UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE DE MAJORATION DE CAUCHY

PAR

LARS GÅRDING

Lund, Suède (1)

Introduction

Soient $x=(x_1, \ldots, x_n)$ n variables complexes et soit

$$f(x)=\sum_{\alpha \geqslant 0} f_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

une série formelle en x, $\alpha \geqslant 0$ signifiant que $\alpha_k \geqslant 0$ pour tout k. Si $g(x)=\sum g_\alpha x^\alpha$ est une autre série formelle nous dirons que $f << g$ si $|f_\alpha| \leqslant g_\alpha$ pour tout α. Si f est holomorphe à l'origine, il est bien connu que f admet des majorantes de la forme

$$A \sum_0^\infty (X/R)^j, \quad X = x_1 + \ldots + x_n, \tag{1}$$

convergentes pour $|X| < R$. Ces majorantes jouent un rôle important dans la méthode classique de Cauchy qui sert à démontrer, par exemple, l'existence d'une solution holomorphe unique du problème de Cauchy d'un système holomorphe d'équations aux dérivées partielles. Quand ces systèmes sont compliqués, la méthode de Cauchy n'est pas très commode et récemment on a proposé d'autres (voir Rosenbloom [1], Friedman [2] et Hörmander [3], pp. 116–118). Nous allons donner une méthode nouvelle employant une majorante plus fine que (1), à savoir

$$Mf(X)=\sum_{j=0}^\infty \hat{f}_j X^j,$$

qui, par définition, sera la plus petite majorante de f qui est fonction de X. Ceci revient à poser

$$\hat{f}_j = \max \alpha! \, |f_\alpha| / |\alpha|!, \quad |\alpha| = j,$$

(1) Conférence faite au Congrès des mathématiciens scandinaves à Copenhague en août 1964.

où $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Plus généralement, si

$$f(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad y^\beta = y_1^{\beta_1} \dots y_N^{\beta_N},$$

nous poserons
$$Mf(X, y) = \sum Mf_\beta(X)\, y^\beta, \quad f_\beta(x) = \sum_\alpha f_{\alpha\beta} x^\alpha.$$

On pourra remplacer X par $\sum_1^n \xi_k x_k$, $\xi_k > 0$, mais ceci revient à une dilatation $x_k \to \xi_k x_k$. La propriété essentielle de l'opération M est la suivante (Lemme 1.1):

$$MF(x, f_1(x), \dots, f_N(x))\,(X) << MF(X, Mf_1(X), \dots, Mf_N(X)), \tag{2}$$

où $F(x, y)$, $f_1(x)$, ... sont des séries formelles. La preuve est évidente: le membre droit est une série formelle en X et majore $f(x) = F(x, f_1(x), \dots, f_N(x))$, donc il majore $Mf(X)$. Notons aussi que si $f(x, y)$ est holomorphe pour $|x_j| \leqslant r_j$, $|y_k| \leqslant s_k$ alors $Mf(X, y)$ est holomorphe pour $|X| < \min r_j$, $|y_k| < s_k$ et que, si $Mf(R) < \infty$, $R > 0$, alors $f(x)$ est holomorphe pour $|x_1| + \dots + |x_n| < R$, $|y_k| < s_k$.

Soit maintenant $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ un multi-indice à composantes entières de signes arbitraires et posons

$$D^\beta f(x) = \sum \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} f_\alpha x^{\alpha - \beta}.$$

On a $D^\beta = D_1^{\beta_1} \dots D_n^{\beta_n}$; $D_k = \partial/\partial x_k$; D_k^{-1} est une intégration en x_k de 0 à x_k; la somme s'étend à $\alpha \geqslant \beta$. Nous écrirons $f(x) = O(x^\gamma)$ si $f(x)\, x^{-\gamma}$ est une série formelle. Evidemment

$$D^\beta f(x) = O(x^{-\beta}).$$

On vérifie facilement que (Lemme 2.1)

$$MD^\beta f(X) << D_X^{|\beta|} Mf(X) \tag{3}$$

et que
$$D_X^{|\beta|} Mf(X) << X^{-|\beta|} Mf(X)/|-\beta|! \tag{4}$$
si $|\beta| \leqslant 0$.

Les propriétés (2), (3) et (4) de l'opération M, évidentes pour $n = 1$, sont commodes dans les applications. A titre d'exemple nous traiterons le problème de Cauchy le plus simple: $Du(x) = f(x, u(x))$, $u(0) = 0$, où x et y sont des variables complexes et $f(x, y)$ est holomorphe à l'origine. Si l'on prend Du comme nouvelle inconnue, un problème équivalent sans condition initiale est le suivant

$$u(x) = f(x, D^{-1} u(x)). \tag{5}$$

Soit $u \to v$ l'application définie par

$$v(x) = f(x, D^{-1}u(x)). \tag{6}$$

Les propriétés (2), (3) et (4) de M donnent

$$Mv(x) << F(x, Mu(x)), \tag{7}$$

où $F(x, y) = Mf(x, xy)$. Puisque $F(x, y)$ converge si x est assez petit et tend vers $A = F(0, 0)$ si $x \to 0$, on a l'énoncé suivant: pour chaque $y_0 > A$ il existe $x_0 = x_0(y_0) > 0$ tel que

$$0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0 \ \Rightarrow\ F(x, y) \leqslant y_0.$$

Donc, si $0 = u^0 \to u^1 \to u^2 \to \ldots$ est la suite des itérations de $u \to v$, (7) montre que

$$0 \leqslant x \leqslant x_0 \ \Rightarrow\ Mu^\nu(x) \leqslant y_0 \tag{8}$$

pour tout ν. Autrement dit, tous les u^ν sont holomorphes et bornés dans un voisinage fixe de l'origine. Définissons maintenant $g(x, y, z)$ par $f(x, y) - f(x, z) = g(x, y, z)\,(y - z)$ et soit $u \to v$, $u' \to v'$ de sorte que $v - v' = f(x, D^{-1}u) - f(x, D^{-1}u')$. Une application de (2), (3) et (4) donne

$$M(v - v')\,(x) << F(x, Mu(x), Mu'(x))\, x\, M(u - u')\,(x), \tag{9}$$

où $F(x, y, z) = Mg(x, xy, xz)$ converge si x est assez petit. Par conséquent, si x est assez petit, la suite u^ν converge vers une solution unique u de (5). Vu (8), la convergence se prolonge pour $|x| < x_0$.

Le même procédé donne des résultats plus généraux. Nous considérons d'abord des problèmes de Goursat–Riquier du type suivant

$$D^{\beta(j)}u_j = f_j(x, D^{B_j}u), \quad u_k - w_k = O(x^{\beta(k)}), \tag{10}$$

où $j, k = 1, \ldots, N$ et

$$D^{B_j}u = \{D^\alpha u_k\}, \quad \alpha \in B_{jk},$$

B_{jk} étant un ensemble fini d'indices. On suppose $f_j(x, y)$, $y = \{y_k^\alpha\}$, holomorphe au point $x = 0$, $y_k^\alpha = D^\alpha w_k(0)$, w holomorphe à l'origine et on cherche une solution u holomorphe à l'origine. Notons que (10) donne $f_j(x, D^{B_j}u) = O(x^{-\beta(j)})$. Nous ajouterons à (10) la condition plus forte suivante

$$g_k - w_k = O(x^{\beta(k)}) \ \Rightarrow\ f_j(x, D^{B_j}g) = O(x^{-\beta(j)})$$

qui est vide si $\beta(j) \geqslant 0$ pour tout j. Posons

$$f_{jk}^\alpha(x, y) = \partial f_j(x, y)/\partial y_k^\alpha$$

et $$A(\xi)=(\sum_{\alpha}|f^{\alpha}_{jk}(0, D^{B_j}w(0))\,\xi^{\alpha-\beta(j)}|),$$

où $|\alpha|=\max|\beta|$ pour $\beta\in B_{jk}$. $A(\xi)$ est la matrice spectrale associée à (10), introduite par Lednev [4]. Soit $\lambda(\xi)$ le rayon spectral de $A(\xi)$. Nous démontrerons (Théorème 3.1) que si l'on a

$$|\alpha|\leqslant|\beta(k)|,\quad \alpha\neq\beta(k)\text{ sur }B_{jk}$$

et s'il existe ξ tel que $\lambda(\xi)<1$, alors (10) a une solution unique holomorphe près de l'origine. Ce théorème est dû à Lednev [4] (1); la preuve que nous donnons ici est nouvelle.

Notons que, s'il s'agit du problème de Cauchy par rapport au plan $x_l=0$, on a $D^{\beta(j)}=D_l^{|\beta(j)|}$ et, en prenant $\xi=(1,\dots,\xi_l,1,\dots,1)$, on voit facilement que $\lambda(\xi)\to 0$ si $\xi_l\to\infty$.

Soient $m_1,\dots,m_N$ des entiers $\geqslant 0$. On a le même énoncé (Théorème 3.2) si

$$|\alpha|\leqslant m_j-m_k+|\beta(k)|\text{ sur }B_{jk}$$

et si $\quad f_j(x,y)$ est linéaire en y^{α}_k pour $|\alpha|\geqslant|\beta(k)|-m_k$.

Le théorème 3.1 nous permettra de traiter un problème de Cauchy non-linéaire. Soient $m_1,\dots,m_N$ et $n_1,\dots,n_N$ des entiers $\geqslant 0$, supposons que

$$|\alpha|\leqslant m_k-n_j\text{ sur }B_{jk}$$

et considérons le système suivant

$$F_j(x, D^{B_j}u)=0,\quad u_k-w_k=O(x_1^{m_k}),\tag{11}$$

où F_j est holomorphe pour $x=0$, $y^{B_j}=D^{B_j}w(0)$,

$$F_j(x, D^{B_j}w(x))=O(x_1^{n_j})\tag{12}$$

et $\quad \text{dét}\,(F^{\alpha}_{jk}(x, D^{B_j}w(0)))\neq 0,\quad \alpha$ étant défini par $D^{\alpha}=D_1^{m_k-n_j}$.

Sous ces hypothèses (11) a une solution unique, holomorphe à l'origine (Théorème 4.1). — Notons que si tous les n_j sont nuls, alors (12) est vide et (11) est équivalent à un système normal au sens de Cauchy–Kowalevski.

---

(1) Dans l'article de Lednev, ce résultat est à la base d'une étude poussée de systèmes du type (10) qui sont holomorphes par rapport à certaines des variables et non-holomorphes par rapport aux autres.

1. Majorantes de séries formelles

Soit $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-indice à composantes entières de signes arbitraires. Posons $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ et $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$ où $1/k!=0$ si $k<0$ et écrivons $\alpha\geqslant 0$ si $\alpha_k\geqslant 0$ pour tout k. Posons $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Considérons des séries formelles

$$f(x)=\sum_{\alpha\geqslant 0} f_\alpha x^\alpha.$$

Nous écrirons
$$f(x)=O(x^\beta)$$

si'il existe une série formelle $g(x)$ telle que $f(x)=x^\beta g(x)$. Si $\beta_+=(\max(0,\beta_j))$ est la partie positive de β, ceci équivaut à $f(x)=O(x^{\beta_+})$. Nous dirons que

$$f(x)<<g(x)$$

si $|f_\alpha|\leqslant g_\alpha$ pour tout α. Evidemment, ceci entraîne

$$|f(x)|\leqslant g(|x|).$$

Posons
$$X=x_1+\ldots+x_n.$$

On a
$$X^j=\sum\frac{|\alpha|!}{\alpha!}x^\alpha,\quad |\alpha|=j;$$

pour que $f(x)<<\sum_j^\infty h_j X^j$ il faut et il suffit que $|f_\alpha|\leqslant\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!}h_{|\alpha|}$.

Donc, si nous posons
$$\mathring{f}_j=\max\alpha!\,|f_\alpha|/|\alpha|!,\quad |\alpha|=j,$$

alors
$$Mf(X)=\sum_{|\alpha|}{}'\,\mathring{f}_{|\alpha|}X^{|\alpha|},\tag{1}$$

— où $\sum'$ signifie que la somme porte sur $|\alpha|$ — est la plus petite majorante de $f(x)$ qui est fonction de X seul. — Soient $y=(y_1, \ldots, y_N)$ d'autres variables complexes. Nous étendons la définition (1) en posant

$$Mf(X,y)=\sum Mf_\beta(X)\,y^\beta,\tag{2}$$

où
$$f(x,y)=\sum f_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,\quad f_\beta(x)=\sum_\alpha f_{\alpha\beta}x^\alpha.$$

Evidemment, si
$$Mf(R,s)<\infty,\quad R>0,\quad s_k>0,$$

alors $f(x,y)$ est holomorphe pour

$$|x_1|+\ldots+|x_n|<R,\quad |y_k|<s_k.$$

Réciproquement, si $f(x,y)=\sum f_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ est holomorphe dans le polycylindre

$$|x_k|\leqslant r_k,\quad |y_k|\leqslant s_k,$$

alors il existe $C>0$ tel que

$$|f_{\alpha\beta}|\leqslant C r^{-\alpha}s^{-\beta};$$

par conséquent, si $R=\min r_j$,

$$\sum f_{\alpha\beta}x^\alpha << Cs^{-\beta}\sum\left(\frac{x_1}{r_1}+\ldots+\frac{x_n}{r_n}\right)^j << Cs^{-\beta}\sum\left(\frac{X}{R}\right)^j,$$

donc

$$Mf(X,y) << C\left(1-\frac{X}{R}\right)^{-1}\prod\left(1-\frac{y_j}{s_j}\right)^{-1},$$

c'est-à-dire $Mf(X,y)$ est holomorphe dans le polycylindre

$$|X|<\min r_j,\quad |y_k|<s_k.$$

L'utilité de la majorante (2) vient du lemme suivant, démontré dans l'introduction.

Lemme 1.1. *Soient $F(x,y)$ et $f_1(x),\ldots,f_N(x)$ des séries formelles. Alors*

$$MF(x,f_1(x),\ldots,f_N(x))\,(X) << MF(X,Mf_1(X),\ldots,Mf_N(X)). \tag{3}$$

Exemple.

$$Mfg(X) << Mf(X)\,Mg(X).$$

L'inégalité (3) dit que si un coefficient du membre droit est fini alors le coefficient correspondant de la série formelle $g(x)=F(x,f_1(x),\ldots)$ est bien défini.

2. Dérivation et intégration

Posons

$$D^\beta f(x)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}f_\alpha x^{\alpha-\beta}.$$

Evidemment, $D^\beta=D_1^{\beta_1}\ldots D_n^{\beta_n}$ où $D_k=\partial/\partial x_k$ et D_k^{-1} est une intégration en x_k de 0 à x_k. Le facteur $\alpha!/(\alpha-\beta)!$ étant nul sauf si $\alpha\geqslant\beta$, on a $\alpha\geqslant\beta$ dans la somme. Evidemment, $D^\beta f(x)=O(x^{-\beta})$. Notons que $D^\gamma D^\beta x^\alpha=D^\gamma(\alpha!/(\alpha-\beta)!)\,x^{\alpha-\beta}=D^{\gamma+\beta}x^\alpha$ si $\alpha\geqslant\beta$ et que $D^\beta x^\alpha=0$ dans le cas contraire. Donc

$$f=O(x^\beta)\ \Rightarrow\ D^\gamma D^\beta f=D^{\gamma+\beta}f, \tag{1}$$

$$f>>0\ \Rightarrow\ D^\gamma D^\beta f << D^{\gamma+\beta}f. \tag{2}$$

Complétons le Lemme 1.1 par

LEMME 2.1. *On a, pour β de signe quelconque*

$$MD^{\beta}f(X) << D_X^{|\beta|}Mf(X), \tag{3}$$

où $D_X = \partial/\partial X$. — *Si* $|\beta| \leqslant 0$ *on a aussi*

$$MD^{\beta}fD^{\gamma}g(X) << Mf(X)\, D_X^{|\beta+\gamma|}Mg(X). \tag{4}$$

En particulier

$$MD^{\beta}f(X) << X^{-|\beta|}Mf(X)/|-\beta|! \tag{5}$$

Preuve. Ecrivons $f(x)$ sous la forme $\sum_{\alpha\geqslant 0} g_\alpha x^\alpha/\alpha!$ et posons $g_\gamma = 0$ si l'on n'a pas $\gamma \geqslant 0$. Posons $h_j = \max|g_\alpha|$ pour $|\alpha| = j$, où j est un entier de signe quelconque. Alors $Mf(X) = \sum h_j X^j/j!$ et l'on a

$$D^{\beta}f(x) = \sum g_{\alpha+\beta}x^\alpha/\alpha!; \quad D_X^{|\beta|}Mf(X) = \sum h_{|\beta|+j}X^j/j!.$$

(3) résulte donc de

$$\sum_\alpha g_{\alpha+\beta}x^\alpha/\alpha! << \sum_\alpha h_{|\alpha|+|\beta|}x^\alpha/\alpha! = \sum_j h_{|\beta|+j}X^j/j!.$$

Posons $D = D_X$. L'inégalité

$$X^{l+m+1}/(l+m+1) << X^l X^{m+1}/(m+1)$$

où $l, m \geqslant 0$ donne

$$F, G >> 0 \;\Rightarrow\; D^{-1}(F(X)\,G(X)) << F(X)\,D^{-1}G(X).$$

En itérant et en utilisant (2) on trouve donc que

$$F, G >> 0,\ j \leqslant 0 \;\Rightarrow\; D^{j}(F(X)\,D^{k}G(X)) << F(X)\,D^{j+k}G(X).$$

Par conséquent, si $|\beta| \leqslant 0$,

$$D^{|\beta|}MfD^{|\gamma|}Mg(X) \tag{6}$$

est majoré par le membre droit de (4). Or, vu le lemme 1.1 et (3), (6) majore le membre gauche de (4). — La preuve est finie.

Changement de variables. Soit $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$ complexe, $\xi_j \neq 0$ pour tout j. Posons $(\xi x)_j = \xi_j x_j$ et

$$S_\xi f(x) = f(\xi x).$$

Alors

$$D^{\beta}S_\xi f(x) = \xi^\beta S_\xi D^\beta f(x). \tag{7}$$

En effet, $\xi^\alpha x^{\alpha-\beta} = \xi^\beta(\xi x)^{\alpha-\beta}$.

3. Problèmes de Goursat–Riquier

Considérons le système (10) de l'introduction

$$D^{\beta(j)}u_j = f_j(x, D^{B_j}u), \quad u_k - w_k = O(x^{\beta(k)}), \tag{1}$$

où $j, k = 1, \ldots, N$ et

$$D^{B_j}u = \{D^\alpha u_k\}, \quad \alpha \in B_{jk},$$

B_{jk} étant un ensemble fini d'indices. Soient $y = \{y_k^\alpha\}$, $\alpha \in B_{jk}$ des variables complexes. Nous supposons que

$$w \text{ est holomorphe à l'origine} \tag{2}$$

$$f_j(x, y) \text{ est holomorphe pour } x = 0, \ y_k^\alpha = D^\alpha w_k(0) \tag{3}$$

$$h_k = O(x^{\beta(k)}) \Rightarrow f_j(x, D^{B_j}h(x) + D^{B_j}w(x)) = O(x^{-\beta(j)}), \quad \forall\, h. \tag{4}$$

Posons $f_{jk}^\alpha = \partial f_j(x, y)/\partial y_k^\alpha$, soit $b_{jk} = \max |\alpha|$ pour $\alpha \in B_{jk}$. Par définition,

$$A(\xi) = (A_{jk}(\xi)) = \left(\sum_{|\alpha| = b_{jk}} \left| f_{jk}^\alpha(0, D^{B_j}w(0))\ \xi^{\alpha - \beta(j)} \right| \right)$$

est la matrice spectrale de (1). Notons $\lambda(\xi)$ le rayon spectral de $A(\xi)$, c'est-à-dire la valeur absolue maximale des valeurs propres de $A(\xi)$.

Le lemme ci-dessous donne quelques propriétés de (1) utiles pour la suite.

Lemme 3.1. (a) *Pour que u satisfasse à* (1) *il faut et il suffit que $v = u - w$ satisfasse à*

$$D^{\beta(j)}v_j = g_j(x, D^{B_j}v), \quad v_j = O(x^{\beta(j)}),$$

où
$$g_j(X, y^{B_j}) = f_j(x, y^{B_j} + D^{B_j}w(x)) - D^{\beta(j)}w_j(x).$$

Si f a les propriétés (3) *et* (4), *g a les mêmes propriétés avec $w = 0$ et réciproquement. Les matrices spectrales des f et des g sont identiques.*

(b) *La substitution $f(x) \to f(\eta x)$ dans* (1) *avec $w = 0$ change $A(\xi)$ en $A(\eta^{-1}\xi)$. — Pour chaque $\mu > \lambda(\xi)$ il existe un vecteur $T(\xi)$ à composantes positives tel que*

$$\sum_j T_j(\xi)\, A_{jk}(\xi) \leqslant \mu T_k(\xi). \tag{5}$$

(c) *Si u satisfait au système* (1) *avec $w = 0$, alors $v_k = D^{\beta(k)}u_k$ satisfait au système*

$$v_j = f_j'(X, D^{B_j'}v), \tag{1'}$$

où
$$B_{jk} = B_{jk}' + \beta(k) \quad \textit{et} \quad f_j'(x, y^{B_j'}) = f_j(x, z^{B_j}), \quad z_k^{\alpha + \beta(k)} = y_k^\alpha.$$

Les rayons spectraux de (1) *et de* (1′) *sont les mêmes. Si f satisfait à* (4) *avec $w=0$, alors*

$$g_k = O(x^{-\beta(k)}) \Rightarrow f_j'(x, D^{B_j}g(x)) = O(x^{-\beta(j)}) \tag{4'}$$

et réciproquement.

(d) *Si v satisfait à* (1′) *et si*

$$v_k = O(x^{-\beta(k)}), \tag{6}$$

alors $u_k = D^{-\beta(k)}v_k$ satisfait à (1) *avec $w=0$. En particulier, si* (1′) *a une solution unique v, limite d'une suite d'approximations successives*

$$0 \to v^0 \to v^1 \to \dots v^\nu \to \dots,$$

où

$$v_j^{\nu+1} = f_j'(x, D^{B_j}v^\nu),$$

et si f satisfait à (4), *alors $u_k = D^{-\beta(k)}v_k$ est la solution unique de* (1) *avec $w=0$.*

Preuve. (a) — Evidente. (b) — La première partie résulte de (2.7). Soit I la matrice unité et soit $\delta > 0$. Alors, les éléments de $A^\delta(\xi) = A(\xi) + \delta I$ étant positifs, vu un théorème classique de Frobenius, il existe un vecteur $T^\delta(\xi)$ à composantes positives tel que $\sum T_j^\delta(\xi)\, A_{jk}^\delta(\xi) = \lambda^\delta(\xi)\, T_k^\delta(\xi)$, $\lambda^\delta(\xi)$ étant le rayon spectral de $A^\delta(\xi)$. Puisque $\lambda^\delta(\xi) \to \lambda(\xi)$ si $\delta \to 0$, $A(\xi)$ a la propriété voulue. (c) — La première partie résulte de (2.1); en effet, puisque $u_k = O(x^{\beta(k)})$ on a $D^\alpha u_k = D^{\alpha-\beta(k)}D^{\beta(k)}u_k$. La matrice spectrale de (1′), à savoir

$$(A_{jk}(\xi)\,|\xi^{\beta(k)-\beta(j)}|),$$

a le même spectre que $A(\xi)$ et, par conséquent, le même rayon spectral. Puisque $g_k = O(x^{-\beta(k)})$ donne

$$D^\alpha g_k = D^{\alpha+\beta(k)}h_k \quad \text{où} \quad h_k = D^{-\beta(k)}g_k = O(x^{\beta(k)}),$$

(4) implique (4′) et puisque $h_k = O(x^{\beta(k)})$ donne $D^{\alpha+\beta(k)}h_k = D^\alpha g_k$ où $g_k = D^{\beta(k)}h_k = O(x^{-\beta(k)})$, (4′) implique (4). (d) — La première partie résulte de ce que (1) donne $D^\alpha v_k = D^{\alpha+\beta(k)}u_k$. La seconde partie résulte de ce que (4) implique (4′), en particulier on a $v_j^1 = f_j'(x, 0) = O(x^{-\beta(j)})$, d'où, vu (4′), $v_j^\nu = O(x^{-\beta(j)})$ pour tout ν. Donc on a (6) et on peut appliquer la première partie.

Nous ferons deux choix des ensembles B_{jk}. D'abord

THÉORÈME 3.1. *Soit*

$$B_{jk}: |\alpha| \leqslant |\beta(k)|, \quad \alpha \neq \beta(k) \tag{7}$$

et supposons qu'il existe ξ tel que $\lambda(\xi) < 1$. Alors (1) *a une solution unique, holomorphe à l'origine.*

Note 1. La condition concernant le rayon spectral, n'est ni nécessaire ni superflue. En effet, il est facile de voir que l'équation

$$2D_1 D_2 u = aD_1^2 u + bD_2^2 u, \quad u - w = O(x_1 x_2),$$

où a et b sont des nombres complexes, admet une solution holomorphe à l'origine pour tout w holomorphe si et seulement si ab n'est pas un nombre réel >1. Dans ce cas, $\min \lambda(\xi) = \sqrt{|ab|}$. Voir aussi Gyunther [5].

Note 2. Soit $S = (S_{jk})$ diagonale, $S_{jj} = |\xi^{\beta(j)}|$. Alors la matrice

$$SAS^{-1} = \left(\sum_{|\alpha| = b_{jk}} |f_{jk}^{(\alpha)}(0, D^{B_j} w(0))\, \xi^{\alpha - \beta(k)}| \right)$$

a le même spectre que A. Donc, s'il existe $\eta = \eta_1, \ldots, \eta_n$ réel tel que $\eta\beta(k) = \sum \eta_l \beta(k)_l > \eta\alpha = \sum \eta_l \alpha_l$ pour tout $\alpha \in B_{jk}$ tel que $|\alpha| = b_{jk}$, en posant $\xi = (e^{\eta_1 t}, \ldots, e^{\eta_n t})$ et en faisant $t \to \infty$ on voit que SAS^{-1} tend vers zéro, donc $\lambda(\xi) \to 0$. En particulier, s'il s'agit du problème de Cauchy par rapport au plan $x_l = 0$, c'est-à-dire si $D^{\beta(j)} = D_l^{|\beta(j)|}$, en prenant $\eta_k = 0$ si $k \neq l$ et $\eta_l = 1$, on voit que la condition concernant le rayon spectral est toujours vérifiée.(1)

Preuve. Vu le lemme 3.1.(a), il suffit de supposer que $w = 0$, et vu (d) du même lemme, il suffit de démontrer, dans le cas $\beta(k) = 0$, que (1) a une solution unique, limite d'une suite d'approximations successives

$$0 = u^0 \to u^1 \to \ldots .$$

Puisque $|\alpha| = 0$, $\alpha \neq 0$ implique $D^\alpha h(0) = 0$ pour tout h, u_k est solution de (1) en même temps que $v_k = u_k - f_k(0,0)$ est solution de $v_j = f_j(x, D^{B_j} v) - f_j(0,0)$. Nous pouvons donc supposer que $f_j(0,0) = 0$. Vu le lemme 3.1.(b), nous pouvons aussi supposer que $\xi = 1, \ldots, 1$. Posons

$$F_j(X, Y) = Mf_j(X, X^{-|B_j|} Y),$$

où $$Y = (Y_1, \ldots, Y_N) \quad \text{et} \quad X^{-|B_j|} Y = \{X^{-|\alpha|} Y_j\}, \quad \alpha \in B_{jk}.$$

Les lemmes 1.1 et 2.1 montrent que

$$f_j(x, D^{B_j} u(x)) << F_j(X, X^{-|B_j|} Mu(X)). \tag{8}$$

(1) Soit E l'ensemble des vecteurs réels η tels que $\eta\alpha \leqslant \eta\beta(k)$ pour tout $\alpha \in B_{jk}$ et tout j, k. Par hypothèse, $E \ni (1, \ldots, 1)$. Le même raisonnement montre qu'on peut, dans l'énoncé du théorème 3.1, remplacer $\lambda(\xi)$ par le rayon spectral de la matrice $(\sum_\alpha |f_{jk}^{(\alpha)}(0, D^B w(0))|\, |\xi^{\alpha - \beta(j)}|)$, où la somme porte sur les α vérifiant $\alpha \in B_{jk}$, $\eta\alpha = \eta\beta(k)$ pour tout $\eta \in E$. Je dois cette remarque à M. Jean Leray.

Puisque $f_j(0,0)=0$ on a $F_j(0,0)=0$; de plus

$$\partial F_j(0,0)/\partial Y_k = \sum_{|\alpha|=0} |f^{\alpha}_{jk}(0,0)| = A_{jk}.$$

Choisissons maintenant $\mu \geqslant \lambda(\xi)$, $\mu < 1$ et un vecteur T ayant la propriété (5) et posons

$$Y_T = \sum Y_j T_j, \quad F_T = \sum F_j(X,Y)\,T_j, \quad M_T u(X) = \sum T_j M u_j(X).$$

On a

$$F_T(X,Y) << \mu Y_T + H(X,Y),$$

où

$$H(X,Y) = \sum T_j(F_j(X,Y) - \sum A_{jk} Y_k)$$

a la propriété que $\quad H(0,0) = \partial H(0,0)/\partial Y_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$

Par hypothèse, $\mu < 1$, et $H < \infty$ pour $0 < X$ et $0 < Y_k$ assez petits. Donc, pour chaque Y_0 assez petit, il existe $X_0 = X_0(Y_0) > 0$ tel que

$$0 \leqslant X \leqslant X_0,\ 0 \leqslant Y_T \leqslant Y_0 \ \Rightarrow\ F_T(X,Y) \leqslant Y_0.$$

Par conséquent, vu (8), l'application $u \to v$ définie par

$$v_j = f_j(x, D^{B_j} u)$$

a la propriété que

$$X \leqslant X_0,\ M_T u(X) \leqslant Y_0 \ \Rightarrow\ M_T v(X) \leqslant Y_0.$$

Donc, si

$$0 = u^0 \to u^1 \to \dots \to u^{\nu} \to \dots \tag{9}$$

est la suite des itérations de $u \to v$, on a

$$X \leqslant X_0 \ \Rightarrow\ M_T u^{\nu}(X) \leqslant Y_0$$

pour tout ν. — Démontrons maintenant la convergence de (9). Soit

$$f_j(x,y) - f_j(x,z) = \sum_{\alpha,k} f^{\alpha}_{jk}(x,y,z)\,(y^{\alpha}_k - z^{\alpha}_k)$$

et soit $u \to v$, $u' \to v'$. Les lemmes 1.1 et 2.1 montrent que

$$M(v-v')_j(X) << \sum F_{jk}(X, Mu(X),\ Mu'(X))\,M(u-u')_k(X),$$

où

$$F_{jk}(X,Y,Z) = \sum_{\alpha,k} M f^{\alpha}_{jk}(X, X^{-|B_j|}Y, X^{-|B_j|}Z)\,X^{-|\alpha|}.$$

En particulier, $\quad F_{jk}(0,0,0) = A_{jk}.$

Donc, vu (5),

$$M_T(v-v')(X) << (\mu + H(X, Mu(X),\ Mu'(X))\,M_T(u-u')(X), \tag{10}$$

où
$$H(X,Y,Z)=\sum_{jk} T_j[F_{jk}(X,Y,Z)-A_{jk}]\,T_k^{-1}$$

s'annule à l'origine. En prenant d'abord $Y_1>0$ et ensuite $X_1=X_1(Y_1)>0$ assez petits pour qu'on ait
$$F_T(X_1,Y_1)\leqslant Y_1,\ \ \mu+H(X_1,Y_1,Y_1)<1$$

et en prenant $u=u^\nu$, $u'=v=u^{\nu+1}$, $v'=u^{\nu+2}$ dans (10), nous voyons que (9) converge pour $|x_1|+\dots+|x_n|<X_1$ et, par conséquent, aussi pour $|x_1|+\dots+|x_n|<X_0$, vers une solution de (1). Une application de (10) à deux solutions $u=v$ et $u'=v'$ montre que $u=u'$ près de l'origine. — Notre second choix des ensembles B_{jk} est plus général que (7), mais il exige des hypothèses de linéarité sur les f_j. Le théorème suivant est nouveau, un cas spécial linéaire fut traité par Jan Persson [8].

THÉORÈME 3.2. *Soient $m_1,\dots,m_N$ des entiers $\geqslant 0$ et soit*
$$B_{jk}:|\alpha|\leqslant m_j-m_k+|\beta(k)|, \tag{11}$$
$$f_j(x,y) \text{ linéaire en } y_k^\alpha \text{ si } |\alpha|\geqslant|\beta(k)|-m_k. \tag{12}$$

Alors, s'il existe ξ tel que $\lambda(\xi)<1$, le problème (1) a une solution unique, holomorphe à l'origine.

Note. Si tous les m_j sont nuls et si $\alpha\neq\beta(k)$ pour $\alpha\in B_{jk}$, ce théorème est un cas spécial du théorème précédent.

Preuve. Soit
$$C_l:|\gamma|<|\beta(l)|-m_l$$
et posons
$$D^C u=\{D^\gamma u_l\},\quad \gamma\in C_l.$$

Vu les hypothèses (11) et (12) on a
$$f_j(x,D^{B_j}u)=\sum f_{jk}^\alpha(x,D^C u)\,D^\alpha u_k+g_j(x,D^C u), \tag{13}$$
où
$$|\alpha|\leqslant m_j-m_k+|\beta(k)|.$$

Prenons d'abord le cas
$$|\beta(k)|=m_k,\ \beta(k)\geqslant 0,\ w=0. \tag{14}$$

Alors, puisque $u_k=O(x^{\beta(k)})$, $\beta(k)\geqslant 0$, (1) équivaut à
$$u_j=\varphi_j(x,u),$$
où
$$\varphi_j(x,u)=\sum_{\alpha,k} D^{-\beta(j)}f_{jk}^\alpha(x,D^C u)\,D^\alpha u_k+D^{-\beta(j)}g_j(x,D^C u),$$
où
$$|\alpha|\leqslant|\beta(j)|,\quad D^C u=\{D^\gamma u_l\},\ |\gamma|<0.$$

Notons que $u_k = O(x^{\beta(k)})$ donne $D^C u(0) = 0$. Vu le lemme 3.1.(b), nous pouvons supposer que $\xi = (1, \dots, 1)$, c'est-à-dire que le rayon spectral de

$$A = (A_{jk}) = (\sum_\alpha |f_{jk}^\alpha(0,0)|), \quad |\alpha| = m_j$$

est inférieur à 1. Posons

$$F_{jk}(X, Y) = \sum_\alpha M f_{jk}^\alpha (X, X^{-|C|-1} Y)\, X^{|\beta(j)-\alpha|}$$

et
$$G_j(X, Z) = \sum M g_j (X, X^{-|C|-1} Y)\, X^{|\beta(j)|},$$

où
$$X^{-|C|-1} Y = \{X^{-|\gamma|-1} Y_l\}, \quad |\gamma| < 0.$$

Puisque $|\gamma| < 0$, $|\beta(j) - \alpha| \geqslant 0$ et $|\beta(j)| \geqslant 0$, F_{jk} et G_j sont des séries formelles, convergentes si X et Y sont assez petits. De plus,

$$F_{jk}(0,0) = A_{jk}.$$

Les lemmes 1.1 et 2.1 montrent que

$$\varphi_j(x, u) << \sum F_{jk}(X, XMu(X))\, Mu_k(X) + G_j(X, XMu(X)). \tag{15}$$

Soit T un vecteur à composantes positives ayant la propriété (5), où $\mu < 1$. Etudions la fonction

$$H(X, Y) = \sum T_j F_{jk}(X, XY)\, Y_k + \sum T_j G_j(X, XY),$$

où $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$. On a

$$H(X, Y) << H_0 + \mu Y_T + R(X, XY),$$

où $R(X, Z)$ converge pour X et Z assez petits et $R(0, 0) = 0$. Donc, pour chaque $Y_0 > H_0/(1 - \mu)$ il existe $X_0 = X_0(Y_0) > 0$ tel que

$$0 \leqslant Y_T \leqslant Y_0, \; 0 \leqslant X \leqslant X_0 \;\Rightarrow\; H(X, Y) \leqslant Y_0.$$

Par conséquent, si nous définissons l'application $u \to v$ par $v = \varphi_j(x, u)$, nous avons $v_k = O(x^{\beta(k)})$ et (15) donne l'énoncé suivant

$$0 \leqslant X \leqslant X_0, \; M_T u(X) \leqslant Y_0 \;\Rightarrow\; M_T v(X) \leqslant Y_0.$$

Donc, les approximations successives

$$0 = u^0 \to u^1 \to \dots \tag{16}$$

ont la propriété que
$$0 \leqslant X \leqslant X_0 \;\Rightarrow\; M_T u^\nu(X) \leqslant Y_0. \tag{17}$$

Etudions maintenant la convergence de (16). Vu (13), on a

$$f_j(x,y)-f_j(x,z)=\sum f_{jk}^{\alpha}(x,y,z)\,(y_k^{\alpha}-z_k^{\alpha}),$$

où

$$f_{jk}^{\alpha}(x,y,z)=f_{jk}^{\alpha}(x,y^C,z^C).$$

Donc, si $u\to v$, $u'\to v'$, on a

$$v_j-v_j'=\sum D^{-\beta(j)}f_{jk}^{\alpha}(x,D^Cu,D^Cu')\,D^{\alpha}(u-u')_k. \tag{18}$$

Puisque $|\gamma|<0$, $|\alpha-\beta(j)|\geqslant 0$ et $|\beta(j)|\geqslant 0$,

$$F_{jk}^{\alpha}(X,Y,Z)=Mf_{jk}^{\alpha}(X,X^{-|C|-1}Y,X^{-|C|-1}Z)\,X^{|\beta(j)-\alpha|}$$

est une série formelle, convergente si X, Y, Z sont assez petits. Les lemmes 1.1 et 2.1 combinés avec (18) montrent que

$$M(v-v')_j(X)<<\sum F_{jk}(X,XMu(X),XMu'(X))\,M(u-u')_k(X),$$

où

$$F_{jk}(X,Y,Z)=\sum_{\alpha}F_{jk}^{\alpha}(X,Y,Z).$$

Evidemment,

$$F_{jk}(0,0,0)=A_{jk}(0,0).$$

Donc, si T a la propriété (5) où $\mu<1$, on a

$$M_T(v-v')(X)<<(\mu+F(X,XMu(X),XMu'(X)))\,M_T(u-u')(X), \tag{19}$$

où

$$F(X,Y,Z)=\sum(F_{jk}(X,Y,Z)-A_{jk}(0,0))\,T_jT_k^{-1}$$

s'annule à l'origine. En appliquant (19) à $u=u^{\nu}$, $u'=v=u^{\nu+1}$, $v'=u^{\nu+2}$, il résulte de (17) que la suite (16) converge dans un voisinage de l'origine et, par conséquent, aussi pour $|x_1|+\ldots+|x_n|<X_0$, vers une solution de (1). La formule (19) montre aussi qu'une solution holomorphe est unique.

En remplaçant u_k par $D^{-\beta(k)}u_k$, nous voyons, vu (14) et le lemme 3.1.(c), que le système (1) a une solution unique u holomorphe á l'origine sous les hypothèses suivantes

$$B_{jk}:|\alpha|\leqslant m_j-m_k,$$

$$f_j(x,y)\text{ linéaire en }y_k^{\alpha}\text{ si }|\alpha|\geqslant m_k.$$

De plus, cette solution est limite d'une suite d'approximations successives

$$0=u^0\to u^1\to\ldots.$$

Donc, vu la partie (d) du même lemme, le théorème est démontré.

4. Un problème de Cauchy vectoriel non-linéaire

Soient $m_1, \ldots, m_N$ et $n_1, \ldots, n_N$ des entiers $\geqslant 0$, soient

$$B_{jk}: |\alpha| \leqslant m_k - n_j; \quad j, k = 1, \ldots, N \tag{1}$$

des ensembles finis d'indices et considérons le problème de Cauchy suivant

$$F_j(x, D^{B_j}u) = 0, \quad j = 1, \ldots, N; \tag{2}$$

$$u_k - w_k = O(x_1^{m_k}), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Posons $y = \{y_k^\alpha\}$, $\alpha \in B_{jk}$ et $F_{jk}^\alpha(x, y) = \partial F_j(x, y)/\partial y_k^\alpha$. Nous supposons que

$$F_j(x, y^{B_j}) \text{ est holomorphe pour } x = 0, \; y^{B_j} = D^{B_j}w(0), \tag{3}$$

que

$$F_j(x, D^{B_j}w(x)) = O(x_1^{n_j}) \tag{4}$$

et que

$$\text{dét}(F_{jk}^\alpha(0, D^{B_j}w(0))) \neq 0, \quad D^\alpha = D_1^{m_k - n_j}. \tag{5}$$

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses* (1), (3), (4) *et* (5), *le système* (2) *a une solution unique holomorphe à l'origine.*

Note. Le premier à traiter des systèmes linéaires du type (2) non-analytiques, fut Leray [6]; dans [7] on trouve une théorie d'uniformisation dans le cas analytique linéaire.

Preuve. En remplaçant u par $u + w$, on voit qu'il suffit de traiter le cas $w = 0$. — Soit u une solution de (2). Alors

$$D_1^{n_j} F_j(x, D^{B_j}u(x)) = 0, \quad u_k = O(x_1^{m_k}). \tag{6}$$

Réciproquement, soit u une solution de (6) et supposons que $F_j(x, 0) = O(x_1^{n_j})$. Alors

$$F_j(x, D^{B_j}u(x)) = F_j(x, D^{B_j}u(x)) - F_j(x, 0) + F_j(x, 0) = O(x_1^{n_j})$$

de sorte qu'on a (2). Par conséquent, il suffit de démontrer que, sous les hypothèses (1), (3) et (5), (6) a une solution unique, holomorphe à l'origine. Soit $C: |\gamma| \leqslant m_k$. Evidemment il existe $G_j(x, y^C)$, holomorphe pour $x = 0$, $y^C = 0$ tel que

$$D_1^{n_j} F_j(x, D^{B_j}v(x)) = G_j(x, D^C v(x))$$

pour toute fonction holomorphe $v(x)$; de plus, puisque $F_{jk}^\alpha = G_{jk}^\beta(x, y^C)$, si $D^\alpha = D_1^{m_k - n_j}$, $D^\beta = D_1^{m_k}$, vu (5), on a

$$\text{dét}\,(G_{jk}^\beta(0, 0)) \neq 0, \; D^\beta = D_1^{m_k}.$$

Par conséquent, il suffit de démontrer le théorème quand w et tous les n_j sont nuls. Or, dans ce cas, vu (5), (1) peut s'écrire sous la forme

$$D_1^{m_k} u_j = H_j(x, D^C u), \quad u_k = O(x_1^{r_k}),$$

où $C : |\gamma| \leqslant m_k$, $D^\gamma \neq D_1^{m_k}$ et $H_j(x, y^C)$ est holomorphe à l'origine. Une application du théorème 3.1 et sa note 2 achève la démonstration.

Bibliographie

[1]. Rosenbloom, P. C., The Majorant Method. *Proc. Symp. Pure Math. vol. IV. Partial differential equations.* AMS Providence, R.I., 1961.

[2]. Friedman, A., A new proof and generalization of the Cauchy–Kowalevski theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961), 1–20.

[3]. Hörmander, L., *Linear partial differential operators.* Berlin 1963.

[4]. Lednev, N. A., A new method for solving partial differential equations. *Mat. Sbornik*, 22 (64), (1948), 205–259.

[5]. Gyunther, N. M., On analytic solutions of the equation $s = f(x, y, z, p, q, r, t)$. *Mat. Sbornik*, 32 (1924), 26–42.

[6]. Leray, J., *Hyperbolic differential equations.* Institute for Advanced Study, Princeton 1953. (Notes polycopiées, édition épuisée.)

[7]. Gårding, L., Kotake, T., & Leray, J., Uniformisation et singularité principale du problème de Cauchy linéaire, à données holomorphes. Problème de Cauchy [I]–[V]. A paraître.

[8]. Persson, J., A boundary problem for analytic linear systems with data on intersecting hyperplanes. *Math. Scand.*, 14 (1964), 106–110.

Reçu le 5 janvier, 1965