SUR LE RESTE DE LA LOI ASYMPTOTIQUE DE RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS GÉNÉRALISÉS DE BEURLING

PAR

PAUL MALLIAVIN

Université de Caen, France
Institute for Advanced Study, Princeton

1. Introduction

1.1 Rapellons la théorie de Beurling des nombres premiers généralisés [1]. Etant donné une suite $p_1, p_2, \ldots$ de nombres réels >1 et tendant vers l'infini, on conviendra d'appeler cette suite une suite de nombres premiers généralisés; la suite des «entiers» associée à une suite de nombres premiers p_i est constitutée par tous les nombres réels qui s'écrivent comme produit des nombres p_i. On note par $\pi(x)$ le nombre de «nombres premiers» $\leqslant x$, par $n(x)$ le nombre d'«entiers» $\leqslant x$, si deux produits différents de nombres premiers donnent le même entier celui-ci doit être compté deux fois. Généralement chaque entier est compté avec sa multiplicité.

Le problème fondamental de la répartition des nombres premiers généralisés est le suivant: déduire de la loi asymptotique de $n(x)$ celle de $\pi(x)$. Dans [1] Beurling démontre que

$$n(x) = ax + O(x\,[\log x]^{-b}),$$

où a et b sont deux constantes positives et où $b > \frac{3}{2}$, entraîne

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\cdot$$

En partant de ce résultat il est naturel de poser la question suivante: quelles hypothèses minimales convenient-il de faire sur $n(x)$ pour optenir une estimation du reste de la formule asymptotique de $\pi(x)$ analogue à celle La Vallée Poussin et Vinogradov dans le cas des nombres premiers au sens usuel. Dans [3] B. Nyman démontre que

$$n(x) = a\,x + O\,(x\,(\log x)^{-m}) \quad \text{quelque soit } m$$

18† — 61173060. *Acta mathematica*. 106. Imprimé le 27 décembre 1961.

entraine que

$$\pi(x) = \mathrm{li}\,(x) + O\,(x\,(\log x)^{-m}) \quad \text{quelque soit } m.$$

On se propose dans ce travail de montrer que

$$n(x) = bx + O(x \exp\,(-[\log x]^a))$$

où a et b sont deux constantes, $0 < a \leqslant 1$, entraîne que

$$\pi(x) = \mathrm{li}\,(x) + O(x \exp\,(-[\log x]^{a'}))$$

où a' est une constante positive convenable. On obtient ainsi un reste de la même forme que celui donné pour $\pi\,(x)$ dans la théorie des nombres premiers usuels avec des hypothèses sur $n\,(x)$ assez faibles. Nous montrerons d'autre part par un contre exemple que l'Hypothèse de Riemann est inexacte dans le cadre de la théorie des nombres premiers généralisés. On peut résumer ces deux remarques en disant que d'une part notre connaissance actuelle de la loi asymptotique des nombres premiers usuels n'est pas, dans son ordre de grandeur, particulière à la suite des entiers usuels alors que d'autre part l'Hypothèse de Riemann présente un caractère vraiment spécifique.

La technique utilisée ne pourra plus être une intégration sur un contour situé à gauche de $\sigma = 1$, les fonctions ζ considérées admettront cette droite pour coupure; on remplacera l'intégration complexe par un théorème taubérien réel, fondé sur l'étude de la division dans une classe de fonctions différentiables définies sur toute la droite.

On peut développer ces calculs dans le cadre un peu plus général suivant: $d\Pi$ désignant une mesure positive, ayant son support contenu dans l'intervalle ouvert $(1, +\infty)$, soit dn la mesure $e^{d\Pi}$, cette exponentielle étant définie par la série

$$\delta_1 + d\Pi + \frac{d\Pi * d\Pi}{2!} + \dots + \frac{d\Pi * \dots * d\Pi}{n!} + \dots$$

$d\Pi * d\Pi$ dénotant le produit de composition pour le groupe des homothéties, δ_1 la masse de Dirac placée au point 1.

On pose
$$n(x) = \int_1^x dn,$$

$$\Pi(x) = \int_1^x d\Pi.$$

On a alors.

1.2 Théorème. *Soit* $d\Pi$ *une mesure positive ayant son support contenu dans* $(1, +\infty)$, *soit*

$$dn = e^{d\Pi}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \varrho(x) &= \frac{n(x) - bx}{x} \qquad \text{où } b \text{ est une constante,} \\ r(x) &= \frac{\Pi(x) - \operatorname{li}(x)}{x} \end{aligned} \tag{1}$$

a étant une constante, $0 < a \leqslant 1$, *on note par* N_a *la proposition: Il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\varrho(x) = O(\exp(-c[\log x]^a)).$$

De même P_a *notera la proposition:*

$$r(x) = O(\exp(-c[\log x]^a)).$$

On a alors les deux implications

$$N_a \text{ entraîne } P_{a'} \text{ avec } a' = \frac{a}{10}$$

$$P_a \text{ entraîne } N_{a''} \text{ avec } a'' = \frac{a}{a+2}.$$

Remarquons que le problème original de la répartition des nombres premiers généralisés peut être ramené à cet énoncé; en posant

$$\Pi(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

la mesure associée aux entiers généralisés, soit dn, s'écrit en effet $dn = e^{d\Pi}$. D'autre part on a

$$\Pi(x) - \pi(x) = O(x^{\frac{1}{2}}).$$

En appliquant le théorème on obtient le même reste pour $\pi(x) - \operatorname{li}(x)$ que pour $\Pi(x) - \operatorname{li}(x)$. Nous construirons d'autre part une mesure $d\Pi > 0$ telle que

$$n(x) = x + b + O(x^{-\log\log x}) \quad (\text{où } b \text{ est une constante})$$

alors que

$$\Pi(x) - \operatorname{li}(x) = \Omega(x^{\beta})$$

où β est une constante donnée à l'avance inférieure à 1.

Dans le paragraphe 2 nous allons établir un théorème taubérien liant la différentiabilité de ζ'/ζ à l'ordre de grandeur du reste $r(x)$, qui précisera les résultats obtenus déjà par Nyman dans cette direction. Le paragraphe 3 sera consacré à l'étude de la division dans une classe convenable de fonctions différentiables. Le paragraphe 4 suivra les méthodes classiques de majoration de $\zeta^{(p)}(1+it)$ et de $1/\zeta(1+it)$.

Le paragraphe 5 sera consacré à l'étude de l'implication de P_a vers N_a, le paragraphe 6 à construction de contre exemples.

Je suis heureux de pouvoir remercier M. Arne Beurling de nombreuses conversations qui m'ont introduit dans ce sujet. Je dois également remercier M. Hans Rademacher pour avoir lu le manuscrit et pour ses critiques qui m'ont permis d'améliorer la rédaction.

2. Un énoncé taubérien

Posons
$$\zeta(s) = \int x^{-s}\, dn(x);$$
$$k(s) = \log \zeta(s) + \log (s-1), \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

l'argument étant choisi de telle sorte qu'il soit nul pour $s > 1$.

Soit
$$\operatorname{li}(x) = \int_e^x [\log t]^{-1}\, dt,$$

$r(x)$ défini dans l'énoncé du Théorème 1.1.

On a alors la proposition

2.1 Proposition. *Supposons que*
$$k(1+it) = \lim_{\sigma \to 1} k(\sigma + it)$$

existe quelque soit t et soit une fonction de t indéfiniment dérivable. Supposons de plus qu'il existe deux constantes A et α' positives, $\alpha' \geqslant 1$, telles que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k^{(p)}(1+it)|^2 \frac{dt}{1+t^2} < [Ap^{\alpha'}]^{2p}, \tag{2}$$

alors on peut trouver une constante c telle que
$$|r(x)| < O(\exp(-c[\log x]^{a'}))$$

où $a' = 1/\alpha'$.

Preuve: Posons
$$f(s) = \int x^{-s}\, d\operatorname{li}(x).$$

Alors en tenant compte de la définition de li (x) que nous avons choisi

$$f'(s) = -\int_e^{+\infty} x^{-s}\,dx = \frac{e^{1-s}}{1-s}$$

d'où

$$f(s) = \int_s^{+\infty} \frac{e^{1-y}}{y-1}\,dy$$

cette intégrale permet de prolonger $f(s)$ en une fonction multiforme définie dans le plan privé du point 1, la période autour de ce point étant $-2i\pi$. Il en résulte que

$$g(s) = \exp\,(f(s))$$

est une fonction méromorphe ayant le point 1 pour seul pôle, l'ordre de ce pôle étant 1 et que

$$l(s) = f(s) + \log\,(s-1)$$

est une fonction entière vérifiant

$$|l^{(p)}(1+it)| < 2^p\,p!\,.$$

Posant

$$k_1(s) = \log\zeta(s) + f(s)$$

on en déduit que k_1 satisfait les inégalités (2) avec éventuellement un nouveau choix de la constante A. Soit

$$h(s) = \frac{k_1(s)}{s}$$

en utilisant la formule de Leibnitz comme en 3.2 et les inégalités (2) on obtient que

$$\|h^{(p)}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h^{(p)}(1+it)|^2\,dt < [A_1 p^{\alpha'}]^{2p}.$$

D'autre part

$$\int x^{-s}\,r(x)\,dx = h(s)$$

et le théorème de Plancherel donne avec (2) que

$$\int_0^{+\infty} [\log x]^{2p}\,|r(x)|^2\,\frac{dx}{x} < [A_1\,p^{\alpha'}]^{2p}.$$

Supposons que $r(x_0) > 0$, alors si $x > x_0$

$$xr(x) - x_0\,r(x_0) > \text{li}\,(x_0) - \text{li}\,(x) > x_0 - x$$

d'où si $r(x_0) < \frac{1}{2}$, on a

$$r(x) > \frac{r(x_0)}{4} \quad \text{si } x \text{ vérifie } x_0 < x < x_0(1 + \tfrac{1}{2} r(x_0)).$$

De même si $r(x_0) < 0$, $x_0 > R$ et $|r(x_0)| < \frac{1}{2}$, on a

$$r(x) < \frac{r(x_0)}{4} \quad \text{si} \quad x_0(1 + \tfrac{1}{2} r(x_0)) < x < x_0.$$

Comme en vertu de [1] $r(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, on en déduit finalement qu'il existe un nombre R_1 tel que quelque soit $x_0 > R_1$ on ait $|r(x)| > \frac{1}{4}|r(x_0)|$ sur un intervalle d'extrémité x_0 et de longueur logarithmique $> \frac{1}{4}|r(x_0)|$.

Par suite on a quelque soit $x_0 > R_1$

$$\left|\frac{r(x_0)}{4}\right|^3 [\log x_0]^{2p} < \int_0^{+\infty} [\log x]^{2p} r^2(x) \frac{dx}{x}$$

d'où finalement

$$|r(x)|^3 [\log x]^{2p} < [A_2 p^{\alpha'}]^{2p}$$

quelque soit $x > R_1$, et quelque soit l'entier p; d'où

$$|r(x)|^3 < \inf_p \left[\frac{A_2 p^{\alpha'}}{\log x}\right]^{2p} = O(\exp(-[\log x]^{\alpha'}))$$

ce qui démontre la proposition.

Nous allons dans le paragraphe suivant introduire des classes de fonctions différentiables ce qui facilitera la majoration des dérivées de k.

3. Certaines classes de fonctions différentiables

3.1 On note par $q(t)$ une fonction définie sur toute la droite et telle que

$$q(t) > 1.$$

α et c étant deux nombres donnés, $\alpha \geqslant 1$, on note par $C(q, \alpha, c)$ la classe des fonctions différentiables F, définies sur toute la droite et satisfaisant aux inégalités

$$|F^{(p)}(t)| \leqslant [A\, q(t)\, p^{\alpha}]^{p+c} \quad \text{quelque soit } p \text{ et } t, \tag{3}$$

où A désigne une constante convenable.

3.2 PROPOSITION. *Si* $F \in C(q, \alpha, c)$ et $G \in C(q, \alpha, c')$ *alors* $FG \in C(q, \alpha, c + c')$.

Preuve: En utilisant la formule de Leibnitz donnant la dérivée d'un produit il suffit de majorer

$$\sup_{o \leq m \leqslant p} |F^{(m)} G^{(p-m)}| \leqslant [A_1 q(t) p^{\alpha}]^{m+c} [A_2 q(t) p^{\alpha}]^{p-m+c'} < [A_3 q(t) p^{\alpha}]^{p+c''}$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons montrer que dans certaines conditions la division est possible dans $C(q, \alpha)$.

3.3 PROPOSITION. *Supposons que* $F \in C(q, a, c)$ *et soit* $q_1(t)$ *une fonction telle que* $q_1(t) > q(t)$ *et que*

$$|F(t)| q_1(t) \geqslant [q(t)]^{1+c}.$$

Alors

$$\frac{1}{F} \in C(q_1, \alpha, 1).$$

Preuve: Nous allons utiliser une technique analogue à celle de [2] pour évaluer les dérivées au point t_0.

$Q_p(u)$ désignera le polynome de degré p vérifiant

$$Q_p^{(m)}(0) = F^{(m)}(t_0), \quad 0 \leqslant m \leqslant p.$$

On a alors

$$\left(\frac{1}{Q_p}\right)_{u=0}^{(p)} = \left(\frac{1}{F}\right)_{t=t_0}^{(p)}.$$

Notant par $M(\varepsilon)$ le minimum de $|Q|$ sur $|u| \leqslant \varepsilon$, on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy au polynome Q_p

$$\left|\left(\frac{1}{F}\right)_{t=t_0}^{(p)}\right| < \frac{p!\,\varepsilon^{-p}}{M(\varepsilon)}, \quad M(\varepsilon) > 0.$$

On a d'autre part

$$M(\varepsilon) > |F(t_0)| - A_1 [q(t_0)]^c \sum_{m=1}^{p} m^{\alpha c} \frac{\varepsilon^m}{m!} [A q(t_0) m^{\alpha}]^m > |F(t_0)| - A_2 [q(t_0)]^{1+c} p^{\alpha-1} \varepsilon,$$

cette dernière évaluation vaut si $\varepsilon A\, q(t_0) p^{\alpha-1} < \frac{1}{2}$. Prenons

$$\varepsilon = \frac{1}{2A_2 q_1(t_0) p^{\alpha-1}}$$

alors il résulte des inégalités que satisfait $q_1(t)$ que

$$M(\varepsilon) > \frac{1}{2 q_1(t_0)}$$

d'où en portant dans l'inégalité de Cauchy

$$\left|\left(\frac{1}{F}\right)^{(p)}_{t=t_0}\right| < [A_3 p^\alpha q_1(t_0)]^{p+1},$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons utiliser les propriétés des classes C pour obtenir l'évaluation des dérivées de k.

3.4 PROPOSITION: *Posons*

$$q(t) = [\log(|t| + e)]^\alpha, \quad \alpha \geq 1.$$

Supposons que $$\left[\zeta(1+it) - \frac{1}{it}\right] \in C(q, \alpha, 1)$$

et que $$|\zeta(1+it)| > [q(t)]^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Alors la proposition $P_{a'}$ est satisfaite avec

$$a' = \frac{1}{\alpha(3+\lambda)}.$$

Preuve: Posons $$\varphi(t) = \zeta(1+it) - \frac{1}{it},$$

$$g(s) = \frac{s-1}{s}\zeta(s). \quad \text{Alors}$$

$$g(1+it) = \frac{it}{it+1}\varphi(t) + \frac{1}{it+1}$$

et appliquant 3.2 on obtient que

$$g(1+it) \in C(q, \alpha, 1) \quad \text{ce qui entraîne que}$$

$$g'(1+it) \in C(q, \alpha, 2)$$

et comme $|g(1+it)| > A[q(t)]^{-\lambda}$ on obtient en appliquant 3.3 que

$$\frac{1}{g} \in C(q^{2+\lambda}, \alpha, 1)$$

d'où $$\frac{g'}{g} \in C(q^{2+\lambda}, \alpha, 3)$$

d'où enfin $$k \in C(q^{2+\lambda}, \alpha, 2).$$

Nous pouvons maintenant, ayant cette majoration des dérivées de k appliquer la proposition 2.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k^{(p)}(1+it)|^2 \frac{dt}{1+t^2} < A^p\, p^{2\alpha p} \int_1^{+\infty} [\log t]^{2\alpha(2+\lambda)(p+2)} \frac{dt}{t^2} < [A_1\, p^{\alpha(3+\lambda)}]^{2p+2}$$

d'où la proposition 2.1 entraîne que $P_{a'}$ est vraie avec $a' = 1/\alpha(3+\lambda)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque: Si on considére la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, on peut obtenir, sans utiliser la théorie de Vinogradoff des sommes trigonométriques que les hypothèses de 3.4 sont satisfaites avec $\alpha = 1$, $\lambda = 1$. On obtient alors en appliquant 3.4.

$$r(x) = O(\exp(-b[\log x]^{\frac{1}{4}})) \quad \text{où } b > 0$$

tandis que le théorème de La Vallée Poussin donne la même expression avec l'exposant $\frac{1}{2}$.

4. Evaluations de $\zeta(1+it)$ et de ses dérivées

4.1 Nous allons utiliser la formule de sommation par partie suivante $\varrho(x)$ ayant été défini en (1) on a

$$\zeta(s) - \int_1^X x^{-s}\, dn(x) = X^{1-s}\, \varrho(X) + \frac{X^{1-s}}{s-1} - s \int_X^{+\infty} \varrho(x)\, x^{-s}\, dx \tag{4}$$

où X désigne un nombre arbitraire $\geqslant 1$. En dérivant cette formule on obtient, en posant

$$B_p(s) = (-1)^p \left[\zeta^{(p)}(s) - \left(\frac{X^{1-s}}{s-1}\right)^{(p)}\right],$$

$$B_p(s) = \int_1^X x^{-s} (\log x)^p\, dn(x) + X^{1-s} (\log X)^p\, \varrho(X) - s \int_X^{+\infty} \varrho(x) (\log x)^p\, x^{-s}\, dx$$
$$- p \int_X^{+\infty} \varrho(x) (\log x)^{p-1} x^{-s}\, dx. \tag{5}$$

Notons par $J(p, X)$ la première intégrale figurant dans (5), par $I(p, X)$ la seconde, la troisième est alors $I(p-1, X)$.

L'intégrale $J(p, X)$ va être évaluée à l'aide du lemme suivant.

LEMME: *Soit $d\mu$ une mesure ayant son support sur* $[1, +\infty]$, *et telle que*

$$m(x) = \int_1^x |d\mu| = O(x),$$

alors on peut trouver deux constantes A_1 *et* A_2 *telles que*

$$\left|\int_1^X x^{-s} (\log x)^p \, d\mu(x)\right| < A_1 (\log X)^{p+1} + (A_2 \, p)^p \tag{6}$$

quelque soit s vérifiant $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1$.

Preuve: Une intégration par partie ramène la majoration à celle de

$$X^{-\sigma} (\log X)^p \, m(X) - \int_1^X [x^{-\sigma} (\log x)^p]' \, m(x) \, dx$$

En remarquant que $x^{-\sigma} (\log x)^p$ est une fonction qui croît sur $[1, e^{p/\sigma}]$ puis décroît sur $[e^{p/\sigma}, \infty]$ on majore cette intégrale par

$$-A \int_{\inf (e^{p/\sigma}, X)}^X [x^{-\sigma} (\log x)^p]' \, x dx$$

d'où le lemme par une intégration par partie allant en sens inverse et en remarquant que

$$\int_{e^{p/\sigma}}^X x^{-\sigma} (\log x)^p \, dx < (\log X)^{p+1}$$

4.2 Proposition: *Supposons que* N_a *soit satisfait, alors*

$$\left[\zeta(1+it) - \frac{1}{it}\right] \in C(q, \alpha, 1) \quad \textit{avec} \quad \alpha = \frac{1}{a},$$

$$q(t) = [\log (|t| + e)]^\alpha.$$

Preuve: Avant d'utiliser la formule (5) nous avons à évaluer l'intégrale

$$I(p, X) = \int_X^{+\infty} |\varrho(x)| \, x^{-1} (\log x)^p \, dx;$$

utilisant l'hypothèse N_a

$$I(p, X) < \int_{\log X}^{+\infty} \exp(-u^a) \, u^p \, du.$$

Remarquons que la fonction $\exp(-u^a) \, u^{p+2}$ décroît sur l'intervalle $[(2p\alpha)^\alpha, +\infty]$; si $\log X > (2\alpha p)^\alpha$ on a ainsi

$$I(p, X) < (\log X)^{p+1} \exp(-(\log X)^a). \tag{7}$$

D'autre part on a

$$I(p, 1) < p^{\alpha p}. \tag{8}$$

Nous allons pour majorer le second membre de (5) distinguer deux cas si $\log|t| > 2\alpha p$ nous écrivons alors (5) en prenant $\log X = (\log t)^{\alpha}$. On obtient en utilisant (7) et (6),

$$|B_p(s)| < A^p\,[p^p + (\log t)^{\alpha(p+1)}].$$

Si $\log|t| < 2\alpha p$, nous écrirons (5) en prenant $X = 1$ et en appliquant (8) d'où

$$\left|\zeta^{(p)}(1+it) - \left(\frac{1}{it}\right)^{(p)}\right| < A_2^p\, p^{\alpha p}.$$

En comparant ces deux inégalités on obtient

$$\left|\zeta^{(p)}(1+it) - \left(\frac{1}{it}\right)^{(p)}\right| < A_3^p\,[p^{\alpha p} + [\log(|t|+e)]^{\alpha(p+1)}] \tag{9}$$

ce qui entraîne la proposition 4.2.

Nous allons minorer $\zeta(1+it)$ utilisant la technique classique de M. Hadamard.

4.3 *Supposons que N_a soit vérifiée, soit $q(t)$ la fonction introduite dans l'énoncé de* 4.2, *alors*

$$|\zeta(1+it)| > A\,[q(t)]^{-7}.$$

Preuve: Comme $d\Pi > 0$, l'inégalité de M. Hadamard est encore valable et donne

$$(\sigma-1)^3 < [(\sigma-1)\,\zeta(\sigma)]^3\,|\zeta(\sigma+it)|^4\,|\zeta(\sigma+2it)| \qquad (\sigma > 1).$$

Majorant $\zeta(\sigma+2it)$ en utilisant 4.2 on obtient

$$|\zeta(\sigma+it)| > A(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}\,[q(t)]^{-\frac{1}{4}}.$$

En utilisant (9) pour majorer la dérivée première on obtient

$$|\zeta(1+it)| > A\,(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}\,[q(t)]^{-\frac{1}{4}} - A_1(\sigma-1)\,[q(t)]^2$$

cette inégalité est vérifiée quelque soit $\sigma > 1$; nous prendrons σ de telle sorte que le second terme soit la moitié du premier: on obtient alors 4.3. La démonstration de la première partie du théorème 1.2 résulte alors de la proposition 3.4 que l'on applique avec $\lambda = 7$, $1/\alpha = a$.

5. Nous allons dans ce paragraphe indiquer rapidement comment on peut inversement passer d'une hypothèse P_a à une conclusion N_a. Bien qu'il s'agisse d'un résultat abélien, en principe plus facile à obtenir que le résultat taubérien inverse, nous ne saurons l'établir qu'en utilisant la technique taubérienne précédente.

5.1 Supposons que P_a est satisfait, c'est-à-dire que

$$r(x) = O(\exp(-[\log x]^a)).$$

Soit $$\varphi(s) = \int x^{-s} d\Pi(x).$$

Nous avons la formule de sommation partielle suivante, analogue à (4).

$$\varphi(x) - \int_1^X x^{-s} d\Pi(x) = X^{-s+1} r(X) + \int_s^{+\infty} \frac{X^{1-y}}{y-1} dy - s\int_X^{+\infty} r(x)\, x^{-s} dx$$

et en dérivant

$$(-1)^p \left[\varphi^{(p)}(s) + \left(\frac{X^{1-s}}{s-1}\right)^{(p-1)}\right] = \int_1^X x^{-s} (\log x)^p d\Pi(x) + X^{-s+1} (\log X)^p r(X)$$
$$- p\int_X^{+\infty} r(x)(\log x)^{p-1} x^{-s} dx - s\int_X^{+\infty} r(x)(\log x)^p x^{-s} dx. \quad (10)$$

La première intégrale se majore à l'aide de (6), les deux dernières intégrales ont été évaluées dans la démonstration de 4.2 (le rôle que jouait $\varrho(x)$ est joué maintenant par $r(x)$). Ceci permet d'écrire l'analogue de (9):

$$\left|\varphi^{(p)}(1+it) + \left(\frac{1}{it}\right)^{(p-1)}\right| < A_4^p [p^{\alpha p} + (q(t))^{p+1}] \quad (p \geqslant 1) \quad (11)$$

où $$\alpha = \frac{1}{a}, \quad q(t) = [\log(|t| + e)]^{\alpha}.$$

$\varphi(s)$ étant la transformée de Mellin d'une mesure positive

$$|\varphi(\sigma + it)| < \varphi(\sigma) < -\log(\sigma - 1) + A_5.$$

Utilisant la majoration de φ' on a

$$|\varphi(1+it)| < -\log(\sigma - 1) + (\sigma - 1) A_6 [q(t)]^2 + A_4.$$

Prenant $\sigma - 1 = [q(t)]^{-2}$ on obtient

$$|\varphi(1+it)| < 2\log q(t) + A_7.$$

D'où, comme $\zeta(s) = \exp(\varphi(s))$,

$$|\zeta(1+it)| < A_8 q^2(t). \quad (12)$$

Nous allons maintenant majorer les dérivées de $\zeta(1+it)$, en utilisant le lemme suivant.

5.2 LEMME: *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment dérivable définie sur un intervalle et vérifiant sur cet intervalle*

$$|f(t)| < 2 \log q(t),$$

$$|f^{(p)}(t)| < A^p(p^{\alpha p} + [q(t)]^{p+1}) \quad p \geqslant 1.$$

Posons $$g(t) = \exp(f(t)).$$

Alors $$\left|\frac{g^{(p)}(t)}{g(t)}\right| < (A_2 p^\alpha)^p + [A_2 p q^2(t)]^p.$$

Preuve: Notons par $Q(u)$ le polynome de degré p tel que

$$Q^{(m)}(0) = f^{(m)}(t_0) \quad 0 < m \leqslant p.$$
$$Q(0) = 0.$$

Alors $$g^{(p)}(t_0) = g(t_0)\, [\exp(Q(u))]^{(p)}_{u=0}.$$

Nous allons évaluer cette dérivée par la formule de Cauchy en choisissant un nombre b tel que sur $|u| = b$, $Q(u)$ soit borné uniformément quelque soit p et t_0; on a

$$\max_{|u|=b} |Q(u)| < \sum_{m=1}^{p} m^{(\alpha-1)m} (Ab)^m + \sum_{m=1}^{p} [q(t)]^{m+1} (Ab)^m$$

d'où une majoration uniforme si

$$\frac{1}{b} = \sup \{A_1 p^{\alpha-1}, A_1 q^2(t)\}$$

et la majoration de l'énoncé du lemme.

5.3 PROPOSITION. *Posons*

$$l(t) = \zeta(1+it) - \frac{b}{it},$$

où b est une constante convenable. Alors si P_α est satisfait

$$|l^{(p)}(t)| < q^2(t)\, [A\, p^\alpha]^p + [A\, p\, q^2(t)]^{p+1}.$$

Preuve: Si $t > 1$, on a d'après (11)

$$|\varphi^{(p)}(1+it)| < A^p\, [p^{\alpha p} + (q(t))^{p+1}]$$

il suffit d'appliquer (12) et le lemme 5.2 pour obtenir la majoration 5.3.

Si $|t| < 1$, posons

$$\psi(t) = \varphi(t) + \log (it)$$

alors (11) entraîne que

$$|\psi^{(p)}(t)| < A^q \, p^{\alpha p}$$

et l'application du lemme 5.2 donne que

$$g(t) = \exp (\psi(t))$$

vérifie

$$|g^{(p)}(t)| < [A \, p^\alpha]^p, \quad |t| < 1.$$

On a de plus

$$g(t) = it \, \zeta(1 + it).$$

Choisissons $b = g(0)$, on a alors

$$l(t) = \frac{g(t) - g(0)}{it}$$

et

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = \int_0^1 g'(ut) \, du$$

ce qui montre, en dérivant sous le signe somme, que

$$|l^{(p)}(t)| < [A_1 \, p^\alpha]^p, \quad \text{si } |t| < 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Posons

$$h_1(s) = \frac{l(s)}{s}$$

$$\varrho_1(x) = n(x) - x + 1$$

alors

$$\int \varrho_1(x) \, x^{-s} \, dx = h_1(x)$$

d'où le théorème de Plancherel donne encore

$$\int_0^{+\infty} |\varrho_1(x)|^2 \, (\log x)^{2p} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(1 + it)]^2 \, dt.$$

D'autre part la proposition 5.3 permet d'évaluer le second membre on obtient

$$\int \varrho_1^2(x) \, (\log x)^{2p} \, dx < (Ap)^{2p + 4p\alpha}$$

ce qui entraîne comme en 2.1 que

$$|\varrho_1(x)| = O(\exp(-b(\log x)^{a'}))$$

où $b>0$ et où $a' = a/(a+2)$.

6. Contre exemples

6.1 Nous nous proposons de montrer que l'Hypothèse de Riemann est inexacte pour les nombres premiers généralisés dans le sens suivant: une distribution très régulière de $n(x)$ n'entraîne pas que

$$\Pi(x) = \operatorname{li}(x) + O(x^\alpha)$$

quelque soit $\alpha < 1$.

Soit $c>1$, posons

$$f_c(s) = \int_c^{+\infty} x^{-s} \frac{dx}{\log x}.$$

Alors par le raisonnement fait dans la proposition 2.1.

$$f_c(s) = \int_s^{+\infty} \frac{c^{1-y}}{y-1} dy$$

et

$$\zeta_c(s) = \exp(f_c(s))$$

est une fonction méromorphe ayant pour pôle le seul point 1, ce pôle étant simple.

De plus

$$|f_c(\sigma+it)| < A\, c^{-\sigma} t^{-1}$$

d'où

$$|\zeta_c(\sigma+it)| < \exp(A\, c^{-\sigma}), \quad \sigma < 0.$$

D'autre part

$$|\zeta_c(\sigma+it) - 1| < A_1 c^{-\sigma} t^{-1}, \quad \text{si } |t| > c^{-\sigma}.$$

ζ_c^{-1} satisfait ainsi aux mêmes majorations que ζ_c. Soient b et c' deux constantes vérifiant $b>1$, $c' > c^{1/b}$. Posons

$$k(s) = \frac{\zeta_c(s)}{\zeta_{c'}(bs)} - 1.$$

Alors $k(s)$ est de carré intégrable sur toute parallèle à l'axe imaginaire. Posons

$$h(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} k(s)\, x^{s-1} \frac{ds}{2i\pi}, \quad \sigma > 1.$$

$h(x)$ est une fonction de carré intégrable sur tout compact. On a de plus

$$\log (k(s)+1) = \int_c^{+\infty} x^{-s} \frac{dx}{\log x} - \int_{c'^b}^{+\infty} x^{-s} \frac{x^{b-1}-1}{\log x} dx = \int x^{-s} d\Pi(x)$$

où $d\Pi > 0$ en vertu du choix de c'.

Il en résulte que $h(x) > 0$. Posons

$$n_1(x) = \int_0^x h(x)\, dx$$

alors

$$n_1(x) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} k(s)\, x^{s-1} \frac{ds}{2i\pi s} \quad \text{où } \sigma > 1;$$

en intégrant sur $\sigma < 0$ et en majorant l'intégrale on obtient, a, a', a'' désignant trois constantes $a > 0$, $a'' > 0$,

$$|n(x) - ax - a'| < \inf_{\sigma < 0} (x^{\sigma} \exp (Ac^{-\sigma})) = O(x^{-a'' \log \log x}). \tag{13}$$

On a montré ainsi le résultat suivant:

Il existe une mesure positive $d\Pi$ *telle que* $dn = e^{d\Pi}$ *satisfasse* (13) *et que la fonction*

$$\zeta(s) = \int x^{-s}\, dn(x)$$

ait pour seul zéro dans tout le plan $s = \beta$, *où* β *est un nombre arbitraire,* $0 < \beta < 1$.

Ayant construit cette mesure $d\Pi$ on lui associe une mesure π de la manière suivante: On pose $d\pi(x) = d\Pi(x)$ si $c < x < c^2$,

$$d\pi(x) = d\Pi(x) - \tfrac{1}{2} d\Pi(x^{\frac{1}{2}}) \quad \text{si } c^2 < x < c^3,$$

$$d\pi(x) = d\Pi(x) - \tfrac{1}{2} d\pi(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{n} d\pi(x^{1/n}) \quad \text{si } c^n < x < c^{n+1}.$$

On a ainsi une suite d'équations récurrentes définissant $d\pi$. On vérifie que pour un choix convenable de c et c' on aura encore $d\pi > 0$. Alors

$$-\log \zeta(s) = \int \log (1 - t^{-s})\, d\pi(t).$$

Posons $\pi_1(x) =$ partie entière de $\pi(x)$, et soit $\zeta_1(s)$ la fonction définie par

$$-\log \zeta_1(s) = \int \log (1 - t^{-s})\, d\pi_1(t),$$

alors
$$\log \zeta(s) - \log \zeta_1(s) = s \int \frac{t^{-s-1}}{1-t^{-s}} [\pi(t) - \pi_1(t)]\, dt.$$

Le second membre est une fonction holomorphe dans $\sigma > 0$. Notons par $p_1 \dots p_n \dots$ la suite de nombres réels définie par les points où $d\pi_1$ a un saut. On a ainsi montré:

Il existe une suite $p_1\, p_2 \dots p_n$ *de nombres réels* > 1 *telle que*

$$\zeta_1(s) = \Pi \left(\frac{1}{1 - p_i^{-s}} \right)$$

soit une fonction holomorphe dans $\sigma > 0$ *a l'exception du point* $s = 1$ *qui est un pôle simple pour* ζ_1. ζ_1 *admet dans* $\sigma > 0$ *un seul zéro qui est le point* $s = \beta$ *où* β *est un nombre arbitraire,* $0 < \beta < 1$. Si on le désirait on pouvait choisir les p_i de telle sorte qu'il soient des entiers naturels: il suffit de remplacer chaque p_i par l'entier le plus proche.

Enfin en considérant des fonctions de la forme

$$\zeta(s) = \zeta_{c_0}(s) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \zeta_{c_k}(b_k (s - it_k)) \right]^{-1},$$

on peut par un choix convenable des constantes b_k, c_k, t_k obtenir des fonctions $\zeta(s)$ verifiant: $(s-1)\zeta(s)$ holomorphe dans $\operatorname{Re} s > -\gamma$

$$\log \zeta(s) = \int x^{-s}\, d\Pi(x) \text{ où } d\Pi > 0 \text{ et où}$$

$$\Pi(x) - \operatorname{li}(x) = \Omega(x \exp(-(\log x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

γ et ε étant deux nombres positifs donnés à l'avance. Par exemple on peut prendre, pour k assez grand,

$$\log \log c_k = e^{k^2},$$

$$t_k = (c_k)^{\beta'}, \quad \text{où } \beta' > \tfrac{1}{2}(1-\gamma),$$

$$b_k = 1 + \frac{1}{\log c_k}.$$

Bibliographie

[1]. A. Beurling, Analyse asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. *Acta Math.*, 68 (1937), 255–291.
[2]. P. Malliavin, Calcul symbolique et sous algèbres de $L_1(G)$. *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 181–186.
[3]. B. Nyman, A general prime number theorem. *Acta Math.*, 81 (1949), 299–307.

Reçu le 24 mars 1961