) Es ist nicht $t=s_1=s_2$ und nicht $t=s_1+1=s_2+1$.

Beweis: Aus der Annahme, es sei $t=s_1=s_2$ oder $t=s_1+1=s_2+1$, folgt: Es ist $s_1=s_2=s$, und die beiden Flächenstücke $A_{j1}^2$ und $A_{j2}^2$ liegen in einem und demselben Raumstück aus $\Phi$ (für alle $j=1, \dots, s$). Daraus folgt, daß $A_1^2$ und $A_2^2$ einander bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ ähnlich sind (siehe Hilfssatz 3, I). Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, also ist die Annahme falsch und $\beta$.1 damit bewiesen.

$\beta$.2) $D'^1$ ist berandet (da anderenfalls nach Hilfssatz 5 $t=s_1=s_2$ wäre).

$\beta$.3) Der in $E_{11}^1E_{12}^1$ liegende Randpunkt von $D'^1$ sei $p$, der in $E_{t1}^1E_{t2}^1$ liegende

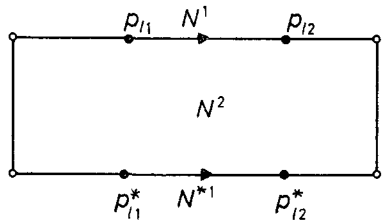



Fig. 21. $\bar{N}^2$ mit den Punkten $p_{lk}$ und $\overset{*}{p}_{lk}$. $\omega$ ist durch Pfeile angedeutet.

sei $q$. Dabei liegen $p$ und $q$ nicht in demselben Element aus $\Phi$ und nicht beide in $\dot{P}^3\,\dot{M}^3$ (da anderenfalls $t = s_1 + 1 = s_2 + 1$ wäre).

Mit $\beta.2$ and $\beta.3$ ist $\beta$ bewiesen.

$\gamma$) 7.2.3 gilt für den Fall, daß $A_1^2$ und $A_2^2$ in derselben P-Klasse $\mathfrak{P}$ liegen.

Beweis: $\gamma$. 1) Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta$ von $\Phi(A_1^2)$ und $\Phi(A_2^2)$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Es ist $s_1 = s_2 = s$, und durch $\eta$ werden $A_{i1}^2$ und $A_{i2}^2$ $(i = 1, \dots, s)$ einander zugeordnet, sowie $A_{i1}^1$ und $A_{i2}^1$.

$\gamma$.2) Es gibt mindestens eine Zahl $l$ $(l = 1, \dots, s)$, so daß $D'^1$ mit $A_{l1}^1$ und mit $A_{l2}^1$ punktfremd ist.

Beweis: a. Es gibt eine $\mathfrak{P}$ im Sinne von 3.2 zugeordnete PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N^1$; dabei sei $N^2$ das in $P^3$ liegende Nebenflächenstück und $N^{*1}$ die in $P^3$ liegende Parallelkante zu $N^1$. Dann gilt:

a.1. Die in $M'^2$ liegenden Repräsentanten $P_1^2, \dots, P_a^2$ aus $\mathfrak{P}$ lassen sich in einer solchen Weise numerieren, daß ihre Schnittpunkte mit $N^1$ bezüglich $\omega$ in der Reihenfolge der Numerierung in $N^1$ liegen. Dann liegen auch die Durchschnitte von $P_1^2, \dots, P_a^2$ mit $\bar{N}^2$ in der Reihenfolge der Numerierung in $\bar{N}^2$ und die Durchschnitte mit $N^{*1}$ in der Reihenfolge der Numerierung in $N^{*1}$.

a.2. Es gibt eine Zahl $a_1$, so daß $P_1^2\,\bar{P}^{*3}, \dots, P_{a_1}^2\,\bar{P}^{*3}$ in $M_1(P^{*3})$ liegen und $P_{a_1+1}^2\,\bar{P}^{*3}, \dots, P_a^2\,\bar{P}^{*3}$ in $M_2(P^{*3})$. Dabei liegen keine weiteren Repräsentanten dieser $\Phi$-Klasse in $M_1(P^{*3})$, $M_2(P^{*3})$.

b. $\dot{A}_1^{*2}\,N^{*1}$ ist einer der Punkte $\overset{*}{p}_{11}, \dots, \overset{*}{p}_{s1}$, also etwa $\overset{*}{p}_{l1}$. Dann ist (nach $\gamma$.1) $\dot{A}_2^{*2}\,N^{*1} = \overset{*}{p}_{l2}$, und $\overset{*}{p}_{l1}$ liegt in $N^{*1}$ vor $\overset{*}{p}_{l2}$ (siehe Fig. 21).

Andererseits liegt $p_{l1}$ in $N^1$ vor $p_{l2}$. Denn $N^1$ liegt im Rande eines F-Raumstückes oder K$\dot{M}$-Flächenstückes $F^d$, und die z-Komponenten von $M_1(F^d)$ liegen in $\bar{F}^d$ vor den z-Komponenten von $M_2(F^d)$. Daraus folgt, daß die Punktepaare $(p_{l1}, \overset{*}{p}_{l1})$ und $(p_{l2}, \overset{*}{p}_{l2})$ einander in $\dot{N}^2$ nicht trennen. Also haben die Kanten $A_{l1}^1$ und $A_{l2}^1$ keinen Schnittpunkt (da sie nach Nr. 4 höchstens einen Schnittpunkt besitzen). Also ist $D'^1$ mit $A^1_{l1}$ und $A^1_{l2}$ punktfremd, womit $\gamma$.2 bewiesen ist.

$\gamma$.3). Aus $\gamma$.2 folgt nach Hilfssatz 5: $D'^1$ ist berandet, wobei ein Randpunkt $p$ in $E^1_{11} E^1_{12}$ liegt und der andere Randpunkt $q$ in $E^1_{t1} E^1_{t2}$, wobei $t \leqslant s$ ist.

$\gamma$.4) $p$ und $q$ liegen in voneinander verschiedenen Flächenstücken aus $\Phi$ und liegen nicht beide in $\dot{P}^3 \dot{M}^3$ (da anderenfalls $t = s+1$ wäre).

Mit $\gamma$.3 und $\gamma$.4 ist $\gamma$ bewiesen.

Mit $\beta$ und $\gamma$ ist 7.2.3 bewiesen.

Aus 7.2.1, 7.2.2 und 7.2.3 folgt 7.2.

8) Sind $F^3_1, \ldots, F^3_u$ die F-Raumstücke aus $\Theta$, $K^3_1, \ldots, K^3_v$ die K-Raumstücke und $P^3_1, \ldots, P^3_w$ die P-Raumstücke, so wird

$$\sum_{i=1}^{u} M_k(F^3_i) + \sum_{i=1}^{v} M_k(K^3_i) + \sum_{i=1}^{w} M_k(P^3_i) \quad (k=1,\ 2)$$

mit $M^2_k$ bezeichnet und ist ein Repräsentant aus $\mathfrak{M}_k$. Dabei ist $M^2_1 + M^2_2$ eine S-Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$, und $M^2_1$ und $M^2_2$ sind S-Komponenten von $M^2_1 + M^2_2$ in $M^3$.

Beweis: 8.1) $M^2_k$ ist eine Normalfläche.

8.2) Der P-Zahlenvektor von $M^2_k$ ist gleich $\mathfrak{x}_k$.

8.3) $M^2_1 + M^2_2$ ist eine S-Normalfläche.

8.4) $M^2_1$ und $M^2_2$ sind S-Komponenten von $M^2_1 + M^2_2$ in $M^3$.

Beweis: Ist $Z^2$ eine z-Komponente von $M^2_k$ $(k=1,\ 2)$, so ist $Z^2$ eine Sz-Komponente von $M^2_1 + M^2_2$ in $M^3$, woraus 8.4 folgt.

Beweis: Die abgeschlossenen Hüllen der 2-dim Elemente aus $\Theta(Z^2)$ sind S-zusammenhängend in $M^2_1 + M^2_2 / M^3$ und lassen sich so in einer Reihe anordnen, daß zwei aufeinander folgende Elemente mindestens eine Randkante gemeinsam haben, also auch Punkte gemeinsam haben, die nicht Doppelpunkte von $M^2_1 + M^2_2$ sind. Daraus folgt die Behauptung.

Aus 8.1 bis 8.4 und Hauptsatz 2, II folgt Nr. 8.

Mit Nr. 8 ist Hauptsatz 3 bewiesen.

# Viertes Kapitel

# Umschaltungen

In diesem Kapitel soll nachgewiesen werden, daß es bei gegebener S-Normalfläche $M^2$ längs jeder Durchdringungslinie von $M^2$ genau eine Umschaltung so gibt, daß wieder eine S-Normalfläche entsteht. Die entstehende S-Normalfläche besitzt dabei denselben P-Zahlenvektor wie $M^2$. Diese Umschaltungen bezeichnen wir als *regulär*, sie lassen sich in beliebiger Reihenfolge an $M^2$ ausführen. Wird eine Reihe von Umschaltungen an $M^2$ ausgeführt, deren mindestens eine nicht regulär ist (also zu der regulären „entgegengesetzt"), so entsteht eine S-Halbnormalfläche $H^2$, die stets mindestens eine Falte enthält, so daß diese Falte S-zusammenhängend in $H^2/M^3$ ist.

## 1. Umschaltungen an S-Mannigfaltigkeiten

Wir haben zunächst den Begriff der Umschaltung zu definieren. Wir verstehen darunter eine Operation, durch die aus einer S-Mannigfaltigkeit stets wieder eine S-Mannigfaltigkeit hervorgeht. Es handelt sich dabei also um eine Operation, die man nach [2] als „Umschaltung mit nachfolgender kleiner Abänderung zur Beseitigung der Berührungssingularitäten" bezeichnen müßte. Ist $D^1$ eine Durchdringungslinie einer S-Mannigfaltigkeit $M^2$, und ist $U$ eine kleine Umgebung von $D^1$ in $M^3$, so bezeichnen wir als eine Umschaltung das Fortlassen des Durchschnittes $M^2 U$ aus $M^2$ und das anschließende Einsetzen von Teilen des Randes von $U$ und definieren:

Definition 1. Eine Zuordnung $\sigma$ von Mannigfaltigkeiten $V^{d-1}$ und $W^{d-1}$ zu einem S-Polyeder $A^{d-1}$ heißt eine *Umschaltung von $A^{d-1}$ über $W^{d-1}$*, wenn folgendes gilt:

a. Es gibt eine $d$-dim Mannigfaltigkeit $M^d$, eine St-Mannigfaltigkeit $M^{d-1}$ in $M^d$, eine z-Komponente $D^{d-2}$ der Durchdringung von $M^{d-1}$ und eine im Verhältnis zu $M^{d-1}$ kleine Umgebung $U^d$ von $D^{d-2}$ in $M^d$, so daß $U^d$ orientierbar ist, $A^{d-1} = M^{d-1} U^d$ und $W^{d-1} = \overline{(\dot{U}^d - \dot{M}^d)}$.

b. Besteht $W^{d-1} - \dot{A}^{d-1}$ aus zwei z-Komponenten, so ist $V^{d-1}$ gleich der abgeschlossenen Hülle einer von diesen.

c. Besteht $W^{d-1} - \dot{A}^{d-1}$ aus vier z-Komponenten $V_1^{d-1}, \ldots, V_4^{d-1}$ (siehe Fig. 22) und ist $\dot{V}_1^{d-1}$ mit $\dot{V}_2^{d-1}$ punktfremd, so ist $V^{d-1}$ entweder gleich $\overline{V}_1^{d-1} + \overline{V}_2^{d-1}$ oder gleich $\overline{V}_3^{d-1} + \overline{V}_4^{d-1}$.

$V^{d-1}$ heißt das *$\sigma$-Komplement von $A^{d-1}$*, wir verwenden dafür die Bezeichnung $\sigma A^{d-1}$.

Definition 2. Zwei Umschaltungen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ von $A^{d-1}$ über $W^{d-1}$ heißen

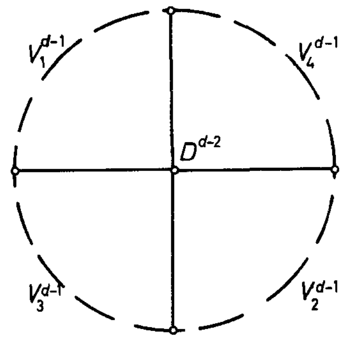



Fig. 22. $A^{d-1}$ und $W^{d-1}$ ($W^{d-1}$ gestrichelt) für $d = 2$.

*einander entgegengesetzt*, wenn $\sigma_1 A^{d-1} \neq \sigma_2 A^{d-1}$ ist. Die Abkürzung $\bar{\sigma}$ bedeutet stets die zu $\sigma$ entgegengesetzte Umschaltung.

Definition 3. $\sigma$ sei eine Umschaltung von $A^{d-1}$ über $W^{d-1}$ ($d=2$ oder 3). $M^{d-1}$ sei ein S-Polyeder.

I. $\sigma$ heißt *an $M^{d-1}$ ausführbar*, wenn es eine $d$-dim Mannigfaltigkeit $M^d$ gibt, sowie eine z-Komponente $D^{d-2}$ der Durchdringung von $M^{d-1}$ und eine im Verhältnis zu $M^{d-1}$ kleine orientierbare Umgebung $U^d$ von $D^{d-2}$ in $M^d$, so daß $A^{d-1} = M^{d-1} U^d$ ist und $W^{d-1} = (\overline{\dot{U}^d - \dot{M}^d})$.

II. Ein S-Polyeder $M'^{d-1}$ heißt das *aus $M^{d-1}$ durch $\sigma$ hervorgehende* S-Polyeder, wenn einer der beiden Fälle vorliegt:

a. $\sigma$ ist an $M^{d-1}$ ausführbar und $M'^{d-1}$ ist gleich $(M^{d-1} - A^{d-1}) + \sigma A^{d-1}$ oder

b. $M^{d-1}$ ist mit $A^{d-1}$ und $W^{d-1}$ punktfremd und $M'^{d-1}$ ist gleich $M^{d-1}$.

$\sigma M^{d-1}$ bedeutet das aus $M^{d-1}$ durch $\sigma$ hervorgehende Polyeder.

Definition 4. $\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung einer Mannigfaltigkeit $M^d$ ($d = 2$ oder 3) in offene Raumelemente. $M^{d-1}$ sei eine bezüglich $\Delta$ elementar liegende St-Mannigfaltigkeit in $M^d$ und $\sigma$ eine Umschaltung von $A^{d-1}$ über $W^{d-1}$. Dann heißt $\sigma$ *regulär bezüglich $M^{d-1}$ und $\Delta$*, wenn folgendes gilt:

a. Es gibt eine z-Komponente $D^{d-2}$ der Durchdringung von $M^{d-1}$ und eine im Verhältnis zu $M^{d-1}|\Delta$ kleine orientierbare Umgebung $U^d$ von $D^{d-2}$ in $M^d$, so daß $A^{d-1} = M^{d-1} U^d$ ist und $W^{d-1} = (\overline{\dot{U}^d - \dot{M}^d})$.

b. Ist $E^d$ ein $d$-dim Element aus $\Delta$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Sz-Komponenten von $M^{d-1}\overline{E}^d$ in $\overline{E}^d$ und den Sz-Komponenten von $(\sigma M^{d-1})\overline{E}^d$ in $\overline{E}^d$, so daß einander zugeordnete Elemente einander bezüglich $\Delta$ ähnlich sind.

Definition 5. $\sigma$ sei eine Umschaltung von $A^{d-1}$ über $W^{d-1}$ ($d=2$ oder 3). $M^e$ sei eine $e$-dim Mannigfaltigkeit ($e=2$ oder 3). Dann heißt eine Umschaltung $\sigma^*$ eine *durch $\sigma$ in $M^e$ bewirkte Umschaltung*, wenn folgendes gilt:

a. $\sigma^*$ ist eine Umschaltung einer z-Komponente $A^{*e-1}$ von $A^{d-1} M^e$ über eine z-Komponente $W^{*e-1}$ von $W^{d-1} M^e$.

b. $\sigma^* A^{*e-1}$ ist gleich $(\sigma A^{d-1}) M^e$.

Folgerung 1. *$M^d$ sei eine d-dim Mannigfaltigkeit mit $d=2$ oder 3, $M^{d-1}$ eine St-Mannigfaltigkeit in $M^d$. $D_1^{d-2}, \ldots, D_s^{d-2}$ seien die Durchdringungslinien bzw. Doppelpunkte von $M^{d-1}$. $U_1^d, \ldots, U_s^d$ seien im Verhältnis zu $M^{d-1}$ kleine orientierbare Umgebungen von $D_1^{d-2}, \ldots, D_s^{d-2}$ in $M^d$ und paarweise miteinander punktfremd. Sind nun $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_t}$ ($i_1, \ldots, i_t$ zwischen 1 und s und paarweise verschieden) Umschaltungen von $M^{d-1} U_{i_1}^d, \ldots, M^{d-1} U_{i_t}^d$ über $\overline{(\dot{U}_{i_1}^d - \dot{M}^d)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_{i_t}^d - \dot{M}^d)}$, so folgt:*

I. *Ist $j$ zwischen 1 und s von $i_1, \ldots, i_t$ verschieden, so ist $U_j^d$ klein im Verhältnis zu $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$ (für alle $j=1, \ldots, s$). Ist insbesondere $\Xi$ eine Zerlegung von $M^d$ und sind $U_1^d, \ldots, U_s^d$ klein im Verhältnis zu $\Xi | M^{d-1}$, so ist $U_j^d$ auch klein im Verhältnis zu $\Xi | \sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$.*

II. *$\sigma_{i_u}$ ist an $\sigma_{i_{u-1}} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$ ausfürbar ($u=1, \ldots, t$).*

III. *$\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$ ist eine St-Mannigfaltigkeit in $M^d$. Ist insbesondere $\Delta$ eine randtreue Zerlegung von $M^d$ in offene Mannigfaltigkeiten, liegt $M^{d-1}$ transversal bezüglich $\Delta$, und sind $U_1^d, \ldots, U_s^d$ klein im Verhältnis zu $M^{d-1} | \Delta$, so liegt auch $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$ transversal bezüglich $\Delta$.*

IV. *Ist $(j_1, \ldots, j_t)$ eine beliebige Permutation der Zahlen $i_1, \ldots, i_t$, so ist*

$$\sigma_{j_t} \ldots \sigma_{j_1} M^{d-1} = \sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}.$$

V. *Die S-Charakteristik von $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}$ ist gleich der S-Charakteristik von $M^{d-1}$.*

*Beweis.* I. $U_j'^d$ sei eine im Verhältnis zu $M^{d-1} | U_{i_1}^d | \ldots | U_{i_t}^d$ kleine Umgebung von $U_j^d$ in $M^d$. Dann ist $M^{d-1} U_j'^d = (\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^{d-1}) U_j'^d$ und die Behauptung folgt aus der Folgerung 4 in Kapitel I, Abschnitt 2.

Die Beweise von III–IV sind leicht zu finden.

V folgt durch Induktion nach $t$.

Folgerung 2. *$\Delta$ sei eine randtreue Zerlegung einer d-dim Mannigfaltigket $M^d$ mit $d=2$ oder 3 in offene Mannigfaltigkeiten, $M^{d-1}$ sei eine bezüglich $\Delta$ transversal liegende S-Mannigfaltigkeit in $M^d$. $D^{d-2}$ sei eine Durchdringungslinie bzw. ein Doppelpunkt von $M^{d-1}$, $U^d$ sei eine im Verhältnis zu $M^{d-1} | \Delta$ kleine orientierbare Umgebung* *von* $D^{d-2}$ *in* $M^d$. $\sigma$ *sei eine Umschaltung von* $M^{d-1} U^d$ *über* $\overline{(\dot{U}^d - \dot{M}^d)}$. $E^e$ $(e=2$ *oder* $3)$ *sei ein Element aus* $\Delta$. *Dann gilt:*

I. *Ist* $U'^e$ *eine z-Komponente von* $U^d \overline{E}^e$, *so gibt es genau eine durch* $\sigma$ *in* $\overline{E}^e$ *bewirkte Umschaltung* $\sigma'$ *von* $M^{d-1} U'^e$ *über* $\overline{(\dot{U}'^e - \dot{E}^e)}$ *und es gilt:*

a. $\sigma'$ *ist an* $M^{d-1} \overline{E}^e$ *ausführbar.*

b. *Die durch* $\bar{\sigma}$ *in* $\overline{E}^e$ *bewirkte Umschaltung von* $M^{d-1} U'^e$ *über* $\overline{(\dot{U}'^e - \dot{E}^e)}$ *ist* $\bar{\sigma}'$.

II. *Sind* $\sigma_1', \ldots, \sigma_m'$ *sämtliche durch* $\sigma$ *in* $\overline{E}^e$ *bewirkten Umschaltungen, so ist* $\sigma_m' \ldots \sigma_1' (M^{d-1} \overline{E}^e) = (\sigma M^{d-1}) \overline{E}^e$.

III. *Ist* $U'^e$ *eine z-Komponente von* $U^d \overline{E}^e$, *und ist* $\sigma'$ *eine Umschaltung von* $M^{d-1} U'^e$ *über* $\overline{(\dot{U}'^e - \dot{E}^e)}$, *so gibt es genau eine Umschaltung von* $M^{d-1} U^d$ *über* $\overline{(\dot{U}^d - \dot{M}^d)}$, *durch die* $\sigma'$ *bewirkt wird.*

## 2. Umschaltungen an zopfartigen S-Mannigfaltigkeiten

Eine S-Normalfläche schneidet die Nebenflächenstücke zu den PKF- und PK$\dot{\text{M}}$-Kanten in zopfartigen S-Mannigfaltigkeiten. Wir beweisen zunächst, daß für zopfartige S-Mannigfaltigkeiten ein Umschaltungssatz gilt, der dem später für S-Normalflächen zu beweisenden Satz analog ist.

Hilfssatz 8. $E^2$ *sei ein abgeschlossenes Flächenstück,* $E^1$ *und* $E^{*1}$ *zwei miteinander punktfremde abgeschlossene Kanten in* $\dot{E}^2$. $\Delta$ *sei eine randtreue Zerlegung von* $E^2$ *in offene Raumelemente, die* $\mathring{E}^2$, $\mathring{E}^1$ *und* $\mathring{E}^{*1}$ *als Elemente enthält.* $M^1$ *sei eine zopfartig bezüglich* $E^1$ *und* $E^{*1}$ *in* $E^2$ *liegende* S-*Mannigfaltigkeit.* $p$ *sei ein Doppelpunkt von* $M^1$. *Dann folgt:*

I. *Es gibt genau zwei Sz-Komponenten* $A_1^1$ *und* $A_2^1$ *von* $M^1$ *in* $E^2$, *die* $p$ *enthalten* (*siehe Fig.* 23). *Dabei bestehen* $\mathring{A}_1^1 - p$ *und* $\mathring{A}_2^1 - p$ *aus je genau zwei z-Komponenten* $B_1^1$ *und* $B_1^{*1}$ *bzw.* $B_2^1$ *und* $B_2^{*1}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a. $B_1^1$ *und* $B_2^1$ *werden von* $p$ *und von je einem in* $\mathring{E}_1$ *liegenden Punkt berandet.*

b. $B_1^{*1}$ *und* $B_2^{*1}$ *werden von* $p$ *und von je einem in* $\mathring{E}^{*1}$ *liegenden Punkt berandet.*

c. $B_1^1$ *und* $B_2^1$ *sind mit* $B_1^{*1}$ *und mit* $B_2^{*1}$ *punktfremd.*

II. *Ist* $U^2$ *eine im Verhältnis zu* $M^1$ *kleine Umgebung von* $p$ *in* $E^2$, *so gilt: Es gibt genau eine Umschaltung* $\sigma$ *von* $M^1 U^2$ *über* $\dot{U}^2$, *die bezüglich* $M^1$ *und* $\Delta$ *regulär ist. Dabei liegt* $\sigma M^1$ *zopfartig in* $E^2$ *bezüglich* $E^1$ *und* $E^{*1}$.

III. *Es gibt eine Sz-Komponente von* $\bar{\sigma} M^1$ *in* $E^2$, *deren beide Randpunkte in* $\mathring{E}^1$ *liegen. Diese besteht aus* $\overline{B}_1^1 - \mathring{U}^2$, $\overline{B}_2^1 - \mathring{U}^2$ *und einer z-Komponente von* $\dot{U}^2 - M^1$.

IV. $p'$ *sei ein von* $p$ *verschiedener Doppelpunkt von* $M^1$. $U'^2$ *sei eine mit* $U^2$

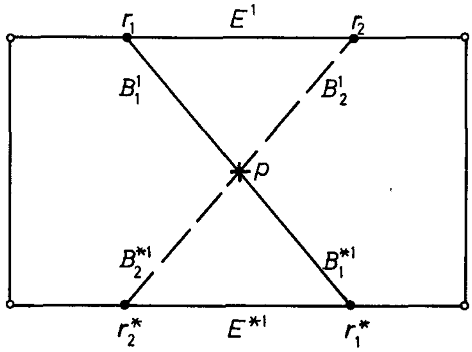



Fig. 23. $E^2$ mit $A_1^1$ (ausgezogen) und $A_2^1$ (gestrichelt). ($B_1^1$ und $B_2^1$, sowie $B_1^{*1}$ und $B_2^{*1}$ können Schnittpunkte miteinander haben.)

*punktfremde, im Verhältnis zu $M^1$ kleine Umgebung von $p'$ in $E^2$. $\sigma'$ sei die bezüglich $M^1$ und $\Delta$ reguläre Umschaltung von $M^1 U'^2$ über $\mathring{U}'^2$. Dann ist $\sigma$ auch regulär bezüglich $\sigma' M^1$ und $\Delta$.*

V. *$p_1, \ldots, p_s$ seien (voneinander verschiedene) Doppelpunkte von $M^1$; $U_1^2, \ldots, U_s^2$ seien paarweise miteinander punktfremde im Verhältnis zu $M^1$ kleine Umgebungen von $p_1, \ldots, p_s$ in $E^2$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ seien Umschaltungen von $M^1 U_1^2, \ldots, M^1 U_s^2$ über $\mathring{U}_1^2, \ldots, \mathring{U}_s^2$. Dann folgt:*

V.1. *Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ regulär bezüglich $M^1$ und $\Delta$, so ist $\sigma_s$ die bezüglich $\sigma_{s-1} \ldots \sigma_1 M^1$ und $\Delta$ reguläre Umschaltung von $(\sigma_{s-1} \ldots \sigma_1 M^1)\, U_s^2$ über $\mathring{U}_s^2$, und $\sigma_s \sigma_{s-1} \ldots \sigma_1 M^1$ liegt zopfartig in $E^2$ bezüglich $E^1$ und $E^{*1}$.*

V.2. *Ist mindestens eine der Umschaltungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ nicht regulär bezüglich $M^1$ und $\Delta$, so gibt es (mindestens) eine Sz-Komponente von $\sigma_s \ldots \sigma_1 M^1$ in $E^2$, deren beide Randpunkte in $\mathring{E}^1$ liegen.*

*Beweis.* 1) Beweis von I bis IV:

1.1) Es gibt eine Zopfnumerierung $p_1, \ldots, p_t$ der Doppelpunkte von $M^1$ bezüglich $E^2$ und $E^1$. $p$ ist dabei gleich einem Punkte $p_i$ $(i = 1, \ldots, t)$. Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $A_1^1$ und $A_2^1$ von $M^1$ in $E^2$, die $p_i$ enthalten. Die in $\mathring{E}^1$ liegenden Randpunkte von $A_1^1$ und $A_2^1$ seien $r_1$ bzw. $r_2$ (vgl. Fig. 23). $r_k$ und $p_i$ $(k = 1, 2)$ sind die Randpunkte einer z-Komponente $B_k^1$ von $\mathring{A}_k^1 - p_i$. Die von $B_k^1$ verschiedene z-Komponente von $\mathring{A}_k^1 - p_i$ wird mit $B_k^{*1}$ bezeichnet und der in $\mathring{E}^{*1}$ liegende Randpunkt von $B_k^{*1}$ mit $r_k^*$.

1.2) $B_k^1$ und $B_l^{*1}$ $(k, l = 1, 2;\ k \neq l)$ sind miteinander punktfremd.

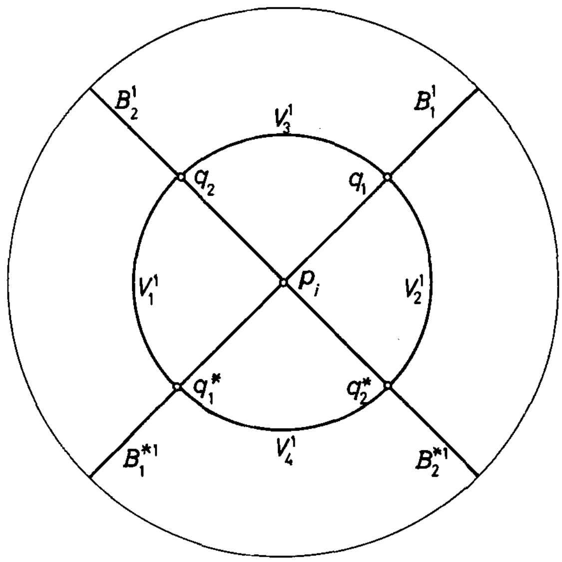



Fig. 24. $U^2$ enthaltender Ausschnitt von $E^2$.

Beweis: Aus der Annahme, $p'$ sei ein in $B_k^1$ und in $B_l^{*1}$ liegender Punkt, folgt: $p'$ ist ein von $p_i$ verschiedener Doppelpunkt $p_j$ $(j=1, \ldots, t)$ von $M^1$, so daß einerseits $j<i$ und andererseits $j>i$ ist. Dies stellt einen Widerspruch dar. Also ist die Annahme falsch und 1.2 damit bewiesen.

Mit 1.1 und 1.2 ist Teil I bewiesen.

1.3) $U^2$ sei eine im Verhältnis zu $M^1$ kleine Umgebung von $p_i$ in $E^2$ (siehe Fig. 24). $\dot{U}^2 B_k^1$ $(k=1,2)$ ist ein Punkt $q_k$, $\dot{U}^2 B_k^{*1}$ ein Punkt $q_k^*$. $\dot{U}^2 - M^1$ besteht aus vier z-Komponenten $V_1^1, \ldots, V_4^1$, so daß $\dot{V}_1^1 = q_1^* + q_2$, $\dot{V}_2^1 = q_1 + q_2^*$, $\dot{V}_3^1 = q_1 + q_2$, und $\dot{V}_4^1 = q_1^* + q_2^*$ ist.

1.4) Die Zuordnung von $\dot{U}^2$ und $\bar{V}_1^1 + \bar{V}_2^1$ zu $M^1 U^2$ ist eine Umschaltung $\sigma$ von $M^1 U^2$ über $\dot{U}^2$. Dabei sind die Sz-Komponenten von $\sigma(A_1^1 + A_2^1)$ in $E^2$ die abgeschlossenen (doppelpunktfreien) Kanten $A_1'^1 = (\bar{B}_1^{*1} - U^2) + (\bar{B}_2^1 - U^2) + \bar{V}_1^1$ und

$$A_2'^1 = (\bar{B}_2^{*1} - U^2) + (\bar{B}_1^1 - U^2) + \bar{V}_2^1.$$

1.5) $\sigma$ ist regulär bezüglich $M^1$ und $\Delta$.

Beweis: $A_k'^1$ und $A_k^1$ sind einander ähnlich bezüglich $\Delta$ $(k=1, 2)$.

Die Zuordnung $A_k'^1 \Leftrightarrow A_k^1$ (für $k=1$ und 2) und die Zuordnung aller von $A_1^1$ und $A_2^1$ verschiedenen Sz-Komponenten von $M^1$ in $E^2$ zu sich selbst bilden zusammen eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Sz-Komponenten von $M^1$ in $E^2$ und den Sz-

Komponenten von $\sigma M^1$ in $E^2$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Delta$ ähnlich sind.

Damit ist 1.5 bewiesen.

1.6) $K^1 = (\bar{B}_1^1 - U^2) + (\bar{B}_2^1 - U^2) + \bar{V}_3^1$ ist eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma} M^1$ in $E^2$, deren Randpunkte $r_1$ und $r_2$ in $\mathring{E}^1$ liegen (vgl. Fig. 23 und 24).

1.7) Aus der Annahme, $\bar{\sigma}$ sei regulär bezüglich $M^1$ und $\Delta$, folgt: Es gibt eine Sz-Komponente $S^1$ von $M^1$ in $E^2$, die zu $K^1$ ähnlich bezüglich $\Delta$ ist. Also gibt es zu $r_1$ und $r_2$ zwei voneinander verschiedene Bildpunkte, die $S^1$ beranden und in $\mathring{E}^1$ liegen. Dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $M^1$ zopfartig in $E^2$ bezüglich $E^1$ und $E^{*1}$ liege. Also ist die Annahme falsch.

1.8) $\sigma M^1$ liegt zopfartig in $E^2$ bezüglich $E^1$ und $E^{*1}$.

Beweis: Werden die $t-1$ Doppelpunkte von $\sigma M^1$ folgendermaßen bezeichnet: $p_1 = p_1', \ldots, p_{i-1} = p_{i-1}', p_{i+1} = p_i', \ldots, p_t = p_{t-1}'$, so gilt: Ist $A'^1$ eine Sz-Komponente von $\sigma M^1$ in $E^2$ mit dem in $\mathring{E}^1$ liegenden Randpunkt $r'$, so daß in $A'^1$ $p_u'$ zwischen $r'$ und $p_v'$ liegt ($u, v = 1, \ldots, t-1$), so ist $u < v$.

Beweis: $p_u'$ ist gleich einem Punkt $p_{u'}$ und $p_v'$ gleich $p_{v'}$ ($u' = u$ oder $u+1$, $v' = v$ oder $v+1$, $u' \neq v'$). Damit gilt:

a. Liegen $r'$, $p_u'$ und $p_v'$ in einer und derselben Sz-Komponente von $M^1$ in $E^2$, so ist $u' < v'$.

b. Liegen $r'$, $p_u'$ und $p_v'$ nicht in einer und derselben Sz-Komponente von $M^1$ in $E^2$, so ist $A'^1$ gleich $A_k'^1$ ($k = 1$ oder 2), $r' = r_l$ ($l = 1, 2$; $l \neq k$) und $p_u'$ und $p_v'$ liegen nicht beide in $B_1^1$ (vgl. Fig. 23 und 24). Dann gilt:

b.1. Liegt $p_u'$ in $B_l^1$ und $p_v'$ in $B_k^{*1}$, so ist $u' < i$ und $i < v'$.

b.2. Liegen $p_u'$ und $p_v'$ in $B_k^{*1}$, so liegt $p_u'$ in $A_k^1$ zwischen $r_k$ und $p_v'$, also ist $u' < v'$.

Aus a und b folgt die Behauptung.

Daraus folgt 1.8.

Aus 1.4, 1.5, 1.7 und 1.8 folgt Teil II und aus 1.6 Teil III.

1.9) Beweis von IV:

1.9.1) Nach dem Bereits bewiesenen Teil II ist entweder $\sigma$ oder $\bar{\sigma}$ regulär bezüglich $\sigma' M^1$ und $\Delta$.

1.9.2) $\bar{\sigma}(\sigma' M^1)$ liegt nicht zopfartig in $E^2$ bezüglich $E^1$ und $E^{*1}$.

Beweis: a. Liegt $p'$ nicht in $B_1^1$ und nicht in $B_2^1$, so ist $K^1$ eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma}\sigma' M^1$ in $E^2$ (siehe 1.6).

b. Liegt $p'$ in $B_1^1$ oder in $B_2^1$, so liegt $p'$ nicht in $B_1^{*1}$ und nicht in $B_2^{*1}$ (siehe

1.2). Dann ist $K^{*1}=(\bar{B}_1^{*1}-U^2)+(\bar{B}_2^{*1}-U^2)+\bar{V}_4^1$ eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma}\,\sigma' M^1$ in $E^2$.
Aus a und b folgt 1.9.2.

1.9.3) Aus 1.9.1 und 1.9.2 und II folgt IV. Damit ist 1.9 erledigt.

2) Beweis von V.1: Für $s=1$ folgt V.1 unmittelbar aus II.

Aus der Induktionsannahme, V.1 sei für $s \leqslant u$ bewiesen, folgt V.1 für $s=u+1$.

Beweis: $\sigma_u$ und $\sigma_{u+1}$ sind die bezüglich $\sigma_{u-1}\ldots\sigma_1 M^1$ und $\Delta$ regulären Umschaltungen von $(\sigma_{u-1}\ldots\sigma_1 M^1)\,U_u^2$ über $\dot{U}_u^2$ bzw. von $(\sigma_{u-1}\ldots\sigma_1 M^1)\,U_{u+1}^2$ über $\dot{U}_{u+1}^2$. Damit ist $\sigma_{u+1}$ nach IV auch regulär bezüglich $\sigma_u(\sigma_{u-1}\ldots\sigma_1 M^1)$ und $\Delta$. Daraus und aus II folgt die Behauptung.

Damit ist V.1 durch Induktion bewiesen und Nr. 2 erledigt.

3) Beweis von V.2:

3.1) Diejenigen unter den Umschaltungen $\sigma_1,\ldots,\sigma_s$, die regulär bezüglich $M^1$ und $\Delta$ sind, seien $\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_v}$ $(i_1,\ldots,i_v=1,\ldots,s;\ v<s)$, die restlichen seien $\sigma_{i_v+1},\ldots,\sigma_{i_s}$. $M'^1=\sigma_{i_v}\ldots\sigma_{i_1}M^1$ liegt nach V.1 zopfartig in $E^2$ bezüglich $E^1$ und $E^{*1}$. Es gibt daher eine Zopfnumerierung $p_1',\ldots,p_w'$ der Doppelpunkte von $M'^1$ bezüglich $E^2$ und $E^1$. Die Umgebungen $U_{i_{v+1}}^2,\ldots,U_{i_s}^2$ sind nun Umgebungen von Punkten $p_{j_1}',\ldots,p_{j_{s-v}}'$ $(j_1,\ldots,j_{s-v}$ zwischen 1 und $w)$ und werden mit $U_{j_1}'^2\ldots,U_{j_{s-v}}'^2$ bezeichnet. $\sigma_{i_v+1},\ldots,\sigma_{i_s}$ werden entsprechend mit $\sigma_{j_1}',\ldots,\sigma_{j_{s-v}}'$ bezeichnet.

3.2) Unter den Zahlen $j_1,\ldots,j_{s-v}$ gibt es eine kleinste Zahl $j_m$ und es gilt: Nach I gibt es genau zwei Sz-Komponenten $A_1'^1$ und $A_2'^1$ von $M'^1$ in $E^2$, die $p_{j_m}'$ enthalten. $A_1'^1-p_{j_m}'$ und $A_2'^1-p_{j_m}'$ enthalten je genau eine z-Komponente $B_1'^1$ bzw. $B_2'^1$, die einen in $\mathring{E}^1$ liegenden Randpunkt $r_1'$ bzw. $r_2'$ besitzt. Nach II und V.1 ist $\bar{\sigma}_{j_m}'$ regulär bezüglich $M'^1$ und $\Delta$, und nach III gibt es daher eine Sz-Komponente $A^{*1}$ von $\sigma_{j_m}' M'^1$ in $E^2$, die aus $\bar{B}_1'^1-\mathring{U}_{j_m}'^2$, $\bar{B}_2'^1-\mathring{U}_{j_m}'^2$ und einer z-Komponente von $\dot{U}_{j_m}'^2-M'^1$ gebildet wird.

3.3) $A^{*1}$ ist mit $p_{j_1}',\ldots,p_{j_{m-1}}',p_{j_{m+1}}',\ldots,p_{j_{s-v}}'$ punktfremd und ist daher auch eine Sz-Komponente von $\sigma_{j_{s-v}}'\ldots\sigma_{j_{m+1}}'\sigma_{j_{m-1}}'\ldots\sigma_{j_1}'(\sigma_{j_m}'M'^1)$ in $E^2$, also auch eine Sz-Komponente von $\sigma_s\ldots\sigma_1 M^1$ in $E^2$. Da die Randpunkte von $A^{*1}$ in $\mathring{E}^1$ liegen, ist damit V.2 bewiesen und Nr. 3 erledigt.

Mit Nr. 1, 2 und 3 ist Hilfssatz 8 bewiesen.

### 3. Umschaltungen an S-normalen S-Mannigfaltigkeiten

Der für zopfartige S-Mannigfaltigkeiten bewiesene Umschaltungssatz läßt sich nun auf 1-dim S-Mannigfaltigkeiten übertragen, die S-normal in den abgeschlossenen Hüllen von

PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstücken liegen, und dann weiter auf 2-dim S-Mannigfaltigkeiten, die S-normal in den abgeschlossenen Hüllen von K- oder P-Raumstücken liegen.

HILFSSATZ 9. *$Q^d$ ($d=2$ oder 3) sei entweder ein PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstück oder ein K-Raumstück oder ein P-Raumstück. $M^{d-1}$ liege S-normal in $\bar{Q}^d$. $D^{d-2}$ sei eine Durchdringungslinie bzw. ein Doppelpunkt von $M^{d-1}$. $U^d$ sei eine im Verhältnis zu $\Phi \mid M^{d-1}$ kleine Umgebung von $D^{d-2}$ in $\bar{Q}^d$. Dann folgt:*

I. *Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $A_1^{d-1}$ und $A_2^{d-1}$ von $M^{d-1}$ in $\bar{Q}^d$, die $D^{d-2}$ enthalten.*

*Es gibt genau eine Umschaltung $\sigma$ von $M^{d-1} U^d$ über $\overline{(\dot{U}^d - \dot{Q}^d)}$, die bezüglich $M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ regulär ist. $\sigma$ ist auch regulär bezüglich $M^{d-1}$ und $\Theta(\bar{Q}^d)$, $\bar{\sigma}$ ist dies nicht. Weiter gilt:*

a. *$\sigma(A_1^{d-1} + A_2^{d-1})$ besteht aus zwei Sz-Komponenten $A_1'^{d-1}$ und $A_2'^{d-1}$, so daß $A_k^{d-1}$ und $A_k'^{d-1}$ ($k=1, 2$) einander bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ ähnlich sind.*

b. *$\sigma M^{d-1}$ liegt S-normal in $\bar{Q}^d$.*

II. *$D_1^{d-2}$ sei eine von $D^{d-2}$ verschiedene z-Komponente der Durchdringung von $M^{d-1}$. $U_1^d$ sei eine mit $U^d$ punktfremde, im Verhältnis zu $\Phi \mid M^{d-1}$ kleine Umgebung von $D_1^{d-2}$ in $\bar{Q}^d$, $\sigma_1$ sei die bezüglich $M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ reguläre Umschaltung von $M^{d-1} U_1^d$ über $\overline{(\dot{U}_1^d - \dot{Q}^d)}$. Dann gilt: $\sigma_1$ ist auch regulär bezüglich $\sigma M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$.*

III. *Sind $D_1^{d-2}, \ldots, D_s^{d-2}$ paarweise voneinander verschiedene z-Komponenten der Durchdringung von $M^{d-1}$, sind $U_1^d, \ldots, U_s^d$ paarweise miteinander punktfremde, im Verhältnis zu $\Phi \mid M^{d-1}$ kleine Umgebungen von $D_1^{d-2}, \ldots, D_s^{d-2}$ in $\bar{Q}^d$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ die bezüglich $M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ regulären Umschaltungen von $M^{d-1} U_1^d, \ldots, M^{d-1} U_s^d$ über $\overline{(\dot{U}_1^d - \dot{Q}^d)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_s^d - \dot{Q}^d)}$, so gilt:*

III.1. *$\sigma_s$ ist die bezüglich $\sigma_{s-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ reguläre Umschaltung von $(\sigma_{s-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1}) U_s^d$ über $\overline{(\dot{U}_s^d - \dot{Q}^d)}$.*

III.2. *$\sigma_s \ldots \sigma_1 M^{d-1}$ liegt S-normal in $\bar{Q}^d$.*

III.3. *Ist $E^e$ ein Element aus $\Phi(\bar{Q}^d)$ oder $\Theta(\bar{Q}^d)$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_s \ldots \sigma_1 M^{d-1}) \bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$ und den Sz-Komponenten von $M^{d-1} \bar{E}^e$, so daß einander zugeordnete Komponenten zueinander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind und, falls $E^e$ ein Element aus $\Theta$ ist, einander bezüglich $\Theta$ ähnlich sind.*

*Beweis.* 1) Beweis von I für den Fall, daß $Q^d$ ein PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstück $Q^2$ ist.

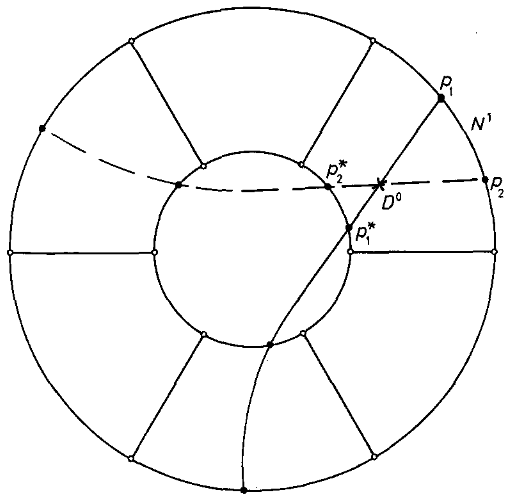



Fig. 25. $\bar{Q}^2$ mit $A_1^1$ (ausgezogen) und $A_2^1$ (gestrichelt).

1.1) Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $A_1^1$ und $A_2^1$ von $M^1$ in $\bar{Q}^2$, die $D^0$ enthalten. Dabei gilt (siehe Fig. 25):

a. $D^0$ liegt in einem Nebenflächenstück $N^2$ zu einer in $\dot{Q}^2$ liegenden PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N^1$. Die in $Q^2$ liegende Parallelkante zu $N^1$ sei $N^{*1}$.

b. $N^2 A_k^1$ $(k=1, 2)$ ist eine offene Kante $A_{1k}^1$ mit Randpunkten $p_k$ und $p_k^*$, so daß $p_k$ in $N^1$ liegt und $p_k^*$ in $N^{*1}$.

c. $p_k$ und $D^0$ sind die Randpunkte einer z-Komponente $B_k^1$ von $\mathring{A}_k^1 - D^0$. Die von $B_k^1$ verschiedene z-Komponente von $\mathring{A}_k^1 - D^0$ wird mit $B_k^{*1}$ bezeichnet und die von $B_k^1$ verschiedene z-Komponente von $A_{1k}^1 - D^0$ mit $B_{1k}^{*1}$.

1.2) $B_1^1$ und $B_2^1$ sind nach Hilfssatz 8, I mit $B_1^{*1}$ und mit $B_2^{*1}$ punktfremd.

1.3) $\dot{U}^2 B_k^1$ ist ein Punkt $q_k$ und $\dot{U}^2 B_k^{*1}$ ein Punkt $q_k^*$ (siehe Fig. 26). $\dot{U}^2 - M^1$ besteht aus vier z-Komponenten $V_1^1, \ldots, V_4^1$, so daß $q_1^*$ und $q_2$ die Randpunkte von $V_1^1$ sind, $q_1$ und $q_2^*$ die von $V_2^1$, $q_1$ und $q_2$ die von $V_3^1$ und $q_1^*$ und $q_2^*$ die von $V_4^1$.

1.4) Die Zuordnung von $\dot{U}^2$ und $\bar{V}_1^1 + \bar{V}_2^1$ zu $M^1 U^2$ ist eine Umschaltung $\sigma$ von $M^1 U^2$ über $\dot{U}^2$. Die durch $\sigma$ in $\bar{N}^2$ bewirkte Umschaltung ist $\sigma$ selbst. Dabei gilt:

1.4.1) $\sigma$ ist die bezüglich $M^1 \bar{N}^2$ und $\Phi(\bar{N}^2)$ reguläre Umschaltung von $M^1 U^2$ über $\dot{U}^2$ (vgl. Hilfssatz 8, II).

1.4.2) Die Sz-Komponenten von $\sigma(A_1^1 + A_2^1)$ in $\bar{Q}^2$ sind abgeschlossene doppelpunktfreie Kanten $A_1'^1 = (\bar{B}_1^{*1} - U^2) + (\bar{B}_2^1 - U^2) + \bar{V}_1^1$ und $A_2'^1 = (\bar{B}_2^{*1} - U^2) + (\bar{B}_1^1 - U^2) + \bar{V}_2^1$. $A_k'^1 N^2$ $(k=1, 2)$ ist eine offene Kante $A_{1k}'^1$.

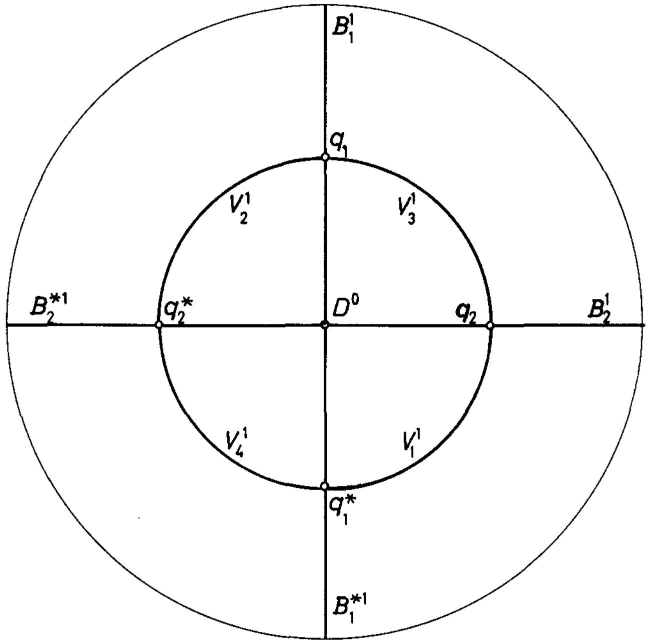



Fig. 26. $U^2$ enthaltender Ausschnitt von $N^2$.

1.5) $A_k'^1$ und $A_k^1$ sind einander ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$.

1.6) $\sigma$ ist regulär bezüglich $M^1$ und $\Phi(\bar{Q}^2)$ und bezüglich $M^1$ und $\Theta(\bar{Q}^2)$.

Beweis:

1.6.1) Ist $C^2$ ein 2-dim Element aus $\Phi(\bar{Q}^2)$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\varphi$ der Sz-Komponenten von $M^1 \bar{C}^2$ in $\bar{C}^2$ zu den Sz-Komponenten von $(\sigma M^1)\bar{C}^2$ in $\bar{C}^2$, so daß einander zugeordnete Elemente einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind.

Beweis: Ist $C^2$ nicht gleich $N^2$, so existiert $\varphi$ trivialer Weise als Zuordnung der Sz-Komponenten von $M^1 \bar{C}^2$ in $\bar{C}^2$ zu sich selbst. Ist $C^2$ gleich $N^2$, so bilden die Zuordnung $\bar{A}_{1k}'^1 \leftrightarrow \bar{A}_{1k}^1$ (für $k=1$ und 2) und die Zuordnung aller von $\bar{A}_{11}^1$ und $\bar{A}_{12}^1$ verschiedenen Sz-Komponenten von $M^1 \bar{N}^2$ in $\bar{N}^2$ zu sich selbst eine Zuordnung, die die für $\varphi$ geforderten Eigenschaften besitzt. Damit ist 1.6.1 bewiesen.

1.6.2) Die Zuordnung $A_k'^1 \leftrightarrow A_k^1$ (für $k=1$ und 2) und die Zuordnung aller von $A_1^1$ und $A_2^1$ verschiedenen Sz-Komponenten von $M^1$ in $\bar{Q}^2$ zu sich selbst ergeben zusammen eine Zuordnung der Sz-Komponenten von $\sigma M^1$ in $\bar{Q}^2$ zu den Sz-Komponenten von $M^1$ in $\bar{Q}^2$, so daß einander zugeordnete Elemente einander bezüglich $\Theta$ ähnlich sind.

Mit 1.6.1 und 1.6.2 ist 1.6 bewiesen.

1.7) Aus der Annahme, $\bar{\sigma}$ sei regulär bezüglich $M^1$ und $\Phi(\bar{Q}^2)$ oder bezüglich $M^1$ und

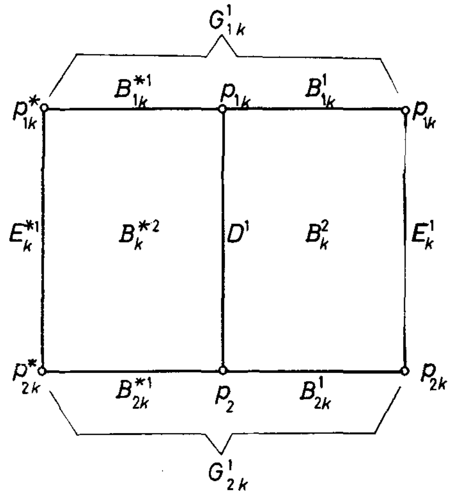



Fig. 27. $A^2_k$ mit $D^1$.

$\Theta(\bar{Q}^2)$, folgt: $K^1 = (\bar{B}^1_1 - U^2) + (\bar{B}^1_2 - U^2) + \bar{V}^1_3$ ist eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma} M^1$ in $\bar{Q}^2$ und $\bar{N}^2$. $K^1$ ist damit bezüglich $\Phi$ oder bezüglich $\Theta$ ähnlich zu einer Sz-Komponente $S^1$ von $M^1$ in $\bar{N}^2$ bzw. $\bar{Q}^2$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $M^1$ S-normal in $\bar{Q}^2$ liegt. Also ist die Annahme falsch.

1.8) $\sigma M^1$ liegt S-normal in $\bar{Q}^2$.

Beweis:

1.8.1) Die Durchdringung von $\sigma M^1$ ist gleich der Summe der von $D^0$ verschiedenen Doppelpunkte von $M^1$.

1.8.2) Ist $C^1$ eine PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante aus $\Theta(\dot{Q}^2)$, und ist $C^2$ das in $G^2$ liegende Nebenflächenstück zu $C^1$, so ist $(\sigma M^1)\bar{C}^2$ entweder leer oder liegt zopfartig in $\bar{C}^2$.

Beweis: Ist $C^2$ nicht gleich $N^2$, so gilt 1.8.2 wegen $(\sigma M^1)\bar{C}^2 = M^1 \bar{C}^2$.

Ist $C^2$ gleich $N^2$, so liegt $(\sigma M^1)\bar{C}^2$ nach Hilfssatz 8, II zopfartig in $\bar{C}^2$ bezüglich $\bar{N}^1$ und $\bar{N}^{*1}$. Damit ist 1.8.2 bewiesen.

Aus 1.6, 1.8.1 und 1.8.2 folgt 1.8.

1.9) Aus 1.1 und 1.4 bis 1.8 folgt Teil I für den Fall, daß $Q^d$ ein PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück ist. Damit ist Nr. 1 erledigt.

2) Beweis von II für den Fall, daß $Q^d$ ein PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Flächenstück $Q^2$ ist:

2.1) Nach dem für PK- und P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke bereits bewiesenen Teil I ist entweder $\sigma_1$ oder $\bar{\sigma}_1$ regulär bezüglich $\sigma M^1$ und $\Phi(\bar{Q}^2)$.

2.2) $D^0_1$ liegt in einem Nebenflächenstück $N^2$ zu einer PKF- oder PK$\dot{\text{M}}$-Kante $N^1$.

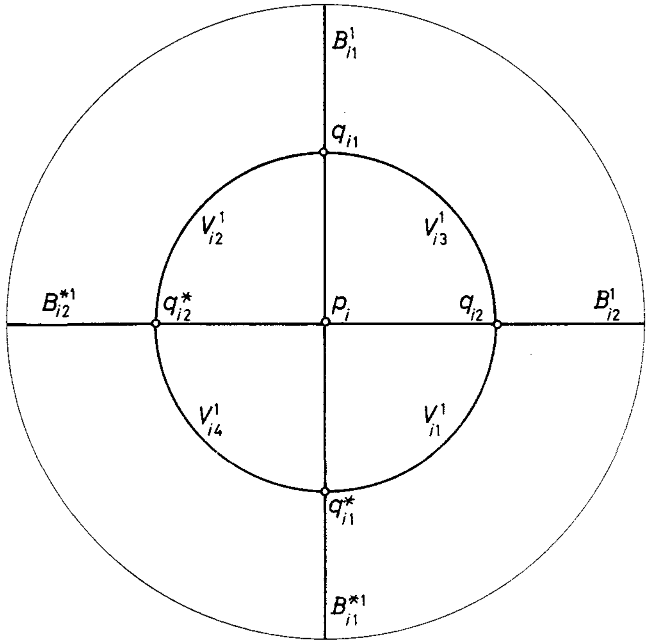



Fig. 28. $U_i^2$ enthaltender Ausschnitt von $G_i^2$.

Durch $\sigma_1$ wird in $\bar{N}^2$ die Umschaltung $\sigma_1$ selbst bewirkt.

2.3) $\sigma_1$ ist regulär bezüglich $(\sigma M^1)\bar{N}^2$ und $\Phi(\bar{N}^2)$.

Beweis: Liegt $D^0$ nicht in $N^2$, so folgt 2.3 unmittelbar aus der Voraussetzung. Liegt $D^0$ in $N^2$, so wird in $\bar{N}^2$ durch $\sigma$ die Umschaltung $\sigma$ selbst bewirkt. In diesem Falle folgt 2.3 aus Hilfssatz 8, IV.

2.4) Aus 2.1 bis 2.3 und Hilfssatz 8, II folgt Teil II für den Fall, daß $Q^d$ ein PK- oder P$\dot{M}$-Flächenstück ist. Damit ist Nr. 2 erledigt.

3) Beweis von I für den Fall, daß $Q^d$ ein K-Raumstück $Q^3$ ist.

3.1) Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $A_1^2$ und $A_2^2$ von $M^2$ in $\bar{Q}^3$, die $D^1$ enthalten. Dabei gilt:

a. In $\dot{Q}^3$ liegen genau zwei PK-Flächenstücke $G_1^2$ und $G_2^2$. Dabei ist $G_i^2 A_k^2$ $(i, k = 1, 2)$ eine offene Kante $G_{ik}^1$ (siehe Fig. 27), und $G_{i1}^1$ und $G_{i2}^1$ enthalten genau einen Randpunkt $p_i$ von $D^1$. $p_1$ liegt dabei in einem Nebenflächenstück $N_1^2$ zu einer PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N_1^1$.

b. Es gibt (vgl. Fig. 27) zwei z-Komponenten $B_{11}^1$ und $B_{12}^1$ von $G_{11}^1 - p_1$ bzw. $G_{12}^1 - p_1$, so daß die von $p_1$ verschiedenen Randpunkte $p_{11}$ und $p_{12}$ von $B_{11}^1$ bzw. $B_{12}^1$ in $N_1^1$ liegen. $N_1^1$ liegt im Rande eines in $\dot{Q}^3$ liegenden KF- oder K$\dot{M}$-Flächenstückes

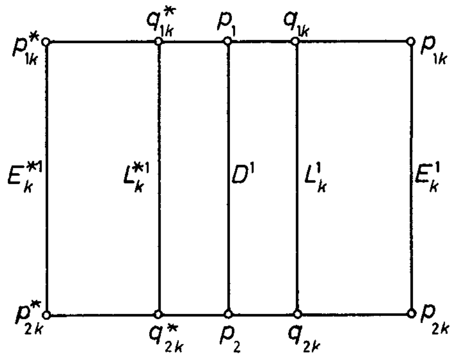



Fig. 29. $A^2_k$ mit $D^1$ und $U^3 A^2_k$.

$J^2$, und $\dot{J}^2 \dot{G}^2_2$ ist die abgeschlossene Hülle einer PKF- oder PK$\dot{\mathrm{M}}$-Kante $N^1_2$. Dabei ist $J^2 A^2_k$ $(k=1, 2)$ eine offene Kante $E^1_k$, deren von $p_{1k}$ verschiedener Randpunkt $p_{2k}$ in $N^1_2$ liegt. Andererseits ist $p_{2k}$ Randpunkt einer z-Komponente $B^1_{2k}$ von $G^1_{2k} - p_2$.

Die von $B^1_{ik}$ $(i, k=1, 2)$ verschiedene z-Komponente von $G^1_{ik} - p_i$ wird mit $B^{*1}_{ik}$ bezeichnet, ihr von $p_i$ verschiedener Randpunkt mit $p^*_{ik}$. Dabei sind $p^*_{1k}$ und $p^*_{2k}$ die Randpunkte der von $E^1_k$ verschiedenen KF- oder K$\dot{\mathrm{M}}$-Normalkante $E^{*1}_k$ aus $\mathring{A}^2_k$.

c. $D_1 + B^1_{1k} + B^1_{2k} + E^1_k + p_{1k} + p_{2k}$ $(k=1, 2)$ ist der Rand einer z-Komponente $B^2_k$ von $\mathring{A}^2_k - D^1$ (vgl. Fig. 27). Die von $B^2_k$ verschiedene z-Komponente von $\mathring{A}^2_k - D^1$ wird mit $B^{*2}_k$ bezeichnet.

3.2) $U^3 G^2_i$ $(i=1, 2)$ ist eine im Verhältnis zu $\Phi \,|\, M^2$ kleine Umgebung $U^2_i$ von $p_i$ in $\overline{G}^2_i$ (siehe Fig. 28). Dabei gilt:

a. $\dot{U}^2_i B^1_{ik}$ ist ein Punkt $q_{ik}$ und $\dot{U}^2_i B^{*1}_{ik}$ ein Punkt $q^*_{ik}$.

b. $\dot{U}^2_i - M^2$ besteht aus vier z-Komponenten $V^1_{i1}, \ldots, V^1_{i4}$, so daß $q^*_{i1}$ und $q_{i2}$ die Randpunkte von $V^1_{i1}$ sind, $q_{i1}$ und $q^*_{i2}$ die von $V^1_{i2}$, $q_{i1}$ und $q_{i2}$ die von $V^1_{i3}$ und $q^*_{i1}$ und $q^*_{i2}$ die von $V^1_{i4}$.

c. $\dot{U}^3 B^2_k$ ist eine offene Kante $L^1_k$ und $\dot{U}^3 B^{*2}_k$ eine offene Kante $L^{*1}_k$ (siehe Fig. 29).

d. $(\dot{U}^3 - \dot{Q}^3) - M^2$ besteht aus vier z-Komponenten $V^2_1, \ldots, V^2_4$, so daß $\dot{V}^2_1 = \overline{V}^1_{11} + \overline{V}^1_{21} + L^{*1}_1 + L^1_2$ ist, sowie $\dot{V}^2_2 = \overline{V}^1_{12} + \overline{V}^1_{22} + L^1_1 + L^{*1}_2$, $\dot{V}^2_3 = \overline{V}^1_{13} + \overline{V}^1_{23} + L^1_1 + L^1_2$ und

$$\dot{V}^2_4 = \overline{V}^1_{14} + \overline{V}^1_{24} + L^{*1}_1 + L^{*1}_2.$$

3.3) Die Zuordnung von $\overline{(\dot{U}^3 - \dot{Q}^3)}$ und $\overline{V}^2_1 + \overline{V}^2_2$ zu $M^2 U^3$ ist eine Umschaltung $\sigma$ von $M^2 U^3$ über $\overline{(\dot{U}^3 - \dot{Q}^3)}$. $\sigma$ bewirkt in $\overline{G}^2_i$ $(i=1, 2)$ eine Umschaltung $\sigma_i$ von $M^2 U^2_i$ über $\dot{U}^2_i$. Dabei gilt:

3.3.1) $\sigma_i$ ist die bezüglich $M^2 \overline{G}^2_i$ und $\Phi(\overline{G}^2_i)$ reguläre Umschaltung von $M^2 U^2_i$ über $\dot{U}^2_i$.

Beweis: Nach dem für PK-Flächenstücke bereits bewiesenen Teil I ist entweder $\sigma_i$ oder $\bar{\sigma}_i$ regulär bezüglich $M^2 \bar{G}_i^2$ und $\Phi(\bar{G}_i^2)$. Aus der Annahme, $\bar{\sigma}_i$ sei regulär bezüglich $M^2 \bar{G}_i^2$ und $\Phi(\bar{G}_i^2)$, folgt: $K^1 = (\bar{B}_{i1}^1 - U_i^2) + (\bar{B}_{i2}^1 - U_i^2) + \bar{V}_{i3}^1$ (vgl. Fig. 28) ist eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma}_i(M^2 \bar{G}_i^2)$ in $\bar{G}_i^2$, ist also ähnlich bezüglich $\Phi$ zu einer Sz-Komponente $S^1$ von $M^2 \bar{G}_i^2$ in $\bar{G}_i^2$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $S^1$ eine PK-Normalkante ist. Also ist die Annahme falsch und 3.3.1 damit bewiesen.

3.3.2) Die Sz-Komponenten von $\sigma_i(\bar{G}_{i1}^1 + \bar{G}_{i2}^1)$ in $\bar{G}_i^2$ sind die (nach 3.3.1 normal in $\bar{G}_i^2$ liegenden) abgeschlossenen Hüllen der offenen Kanten $G_{i1}'^1 = (B_{i1}^{*1} - U_i^2) + (B_{i2}^1 - U_i^2) + \bar{V}_{i1}^1$ und $G_{i2}'^1 = (B_{i1}^1 - U_i^2) + (B_{i2}^{*1} - U_i^2) + \bar{V}_{i2}^1$.

3.4) $B_1^2$ und $B_2^2$ sind mit $B_1^{*2}$ und mit $B_2^{*2}$ punktfremd.

Beweis: Aus der Annahme, ein Punkt $p'$ läge in $B_k^2 B_l^{*2}$ $(k, l = 1, 2;\ k \neq l)$, folgt: $p'$ liegt in einer von $D^1$ verschiedenen Durchdringungslinie $D'^1$ von $A_1^2 + A_2^2$. Damit liegt ein Randpunkt $p''$ von $D'^1$ in $B_{1k}^1 - \mathring{U}_1^2$ und in $B_{1l}^{*1} - \mathring{U}_1^2$. Also ist $(B_{1l}^{*1} - U_1^2) + (B_{1k}^1 - U_1^2) + \bar{V}_{1l}^1$ mehrfach zusammenhängend. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $\bar{G}_{1l}'^1$ eine PK-Normalkante ist, also ist die Annahme falsch. Daraus folgt 3.4.

3.5) Die Sz-Komponenten von $\sigma(A_1^2 + A_2^2)$ in $\bar{Q}^3$ sind abgeschlossene (und nach 3.4 doppelpunktfreie) Flächenstücke $A_1'^2 = (\bar{B}_1^{*2} - U^3) + (\bar{B}_2^2 - U^3) + \bar{V}_1^2$ und $A_2'^2 = (\bar{B}_1^2 - U^3) + (\bar{B}_2^{*2} - U^3) + \bar{V}_2^2$.

3.6) $A_k'^2$ und $A_k^2$ $(k = 1, 2)$ sind einander ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$.

Beweis: Es gibt (da $\bar{G}_{ik}'^1$ und $\bar{G}_{ik}^1$ demselben PK-Kantenpaar entsprechen, und nach Satz 2) eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha_{ik}$ (für $i, k = 1, 2$) von $\Phi(\bar{G}_{ik}'^1)$ und $\Phi(\bar{G}_{ik}^1)$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Die Zuordnungen $\mathring{A}_k'^2 \leftrightarrow \mathring{A}_k^2$ ($k = 1$ oder 2), $E_1^1 \leftrightarrow E_2^1$ und die Zuordnung von $E_k^{*1}$, $p_{1k}^*$ und $p_{2k}^*$ zu sich selbst ergeben, zusammen mit $\alpha_{1k}$ und $\alpha_{2k}$ eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Phi(A_k'^2)$ und $\Phi(A_k^2)$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Daraus und aus Hilfssatz 3, I folgt 3.6.

3.7) $\sigma$ ist regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi(\bar{Q}^3)$, sowie bezüglich $M^2$ und $\Theta(\bar{Q}^3)$.

Beweis: Die Zuordnung $A_k'^2 \leftrightarrow A_k^2$ (für $k = 1$ und 2) und die Zuordnung aller von $A_1^2$ und $A_2^2$ verschiedenen Sz-Komponenten von $M^2$ in $\bar{Q}^3$ zu sich selbst bilden zusammen eine eineindeutige Zuordnung der Sz-Komponenten von $\sigma M^2$ in $\bar{Q}^3$ zu den Sz-Komponenten von $M^2$ in $\bar{Q}^3$, so daß einander zugeordnete Elemente einander ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ sind. Damit ist 3.7 bewiesen.

3.8) Aus der Annahme, $\bar{\sigma}$ sei regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi(\bar{Q}^3)$ oder bezüglich $\Theta(\bar{Q}^3)$, folgt: $K^2 = (\bar{B}_1^2 - U^3) + (\bar{B}_2^2 - U^3) + \bar{V}_3^2$ ist eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma} M^2$ in $\bar{Q}^3$, ist also bezüglich $\Phi$ oder bezüglich $\Theta$ ähnlich zu einer Sz-Komponente $S^2$ von $M^2$

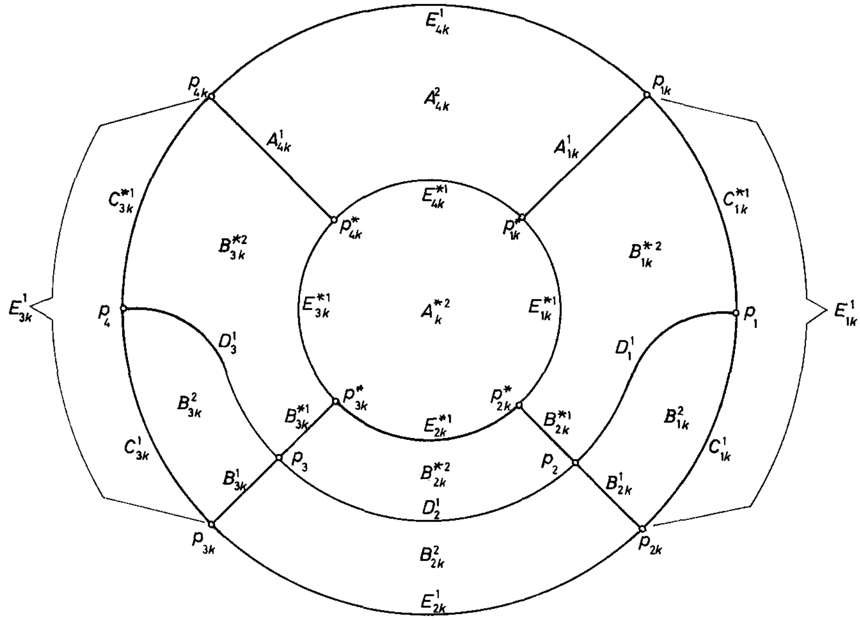


Fig. 30. $\mathring{A}^2_k$ mit $D^1$ für $s_k = 4$ und $t = 3$.

in $\overline{Q}^3$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $S^2$ ein K-Normalflächenstück ist, also ist die Annahme falsch.

3.9) $\sigma M^2$ liegt $S$-normal in $\overline{Q}^3$.

Beweis: Die Sz-Komponenten von $\sigma M^2$ in $\overline{Q}^3$ sind nach 3.7 bezüglich $\Phi$ normal liegende K-Normalflächenstücke. Die Durchdringung von $\sigma M^2$ ist gleich der Summe der von $D^1$ verschiedenen Durchdringungslinien von $M^2$. $(\sigma M^2)\,\overline{G}^2_i$ $(i=1,\,2)$ liegt nach 3.3.1 und dem für PK-Flächenstücke bereits bewiesenen Teil I S-normal in $\overline{G}^2_i$. Daraus folgt 3.9.

3.10) Aus 3.1, 3.3 und 3.5 bis 3.9 folgt I für den Fall, daß $Q^d$ ein K-Raumstück ist. Damit ist Nr. 3 erledigt.

4) Beweis von I für den Fall, daß $Q^d$ ein P-Raumstück $Q^3$ ist:

4.1) Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $A^2_1$ und $A^2_2$ von $M^2$ in $\overline{Q}^3$, die $D^1$ enthalten. Dabei gilt (siehe Fig. 30):

a. $\Theta(\mathring{A}^2_k)$ $(k=1,\,2)$ besteht aus Kanten $E^1_{1k},\,\ldots,\,E^1_{s_k k}$ und Punkten $p_{1k},\,\ldots,\,p_{s_k k}$, so daß $p_{ik}$ und $p_{i+1k}$ die Randpunkte von $E^1_{ik}$ sind $(i=1,\,\ldots,\,s_k$ mit $p_{s_k+1k}=p_{1k})$.

b. $\Phi(\mathring{A}^2_k)$ besteht aus offenen Flächenstücken $A^2_{1k},\,\ldots,\,A^2_{s_k k}$ und $A^{*2}_k$, aus offenen Kanten $A^1_{1k},\,\ldots,\,A^1_{s_k k}$ und $E^{*1}_{1k},\,\ldots,\,E^{*1}_{s_k k}$ und aus Punkten $p^*_{1k},\,\ldots,\,p^*_{s_k k}$, so daß folgendes gilt: $\dot{A}^2_{ik}\dot{A}^2_k = \bar{E}^1_{ik}$, $\dot{A}^2_{ik}\dot{A}^{*2}_k = \bar{E}^{*1}_{ik}$, $\dot{A}^2_k\dot{A}^{*2}_k$ ist leer. $p^*_{ik}$ und $p^*_{i+1k}$ sind die Randpunkte von $E^{*1}_{ik}$ (mit $p^*_{s_k+1k} = p^*_{1k}$), $p_{ik}$ und $p^*_{ik}$ die von $A^1_{ik}$. $A^1_{ik}$ und $A^1_{i+1k}$ liegen in $\dot{A}^2_{ik}$ (mit $A^1_{s_k+1k} = A^1_{1k}$).

c. $E^1_{1k}, \ldots, E^1_{s_k k}$ liegen in PF-, PK- bzw. P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücken $J^2_{1k}, \ldots, J^2_{s_k k}$ aus $\Theta(\dot{Q}^3)$, $p_{1k}, \ldots, p_{s_k k}$ in paarweise voneinander verschiedenen PKF- bzw. PK$\dot{\text{M}}$-Kanten $N^1_{1k}, \ldots, N^1_{s_k k}$ aus $\Theta(\dot{Q}^3)$. Entsprechend liegen $A^2_{1k}, \ldots, A^2_{s_k k}$ in den Nebenraumstücken $J^3_{1k}, \ldots, J^3_{s_k k}$ zu $J^2_{1k}, \ldots, J^2_{s_k k}$, $E^{*1}_{1k}, \ldots, E^{*1}_{s_k k}$ in den Parallelflächenstücken $J^{*2}_{1k}, \ldots, J^{*2}_{s_k k}$ zu $J^2_{1k}, \ldots, J^2_{s_k k}$; $A^1_{1k}, \ldots, A^1_{s_k k}$ liegen in den in $Q^3$ liegenden Nebenflächenstücken $N^2_{1k}, \ldots, N^2_{s_k k}$ und $p^*_{1k}, \ldots, p^*_{s_k k}$ in den in $Q^3$ liegenden Parallelkanten $N^{*1}_{1k}, \ldots, N^{*1}_{s_k k}$ zu $N^1_{1k}, \ldots, N^1_{s_k k}$. $A^{*2}_k$ liegt in dem Zentralraumstück $Q^{*3}$ von $Q^3$.

4.2) $R^2_k = A^2_{1k} + \ldots + A^2_{s_k k} + A^1_{1k} + \ldots + A^1_{s_k k}$ ist ein offener Kreisring und enthält $\mathring{D}^1$ (vgl. Fig. 30). $\Phi(D^1)$ besteht dabei nach Hilfssatz 5, II aus offenen Kanten $D^1_1, \ldots, D^1_t$ und Punkten $p_1, \ldots, p_{t+1}$ mit $t > 1$, so daß $p_j$ und $p_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, t)$ die Randpunkte von $D^1_j$ sind. Dabei ist $t$ nicht größer als die kleinere der Zahlen $s_1 + 1$, $s_2 + 1$, und es gilt bei geeigneter Numerierung der unter 4.1 genannten Elemente:

a. $D^1_1, \ldots, D^1_t$ liegen in $A^2_{1k}, \ldots, A^2_{tk}$ $(k = 1$ und $2)$, wobei für den Fall $t = s_k + 1$ $A^2_{s_k+1k} = A^2_{1k}$ zu setzen ist.

b. $p_1$ liegt in $E^1_{1k}$, $p_2, \ldots, p_t$ liegen in $A^1_{2k}, \ldots, A^1_{tk}$, und $p_{t+1}$ liegt in $E^1_{tk}$ (mit $A^1_{s_k+1k} = A^1_{1k}$ und $E^1_{s_k+1k} = E^1_{1k}$).

4.3) Für $i = 1, \ldots, t$ ist $J^2_{i1} = J^2_{i2}$ mit $J^2_{s_k+1k} = J^2_{1k}$. Für $j = 2, \ldots, t$ ist $N^1_{j1} = N^1_{j2}$ mit $N^1_{s_k+1k} = N^1_{1k}$. Zur Vereinfachung wird für $i = 1, \ldots, t$ $J^2_{ik}$ mit $J^2_i$, $J^3_{ik}$ mit $J^3_i$ und $J^{*2}_{ik}$ mit $J^{*2}_i$ bezeichnet, sowie für $j = 2, \ldots, t$ $N^1_{jk}$ mit $N^1_j$, $N^2_{jk}$ mit $N^2_j$ und $N^{*1}_{jk}$ mit $N^{*1}_j$. Dabei wird gesetzt: $J^3_{s_k+1} = J^3_1$, $N^2_{s_k+1} = N^2_1$, usw.

4.4) $\dot{A}^2_k - D^1$ $(k = 1, 2)$ besteht aus zwei z-Komponenten $B^2_k$ und $B^{*2}_k$, so daß $B^{*2}_k$ das Flächenstück $A^{*2}_k$ enthält. Dabei gilt (vgl. Fig. 30):

a. Für $i = 1, \ldots, t$ bei $t \leqslant s_k$ und für $i = 2, \ldots, s_k$ bei $t = s_k + 1$ gilt: $A^2_{ik} - D^1$ besteht aus zwei z-Komponenten $B^2_{ik}$ und $B^{*2}_{ik}$, so daß $B^{*2}_{ik} = A^2_{ik}B^{*2}_k$ ist.

b. $A^1_{jk} - D^1$ $(j = 2, \ldots, t)$ besteht aus zwei z-Komponenten $B^1_{jk}$ und $B^{*1}_{jk}$, so daß $B^{*1}_{jk} = A^1_{jk}B^{*2}_k$ ist.

c. Bei $t \leqslant s_k$ besteht $E^1_{1k} - D^1$ aus zwei z-Komponenten $C^1_{1k}$ und $C^{*1}_{1k}$, sowie $E^1_{tk} - D^1$ aus zwei z-Komponenten $C^1_{tk}$ und $C^{*1}_{tk}$, so daß $C^{*1}_{1k}$ in $\dot{B}^{*2}_k$ und $C^{*1}_{tk}$ in $\dot{B}^{*2}_k$ liegt.

d. Bei $t = s_k + 1$ (siehe Fig. 31) besteht $E^1_{1k} - D^1$ aus drei z-Komponenten $C^1_{1k}$,

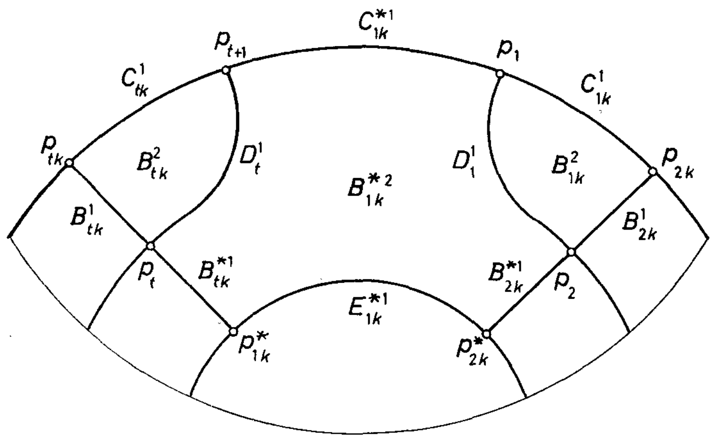



Fig. 31. $A^2_{1k}$ enthaltender Ausschnitt aus $A^2_k$ mit $D^1$ (vgl. Fig. 30) für $t = s_k + 1$. (Es ist $p_{tk} = p_{1k}$ und es können auch $B^1_{tk}$ und $B^{*1}_{tk}$ mit $B^1_{1k}$ bzw. $B^{*1}_{1k}$ bezeichnet werden. Man beachte jedoch, daß entsprechendes *nicht* für $B^2_{tk}$, $C^1_{tk}$, $p_t$, $D^1_t$ und $p_{t+1}$ gilt!)

$C^{*1}_{1k}$ und $C^1_{tk}$, so daß $C^{*1}_{1k}$ in $\dot{B}^{*2}_k$ liegt und $p_1$ und $p_{2k}$ die Randpunkte von $C^1_{1k}$ sind und $p_{tk}$ und $p_{t+1}$ die von $C^1_{tk}$.

e. Bei $t = s_k + 1$ besteht $A^2_{1k} - D^1$ (vgl. Fig. 31) aus drei z-Komponenten $B^2_{1k}$, $B^2_{tk}$ und $B^{*2}_{1k}$, so daß $B^{*2}_{1k} = A^2_{1k}\, B^{*2}_k$ ist, und so daß $\dot{B}^2_{1k} = \overline{D}^1_1 + \overline{C}^1_{1k} + \overline{B}^1_{2k}$ und $\dot{B}^2_{tk} = \overline{D}^1_t$ $\overline{C}^1_{tk} + \overline{B}^1_{tk}$ ist.

Damit ist $B^2_k = B^2_{1k} + \ldots + B^2_{tk} + B^1_{2k} + \ldots + B^1_{tk}$ und $\dot{B}^2_k\, \dot{Q}^3 = C^1_{1k} + E^1_{2k} + \ldots + E^1_{s_k k} + C^1_{tk} + p_1 + p_{2k} + \ldots + p_{tk} + p_{t+1}$.

4.5) $B^2_1$ und $B^2_2$ sind mit $B^{*2}_1$ und mit $B^{*2}_2$ punktfremd.

Beweis: Aus der Annahme, ein Punkt $p'$ läge in $B^2_k\, B^{*2}_l$ ($k, l = 1, 2;\ k \neq l$), folgt: $p'$ liegt in einer von $D^1$ verschiedenen Durchdringungslinie $D'^1$ von $A^2_1 + A^2_2$, und es gibt mindestens ein Flächenstück $B^2_{ik}$ ($i = 1, \ldots, t$), das mit $D'^1$ nicht punktfremd ist, also mindestens eine z-Komponente $D''^1$ von $D'^1\, B^2_{ik}$. Damit enthält mindestens eine Kante $B^1_{jk}$ ($j = i$ oder $i+1$) einen Randpunkt $p''$ von $D''^1$. Daraus folgt weiter, daß $p''$ auch in $B^{*1}_{jl}$ liegt. Dies steht nach Hilfssatz 8, I im Widerspruch dazu, daß $M^2\, \overline{N}^2_j$ in $\overline{N}^2_j$ zopfartig bezüglich $\overline{N}^1_j$ und $\overline{N}^{*1}_j$ liegt. Also ist die Annahme falsch. Daraus ergibt sich 4.5.

4.6) $U^3\, \overline{J}^3_1, \ldots, U^3\, \overline{J}^3_t$, $U^3\, N^2_2, \ldots, U^3\, N^2_t$, $U^3\, J^2_1$ und $U^3\, J^2_t$ bestehen aus z-Komponenten $U^3_1, \ldots, U^3_t$ und $U^2_1, \ldots, U^2_{t+1}$, so daß $U^3_i$ ($i = 1, \ldots, t$) eine im Verhältnis zu $M^2 | \Phi$ kleine Umgebung von $p_j$ in $\overline{N}^2_j$ ist, sowie $U^2_1$ eine im Verhältnis zu $M^2 | \Phi$ kleine

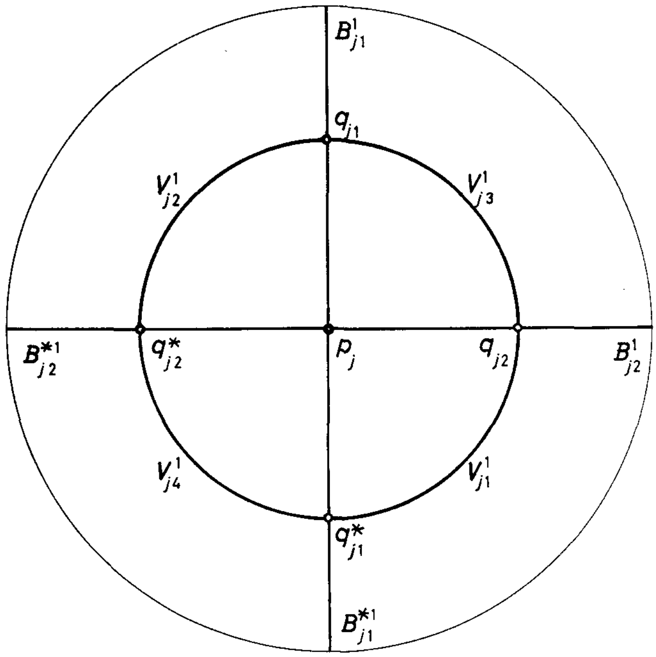



Fig. 32. $U^2_j$ enthaltender Ausschnitt von $N^2_j$.

Umgebung von $p_1$ in $\bar{J}^2_1$ und $U^2_{t+1}$ eine im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine Umgebung von $p_{t+1}$ in $\bar{J}^2_t$. Dabei gilt:

a. $\dot{U}^2_j B^1_{jk}$ $(j=2, \ldots, t;\ k=1, 2)$ ist ein Punkt $q_{jk}$ (siehe Fig. 32) und $\dot{U}^2_j B^{*1}_{jk}$ ein Punkt $q^*_{jk}$. $\dot{U}^2_1 C^1_{1k}$ ist ein Punkt $q_{1k}$, $\dot{U}^2_1 C^{*1}_{1k}$ ein Punkt $q^*_{1k}$, $\dot{U}^2_{t+1} C^1_{tk}$ ein Punkt $q_{t+1k}$ und $\dot{U}^2_{t+1} C^{*1}_{tk}$ (mit $C^{*1}_{s_k+1k}=C^{*1}_{1k}$) ein Punkt $q^*_{t+1k}$.

b. $\dot{U}^2_m - M^2$ $(m=1, \ldots, t+1)$ besteht aus vier z-Komponenten $V^1_{m1}, \ldots, V^1_{m4}$ (vgl. Fig. 32), so daß $q^*_{m1}$ und $q_{m2}$ die Randpunkte von $V^1_{m1}$ sind, $q_{m1}$ und $q^*_{m2}$ die von $V^1_{m2}$, $q_{m1}$ und $q_{m2}$ die von $V^1_{m3}$ und $q^*_{m1}$ und $q^*_{m2}$ die von $V^1_{m4}$.

c. $\dot{U}^3_i B^2_{ik}$ $(i=1, \ldots, t;\ k=1, 2)$ ist eine offene Kante $L^1_{ik}$ (siehe Fig. 33) und $\dot{U}^3_i B^{*2}_{ik}$ (mit $B^{*2}_{s_k+1k}=B^{*2}_{1k}$ bei $t=s_k+1$) ist eine offene Kante $L^{*1}_{ik}$.

d. $(\dot{U}^3_i - \dot{J}^3_i) - M^2$ besteht aus vier z-Komponenten $V^2_{i1}, \ldots, V^2_{i4}$, so daß $\dot{V}^2_{i1}=\overline{V}^1_{i1} + \overline{V}^1_{i+11} + L^{*1}_{i1} + L^1_{i2}$ ist, sowie $\dot{V}^2_{i2}=\overline{V}^1_{i2}+\overline{V}^1_{i+12}+L^1_{i1}+L^{*1}_{2}$, $\dot{V}^2_{i3}=\overline{V}^1_{i3}+\overline{V}^1_{i+13}+L^1_{i1}+L^1_{i2}$ und $\dot{V}^2_{i4}=\overline{V}^1_{i4}+\overline{V}^1_{i+14}+L^{*1}_{i1}+L^{*1}_{i2}$.

e. Die vier offenen Kanten $L^1_k=L^1_{1k}+\ldots+L^1_{tk}+q_{2k}+\ldots+q_{tk}$ und $L^{*1}_k=L^{*1}_{1k}+\ldots+L^{*1}_{tk}+q^*_{2k}+\ldots+q^*_{tk}$ $(k=1, 2)$ sind die z-Komponenten von $(\dot{U}^3-\dot{Q}^3)\,M^2$. Die vier

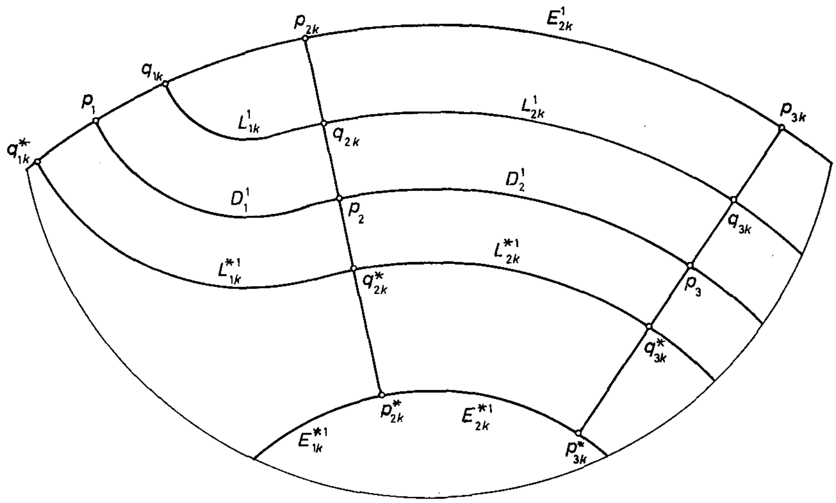


Fig. 33. $U_1^3 A_k^2$ und $U_2^3 A_k^2$ enthaltender Ausschnitt von $A_k^2$ (für $t > 2$).

offenen Flächenstücke $V_u^2 = V_{1u}^2 + \dots + V_{tu}^2 + V_{2u}^1 + \dots + V_{tu}^1$ $(u = 1, \dots, 4)$ sind die z-Komponenten von $(\dot U^3 - \dot Q^3) - M^2$.

4.7) Die Zuordnung von $\bar V_1^2 + \bar V_2^2$ und $\overline{(\dot U^3 - \dot Q^3)}$ zu $M^2\, U^3$ ist eine Umschaltung $\sigma$ von $M^2\, U^3$ über $\overline{(\dot U^3 - \dot Q^3)}$. $\sigma$ bewirkt in $\bar J_i^3$ $(i = 1, \dots, t)$ eine Umschaltung $\sigma_i$ von $M^2\, U_i^3$ über $\overline{(\dot U^3 - \dot J^3)}$, sowie in $\bar N_j^2$ $(j = 2, \dots, t)$ eine Umschaltung $\sigma_j'$ von $M^2\, U_j^2$ über $\dot U_j^2$, in $\bar J_1^2$ eine Umschaltung $\sigma_1'$ von $M^2\, U_1^2$ über $\dot U_1^2$ und in $\bar J_t^2$ eine Umschaltung $\sigma_{t+1}'$ von $M^2\, U_{t+1}^2$ über $\dot U_{t+1}^2$. Dabei gilt:

4.7.1) $\sigma_1'$ ist die bezüglich $M^2 \bar J_1^2$ und $\Phi(\bar J_1^2)$ reguläre Umschaltung von $M^2\, U_1^2$ über $\dot U_1^2$. $\sigma_{t+1}'$ ist entsprechend die bezüglich $M^2 \bar J_t^2$ und $\Phi(\bar J_t^2)$ reguläre Umschaltung von $M^2\, U_{t+1}^2$ über $\dot U_{t+1}^2$.

Beweis: a. Nach dem für PK- und P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücke bereits bewiesenen Teil I ist entweder $\sigma_1'$ oder $\bar\sigma_1'$ regulär bezüglich $M^2 \bar J_1^2$ und $\Phi(\bar J_1^2)$.

b. Aus der Annahme, $\bar\sigma_1'$ sei regulär bezüglich $M^2 \bar J_1^2$ und $\Phi(\bar J_1^2)$, folgt: $K^1 = (\bar C_{11}^1 - U_1^2) + (\bar C_{12}^1 - U_1^2) + \bar V_{13}^1$ ist eine Sz-Komponente von $\bar\sigma_1'(M^2 \bar J_1^2)$ in $\bar J_1^2$ (vgl. beispielsweise Fig. 34) und ist damit ähnlich bezüglich $\Phi$ zu einer Sz-Komponente $S^1$ von $M^2 \bar J_1^2$ in $\bar J_1^2$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $S^1$ eine PK- oder P$\dot{\text{M}}$-Normalkante ist. Also ist die Annahme falsch.

c. Mit a und b ist der erste Teil von 4.7.1 bewiesen. Der zweite Teil von 4.7.1 ergibt sich völlig analog, wenn für $\sigma_1'$, $U_1^2$ und $V_{13}^1$ $\sigma_{t+1}'$, $U_{t+1}^2$ bzw. $V_{t+13}^1$ gesetzt werden und für $J_1^2$ und $C_{1k}^1$ $(k = 1, 2)$ $J_t^2$ bzw. $C_{tk}^1$. Damit ist 4.7.1 bewiesen.

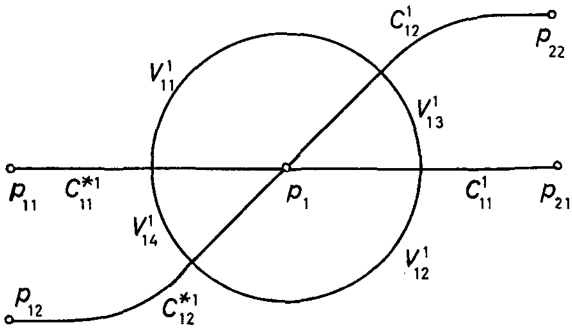



Fig. 34. $\bar{E}^1_{11}$, $\bar{E}^1_{12}$ und $U^2_1$ für $t < s_1 + 1$, $t < s_2 + 1$. ($C^1_{11}$ und $C^1_{12}$, sowie $C^{*1}_{11}$ und $C^{*1}_{12}$ können außerhalb $U^2_1$ Schnittpunkte besitzen.)

4.7.2) Die S-Mannigfaltigkeiten $\sigma'_{t+1}\sigma'_1(M^2\bar{J}^2_t)$ und $\sigma'_{t+1}\sigma'_1(M^2\bar{J}^2_t)$ liegen S-normal in $\bar{J}^2_1$ bzw. in $\bar{J}^2_t$. (Dies folgt nach 4.7.1 aus den für PK- und PṀ-Flächenstücke bereits bewiesenen Teilen I und II, und zwar aus I, wenn $J^2_t \neq J^2_1$ ist, und aus II, wenn $J^2_t = J^2_1$ ist.) Dabei gibt es offene Kanten $E'^1_{11}$, $E'^1_{12}$, $E'^1_{t1}$ und $E'^1_{t2}$, so daß folgendes gilt:

a. $\bar{E}'^1_{1k}$ $(k = 1, 2)$ ist diejenige Sz-Komponente von $\sigma'_{t+1}\sigma'_1(M^2\bar{J}^2_1)$ in $\bar{J}^2_1$, die $C^{*1}_{1k} - U^3$ enthält.

b. $\bar{E}'^1_{tk}$ ist entsprechend diejenige Sz-Komponente von $\sigma'_{t+1}\sigma'_1(M^2\bar{J}^2_t)$ in $\bar{J}^2_t$, die $C^{*1}_{tk} - U^3$ enthält.

c. $E'^1_{1k}$ und $E'^1_{tk}$ sind bei $t < s_k + 1$ miteinander punktfremd und bei $t = s_k + 1$ einander gleich (siehe Fig. 34, 35 und 36).

4.7.3) Die Sz-Komponenten von $\sigma'_j(\bar{A}^1_{j1} + \bar{A}^1_{j2})$ in $\bar{N}^2_j$ $(j = 2, \ldots, t)$ sind die abgeschlossenen Hüllen der offenen (und nach 4.5 doppelpunktfreien) Kanten $A'^1_{j1} = (B^{*1}_{j1} - U^2_j) + (B^1_{j2} - U^2_j) + \bar{V}^1_{j1}$ und $A'^1_{j2} = (B^1_{j1} - U^2_j) + (B^{*1}_{j2} - U^2_j) + \bar{V}^1_{j2}$.

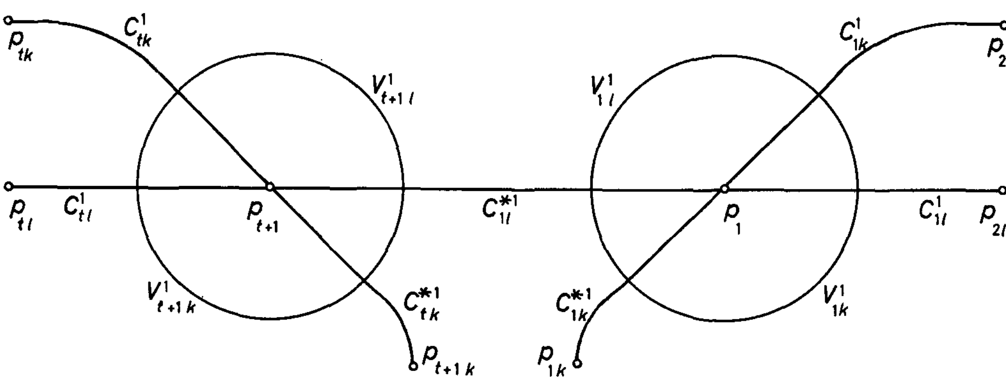



Fig. 35. $\bar{E}^1_{1k}$, $\bar{E}^1_{tk}$, $\bar{E}^1_{1l}$, $U^2_1$ und $U^2_{t+1}$ für $t = s_1 + 1 < s_l + 1$. ($C^1_{1k}$ und $C^1_{1l}$, sowie $C^1_{tk}$ und $C^1_{tl}$, $C^{*1}_{1k}$ und $C^{*1}_{1l}$, $C^{*1}_{tk}$ und $C^{*1}_{1l}$ können außerhalb $U^2_1$ und $U^2_{t+k}$ Schnittpunkte miteinander haben.)

23* – 61173051 151. *Acta mathematica*. Imprimé le 4 juillet 1961

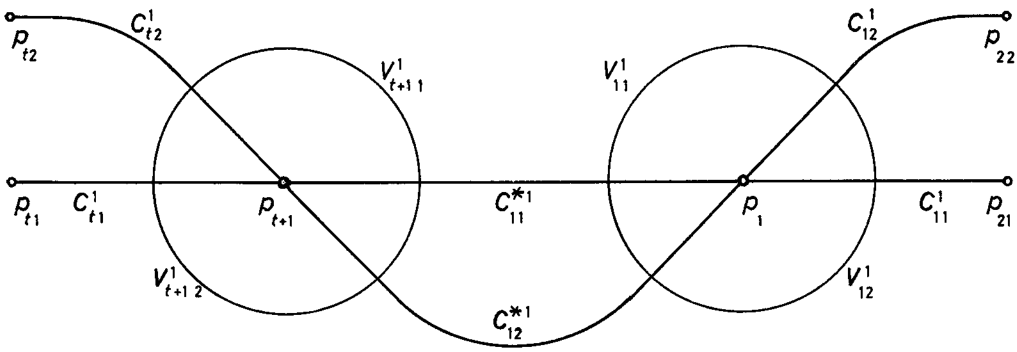



Fig. 36. $\bar{E}^1_{11}$, $\bar{E}^1_{12}$, $U^2_1$ und $U^2_{t+1}$ für $t = s_1 + 1 = s_2 + 1$. ($C^1_{11}$ und $C^1_{12}$, sowie $C^1_{t1}$ und $C^1_{t2}$, $C^{*1}_{11}$ und $C^{*1}_{12}$ können außerhalb $U^2_1$ und $U^2_{t+1}$ Schnittpunkte miteinander haben.)

4.7.4) Die Sz-Komponenten von $\sigma_m(\bar{A}^2_{m1} + \bar{A}^2_{m2})$ in $\bar{J}^3_m$ $(m = 2, \ldots, t-1)$ sind die abgeschlossenen Hüllen der offenen (und nach 4.5 doppelpunktfreien) Flächenstücke $A'^2_{m1} = (B^{*2}_{m1} - \mathring{U}^3_m) + (B^2_{m2} - \mathring{U}^3_m) + V^2_{m1}$ und $A'^2_{m2} = (B^2_{m1} - \mathring{U}^3_m) + (B^{*2}_{m2} - \mathring{U}^3_m) + V^2_{m2}$.

Ferner gibt es offene Flächenstücke $A'^2_{11}$, $A'^2_{12}$, $A'^2_{t1}$ und $A'^2_{t2}$, so daß folgendes gilt: $\bar{A}'^2_{1k}$ $(k = 1, 2)$ ist diejenige Sz-Komponente von $\sigma_t\,\sigma_1(M^2\,\bar{J}^3_1)$ in $\bar{J}^3_1$, die $B^{*2}_{1k} - U^3$ enthält. $\bar{A}'^2_{tk}$ ist diejenige Sz-Komponente von $\sigma_t\,\sigma_1(M^2\,\bar{J}^3_t)$ in $\bar{J}^3_t$, die $B^{*2}_{tk}$ enthält. $A'^2_{1k}$ und $A'^2_{tk}$ sind bei $t < s_k + 1$ miteinander punktfremd und bei $t = s_k + 1$ einander gleich (vgl. 4.7.2).

Insgesamt sind $A'^2_{i1}$ und $A'^1_{i2}$ $(i = 1, \ldots, t)$ Sz-Komponenten von $(\sigma M^2)\,\bar{J}^3_i$ in $\bar{J}^3_i$.

4.7.5) Die Sz-Komponenten von $\sigma(A^2_1 + A^2_2)$ in $\bar{Q}^3$ sind abgeschlossene Flächenstücke $A'^2_1 = (\bar{B}^{*2}_1 - U^3) + (\bar{B}^2_2 - U^3) + \bar{V}^2_1$ und $A'^2_2 = (\bar{B}^2_1 - U^3) + (\bar{B}^{*2}_2 - U^3) + \bar{V}^2_2$.

4.8) Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung $\gamma_{ik}$ von $\Phi(\bar{A}'^2_{ik})$ und $\Phi(\bar{A}^2_{ik})$ aufeinander bezüglich $\Phi$ $(i = 1; \ldots, t,\ k = 1, 2)$.

Beweis:

4.8.1) Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha_{1k}$ $(k = 1, 2)$ von $\Phi(\bar{E}'^1_{1k})$ und $\Phi(\bar{E}^1_{1k})$ aufeinander bezüglich $\Phi$, sowie eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha_{tk}$ von $\Phi(\bar{E}'^1_{tk})$ und $\Phi(\bar{E}^1_{tk})$ aufeinander bezüglich $\Phi$. (Bei $t = s_k + 1$ ist $\alpha_{tk}$ mit $\alpha_{1k}$ identisch.)

Beweis: Die Zuordnungen $E'^1_{1k} \leftrightarrow E^1_{1k}$, $p_{21} \leftrightarrow p_{22}$ und die Zuordnung der von $p_{21}$ und $p_{22}$ verschiedenen Randpunkte von $E'^1_{1k}$ und $E^1_{1k}$ zueinander bilden zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Theta(\bar{E}'^1_{1k})$ und $\Theta(\bar{E}^1_{1k})$ aufeinander bezüglich $\Theta$. Entsprechend bilden die Zuordnungen $E^1_{tk} \leftrightarrow E'^1_{tk}$, $p_{t1} \leftrightarrow p_{t2}$ und die Zuordnung der von $p_{t1}$ und $p_{t2}$ verschiedenen Randpunkte von $E'^1_{tk}$ und von $E^1_{tk}$ zueinander eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Theta(\bar{E}'^1_{tk})$ und $\Theta(\bar{E}^1_{tk})$ aufeinander bezüglich $\Theta$. Also sind $\bar{E}'^1_{1k}$ und $\bar{E}^1_{1k}$, sowie

$\bar{E}'^1_{tk}$ und $\bar{E}^1_{tk}$, einander nach Hilfssatz 3, I ähnlich bezüglich $\Theta$, also (da es sich um normal bezüglich $\Phi$ liegenden Kanten handelt) auch bezüglich $\Phi$. Daraus folgt 4.8.1.

4.8.2) Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha_j$ (für alle $j=2, \ldots, t-1$) von $\Phi(\bar{E}^1_{j1})$ und $\Phi(\bar{E}^1_{j2})$ aufeinander bezüglich $\Phi$.

Beweis: Die Zuordnungen $E^1_{j1} \leftrightarrow E^1_{j2}$, $p_{j1} \leftrightarrow p_{j2}$ und $p_{j+11} \leftrightarrow p_{j+12}$ bilden zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung $\beta_j$ von $\Theta(\bar{E}^1_{j1})$ und $\Theta(\bar{E}^1_{j2})$ aufeinander bezüglich $\Theta$. Ist $J^2_j$ ein PF-Flächenstück, so ist $\beta_j$ zugleich eine Ähnlichkeitsabbildung von $\Phi(\bar{E}^1_{j1})$ und $\Phi(\bar{E}^1_{j2})$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Ist $J^2_j$ ein PK- oder PṀ-Flächenstück, so folgt nach Hilfssatz 3, I die Ähnlichkeit von $\bar{E}^1_{j1}$ und $\bar{E}^1_{j2}$ bezüglich $\Theta$ und daraus die Ähnlichkeit bezüglich $\Phi$. Damit ist 4.8.2 bewiesen.

4.8.3) Die Zuordnungen $A'^2_{1k} \leftrightarrow A^2_{1k}$, $\dot{A}'^2_{1k} N^2_1 \leftrightarrow \dot{A}^2_{1k} N^2_1$, $A'^1_{2k} \leftrightarrow A^1_{2k}$, $\alpha_{1k}$ und die Zuordnung von $E^{*1}_{1k}$, $p^*_{1k}$ und $p^*_{2k}$ zu sich selbst bilden zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung $\gamma_{1k}$ von $\Phi(\bar{A}'^2_{1k})$ und $\Phi(\bar{A}^2_{1k})$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Entsprechend bilden die Zuordnungen $A'^2_{tk} \leftrightarrow A^2_{tk}$, $A'^1_{tk} \leftrightarrow A^1_{tk}$, $\dot{A}'^2_{tk} N^2_{t+1k} \leftrightarrow \dot{A}^2_{tk} N^2_{t+1k}$ (mit $N^2_{s_k+1k} = N^2_{1k}$ bei $t = s_k$ und $N^2_{s_k+2k} = N^2_{2k}$ bei $t = s_k + 1$), $\alpha_{tk}$ und die Zuordnung der übrigen Elemente von $\Phi(\bar{A}^2_{tk})$ zu sich selbst eine Ähnlichkeitsabbildung $\gamma_{tk}$ von $\Phi(\bar{A}'^2_{tk})$ und $\Phi(\bar{A}^2_{tk})$ aufeinander bezüglich $\Phi$. (Dabei ist $\gamma_{tk}$ für $t = s_k + 1$ mit $\gamma_{1k}$ identisch.)

4.8.4) Die Zuordnungen $A'^2_{mk} \leftrightarrow A^2_{mk}$, $A'^1_{mk} \leftrightarrow A^1_{mk}$, $A'^1_{m+1k} \leftrightarrow A^1_{m+1k}$ (mit $A'^1_{s_k+1k} = A'^1_{1k}$), $\alpha_m$ und die Zuordnung aller übrigen Elemente von $\Phi(\bar{A}^2_{mk})$ zu sich selbst ($m = 2, \ldots, t-1$; $k = 1, 2$) bilden zusammen eine Ähnlichkeitsabbildung $\gamma_{mk}$ von $\Phi(\bar{A}'^2_{mk})$ und $\Phi(\bar{A}^2_{mk})$ aufeinander bezüglich $\Phi$.

Mit 4.8.3 und 4.8.4 ist 4.8 bewiesen.

4.9) $A'^2_k$ und $A^2_k$ sind einander ähnlich bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$.

Beweis: Die Zuordnungen $\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{tk}$ und die Zuordnung aller übrigen Elemente von $\Phi(A^2_k)$ zu sich selbst bilden zusammen die Ähnlichkeitsabbildung von $\Phi(A'^2_k)$ und $\Phi(A^2_k)$ aufeinander bezüglich $\Phi$. Daraus und aus Hilfssatz 3, I folgt 4.9.

4.10) $\sigma$ ist regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi(\bar{Q}^3)$, sowie bezüglich $M^2$ und $\Theta(\bar{Q}^3)$.

Beweis:

4.10.1) Ist $C^3$ ein 3-dim Element aus $\Phi(\bar{Q}^3)$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\varphi$ der Sz-Komponenten von $M^2 \bar{C}^3$ in $\bar{C}^3$ zu den Sz-Komponenten von $(\sigma M^2)\bar{C}^3$ in $\bar{C}^3$, so daß einander zugeordnete Elemente einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind.

Beweis: Ist $C^3$ mit $D^1$ punktfremd, so existiert $\varphi$ trivialer Weise als Zuordnung der Sz-Komponenten von $M^2 \bar{C}^3$ in $\bar{C}^3$ zu sich selbst. Ist $C^3$ mit $D^1$ nicht punktfremd, so sind die z-Komponenten von $D^1 \bar{C}^3$ Kanten $\bar{D}^1_{i_1}, \ldots, \bar{D}^1_{i_u}$ ($i_1, \ldots, i_u$ zwischen 1 und $t$, $u > 0$). In diesem Falle bilden die Zuordnung $\bar{A}'^2_{i_v k} \leftrightarrow \bar{A}^2_{i_v k}$ (für alle $v = 1, \ldots, u$, sowie $k = 1$ und 2) und die Zuordnung aller mit $D^1$ punktfremden Sz-Komponenten von $M^2 \bar{C}^3$ in $\bar{C}^3$ zu sich selbst eine Zuordnung, die nach 4.8 und Hilfssatz 3, I die für $\varphi$ geforderten Eigenschaften besitzt. Damit ist 4.10.1 bewiesen.

4.10.2) Die Zuordnung $A'^2_k \leftrightarrow A^2_k$ (für $k = 1$ und 2) und die Zuordnung aller von $A^2_1$ und $A^2_2$ verschiedenen Sz-Komponenten von $M^2$ in $\bar{Q}^3$ zu sich selbst bilden zusammen eine eineindeutige Zuordnung der Sz-Komponenten von $M^2$ in $\bar{Q}^3$ zu den Sz-Komponenten von $(\sigma M^2) \bar{Q}^3$ in $\bar{Q}^3$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Theta$ ähnlich sind.

Mit 4.10.1 und 4.10.2 ist 4.10 bewiesen.

4.11) Aus der Annahme, $\bar{\sigma}$ sei regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi(\bar{Q}^3)$ oder bezüglich $M^2$ und $\Theta(\bar{Q}^3)$, folgt: $K^2 = (\bar{B}^2_1 - U^3) + (\bar{B}^2_2 - U^3) + \bar{V}^2_3$ ist eine Sz-Komponente von $\bar{\sigma} M^2$ in $\bar{Q}^3$, und $K^2 \bar{N}^2_2 = (\bar{B}^1_{21} - U^2_2) + (\bar{B}^1_{22} - U^2_2) + \bar{V}^1_{23}$ ist eine Sz-Komponente von $(\sigma M^2) \bar{N}^2_2$ in $\bar{N}^2_2$. Also ist $K^2 \bar{N}^2_2$ ähnlich bezüglich $\Phi$ zu einer Sz-Komponente $S^1$ von $M^2 \bar{N}^2_2$ in $\bar{N}^2_2$, oder $K^2$ ist ähnlich bezüglich $\Theta$ zu einer Sz-Komponente $S^2$ von $M^2$ in $\bar{Q}^3$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $M^2$ S-normal in $\bar{Q}^3$ liegt. Also ist die Annahme falsch.

4.12) $\sigma M^2$ liegt S-normal in $\bar{Q}^3$.

Beweis:

4.12.1) Die Sz-Komponenten von $\sigma M^2$ in $\bar{Q}^3$ sind $A'^2_1$, $A'^2_2$ und die mit $D^1$ punktfremden Sz-Komponenten von $M^2$ in $\bar{Q}^3$. Sie liegen damit normal bezüglich $\Phi$ in $\bar{Q}^3$.

4.12.2) Die Durchdringung von $\sigma M^2$ ist gleich der Summe der von $D^1$ verschiedenen Durchdringungslinien von $M^2$.

4.12.3) Ist $N^1$ eine in $\dot{Q}^3$ liegende PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante und ist $N^2$ das in $Q^3$ liegende Nebenflächenstück zu $N^1$ und $N^{*1}$ die in $\dot{N}^2$ liegende Parallelkante zu $N^1$, so liegt $(\sigma M^2) \bar{N}^2$ zopfartig in $\bar{N}^2$ bezüglich $\bar{N}^1$ und $\bar{N}^{*1}$.

Beweis: Ist $N^2$ mit $D^1$ punktfremd, so folgt 4.12.3 unmittelbar. Ist $N^2$ mit $D^1$ nicht punktfremd, so gibt es eine Zahl $j$ zwischen 2 und $t$, so daß $N^2 = N^2_j$, also $(\sigma M^2) \bar{N}^2 = \sigma'_j (M^2 \bar{N}^2_j)$ ist. Damit liegt $(\sigma M^2) \bar{N}^2$ nach Hilfssatz 8, II zopfartig in $\bar{N}^2_j$ bezüglich $\bar{N}^1_j$ und $\bar{N}^{*1}_j$. Damit ist 4.12.3 bewiesen.

Aus 4.12.1, 4.12.2 und 4.12.3 folgt 4.12.

4.13) Aus 4.1, 4.7 und 4.9 bis 4.12 folgt I für den Fall, daß $Q^d$ ein P-Raumstück ist. Damit ist Nr. 4 erledigt.

5) Beweis von II für den Fall, daß $Q^d$ ein P- oder K-Raumstück ist:

5.1) Nach dem bereits bewiesenen Teil I ist entweder $\sigma_1$ oder $\bar{\sigma}_1$ regulär bezüglich $\sigma M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$.

5.2) $D_1^1$ besitzt zwei Randpunkte $p_1$ und $p_2$. $p_1$ liegt in einem Nebenflächenstück $N^2$ zu einer PKF- oder PKM-Kante $N^1$. Durch $\sigma_1$ wird in $\bar{N}^2$ genau eine Umschaltung $\sigma_1'$ bewirkt.

5.3) $\sigma_1'$ ist auch regulär bezüglich $(\sigma M^{d-1})\bar{N}^2$ und $\Phi(\bar{N}^2)$.

Beweis: Ist $D^1$ mit $N^2$ punktfremd, so folgt 5.3 unmittelbar daraus, daß $\sigma_1$ regulär bezüglich $M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ ist. Ist $D^1$ mit $N^2$ nicht punktfremd, so liegt genau ein Randpunkt $p$ von $D^1$ in $N^2$. In diesem Falle wird durch $\sigma$ in $\bar{N}^2$ genau eine Umschaltung $\sigma'$ bewirkt, und nach Hilfssatz 8, IV folgt, daß $\sigma_1'$ regulär bezüglich $(\sigma' M^{d-1})\bar{N}^2$ und $\Phi(\bar{N}^2)$ ist. Damit ist 5.3 bewiesen.

5.4) Aus 5.1, 5.2, 5.3 und Hilfssatz 8, II folgt II für den Fall, daß $Q^d$ ein P- oder K-Raumstück ist. Damit ist Nr. 5 erledigt.

6) Beweis von III: Für $s=1$ folgt III unmittelbar aus I.

Aus der Induktionsannahme, III sei für $s \leqslant v$ bewiesen, folgt III für $s=v+1$.

Beweis: $E^e$ sei ein beliebiges Element aus $\Phi(\bar{Q}^d)$ oder aus $\Theta(\bar{Q}^d)$.

6.1) Es gibt eine eineindeutige Zuordnung $\alpha_v$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_v \ldots \sigma_1 M^{d-1})\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$ und den Sz-Komponenten von $M^{d-1}\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind.

6.2) $\sigma_v$ und $\sigma_{v+1}$ sind die bezüglich $\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1}$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$ regulären Umschaltungen von $(\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})U_v^d$ über $\overline{(\dot{U}_v^d - \dot{Q}^d)}$ bzw. von $(\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})U_{v+1}^d$ über $\overline{(\dot{U}_{v+1}^d - \dot{Q}^d)}$.

6.3) Nach dem bereits bewiesenen Teil II ist nun $\sigma_{v+1}$ regulär bezüglich $\sigma_v(\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})$ und $\Phi(\bar{Q}^d)$, d. h. es gibt eine eineindeutige Zuordnung $\beta$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_{v+1}\sigma_v\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$ und den Sz-Komponenten von $(\sigma_v\sigma_{v-1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind. Aus $\beta$ und $\alpha_v$ ergibt sich damit eine eineindeutige Zuordnung $\alpha_{v+1}$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_{v+1} \ldots \sigma_1 M^{d-1})\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$ und den Sz-Komponenten von $M^{d-1}\bar{E}^e$ in $\bar{E}^e$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind. (Ist $E^e$ ein Element aus $\Theta$, so sind einander durch $\alpha_{v+1}$ zugeordnete Komponenten einander damit auch ähnlich bezüglich $\Theta$.)

6.4) Aus 6.3 und dem bereits bewiesenen Teil I folgt die Behauptung.

Damit ist III durch Induktion bewiesen und Nr. 6 ist erledigt.

Mit Nr. 1 bis 6 ist Hilfssatz 9 bewiesen.

## 4. Umschaltungen an S-Normalflächen

Aus den Ergebnissen der beiden letzten Abschnitte läßt sich nun der angestrebte Satz über die Umschaltungen an S-Normalflächen gewinnen.

HAUPTSATZ 4 (Umschaltungssatz für S-Normalflächen).

*$M^2$ sei eine S-Normalfläche. $\mathfrak{x}$ sei der P-Zahlenvektor von $M^2$. $D_1^1, \ldots, D_s^1$ seien die Durchdringungslinien von $M^2$. $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien paarweise miteinander punktfremde, im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in $M^3$. Dann folgt:*

I. *Es gibt genau je eine Umschaltung $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ von $M^2\, U_1^3, \ldots, M^2\, U_s^3$ über $\overline{(\dot{U}_1^3 - \dot{M}^3)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_s^3 - \dot{M}^3)}$, die bezüglich $M^2$ und $\Phi$ regulär ist.*

II. *$(i_1, \ldots, i_t)$ sei ein beliebiges t-Tupel von paarweise verschiedenen Zahlen zwischen 1 und s. Dann ist $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$ eine S-Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ und es gilt:*

II.1. *Ist $\dot{M}^2$ doppelpunktfrei, so ist $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{M}^2$.*

II.2. *Ist eine Zahl j zwischen 1 und s von $i_1, \ldots, i_t$ verschieden, so ist $D_j^1$ eine Durchdringungslinie von $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$, $U_j^3$ ist eine im Verhältnis zu $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2|\Phi$ kleine Umgebung von $D_j^1$* in *$M^3$, und $\sigma_j$ ist die bezüglich $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$ und $\Phi$ reguläre Umschaltung von $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\, U_j^3$ über $\overline{(\dot{U}_j^3 - \dot{M}^3)}$.*

III. *$\sigma_s \ldots \sigma_1 M^2$ ist eine Normalfläche.*

IV. *$\sigma_{i_1}^*, \ldots, \sigma_{i_t}^*$ ($i_1, \ldots, i_t$ paarweise verschieden zwischen 1 und s) seien Umschaltungen von $M^2\, U_{i_1}^3, \ldots, M^2\, U_{i_t}^3$ über $\overline{(\dot{U}_{i_1}^3 - \dot{M}^3)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_{i_t}^3 - \dot{M}^3)}$, und mindestens eine dieser Umschaltungen sei nicht regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi$. Dann folgt:*

IV.1. *$\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2$ ist eine S-Halbnormalfläche mit derselben F-Zahl wie $M^2$. Ist $\dot{M}^2$ doppelpunktfrei, so ist $(\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{M}^2$.*

IV.2. *Es gibt ein PK-Flächenstück $G^2$ und eine Sz-Komponente von $(\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2)\, \bar{G}^2$ in $\bar{G}^2$, die eine PK-Falte ist.*

*Beweis:* 1) Für alle $i = 1, \ldots, s$ gilt: $\Theta(D_i^1)$ besteht aus endlich vielen offenen Kanten $D_{i1}^1, \ldots, D_{iv_i}^1$ mit $v_i > 1$ und Punkten $p_{i1}, \ldots, p_{iv_i+1}$, so daß folgendes gilt:

a. Die Randpunkte von $D_{ij}^1$ $(j = 1, \ldots, v_i)$ sind $p_{ij}$ und $p_{ij+1}$, wobei für den Fall, daß $D_i^1$ nicht berandet ist, $p_{iv_i+1}$ gleich $p_{i1}$ gesetzt wird.

b. $D_{i1}^1, \ldots, D_{iv_i}^1$ liegen in P- bzw. K-Raumstücken $Q_{i1}^3, \ldots, Q_{iv_i}^3$; $p_{i1}, \ldots, p_{iv_i+1}$ liegen in PK- bzw. P$\dot{\text{M}}$-Flächenstücken $G_{i1}^2, \ldots, G_{iv_i+1}^2$.

c. Es gibt zu jeder Kante $D_{ij}^1$ genau eine z-Komponente $U_{ij}^3$ von $U_i^3\, \bar{Q}_{ij}^3$ und zu jedem Punkt $p_{ik}$ $(k=1, \ldots, v_i+1)$ eine z-Komponente $U^2_{ik}$ von $U^3_i G^2_{ik}$, so daß $U^3_{ij}$ eine im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine Umgebung von $\bar{D}^1_{ij}$ in $\bar{Q}^3_{ij}$ ist und so daß $U^2_{ik}$ eine im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine Umgebung von $p_{ik}$ in $\bar{G}^2_{ik}$ ist. Dabei ist

$$U^3_{i1} + \ldots + U^3_{iv_i} = U^3_i.$$

2) Nach Hilfssatz 9, I folgt für alle $i=1, \ldots, s$: Es gibt genau eine Umschaltung $\sigma_{ij}$ von $M^2 U^3_{ij}$ über $(\overline{\dot{U}^3_{ij} - \dot{Q}^3_{ij}})$, die bezüglich $M^2 \bar{Q}^3_{ij}$ und $\Phi(\bar{Q}^3_{ij})$ regulär ist (für alle $j=1, \ldots, v_i$); $\sigma_{ij}$ ist auch regulär bezüglich $M^2 \bar{Q}^3_{ij}$ und $\Theta(\bar{Q}^3_{ij})$. Entsprechend gibt es genau eine Umschaltung $\sigma'_{ik}$ von $M^2 U^2_{ik}$ über $\dot{U}^2_{ik}$, die bezüglich $M^2 \bar{G}^2_{ik}$ und $\Phi(\bar{G}^2_{ik})$ regulär ist; $\sigma'_{ik}$ ist auch regulär bezüglich $\Theta(\bar{G}^2_{ik})$ und $M^2 \bar{G}^2_{ik}$ (für alle $k=1, \ldots, v_i+1$).

3) Es gibt genau eine Umschaltung $\sigma_i$ von $M^2 U^3_i$ über $(\overline{\dot{U}^3_i - \dot{M}^3})$, so daß $\sigma_{i1}$ eine durch $\sigma_i$ in $\bar{Q}^3_{i1}$ bewirkte Umschaltung ist $(i=1, \ldots, s)$.(1)

4) Die Gesamtheit der durch $\sigma_i$ in $\bar{Q}^3_{i1}, \ldots, \bar{Q}^3_{iv_i}$ bewirkten Umschaltungen ist gleich der Gesamtheit der Umschaltungen $\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iv_i}$.

Beweis: 4.1) $\sigma_{ij}$ $(j=1, \ldots, v_i)$ ist eine durch $\sigma_i$ in $\bar{Q}^3_{ij}$ bewirkte Umschaltung.

Beweis: Aus der Induktionsannahme, 4.1 sei für $j=l$ bewiesen $(l<v_i)$, folgt 4.1 für $j=l+1$: $\sigma'_{il+1}$ ist nach Hilfssatz 9, I sowohl die durch $\sigma_{il}$, als auch die durch $\sigma_{il+1}$ bewirkte Umschaltung von $M^2 U^2_{il+1}$ über $\dot{U}^2_{il+1}$. Also ist $\sigma_{il+1}$ eine durch $\sigma_i$ bewirkte Umschaltung. Damit ist 4.1 durch Induktion bewiesen.

---

(1) Wie H. Schubert bemerkt hat, ist $U^3_i$ für alle $i=1, \ldots, s$ orientierbar (vgl. [11]). Dieses läßt sich folgendermaßen beweisen:

Ist $D^1_i$ berandet, so ist $U^3_i$ ein Raumelement und die Behauptung trivial. Wir betrachten daher eine unberandete Durchdringungslinie $D^1_i$. Die beiden Sz-Komponenten von $M^2 U^3_i$ bezeichnen wir mit $Z^2_1$, $Z^2_2$ (wir verzichten darauf, zusätzlich den Index $i$ anzubringen).

$\dot{U}^2_{ij} M^2$ $(j=1, \ldots, v_i)$ besteht aus vier Punkten $q_{j1}, q_{j2}, \overset{*}{q}_{j1}, \overset{*}{q}_{j2}$; $\dot{U}^2_{ij} - M^2$ besteht aus vier offenen Kanten $V^1_{j1}, \ldots, V^1_{j4}$; dabei lassen sich die Bezeichnungen so wählen, daß folgendes gilt (vgl. Fig. 32):

1. $q_{jl}$ und $\overset{*}{q}_{jl}$ liegen in $\dot{Z}^2_l$ (für $l=1$ und 2);
2. $\dot{V}^1_{j1} = \overset{*}{q}_{j1} + q_{j2}$, $\dot{V}^1_{j2} = q_{j1} + \overset{*}{q}_{j2}$, $\dot{V}^1_{j3} = q_{j1} + q_{j2}$, $\dot{V}^1_{j4} = \overset{*}{q}_{j1} + \overset{*}{q}_{j2}$;
3. $\sigma'_{ij}(U^2_{ij} M^2) = \bar{V}^1_{j1} + \bar{V}^1_{j2}$. — Diejenige Orientierung von $\dot{U}^2_{ij}$, bei der die Punkte $q_{j1}, q_{j2}, \overset{*}{q}_{j1}, \overset{*}{q}_{j2}$ in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden, heiße $\varepsilon'_j$. Entsprechend besteht $(\dot{U}^3_{ij} - \dot{Q}^3_{ij}) M^2$ aus vier offenen Kanten $L^1_{j1}, L^1_{j2}, L^{*1}_{j1}, L^{*1}_{j2}$; $(\dot{U}^3_{ij} - \dot{Q}^3_{ij}) - M^2$ besteht aus vier offenen Flächenstücken $V^2_{j1}, \ldots, V^2_{j4}$ und bei geeigneter Bezeichnung gilt: $q_{jl} \subset \dot{L}^1_{jl}$, $\overset{*}{q}_{jl} \subset \dot{L}^{*1}_{jl}$ (für $l=1$ und 2), $V^1_{jm} \subset \dot{V}^2_{jm}$ (für alle $m=1, \ldots, 4$). Diejenige Orientierung von $(\dot{U}^3_{ij} - \dot{Q}^3_{ij})$, durch die in $\dot{U}^2_{ij}$ die Orientierung $\varepsilon'_j$ induziert wird, nennen wir $\varepsilon_j$.

Da $\sigma'_{ij}$ und $\sigma'_{ij+1}$ durch $\sigma_{ij}$ bewirkte Umschaltungen sind, ist $\sigma_{ij}(U^3_{ij} M^2) = \bar{V}^2_{j1} + \bar{V}^2_{j2}$ und es gilt entweder a. $V^1_{j+11} \subset \dot{V}^2_{j1}$, $V^1_{j+12} \subset \dot{V}^2_{j2}$ oder b. $V^1_{j+11} \subset \dot{V}^2_{j2}$, $\dot{V}^1_{j+12} \subset \dot{V}^2_{j1}$. Da ferner $\bar{L}^1_{jl}$, $\bar{L}^{*1}_{jl} \subset \dot{Z}^2_l$ (für $l=1$ und 2) gilt, folgt im Falle a: $V^1_{j+13} \subset \dot{V}^2_{j3}$, $V^1_{j+14} \subset \dot{V}^2_{j4}$ und im Falle b: $V^1_{j+13} \subset \dot{V}^2_{j4}$, $V^1_{j+14} \subset \dot{V}^2_{j3}$. Also induziert $\varepsilon_j$ in $\dot{U}^2_{ij+1}$ in jedem Falle die zu $\varepsilon'_{j+1}$ entgegengesetzte Orientierung. Also bilden $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{v_i}$ zusammen eine kohärente Orientierung von $\dot{U}^3_i$, also ist $U^3_i$ ein orientierbarer Vollring wzbw.

4.2) Ist $\sigma^*$ eine beliebige durch $\sigma_i$ in einem Raumstück $\overline{Q}_{ij}^3$ bewirkte Umschaltung, so gibt es eine Zahl $m$ zwischen 1 und $v_i$, so daß $\sigma^*$ eine Umschaltung von $M^2\,U_{im}^3$ über $\overline{(\dot{U}_{im}^3 - \dot{Q}_{im}^3)}$ ist, also nach 4.1 gleich $\sigma_{im}$.

Aus 4.1 und 4.2 folgt Nr. 4.

5) Ist $(i_1, \ldots, i_t)$ ein beliebiges $t$-Tupel von paarweise voneinander verschiedenen Zahlen zwischen 1 und $s$, so gilt:

5.1) Ist $E^3$ ein 3-dim Element aus $\Theta$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\alpha$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\,\overline{E}^3$ in $\overline{E}^3$ und den Sz-Komponenten von $M^2\,\overline{E}^3$ in $\overline{E}^3$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ und bezüglich $\Theta$ ähnlich sind. Ferner gilt nach Hilfssatz 9, III: Ist $E^3$ ein P- oder ein K-Raumstück, so liegt $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\,\bar{E}^3$ S-normal in $\bar{E}^3$.

Beweis: Sind $D_{i_1}^1, \ldots, D_{i_t}^1$ mit $E^3$ punktfremd, so existiert $\alpha$ trivialer Weise als Zuordnung der Sz-Komponenten von $M^2\,\overline{E}^3$ zu sich selbst. Ist $(D_{i_1}^1 + \ldots + D_{i_t}^1)\,E^3$ nicht leer, so folgt nach Hilfssatz 9, III die Existenz einer Zuordnung $\alpha$ mit den geforderten Eigenschaften. Damit ist 5.1 bewiesen.

5.2) Ist $N^3$ ein 3-dim Element aus $\Phi$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\beta$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\,\bar{N}^3$ in $\bar{N}^3$ und den Sz-Komponenten von $M^2\,\bar{N}^3$ in $\bar{N}^3$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind.

Beweis: $N^3$ liegt in einem Element $E^3$ aus $\Theta$. Die Sz-Komponenten von $M^2\,\overline{E}^3$ seien $A_1^2, \ldots, A_w^2$. Nach 5.1 gibt es eine eineindeutige Zuordnung $\alpha$ zwischen den Sz-Komponenten von $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\,\overline{E}^3$ in $\overline{E}^3$ und den Komponenten $A_1^2, \ldots, A_w^2$, so daß einander zugeordnete Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind. Die Sz-Komponenten von $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)\,\overline{E}^3$ in $\overline{E}^3$ werden mit $A_1'^2, \ldots, A_w'^2$ bezeichnet, so daß $A_l^2$ und $A_l'^2$ $(l = 1, \ldots, w)$ einander durch $\alpha$ zugeordnet werden. Dann gibt es also eine Ähnlichkeitsabbildung $\eta_l$ von $\Phi\,(A_l^2)$ und $\Phi\,(A_l'^2)$ aufeinander bezüglich $\Phi$. $\eta_l$ umfaßt eine eineindeutige Zuordnung $\zeta_l$ zwischen den z-Komponenten von $A_l'^2\,N^3$ und den z-Komponenten von $A_l^2\,N^3$, wobei die abgeschlossenen Hüllen einander zugeordneter Komponenten einander bezüglich $\Phi$ ähnlich sind. Daraus folgt 5.2.

6) $\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ ist nach 5.2 regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi$.

7) Ist $(i_1, \ldots, i_t)$ ein beliebiges $t$-Tupel von paarweise voneinander verschiedenen Zahlen zwischen 1 und $s$, so gilt:

7.1) $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$ ist eine S-Normalfläche, wie aus 5.1 folgt. $\sigma_s \ldots \sigma_1 M^2$ ist damit eine Normalfläche.

7.2) Ist $\dot{M}^2$ doppelpunktfrei, so ist $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)^{\dot{}} = \dot{M}^2$.

7.3) Der P-Zahlenvektor von $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$ ist gleich $\mathfrak{x}$.

Beweis: Ist $\mathfrak{P}$ eine P-Klasse und $x$ die $\mathfrak{P}$ entsprechende P-Zahl von $M^2$, so ist $\mathfrak{x}$ auch die $\mathfrak{P}$ entsprechende P-Zahl von $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$, wie aus 5.1 folgt.

7.4) Ist $j$ $(j = 1, \ldots, s)$ von $i_1, \ldots, i_t$ verschieden, so gilt:

7.4.1) $D_j^1$ ist eine Durchdringungslinie von $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$, und $U_j^3$ ist eine im Verhältnis zu $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2 | \Phi$ kleine Umgebung von $D_j^1$ in $M^3$.

7.4.2) $\sigma_j$ ist regulär bezüglich $\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2$ und $\Phi$, wie aus 5.2 folgt.

8) $\sigma_{i_1}^*, \ldots, \sigma_{i_t}^*$ $(i_1, \ldots, i_t$ paarweise verschieden zwischen 1 und $s)$ seien Umschaltungen von $M^2 U_{i_1}^3, \ldots, M^2 U_{i_t}^3$ über $\overline{(\dot{U}_{i_1}^3 - \dot{M}^3)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_{i_t}^3 - \dot{M}^3)}$. Es gebe eine Zahl $l$ zwischen 1 und $t$, so daß $\sigma_{i_l}^* = \bar{\sigma}_{i_l}$ ist. Dann gilt:

8.1) $\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2$ ist eine Halbnormalfläche mit derselben F-Zahl wie $M^2$.

Beweis: $\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2$ ist eine transversal bezüglich $\Phi$ liegende St-Mannigfaltigkeit in $M^3$ und ist mit den abgeschlossenen Hüllen der R-Raumstücke punktfremd. Ist $S^3$ die Summe der abgeschlossenen Hüllen aller F-Raumstücke aus $\Theta$, so ist $(\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2) S^3 = M^2 S^3$. Daraus folgt 8.1.

8.2) Ist $\dot{M}^2$ doppelpunktfrei, so ist $(\sigma_{i_t} \ldots \sigma_{i_1} M^2)^{\dot{}} = \dot{M}^2$.

8.3) $G_{i_l 2}^2$ ist ein PK-Flächenstück, und es gibt eine Sz-Komponente $K^1$ von $(\sigma_{i_t}^* \ldots \sigma_{i_1}^* M^2) \bar{G}_{i_l 2}^2$ in $\bar{G}_{i_l 2}^2$, die eine PK-Falte ist. Dabei liegt $K^1$ in der abgeschlossenen Hülle eines Nebenflächenstückes $N^2$ zu einer PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N^1$.

Beweis:

8.3.1) $G_{i_l 2}^2$ ist ein PK-Flächenstück, da anderenfalls $G_{i_l 2}^2$ ein P$\dot{M}$-Flächenstück wäre und $p_{i_l 2}$ und $p_{i_l 1}$ die Randpunkte von $D_{i_l}^1$ wären, also $D_{i_l}^1 = D_{i_l 1}^1$ und $M^2 \bar{Q}_{i_l 1}^3$ nicht S-normal in $\bar{Q}_{i_l 1}^3$.

8.3.2) $p_{i_l 2}$ liegt in einem Element $N^2$ aus $\Phi$. $N^2$ ist ein in $G_{i_l 2}^2$ liegendes Nebenflächenstück zu einer PKF- oder PK$\dot{M}$-Kante $N^1$, und es gibt genau eine durch $\sigma_{i_l}^*$ in $\bar{N}^2$ bewirkte Umschaltung $\sigma_{i_l 2}^{*\prime}$ von $M^2 U_{i_l 2}^2$ über $\dot{U}_{i_l 2}^2$.

8.3.3) $\sigma_{i_l 2}^{*\prime}$ ist gleich $\bar{\sigma}_{i_l 2}^{\prime}$, also nicht regulär bezüglich $M^2 \bar{N}^2$ und $\Phi(\bar{N}^2)$.

8.3.4) Die sämtlichen durch $\sigma_{i_1}^*, \ldots, \sigma_{i_t}^*$ in $\bar{N}^2$ bewirkten Umschaltungen seien $\sigma_1^{*\prime}, \ldots, \sigma_u^{*\prime}$ (unter ihnen ist $\sigma_{i_l 2}^{*\prime}$). $\sigma_m^{*\prime}$ $(m = 1, \ldots, u)$ ist dabei eine Umschaltung über den Rand einer Umgebung $U_m^{*2}$ eines Doppelpunktes $p_m^*$ von $M^2 \bar{N}^2$. Aus Hilfssatz

8, V.2 folgt nun, daß es (mindestens) eine Sz-Komponente $K^1$ von $\sigma_u^{*'} \dots \sigma_1^{*'} (M^2 \bar{N}^2)$ in $\bar{N}^2$ gibt, deren beide Randpunkte in $N^1$ liegen. $K^1$ ist damit eine PK-Falte und eine Sz-Komponente von $(\sigma_{i_t}^* \dots \sigma_{i_1}^* M^2) \bar{G}_{i_l 2}^2$ in $\bar{G}_{i_l 2}^2$.

Mit 8.3.1, 8.3.2 und 8.3.4 ist 8.3 bewiesen.

9) $\bar{\sigma}_i$ $(i = 1, \dots, s)$ ist nicht regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi$, wie aus Nr. 8 folgt.

Aus Nr. 3, 6 und 9 folgt Teil I der Behauptung, aus Nr. 7 Teil II und III und aus Nr. 8 Teil IV. Damit ist Hauptsatz 4 bewiesen.

# Fünftes Kapitel

# Die Bestimmung von Flächen minimaler Charakteristik

In den ersten vier Kapiteln sind die Hilfsmittel entwickelt worden, um folgendes zu zeigen: $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_z$ seien die nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen der P-Gleichungen. Die $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_z$ entsprechenden $\Theta$-Klassen von Normalflächen seien $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_z$. Wählt man aus jeder der Klassen $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_z$ einen Repräsentanten aus, so befinden sich unter diesen endlich vielen Mannigfaltigkeiten notwendig solche mit gewissen für $M^3$ charakteristischen Eigenschaften (siehe Abschnitt d der Einleitung). Hierzu wollen wir in diesem Kapitel folgendes zeigen: $Y^1$ sei eine 1-dim Sphäre in $\dot{M}^3$ und die Zerlegung $\Gamma$ von $M^3$ sei so gewählt, daß $Y^1$ aus 1- und 0-dim Elementen aus $\Gamma$ besteht. Dann enthält mindestens eine der Fundamentalklassen $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_z$ Bänder von minimaler Charakteristik mit dem Rande $Y^1$. Daraus ergibt sich ein Isotopiekriterium für die Kreislinie. Zur Vereinfachung werden an $M^3$ noch die Bedingungen gestellt, daß jede in $M^3$ liegende 2-dim Sphäre $M^3$ in zwei z-Komponenten zerlege, und daß es in $M^3$ keine (singularitätenfreien) projektiven Ebenen gebe.

## 1. Normalflächenpaare

Ist $M^2$ eine zusammenhängende Normalfläche aus der $\Theta$-Klasse $\mathfrak{M}$ und ist $M'^2$ eine S-Normalfläche mit demselben P-Zahlenvektor wie $M^2$, die aus zwei Sz-Komponenten $M_1^2$ und $M_2^2$ besteht, die Normalflächen sind, so läßt sich unter Umständen eine „Vereinfachung" von $M'^2$ in folgendem Sinne erzielen: Es kann sein, daß $M'^2 = M_1^2 + M_2^2$ eine Reihe von Durchdringungslinien besitzt, so daß durch die regulären Umschaltungen über die Ränder kleiner Umgebungen dieser Durchdringungslinien aus $M'^2$ eine S-Normalfläche $M^{*2}$ hervorgeht, die ebenfalls aus zwei Sz-Komponenten $M_1^{*2}$ und $M_2^{*2}$ besteht, die Normalflächen sind. $M^{*2} = M_1^{*2} + M_2^{*2}$ besitzt dann weniger Durchdringungslinien als $M'^2 = M_1^2 + M_2^2$ und kann in diesem Sinne als „einfacher" angesehen werden. Läßt sich an $M^{*2}$ keine weitere derartige Vereinfachung mehr vornehmen, so bezeichnen wir $M_1^{*2}$ und $M_2^{*2}$ als ein „reduziertes Normalflächenpaar" oder auch als ein „$\mathfrak{M}$ bzw. $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar".

Definition. $M^2$ sei eine zusammenhängende Normalfläche und liege in der $\Theta$-Klasse $\mathfrak{M}$. Dann heißt ein Paar $(M_1^2, M_2^2)$ von zusammenhängenden und voneinander verschiedenen Normalflächen ein *reduziertes $\mathfrak{M}$ erzeugendes Normalflächenpaar bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$ und ein *reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$ oder auch einfach ein *reduziertes Normalflächenpaar bezüglich* $\Phi$, $\Theta$, $\Gamma$, wenn folgendes gilt:

a. $M_1^2$ und $M_2^2$ sind die Sz-Komponenten einer S-Normalfläche in $M^3$ mit demselben P-Zahlenvektor wie $M^2$.

b. Sind $D_1^1, \dots, D_s^1$ die Durchdringungslinien von $M_1^2 + M_2^2$, sind $U_1^3, \dots, U_s^3$ im Verhältnis zu $M_1^2 + M_2^2 | \Phi$ kleine, paarweise miteinander punktfremde Umgebungen von $D_1^1, \dots, D_s^1$ in $M^3$ und sind $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ die bezüglich $M_1^2 + M_2^2$ und $\Phi$ regulären Umschaltungen von $(M_1^2 + M_2^2)\, U_1^3, \dots, (M_1^2 + M_2^2)\, U_s^3$ über $\overline{(\dot{U}_1^3 - \dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_s^3 - \dot{M}^3)}$, so gilt:

Ist $(i_1, \dots, i_t)$ ein beliebiges $t$-Tupel $(t > 0)$ von paarweise verschiedenen Zahlen zwischen 1 und $s$, so ist $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} (M_1^2 + M_2^2)$ S-zusammanhängend in $M^3$.

Folgerung. *$M^2$ sei eine zusammenhängende Normalfläche. $(M_1^2 + M_2^2)$ sei ein reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar. Dann gilt:*

I. *Ist $D^1$ eine Durchdringungslinie von $M_1^2 + M_2^2$, und ist $M_2^2 - D^1$ nicht zusammenhängend, so ist $M_1^2 - D^1$ zusammenhängend.*

*Beweis*. Anderenfalls bestünde $\sigma (M_1^2 + M_2^2)$ aus zwei Sz-Komponenten in $M^3$, wenn $\sigma$ eine beliebige Umschaltung von $(M_1^2 + M_2^2)\, U^3$ über $\overline{(\dot{U}^3 - \dot{M}^3)}$ ist, wobei $U^3$ eine beliebige, im Verhältnis zu $M_1^2 + M_2^2$ kleine Umgebung von $D^1$ in $M^3$ ist.

II. *Die z-Komponenten von $M_1^2 - (M_1^2 M_2^2)$ seien $K_1^2, \dots, K_u^2$. Dann gilt:*

II.1. *Jede Komponente $K_i^2$ $(i = 1, \dots, u)$ enthält mindestens eine Durchdringungslinie von $M_1^2 + M_2^2$ im Rande.*

*Beweis*. Aus der Annahme, eine Komponente $K_i^2$ enthielte keine Durchdringungslinie von $M_1^2 + M_2^2$ im Rande, folgt: $K_i^2$ ist gleich $M_1^2$, also ist $M_1^2 + M_2^2$ eine nicht zusammenhängende Normalfläche mit demselben P-Zahlenvektor wie $M^2$ (also nach Hauptsatz 2 zu $M^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$). Dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $M^2$ zusammenhängend sei. Also ist die Annahme falsch und mindestens eine der (endlich vielen) Durchdringungslinien von $M_1^2 + M_2^2$ liegt in $\dot{K}_i^2$. Damit ist II.1 bewiesen.

II.2. *Ist $M_2^2$ nicht berandet, so sind die Durchdringungslinien von $M_1^2 + M_2^2$ 1-dim*

*Sphären, und die Summe der Charakteristiken von $\bar{K}_1^2, \ldots, \bar{K}_u^2$ ist gleich der Charakteristik von $M_1^2$.*

II.3. *Ist $M_2^2$ eine 2-dim Sphäre, so ist die Charakteristik von $\bar{K}_i^2$ nicht kleiner als Null und nicht größer als die Charakteristik von $M_1^2$ (für alle $i=1, \ldots, u$).*

*Beweis.* a. $\dot{K}_i^2$ enthält nach II.1 (mindestens) eine Durchdringungslinie $D^1$ von $M_1^2+M_2^2$. Dabei ist $M_2^2-D^1$ nicht zusammenhängend.

b. $\bar{K}_i^2$ ist keine 2-dim Sphäre, da anderenfalls $\bar{K}_i^2=M_1^2$ wäre und $M_1^2-D^1$ im Widerspruch zu I nicht zusammenhängend.

c. $\bar{K}_i^2$ ist kein Flächenstück. Denn anderenfalls wäre $D^1$ (nach I) gleich $\dot{K}_i^2$, also $\dot{K}_i^2$ eine z-Komponente von $M_1^2-D^1$, wobei $M_1^2-D^1$ im Widerspruch zu I noch eine weitere ($D^1$ im Rande enthaltende) z-Komponente besitzen müßte.

d. $\bar{K}_i^2$ ist keine projektive Ebene. Denn anderenfalls wäre $\bar{K}_i^2=M_1^2$ und $\bar{K}_i^2-D^1$ wäre (nach I) zusammenhängend; ist nun $U^3$ eine beliebige, im Verhältnis zu $M_1^2+M_2^2$ kleine Umgebung von $D^1$ in $M^3$, so wäre also $M_1^2\,U^3$ ein Möbiussches Band und $M_2^2\,U^3$ ein Kreisring und dies stünde im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $M_1^2+M_2^2$ eine S-Normalfläche sei, also $U^3$ nach Hauptsatz 4, I orientierbar.

e. Aus b, c und d folgt, daß die Charakteristik von $\bar{K}_i^2$ nicht kleiner als Null ist. Da dies für alle $i=1, \ldots, u$ gilt, kann die Charakteristik von $\bar{K}_1^2$ auch nicht größer sein als die Charakteristik von $M_1^2$. Damit ist II. 3 bewiesen.

II.4. *Besteht $M^3-M_2^2$ aus zwei z-Komponenten $Z_1^3$ und $Z_2^3$, so liegt $K_i^2$ entweder in $Z_1^3$ oder in $Z_2^3$ und es gilt: Liegt eine Durchdringungslinie $D^1$ von $M_1^2+M_2^2$ in $\bar{K}_i^2$, so liegt $D^1$ in $\dot{\bar{K}}_i^2$, d.h. est ist $\dot{\bar{K}}_i^2=\dot{K}_i^2$.*

II.5. *Ist $M_2^2$ eine 2-dim Sphäre oder ein Flächenstück, und besteht $M^3-M_2^2$ aus zwei z-Komponenten $Z_1^3$ und $Z_2^3$, so gilt für $i=1, \ldots, s$: In $\dot{K}_i^2$ liegen mindestens zwei Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$.*

*Beweis.* In $\dot{K}_i^2$ liegt (nach II.1) mindestens eine Durchdringungslinie $D^1$ von $M_1^2+M_2^2$. Aus der Annahme, $D^1$ sei die einzige in $\dot{K}_i^2=\dot{\bar{K}}_i^2$ liegende Durchdringungslinie von $M_1^2+M_2^2$, folgt: $K_i^2$ ist eine z-Komponente von $M_1^2-D^1$, wobei $M_1^2-D^1$ im Widerspruch zu I noch eine weitere ($D^1$ im Rande enthaltende) z-Komponente besitzen muß. Also ist die Annahme falsch, und mindestens eine der von $D^1$ verschiedenen Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ liegt in $\dot{K}_i^2$. Damit ist II.5 bewiesen.

Satz 7. *$M^2$ sei eine zusammenhängende Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$, so daß $\mathfrak{x}$ keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen ist. Dann* *folgt: Es gibt ein reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar $(M_1^2, M_2^2)$. Ist dabei $(\dot{M_1^2 + M_2^2})$ doppelpunktfrei, so sind $(\dot{M_1^2 + M_2^2})$ und $\dot{M}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.*

*Beweis.* 1) Es gibt zwei nichttriviale verträgliche Lösungen $\mathfrak{x}_1'$ und $\mathfrak{x}_2'$ der P-Gleichungen, so daß $\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_2'$ gleich $\mathfrak{x}$ ist.

Beweis: $\mathfrak{x}$ läßt sich nach Satz 6 darstellen als Linearkombination $\sum_{i=1}^{z} a_i \mathfrak{f}_i$ der nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_z$ der P-Gleichungen mit nicht-negativ-ganzzahligen Koeffizienten $a_1, \ldots, a_z$. Dabei ist wegen $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{f}_i$ die Summe $a_1 + \ldots + a_z$ größer als 1. Die von Null verschiedenen Koeffizienten $a_i$ seien $a_{i_1}, \ldots, a_{i_w}$. Dann sind $\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{f}_{i_1}$ und $\mathfrak{x}_2' = (a_{i_1} - 1)\,\mathfrak{f}_{i_1} + a_{i_2}\mathfrak{f}_{i_2} + \ldots + a_{i_w}\mathfrak{f}_{i_w}$ zwei Lösungen mit den geforderten Eigenschaften, wzbw.

2) Zu $\mathfrak{x}_1'$ und $\mathfrak{x}_2'$ gibt es nach Hauptsatz 2, II genau je eine entsprechende $\Theta$-Klasse $\mathfrak{M}_1'$ bzw. $\mathfrak{M}_2'$ von Normalflächen. Nach Hauptsatz 3 gibt es zwei Repräsentanten $M_1'^2$ und $M_2'^2$ aus $\mathfrak{M}_1'$ bzw. $\mathfrak{M}_2'$, so daß $M_1'^2 + M_2'^2$ eine S-Normalfläche mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ ist und $M_1'^2$ und $M_2'^2$ S-Komponenten von $M_1'^2 + M_2'^2$ in $M^3$ sind. Die Durchdringungslinien von $M_1'^2 + M_2'^2$ seien $D_1^1, \ldots, D_s^1$; $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien paarweise miteinander punktfremde, im Verhältnis zu $M_1'^2 + M_2'^2 | \Phi$ kleine Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in $M^3$. Nach Hauptsatz 4, I gibt es genau je eine Umschaltung $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ von $(M_1'^2 + M_2'^2)\,U_1^3, \ldots, (M_1'^2 + M_2'^2)\,U_s^3$ über $\overline{(\dot{U}_1^3 - \dot{M}^3)}, \ldots, \overline{(\dot{U}_s^3 - \dot{M}^3)}$, die bezüglich $M_1'^2 + M_2'^2$ und $\Phi$ regulär ist.

3) Ist $(\dot{M_1'^2 + M_2'^2})$ doppelpunktfrei, so sind $(\dot{M_1'^2 + M_2'^2})$ und $\dot{M}^2$ einander ähnlich bezüglich $\Theta$.

Beweis: $\sigma_s \ldots \sigma_1 (M_1'^2 + M_2'^2)$ ist nach Hauptsatz 4 eine Normalfläche $M'^2$ mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ und mit $\dot{M}'^2 = (\dot{M_1'^2 + M_2'^2})$. Da $M'^2$ und $M^2$ einander damit nach Hauptsatz 2, II bezüglich $\Theta$ ähnlich sind, folgt daraus Nr. 3.

4) Es lassen sich alle Teilmengen $(\tau)_1, \ldots, (\tau)_t$ der Menge $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ bestimmen, für die folgendes gilt: Sind $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_u}$ die Umschaltungen aus $(\tau)_j$ ($j = 1, \ldots, t$; $u = 0$, falls $(\tau)_j$ die leere Menge ist), so ist $\sigma_{i_u} \ldots \sigma_{i_1} (M_1'^2 + M_2'^2)$ nicht S-zusammenhängend im $M^3$.

Die leere Menge ist stets eine solche Teilmenge, es ist also $t > 0$. Damit gibt es unter den Mengen $(\tau)_1, \ldots, (\tau)_t$ mindestens eine solche, die von keiner der übrigen umfaßt wird. Diese bestehe aus den Umschaltungen $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_v}$ ($v = 0$, falls es sich um die leere Menge handelt). $\sigma_{i_v} \ldots \sigma_{i_1} (M_1'^2 + M_2'^2)$ ist nach Hauptsatz 4, II eine S-Normalfläche $M_v^2$ mit dem P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}$ und mit $\dot{M}_v^2 = (\dot{M_1'^2 + M_2'^2})$, falls $(\dot{M_1'^2 + M_2'^2})$

doppelpunktfrei ist. Diejenigen Zahlen zwischen 1 und $s$, die von $i_1, \dots, i_v$ verschieden sind, seien $j_1, \dots, j_w$. Dabei ist $w > 0$ (da anderenfalls $M_v^2$ eine nicht zusammenhängende Normalfläche und nach Hauptsatz 2, II zu $M^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$ wäre, im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $M^2$ zusammenhängend sei).

5) Ist $(k_1, \dots, k_m)$ mit $m > 0$ eine beliebige Teilmenge der Menge $(j_1, \dots, j_w)$, so ist $\sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1} M_v^2$ nach Nr. 4 S-zusammenhängend in $M^3$. Sind $U_{j_1}'^3, \dots, U_{j_w}'^3$ *beliebige* miteinander punktfremde, im Verhältnis zu $\Phi | M_v^2$ kleine Umgebungen von $D_{j_1}^1, \dots, D_{j_w}^1$ in $M^3$ und sind $\sigma_{j_1}', \dots, \sigma_{j_w}'$ die bezüglich $M_v^2$ und $\Phi$, regulären Umschaltungen von $M_v^2 U_{j_1}'^3, \dots, M_v^2 U_{j_w}'^3$ über $\overline{(\dot{U}_{j_1}'^3 - \dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_{j_w}'^3 - \dot{M}^3)}$, so ist auch $\sigma_{k_m}' \dots \sigma_{k_1}' M_v^2$ S-zusammenhängend in $M^3$.

Beweis: Nach Folgerung 5 und Folgerung 3 in Kapitel I Abschnitt 2 gibt es eine semilineare Abbildung $\beta$ von $M^3$ auf sich selbst, durch die $U_p'^3$ $(p = j_1, \dots, j_w)$ und $U_p^3$ aufeinander abgebildet werden und durch die $M_v^2$, sowie die einzelnen Elemente aus $\Phi$ in sich selbst übergehen. Daraus folgt, daß durch $\beta$ auch $\sigma_{k_m}' \dots \sigma_{k_1}' M_v^2$ und $\sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1} M_v^2$ aufeinander abgebildet werden, daß also mit $\sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1} M_v^2$ auch $\sigma_{k_m}' \dots \sigma_{k_1}' M_v^2$ S-zusammenhängend in $M^3$ ist, wzbw.

6) Es gibt genau zwei Sz-Komponenten $M_1^2$, $M_2^2$ von $M_v^2$ in $M^3$.

Beweis: Aus der Annahme, $M_1^2$, $M_2^2$ und $M_3^2$ seien drei verschiedene Sz-Komponenten von $M_v^2$ in $M^3$, folgt: Mindestens eine Komponente $M_l^2$ $(l = 1, 2, 3)$ ist mit $D_{j_1}^1$ punktfremd und ist damit eine Sz-Komponente von $\sigma_{j_1} M_v^2$ in $M^3$. Also ist $\sigma_{j_1} M_v^2$ nicht S-zusammenhängend in $M^3$ und die Annahme ist falsch. Daraus folgt Nr. 6.

7) $M_1^2$ und $M_2^2$ sind Normalflächen.

Beweis: Aus der Annahme, $M_k^2$ $(k = 1$ oder $2)$ sei nicht doppelpunktfrei, folgt: Mindestens eine Durchdringungslinie $D_{j_m}^1$ $(m = 1, \dots, w)$ ist eine Durchdringungslinie von $M_k^2$. Damit ist die andere Sz-Komponente $M_l^2$ $(l = 1, 2;\ l \neq k)$ mit $D_{j_m}^1$ punktfremd, also auch eine Sz-Komponente won $\sigma_{j_m} M_v^2$ in $M^3$, also ist $\sigma_{j_m} M_v^2$ nicht S-zusammenhängend in $M^3$ und die Annahme ist falsch. Daraus folgt Nr. 7.

Aus Nr. 3 bis 7 folgt, daß $(M_1^2, M_2^2)$ ein reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar mit den geforderten Eigenschaften ist. Damit ist Satz 7 bewiesen.

## 2. Irregulär abgeleitete Mannigfaltigkeiten

Ist $M^2$ eine Normalfläche und $(M_1^2, M_2^2)$ ein reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar, so kommt es darauf an, aus $M_1^2 + M_2^2$ durch Umschaltungen eine S-Mannigfaltigkeit $M'^2$ in $M^3$ zu gewinnen, so daß eine Sz-Komponente $M''^2$ von $M'^2$ in

$M^3$ dieselben Eigenschaften besitzt wie $M^2$ und so daß $M''^2$ nicht diejenige Normalfläche ist, die aus $M_1^2+M_2^2$ durch Ausführen aller regulären Umschaltungen hervorgeht. Eine solche Mannigfaltigkeit $M''^2$ nennen wir eine „irregulär aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitete Mannigfaltigkeit".

Definition. $M^2$ sei eine S-Normalfläche. $D_1^1, \dots, D_s^1$ seien die Durchdringungslinien von $M^2$. $U_1^3, \dots, U_s^3$ seien im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine, paarweise miteinander punktfremde Umgebungen von $D_1^1, \dots, D_s^1$ in $M^3$. Dann heißt eine Mannigfaltigkeit $M'^2$ eine *irregulär bezüglich* $\overline{(\dot{U}_1^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_s^3-\dot{M}^3)}$ *und* $\Phi$ *aus* $M^2$ *abgeleitete Mannigfaltigkeit,* wenn es Umschaltungen $\sigma_{i_1}^*, \dots, \sigma_{i_t}^*$ ($i_1, \dots, i_t$ paarweise verschieden zwischen 1 und $s$; $t$ gegebenenfalls gleich Null) von $M^2\,U_{i_1}^3, \dots, M^2\,U_{i_t}^3$ über $\overline{(\dot{U}_{i_1}^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_{i_t}^3-\dot{M}^3)}$ gibt, so daß folgendes gilt:

a. $M'^2$ ist eine (doppelpunktfreie) S-Komponente von $\sigma_{i_t}^* \dots \sigma_{i_1}^* M^2$ in $M^3$.

b. Die Menge der Umschaltungen $\sigma_{i_1}^*, \dots, \sigma_{i_t}^*$ ist nicht identisch mit der Menge der sämtlichen bezüglich $M^2$ und $\Phi$ regulären Umschaltungen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ von $M^2\,U_1^3, \dots, M^2\,U_s^3$ über $\overline{(\dot{U}_1^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_s^3-\dot{M}^3)}$.

Satz 8. *$M^2$ sei eine S-Normalfläche, deren Rand eine 1-dim Sphäre und eine einfache Normallinie ist. $D_1^1, \dots, D_s^1$ seien die Durchdringungslinien von $M^2$. $U_1^3, \dots, U_s^3$ seien im Verhältnis zu $M^2|\Phi$ kleine Umgebungen von $D_1^1, \dots, D_s^1$ in $M^3$. $M'^2$ sei eine zusammenhängende, irregulär aus $M^2$ bezüglich $\overline{(\dot{U}_1^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_s^3-\dot{M}^3)}$ und $\Phi$ abgeleitete Mannigfaltigkeit mit $\dot{M}'^2=\dot{M}^2$. Dann gibt es eine zusammenhängende Normalfläche $M^{*2}$ mit $\dot{M}^{*2}=\dot{M}^2$, deren F-Zahl kleiner ist als die F-Zahl von $M^2$, und deren Charakteristik nicht größer ist als die Charakteristik von $M'^2$.*

*Beweis.* 1) $M'^2$ ist nach Hauptsatz 4 eine Halbnormalfläche und es liegt (mindestens) einer der beiden folgenden Fälle vor:

a. Die F-Zahl von $M'^2$ ist kleiner als die F-Zahl von $M^2$, oder

b. Die F-Zahl ist nicht größer als die F-Zahl von $M^2$ und es gibt eine in $M'^2$ liegende PK-Falte.

Beweis: 1.1) Es gibt nach Hauptsatz 4, I bezüglich $M^2$ und $\Phi$ reguläre Umschaltungen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ von $M^2\,U_1^3, \dots, M^2\,U_s^3$ über $\overline{(\dot{U}_1^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_s^3-\dot{M}^3)}$, sowie nach Voraussetzung Umschaltungen $\sigma_{i_1}^*, \dots, \sigma_{i_t}^*$ ($i_1, \dots, i_t$ paarweise verschieden zwischen 1 und $s$; $t$ gegebenenfalls gleich Null) von $M^2\,U_{i_1}^3, \dots, M^2\,U_{i_t}^3$ über $\overline{(\dot{U}_{i_1}^3-\dot{M}^3)}, \dots, \overline{(\dot{U}_{i_t}^3-\dot{M}^3)}$, so daß $M'^2$ eine Sz-Komponente von $\sigma_{i_1}^* \dots \sigma_{i_t}^* M^2$ in $M^3$ ist und so daß die Menge $(\sigma_{i_1}^*, \dots, \sigma_{i_t}^*)$ nicht identisch ist mit der Menge $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$.

1.2) Ist die Menge $(\sigma^*_{i_1}, \ldots . \sigma^*_{i_t})$ eine Teilmenge von $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, so gilt Fall a von Nr. 1, da dann $M'^2$ eine echte Teilmenge von $\sigma^*_{i_t} \ldots \sigma^*_{i_1} M^2$ ist.

1.3) Ist die Menge $(\sigma^*_{i_1}, \ldots, \sigma^*_{i_t})$ keine Teilmenge von $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, so gilt Fall a oder Fall b von Nr. 1.

Beweis: Mindestens eine der Umschaltungen $\sigma^*_{i_1}, \ldots, \sigma^*_{i_t}$ ist nicht regulär bezüglich $M^2$ und $\Phi$. $\sigma^*_{i_t} \ldots \sigma^*_{i_1} M^2$ ist nach Hauptsatz 4, IV eine S-Halbnormalfläche $M''^2$ mit derselben F-Zahl wie $M^2$, und es gibt ein PK-Flächenstück $G^2$ und eine Sz-Komponente $A^1$ von $M''^2 \bar{G}^2$ in $\bar{G}^2$, die eine PK-Falte ist. Liegt $A^1$ in $M'^2$, so liegt der Fall b von Nr. 1 vor. Liegt $A^1$ nicht in $M'^2$, so liegt der Fall a von Nr. 1 vor (da dann $M'^2$ eine echte Teilmenge von $\sigma^*_{i_t} \ldots \sigma^*_{i_1} M^2$ ist). Damit ist 1.3 bewiesen.

2) In beiden Fällen von Nr. 1 gibt es nach Hauptsatz 1, II bzw. III eine Normalfläche $M^{**2}$ mit $\dot{M}^{**2} = \dot{M}^2$, die aus $M'^2$ durch $\xi$-Operationen in $M^3$ hervorgeht, und deren F-Zahl kleiner ist als die F-Zahl von $M^2$. Nach Satz 1 gibt es damit eine z-Komponente $M^{*2}$ von $M^{**2}$ mit $\dot{M}^{*2} = \dot{M}^2$, deren Charakteristik nicht größer ist als die Charakteristik von $M'^2$. Also ist $M^{*2}$ eine Normalfläche mit den in der Behauptung genannten Eigenschaften. Damit ist Satz 8 bewiesen.

### 3. Umschaltungen an speziellen Normalflächenpaaren

Ist $M^2$ eine zusammenhängende Normalfläche, deren Rand eine 1-dim Sphäre und eine einfache Normallinie ist, und ist $(M^2_1, M^2_2)$ ein reduziertes $M^2$ erzeugendes Normalflächenpaar, so wollen wir zeigen, daß es in $M^3$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $M'^2$ mit demselben Rand wie $M^2$ gibt, so daß $M'^2$ entweder von kleinerer Charakteristik ist als $M^2$ oder eine irregulär aus $M^2_1 + M^2_2$ abgeleitete Mannigfaltigkeit oder eine Normalfläche mit kleinerer F-Zahl als $M^2$.

Definition. $Y^1$ sei eine 1-dim Sphäre in $\dot{M}^3$. Dann heißt eine zusammenhängende t-Mannigfaltigkeit $M^2$ in $M^3$ mit $\dot{M}^2 = Y^1$ ein in $Y^1$ *eingespanntes Band in* $M^3$. Insbesonderes heißt $M^2$ ein *in* $Y^1$ *eingespanntes Band von minimaler Charakteristik in* $M^3$, wenn es kein in $Y^1$ eingespanntes Band in $M^3$ gibt, dessen Charakteristik kleiner ist als die Charakteristik von $M^2$.

Satz 9. *Jede in* $M^3$ *liegende 2-dim Sphäre zerlege* $M^3$ *in zwei z-Komponenten. Es gebe keine in* $M^3$ *liegende projektive Ebene.* $M^2$ *sei eine zusammenhängende Normalfläche mit der Charakteristik c und der F-Zahl f.* $\dot{M}^2$ *sei eine* 1-*dim Sphäre.* $(M^2_1, M^2_2)$ *sei ein reduziertes* $M^2$ *erzeugendes Normalflächenpaar, so daß* $\dot{M}^2_1$ *und* $\dot{M}^2$ *einander be-*

*züglich $\Theta$ ähnlich sind und $M_2^2$ nicht berandet ist. $D_1^1, \ldots, D_s^1$ seien die Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$, $U_1^3, \ldots, U_s^3$ seien im Verhältnis zu $M_1^2+M_2^2|\Phi$ kleine paarweise miteinander punktfremde Umgebungen von $D_1^1, \ldots, D_s^1$ in $M^3$. $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ seien die bezüglich $M_1^2+M_2^2|\Phi$ regulären Umschaltungen von $(M_1^2+M_2^2)\,U_1^3, \ldots, (M_1^2+M_2^2)\,U_s^3$ über $\dot{U}_1^3, \ldots, \dot{U}_s^3$.*

*Dann folgt:*

I. *Ist die Charakteristik von $M_2^2$ nicht kleiner als Null, so ist $M_1^2$ eine Normalfläche und ein in $\dot{M}_1^2$ eingespanntes Band, dessen Charakteristik nicht größer als $c$ und dessen F-Zahl kleiner als $f$ ist.*

II. *Ist die Charakteristik von $M_2^2$ kleiner als Null, so gilt:*

II.1. *$M_2^2$ ist eine 2-dim Sphäre und $M^3-M_2^2$ besteht aus zwei z-Komponenten $S^3$ und $T^3$, so daß (bei geeigneter Bezeichnung) $\dot{M}_1^2$ in $S^3$ liegt. Die $\dot{M}_1^2$ im Rande enthaltende z-Komponente von $M_1^2-(D_1^1+\ldots+D_s^1)$ sei $K^2$. Dann ist $K^2$ mit $T^3$ punktfremd, $\overline{K}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit mit $\dot{\overline{K}}^2=\dot{K}^2$, und die Charakteristik von $\overline{K}^2$ ist nicht größer als die Charakteristik von $M_1^2$, also nicht größer als $c+2$. Dabei liegen in $\dot{K}^2$ mindestens zwei der Durchdringungslinien $D_1^1, \ldots, D_s^1$.*

II.2. *Ist die Anzahl der in $\dot{K}^2$ liegenden Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ größer als 2, so gibt es ein in $\dot{M}_1^2$ eingespanntes Band $M'^2$ in $M^3$, dessen Charakteristik kleiner als $c$ ist.*

II.3. *Ist die Anzahl der in $\dot{K}^2$ liegenden Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ gleich 2, so gibt es eine irregulär bezüglich $\dot{U}_1^3, \ldots, \dot{U}_s^3$ und $\Phi$ aus $M_1^2+M_2^2$ abgeleitete Mannigfaltigkeit $M'^2$, die ein in $\dot{M}_1^2$ eingespanntes Band ist, und deren Charakteristik nicht größer als $c$ ist.*

*Beweis.* 1) Teil I folgt unmittelbar aus der Voraussetzung (da die F-Zahl von $M_2^2$ größer als Null ist). II.1 folgt unmittelbar aus den Teilen II.3, II.4 und II.5 der im Abschnitt 1 dieses Kapitels angeführten Folgerung.

2) Beweis von II.2: $D_{i_1}^1, \ldots, D_{i_u}^1$ $(u>2)$ seien die in $\dot{K}^2$ liegenden Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$. Da $D_{i_1}^1, \ldots, D_{i_u}^1$ in $\dot{T}^3$ liegen, gibt es in $T^3$ (nach Hilfssatz 1) $u$ paarweise miteinander punktfremde Flächenstücke $F_{i_1}^2, \ldots, F_{i_u}^2$, so daß $\dot{F}_{i_j}^2=D_{i_j}^1$ ist $(j=1, u)$. $\overline{K}^2+F_{i_1}^2+\ldots+F_{i_u}^2$ ist ein in $\dot{M}_1^2$ eingespanntes Band $M'^2$, dessen Charakteristik um $u$ kleiner ist als die Charakteristik von $\overline{K}^2$, also kleiner als $c$. Damit ist II.2 bewiesen.

3) Beweis von II.3: Die beiden in $\dot{K}^2$ liegenden Durchdringungslinien von $M_1^2+M_2^2$ seien $D_{i_1}^1$ und $D_{i_2}^1$. Dann gilt:

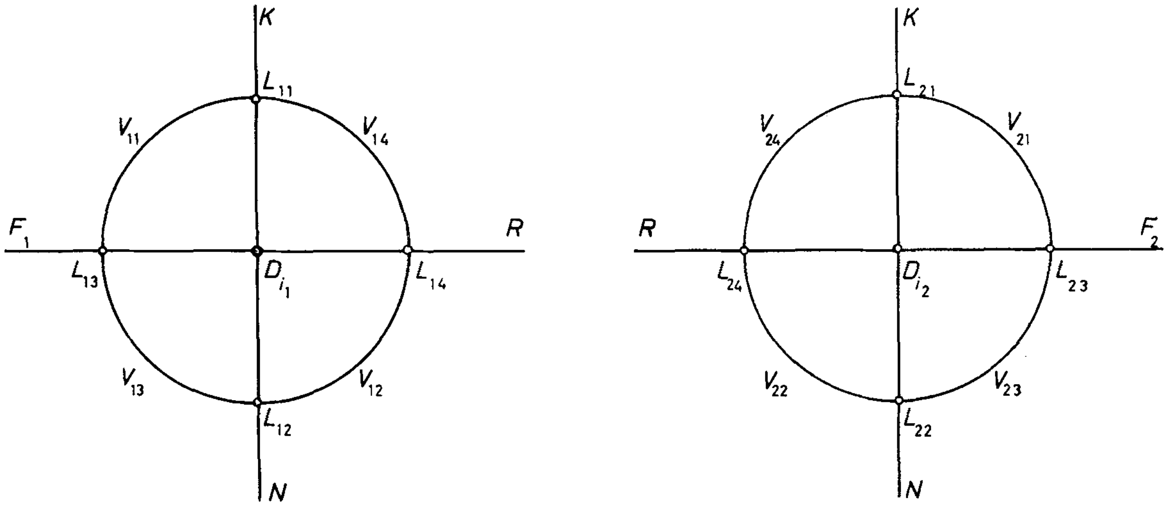



Fig. 37. Schematische Darstellung der Zusammenhangsverhältnisse von $U^3_{i_1}$, $U^3_{i_2}$, $M^2_1$ und $M^2_2$. Links „Querschnitt" durch $U^3_{i_1}$, rechts „Querschnitt" durch $U^3_{i_2}$. ($L_{11}$ bedeutet den Schnitt von $L^1_{11}$, $V_{11}$ den von $V^2_{11}$, usw.)

3.1) $M^2_1 - \bar{K}^2$ ist eine offene 2-dim Mannigfaltigkeit $N^2$. $M^2_2 - (D^1_{i_1} + D^1_{i_2})$ besteht aus zwei offenen Flächenstücken $F^2_1$, $F^2_2$ und einem offenen Kreisring $R^2$, so daß (bei geeigneter Numerierung) $\dot{F}^2_1 = D^1_{i_1}$ und $\dot{F}^2_2 = D^1_{i_2}$ ist. $\dot{U}^3_{i_1} K^2 = L^1_{11}$, $\dot{U}^3_{i_1} N^2 = L^1_{12}$, $\dot{U}^3_{i_1} F^2_1 = L^1_{13}$ und $\dot{U}^3_{i_1} R^2 = L^1_{14}$ sind die z-Komponenten von $\dot{U}^3_{i_1}(M^2_1 + M^2_2)$ und sind 1-dim Sphären (vgl. Fig. 37); entsprechend sind $\dot{U}^3_{i_2} K^2 = L^1_{21}$, $\dot{U}^3_{i_2} N^2 = L^1_{22}$, $\dot{U}^3_{i_2} F^2_2 = L^1_{23}$ und $\dot{U}^3_{i_2} R^2 = L^1_{24}$ die z-Komponenten von $\dot{U}^3_{i_2}(M^2_1 + M^2_2)$ und sind 1-dim Sphären. $\dot{U}^3_{i_1} - (M^2_1 + M^2_2)$ besteht aus vier offenen Kreisringen $V^2_{11}$, $V^2_{12}$, $V^2_{13}$ und $V^2_{14}$, so daß $\dot{V}^2_{11} = L^1_{11} + L^1_{13}$, $\dot{V}^2_{12} = L^1_{12} + L^1_{14}$, $\dot{V}^2_{13} = L^1_{13} + L^1_{12}$ und $\dot{V}^2_{14} = L^1_{14} + L^1_{11}$ ist. Entsprechend besteht $\dot{U}^3_{i_2} - (M^2_1 + M^2_2)$ aus vier offenenen Kreisringen $V^2_{21}$, $V^2_{22}$, $V^2_{23}$ und $V^2_{24}$, so daß $\dot{V}^2_{21} = L^1_{21} + L^1_{23}$, $\dot{V}^2_{22} = L^1_{22} + L^1_{24}$, $\dot{V}^2_{23} = L^1_{23} + L^1_{22}$ und $\dot{V}^2_{24} = L^1_{24} + L^1_{21}$ ist.

Die Zuordnung von $\bar{V}^2_{11} + \bar{V}^2_{12}$ und $\dot{U}^3_{i_1}$ zu $(M^2_1 + M^2_2)\, U^3_{i_1}$ ist eine Umschaltung $\sigma^*_{i_1}$ von $(M^2_1 + M^2_2)\, U^3_{i_1}$ über $\dot{U}^3_{i_1}$. Entsprechend ist die Zuordnung von $\bar{V}^2_{21} + \bar{V}^2_{22}$ und $\dot{U}^3_{i_2}$ zu $(M^2_1 + M^2_2)\, U^3_{i_2}$ eine Umschaltung $\sigma^*_{i_2}$ von $(M^2_1 + M^2_2)\, U^3_{i_2}$ über $\dot{U}^3_{i_2}$.

3.2) $[K^2 - (U^3_{i_1} + U^3_{i_2})] + [F^2_1 - U^3_{i_1}] + [F^2_2 - U^3_{i_2}] + \bar{V}^2_{11} + \bar{V}^2_{21}$ ist ein in $\dot{M}^2_1$ eingespanntes Band $M'^2$, dessen Charakteristik nicht größer als $c$ ist, und eine Sz-Komponente von $\sigma^*_{i_1} \sigma^*_{i_2} (M^2_1 + M^2_2)$ in $M^3$.

3.3) Die Menge $(\sigma^*_{i_1}, \sigma^*_{i_2})$ ist nicht identisch mit der Menge $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$.

Beweis: Es gibt eine $\bar{V}^2_{12}$ enthaltende Sz-Komponente von $\sigma^*_{i_1} \sigma^*_{i_2} (M^2_1 + M^2_2)$ in $M^3$, die von $M'^2$ verschieden ist. Also ist $\sigma^*_{i_1} \sigma^*_{i_2} (M^2_1 + M^2_2)$ keine zusammenhängende Normalfläche, also nicht zu $M^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$.

Aus der Annahme, $(\sigma_{i_1}^*, \sigma_{i_2}^*)$ sei identisch mit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, folgt: $\sigma_{i_1}^* \sigma_{i_2}^* (M_1^2 + M_2^2)$ ist nach Hauptsatz 4 eine Normalfläche mit demselben P-Zahlenvektor wie $M^2$, also nach Hauptsatz 2, II zu $M^2$ ähnlich bezüglich $\Theta$. Also ist die Annahme falsch. Daraus folgt 3.3.

Mit 3.1, 3.2 und 3.3 ist II.3 bewiesen.

Mit Nr. 1, 2 und 3 ist Satz 9 bewiesen.

### 4. Bestimmung einer Fläche minimaler Charakteristik mit vorgegebenem Rand

Wir können nun das angekündigte Verfahren zur Bestimmung von Bändern minimaler Charakteristik ableiten.

HILFSSATZ 10. *$M^2$ sei eine Normalfläche, $\dot{M}^2$ eine einfache Normallinie. $Y^1$ sei eine zu $\dot{M}^2$ bezüglich $\Theta$ ähnliche einfache Normallinie. Dann gibt es eine zu $M^2$ bezüglich $\Theta$ ähnliche Normalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = Y^1$.*

*Beweis.* Diejenigen P- und K-Normalflächenstücke aus $M^2$, die Kanten aus $\dot{M}^2$ im Rande enthalten, lassen sich durch geeignete, bezüglich $\Theta$ ähnliche ersetzen, so daß eine Normalfläche mit den für $M'^2$ geforderten Eigenschaften entsteht.

BESTIMMUNGSVERFAHREN. *$M^3$ sei eine 3-dim Mannigfaltigkeit mit folgenden Eigenschaften: Jede in $M^3$ liegende 2-dim Sphäre zerlege $M^3$ in zwei z-Komponenten; es gebe keine (singularitätenfrei) in $M^3$ liegende projektive Ebene. $Y^1$ sei eine in $\dot{M}^3$ liegende 1-dim Sphäre.*

*Dann läßt sich in $M^3$ ein in $Y^1$ eingespanntes Band minimaler Charakteristik bestimmen, sofern es in $M^3$ Bänder gibt, die in $Y^1$ eingespannt sind; (dabei läßt sich entscheiden, ob es solche Bänder gebe). Und zwar gilt:*

I. Es läßt sich eine randtreue Zerlegung $\Gamma$ von $M^3$ in offene Raumelemente konstruieren, die eine Zerlegung von $Y^1$ umfaßt, und es kann eine beliebige Normalzerlegung $\Theta$ bezüglich $\Gamma$ konstruiert werden. Dann lassen sich (nach Satz 2 und Satz 4) die P-Gleichungen bezüglich $\Theta$, $\Gamma$ aufstellen und nach Satz 6 die nicht-negativ-ganzzahligen Fundamentallösungen der P-Gleichungen bestimmen. Unter ihnen können nach Satz 5 diejenigen bestimmt werden, die verträglich sind, diese seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_z$. Zu jeder der Lösungen $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, \ldots, z)$ läßt sich nach Hauptsatz 2, II eine Normalfläche $M_i^2$ konstruieren, deren P-Zahlenvektor $\mathfrak{x}_i$ ist.

Es läßt sich feststellen, ob es unter den Normalflächen $M_1^2, \ldots, M_z^2$ mindestens eine gebe, deren Rand zu $Y^1$ ähnlich bezüglich $\Theta$ ist. Gibt es eine solche, so gilt weiter folgendes: Es lassen sich unter den Normalflächen $M_1^2, \ldots, M_z^2$ alle diejenigen bestimmen, die diese Eigenschaft besitzen, sie mögen mit $M_1'^2, \ldots, M_s'^2$ bezeichnet werden. Zu jeder Normalfläche $M_j'^2$ ($j=1, \ldots, s$) kann nun nach Hilfssatz 10 eine bezüglich $\Theta$ ähnliche Normalfläche $M_j''^2$ konstruiert werden, die ein in $Y^1$ eingespanntes Band ist; (dabei ist die Charakteristik von $M_j''^2$ gleich der von $M_j'^2$). Unter den Bändern $M_1''^2, \ldots, M_s''^2$ läßt sich dann mindestens ein Band $M_t''^2$ bestimmen, so daß für alle $j=1, \ldots, s$ die Charakteristik von $M_j''^2$ nicht kleiner ist als die Charakteristik von $M_t''^2$.

II. Gibt es unter den Normalflächen $M_1^2, \ldots, M_z^2$ keine, deren Rand zu $Y^1$ bezüglich $\Theta$ ähnlich ist, so gibt es in $M^3$ kein in $Y^1$ eingespanntes Band.

Gibt es unter den Normalflächen $M_1^2, \ldots, M_z^2$ mindesteins eine, deren Rand zu $Y^1$ bezüglich $\Theta$ ähnlich ist, so ist $M_t''^2$ ein in $Y^1$ eingespanntes Band minimaler Charakteristik in $M^3$.

*Beweis.* 1) Teil I der Behauptung folgt unmittelbar aus den bereits bewiesenen Sätzen.

2) Ist $M^2$ ein beliebiges in $Y^1$ eingespanntes Band in $M^3$, so gibt es (mindetsens) eine Normalfläche $M^{*2}$, deren Rand zu $Y^1$ bezüglich $\Theta$ ähnlich ist, deren P-Zahlenvektor eine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen ist und deren Charakteristik nicht größer ist als die von $M^2$, wobei also $M^{*2}$ nach Hauptsatz 2, II zu einer der Mannigfaltigkeiten $M_1'^2, \ldots, M_s'^2$ bezüglich $\Theta$ ähnlich ist. (Also ist die Charakteristik von $M_t''^2$ nicht größer als die von $M^2$ ist.)

Beweis: Die Charakteristik von $M^2$ sei $c$.

2.1) Es gibt eine Folge $M_1^{*2}, \ldots, M_k^{*2}, \ldots$ von zusammenhängende Normalflächen mit den Charakteristiken $c_1^*, \ldots, c_k^*, \ldots$, deren Ränder bezüglich $\Theta$ zu $Y^1$ ähnlich sind, mit den Eigenschaften:

a. $c_1^* \leqslant c$.

b. Ist der P-Zahlenvektor von $M_k^{*2}$ keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, so gilt für $M_{k+1}^{*2}$ entweder

b.1. $c_{k+1}^* < c_k^*$ oder

b.2. $c_{k+1}^* = c_k^*$ und der P-Zahlenvektor von $M_{k+1}^{*2}$ ist eine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen.

c. Ist der P-Zahlenvektor von $M_k^{*2}$ eine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, so bricht die Folge nach $M_k^{*2}$ ab.

Beweis:

2.1.1) Es gibt eine Normalfläche $M_1^{*2}$ mit den für das erste Folgenglied geforderten Eigenschaften.

Beweis: $M^2$ läßt sich nach Hauptsatz 1, I (da $Y^1$ eine einfache Normallinie bezüglich $\Theta$, $\Gamma$ ist) durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Normalfläche $M'^2$ mit $\dot{M}'^2 = Y^1$ überführen, und es gibt nach Satz 1 genau eine z-Komponente $M_1^{*2}$ von $M'^2$ mit $\dot{M}_1^{*2} = Y^1$, wobei deren Charakteristik nicht größer als $c$ ist. $M_1^{*2}$ besitzt damit die geforderten Eigenschaften, und 2.1.1 ist bewiesen.

2.1.2) Aus der Induktionsannahme, die ersten $l$ Folgenglieder seien gegeben und der P-Zahlenvektor von $M_l^{*2}$ sei keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, folgt die Existenz einer Normalfläche $M_{l+1}^{*2}$ mit den für das $(l+1)$-te Folgenglied geforderten Eigenschaften.

Beweis: Die F-Zahl von $M_l^{*2}$ sei $f^*$.

$\alpha$) Es gibt eine Folge $M_1^{**2}, \dots, M_m^{**2}, \dots$ von zusammenhängende Normalflächen mit den Charakteristiken $c_1^{**}, \dots, c_m^{**}, \dots$ und den F-Zahlen $f_1^{**}, \dots, f_m^{**}, \dots$, deren Ränder bezüglich $\Theta$ zu $Y^1$ ähnlich sind, und deren Charakteristiken nicht größer als $c_l^*$ sind, mit den Eigenschaften:

a. $M_1^{**2} = M_l^{*2}$.

b. Ist $c_m^{**}$ gleich $c_l^*$, und ist der P-Zahlenvektor von $M_m^{**2}$ keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, so gilt für $M_{m+1}^{**2}$ entweder

b.1. $c_{m+1}^{**} < c_l^*$ oder

b.2. $c_{m+1}^{**} = c_l^*$ und $f_{m+1}^{**} < f_m^{**}$.

c. Ist $c_m^{**}$ kleiner als $c_l^*$, oder ist der P-Zahlenvektor von $M_m^{**2}$ eine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, so bricht die Folge nach $M_m^{**2}$ ab.

Beweis: Die Existenz des ersten Folgengliedes $M_1^{**2}$ ist trivial. Aus der Induktionsannahme, die ersten $u$ Folgenglieder seien gegeben, $c_u^{**}$ sei gleich $c_l^*$ und der P-Zahlenvektor von $M_u^{**2}$ sei keine nicht-negativ-ganzzahlige Fundamentallösung der P-Gleichungen, folgt die Existenz des $(u+1)$-ten Folgengliedes $M_{u+1}^{**2}$.

Beweis: Es gibt nach Satz 7 ein reduziertes $M_u^{**2}$ erzeugendes Normalflächenpaar $(M_{u1}^{**2}, M_{u2}^{**2})$. Dabei ist $(M_{u1}^{**2} + M_{u2}^{**2})^{\boldsymbol{\cdot}}$ eine einfache Normallinie, also zu $Y^1$ ähnlich bezüglich $\Theta$ (da $\dot{M}_u^{**2}$ n.V. zu $Y^1$ bezüglich $\Theta$ ähnlich ist). Also ist bei geeigneter Numerierung $M_{u2}^{**2}$ nicht berandet und $\dot{M}_{u1}^{**2} = (M_{u1}^{**2} + M_{u2}^{**2})^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Nach Satz 9 gibt es nun ein in $\dot{M}_{u1}^{**2}$ eingespanntes Band $M'^2$ in $M^3$, dessen Charakteristik nicht größer ist als $c_l^*$, so daß (mindestens) einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

a. $M'^2$ ist eine Normalfläche und die F-Zahl von $M'^2$ ist kleiner als $f_u^{**}$, oder

b. Die Charakteristik von $M'^2$ ist kleiner als $c_l^*$, oder

c. $M'^2$ ist eine irregulär bezüglich $\dot{U}_1^3, \ldots, \dot{U}_v^3$ und $\Phi$ aus $M_{u1}^{**2} + M_{u2}^{**2}$ abgeleitete Mannigfaltigkeit (wobei $U_1^3, \ldots, U_v^3$ miteinander punktfremde, im Verhältnis zu $M_{u1}^{**2} + M_{u2}^{**2} \mid \Phi$ kleine Umgebungen der Durchdringungslinien von $M_{u1}^{**2} + M_{u2}^{**2}$ sind).

Liegt der Fall a vor, so ist $M'^2$ eine Normalfläche mit den für das $(u+1)$-te Folgenglied $M_{u+1}^{**2}$ geforderten Eigenschaften. Liegt Fall b vor, so läßt sich $M'^2$ nach Hauptsatz 1 durch $\xi$-Operationen in $M^3$ in eine Normalfläche $M''^2$ mit $\dot{M}''^2 = \dot{M}_{u1}^{**2}$ überführen, und es gibt nach Satz 1 eine z-Komponente $M'''^2$ von $M''^2$ mit $\dot{M}'''^2 = \dot{M}_{u1}^{**2}$, deren Charakteristik nicht größer als die von $M'^2$ ist, also kleiner als $c_l^*$. $M'''^2$ besitzt damit die für $M_{u+1}^{**2}$ geforderten Eigenschaften.

Liegt Fall c vor, so gibt es nach Satz 8 eine Normalfläche $M'^{*2}$, die ein in $\dot{M}_{u1}^{**2}$ eingespanntes Band ist, deren F-Zahl kleiner ist als $f_u^{**}$, und deren Charakteristik nicht größer ist als $c_l^*$. $M'^{*2}$ besitzt damit die für $M_{u+1}^{**2}$ geforderten Eigenschaften.

Insgesamt ist damit die Existenz von $M_{u+1}^{**2}$ nachgewiesen.

Damit ist $\alpha$ durch Induktion bewiesen.

$\beta$) Die Folge $M_1^{**2}, \ldots, M_m^{**2}, \ldots$ bricht nach höchstens $f^*$ Gliedern ab. Damit besitzt das letzte Glied dieser Folge die für $M_{l+1}^{*2}$ geforderten Eigenschaften und 2.1.2 ist bewiesen.

Mit 2.1.1 und 2.1.2 ist 2.1 durch Induktion bewiesen.

2.2) Die Folge $M_1^{*2}, \ldots, M_k^{*2}, \ldots$ bricht nach höchstens $c+2$ Gliedern ab. Damit erfüllt das letzte Glied dieser Folge die für $M^{*2}$ genannten Bedingungen und Nr. 2 ist bewiesen.

3) Aus Nr. 2 folgt Teil II der Behauptung, womit das Bestimmungsverfahren nachgewiesen ist.

## 5. Ein Isotopiekriterium für die Kreislinie

Aus dem soeben abgeleiteten Bestimmungsverfahren ergibt sich insbesondere ein Verfahren, nach dem sich entscheiden läßt, ob eine beliebig gegebene Knotenlinie in einer 3-dim Mannigfaltigkeit eine Kreislinie sei, wenn die 3-dim Mannigfaltigkeit keine projektive Ebene enthält und durch jede 2-dim Sphäre zerlegt wird. Über mögliche Weiterführungen der Untersuchungen siehe Abschnitt d der Einleitung.

DEFINITION. Ist $V^3$ ein Vollring in einer 3-dim Mannigfaltigkeit $M^3$, so heißt eine in $\dot{V}^3$ liegende 1-dim Sphäre $B^1$ ein *Breitenkreis von $V^3$ bezüglich $M^3$*, wenn $B^1$ in $M^3 - \mathring{V}^3$ nullhomolog und in $\dot{V}^3$ nicht nullhomolog ist (vgl. [10], S. 161).

SATZ 10. *$M^3$ sei eine beliebige 3-dim Mannigfaltigkeit. $K^1$ sei eine (doppelpunktfreie) geschlossene Linie in $M^3$, $U^3$ eine Umgebung von $K^1$ in $M^3$. Dann folgt:*

I. *Ist* $L^1$ *eine geschlossene Linie in* $\dot{U}^3$, *die mit einem Meridiankreis* $N^1$ *von* $U^3$ *(d.h. mit einem in* $\dot{U}^3$ *liegenden Kreis, der in* $U^3$ *ein Flächenstück berandet und in* $\dot{U}^3$ *nicht nullhomolog ist) genau einen Punkt gemeinsam hat, so gibt es in* $U^3$ *einen Kreisring* $R^2$, *der von* $K^1$ *und* $L^1$ *berandet wird und dessen Inneres in* $\mathring{U}^3$ *liegt.*

II. *Gibt es ein von* $K^1$ *berandetes (singularitätenfreies) Flächenstück* $E^2$ *in* $M^3$, *so folgt:*

II.1. $U^3$ *ist orientierbar und es gibt genau eine Isotopieklasse von Breitenkreisen von* $U^3$ *bezüglich* $M^3$.

*Zu jedem solchen Breitenkreis läßt sich ein Meridiankreis von* $U^3$ *angeben, der mit ihm genau einen Punkt gemeinsam hat.*

II.2. *Ist* $Y^1$ *ein Breitenkreis von* $U^3$ *bezüglich* $M^3$, *so gibt es in* $M^3 - \mathring{U}^3$ *ein in* $Y^1$ *eingespanntes Flächenstück.*

*Beweis.* 1) Beweis von I: $N'^1$ sei ein mit $N^1$ punktfremder Meridiankreis von $U^3$, der mit $L^1$ ebenfalls genau einen Punkt gemeinsam hat. $F^2$ und $F'^2$ seien miteinander punktfremde offene Flächenstücke in $\mathring{U}^3$, die von $N^1$ bzw. $N'^1$ berandet werden und $K^1$ in je genau einem Punkte $p$ bzw. $p'$ schneiden. $\bar{F}^2$ und $\bar{F}'^2$ zerlegen $U^3$ in zwei Teile, deren abgeschlossene Hüllen Raumelemente $A^3$ und $A'^3$ sind. $Q^1$ und $Q'^1$ seien nun zwei Kanten in $\bar{F}^2$ bzw. $\bar{F}'^2$, die $p$ bzw. $p'$ mit den Punkten $L^1\dot{F}^2$ bzw. $L^1\dot{F}'^2$ verbinden, so daß $\mathring{Q}^1$ in $F^2$ und $\mathring{Q}'^1$ in $F'^2$ liegt. Da $K^1A^3$ und $K^1A'^3$ unverknotete Sehnen in $A^3$ bzw. $A'^3$ sind (siehe den Beweis von Folgerung 2 in Kapitel I Abschnitt 2), gibt es in $A^3$ und $A'^3$ Flächenstücke $E^2$ bzw. $E'^2$, die von $K^1A^3 + L^1\dot{A}^3 + Q^1 + Q'^1$ bzw. $K^1A'^3 + L^1\dot{A}'^3 + Q^1 + Q'^1$ berandet werden und deren Innenteile in $\mathring{A}^3$ bzw. $\mathring{A}'^3$ liegen. $E^2 + E'^2$ ist also ein Kreisring mit den geforderten Eigenschaften, wzbw.

2) Beweis von II: $U'^3$ sei eine im Verhältnis zu $E^2$ kleine Umgebung von $K^1$ in $M^3$. Nach Folgerung 3, Kapitel I, 2 läßt sich $M^3$ semilinear so auf sich selbst abbilden, daß $U'^3$ in $U^3$ und $K^1$ in sich selbst übergeht. Hierbei wird $E^2$ in ein Elementarflächenstück $E^{*2}$ abgebildet und die Linie $E^2\dot{U}'^3$ in eine Linie $Y^{*1}$.

Es sei $U^{*3}$ eine Umgebung von $U^3 + E^{*2}$ in $M^3$. Ist nun eine beliebige in $\dot{U}^3$ liegende geschlossene Linie $L^1$ in $M^3 - \mathring{U}^3$ nullhomolog, so ist sie auch in $U^{*3} - \mathring{U}^3$ nullhomolog (da $U^{*3}$ ein 3-dim Raumelement ist). Da es (siehe [10], S. 161 und 143) in $\dot{U}^3$ genau eine Isotopieklasse von Breitenkreisen bezüglich $U^{*3}$ gibt und diese Breitenkreise geeignete Meridiankreise von $U^3$ in genau je einem Punkte schneiden (siehe [10], S. 161 und 141), gilt dies also auch für die Breitenkreise bezüglich $M^3$, womit II.1 bewiesen ist.

Da also $Y^{*1}$ zu jedem Breitenkreis von $U^3$ isotop ist, gibt es nach [10], S. 143 eine semilineare Abbildung von $U^{*3}$ auf sich selbst, durch die $Y^{*1}$ in $Y^1$ übergeht und $K^1$ und $U^3$ in sich selbst übergehen. Hierbei geht $E^{*2} - \mathring{U}^3$ in ein Elementarflächenstück

$E^{**2}$ über, das von $Y^1$ berandet wird. Damit ist II.2 bewiesen und der Beweis von Satz 10 vollendet.

KRITERIUM. *$M^3$ sei eine 3-dim Mannigfaltigkeit, für die gilt:*

a. *Jede in $M^3$ liegende 2-dim Sphäre zerlegt $M^3$ in zwei Teile.* b. *In $M^3$ gibt es keine (singularitätenfreie) projektive Ebene. — $K^1$ sei eine geschlossene (doppelpunktsfrei) Linie in $M^3$. Dann läßt sich entscheiden, ob $K^1$ eine Kreislinie in $M^3$ sei, d. h. ob es in $M^3$ ein (singularitätenfreies) Elementarflächenstück gebe, das von $K^1$ berandet vird. Und zwar gilt:*

I. In $M^3$ wird eine beliebige Umgebung $U^3$ von $K^1$ gewählt. $M^3 - \mathring{U}^3$ ist eine 3-dim Mannigfaltigkeit $M'^3$. Nun läßt sich mit Methoden der Homologietheorie feststellen, ob es genau eine Isotopieklasse von Breitenkreisen von $U^3$ bezüglich $M^3$ gebe, die mit den Meridiankreisen von $U^3$ die algebraische Schnittzahl 1 haben (und ob $U^3$ orientierbar sei). Dies kann folgendermaßen geschehen: In $\dot{U}^3$ zeichnet man einen Meridiankreis $A^1$ aus und eine 1-dim Sphäre $B^1$, die $A^1$ in genau einem Punkte schneidet. Nun stellt man zunächst fest, ob die notwendige Bedingung erfüllt sei, daß $A^1$ in $M^3 - \mathring{U}^3$ weder nullhomolog noch divisionsnullhomolog sei. Ist dies der Fall und sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Homologieklassen von $A^1$ bzw. $B^1$ in $M^3 - \mathring{U}^3$ und $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ die entsprechenden Homologieklassen in $\dot{U}^3$, so stellt man fest, ob es eine ganze Zahl $m$ gebe, so daß die Homologieklasse $m\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Nullklasse ist. Gibt es eine solche Zahl $m$, so läßt sich aus der Klasse $m\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'$ ein Repräsentant auswählen, der ein Breitenkreis mit den geforderten Eigenschaften ist, und alle derartigen Breitenkreise sind nach [10] S. 143 isotop in $\dot{U}^3$. Gibt es keine solche Zahl $m$, so gibt es auch keine Breitenkreise mit den geforderten Eigenschaften. $K^1$ kann nach Satz 10, II.1 nur dann eine Kreislinie in $M^3$ sein, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

II. Ist die unter I genannte notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Kreislinie erfüllt, und ist $Y^1$ ein beliebig gewählter Breitenkreis von $U^3$ bezüglich $M^3$, der mit den Meridiankreisen von $U^3$ die algebraische Schnittzahl 1 hat, so läßt sich nach dem Bestimmungsverfahren des vorigen Abschnitts in $M^3 - \mathring{U}^3$ ein in $Y^1$ eingespanntes Band minimaler Charakteristik konstruieren und es gilt: $K^1$ ist (wie aus Satz 10, I und Satz 10, II.2 folgt) dann und nur dann eine Kreislinie in $M^3$, wenn dieses Band ein Flächenstück ist.

## Literatur


[1]. ALEXANDER, J. W., On the subdivision of polyhedra in 3-space. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 10 (1924), 6–8.

[2]. DEHN, M., Über die Topologie des 3-dimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69 (1910), 137–168.

[3]. FOX, R. H., On the imbedding of polyhedra in 3-space. *Ann. of Math.* (2), 49 (1948), 462–470.

[4]. HAKEN, W., *Ein topologischer Satz über die Einbettung* ($d-1$)*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in d-dimensionale Mannigfaltigkeiten.* Dissertation Kiel (1953).
[5]. ——, Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.*, im Druck.
[6]. KNESER, H., Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jahresber. der Deutschen Mathematikervereinigung*, 38 (1929), 248–260.
[7]. PAPAKYRIAKOPOULOS, C. D., On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.* (2), 66 (1957), 1–26.
[8]. REIDEMEISTER, K., *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe.* Leipzig 1953.
[9]. ——, *Knotentheorie.* Berlin 1932.
[10]. SCHUBERT, H., Knoten und Vollringe. *Acta Math.*, 90 (1953), 131–286.
[11]. ——, Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen. Im Druck.
[12]. SEIFERT, H. & THRELFALL, W., *Lehrbuch der Topologie.* Leipzig 1934.
[13]. WHITEHEAD, J. H. C., Simplicial spaces, nuclei and $m$-groups. *Proc. London Math. Soc.* (2), 45 (1939), 243–327.

*Eingegangen den 31. Juli 1959*