# SIMPLEXES DE MESURES SIMPLICIALES ET CENTRALES

BY

MAROUAN AJLANI et GABRIEL MOKOBODZKI

*Universite de Paris VI, Paris, France.*

## Introduction

Soit $X$ un ensemble convexe compact dans un espace localement convexe séparé E. La propriété, pour une mesure $\mu$ de probabilité sur $X$, d'être simpliciale [2] ou centrale [2] peut s'interpréter comme une propriété de la face $F_\mu$ engendrée par $\mu$ dans le cône $\mathfrak{M}^+(X)$ des mesures positives sur $X$. Disons qu'une mesure $\nu$ positive sur $X$, $\nu \neq 0$, est simpliciale (resp. centrale) si la mesure $\|\nu\|^{-1}\cdot\nu$ l'est. Avec cette convention, lorsque la mesure $\mu$ est simpliciale (resp. centrale) tous les éléments de la face $F_\mu$ le sont aussi.

Le problème que nous avons essayé de résoudre, consiste à trouver des faces $F\subset\mathfrak{M}^+(X)$ dont tous les éléments soient des mesures simpliciales (resp. centrales), ces faces étant assez riches pour qu'on puisse y faire la représentation intégrale des points de $F$ par des mesures portées pour l'ensemble des génératrices extrémales de $F$.

Nous avons résolu ce problème, dans le cas où $X$ est métrisable, à l'aide de faces $F\subset\mathfrak{M}^+(X)$ engendrées par des chapeaux de ce cône, ainsi la représentation intégrale s'effectue sans difficulté.

La première partie de ce travail est consacrée à des théorèmes de prolongement de fonctions affines, de séparation d'ensembles convexes et de sélection de faces qui seront utilisés dans la suite.

La deuxiéme partie traite des mesures simpliciales, la troisième des mesures centrales, nous avons enfin indiqué quelques applications dans la quatrième partie.

## I. Preliminaires

**0.** Notations et conventions

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels. Sauf mention expresse, une fonction numérique sera désignée par « fonction ». Dans toute la suite lorsque nous traiterons d'un ensemble convexe compact $X$, contenu dans un espace localement convexe séparé $E$, il sera considéré comme base compacte d'un cône convexe $\tilde{X}$ déterminé par une forme linéaire continue $e$ sur $E$ : $X=\{x\in\tilde{X};\ e(x)=1\}$. On notera par $X_1$ l'enveloppe convexe de $X$ et de $\{0\}$. La notation $\mathcal{E}(B)$ pour un ensemble convexe $B$ (resp. un cône convexe $B$) désigne l'ensemble des points extrémaux de $B$ (resp. l'ensemble des génératrices extrémales de $B$).

On notera, pour toute mesure positive $\mu$ sur $X$, par $r(\mu)$ le barycentre de $\mu$, c'est à dire l'unique élément de $\tilde{X}$ vérifiant la relation $f(r(\mu))=\int f d\mu$, pour toute $f\in E'$.

Le cône $\tilde{X}$ définit une *relation d'ordre naturelle* sur $\tilde{X}$–$\tilde{X}$ notée $\leqslant$. Pour tout élément $u\in\tilde{X}$, nous noterons $[0, u]$ l'ensemble $\{v\in\tilde{X};\ 0\leqslant v\leqslant u\}$. Les fonctions positives, convexes ou affines, considérées pourront prendre la valeur $+\infty$.

Une fonction semi-continue inférieurement sera désignée par « fonction s.c.i. ». Pour un ensemble convexe compact $K\subset\tilde{X}$, $0\in K$, on notera par $A_0(K)$ l'espace des fonctions affines continues sur $K$ qui s'annulent en 0. Si $K$ est héréditaire dans $\tilde{X}$, alors $A_0(K)=A_0^+(K)-A_0^+(K)$ [2]. Pour tout ensemble $B\subset\tilde{X}$ nous noterons par $\mathbf{R}^+\cdot B$ le cône engendré par $B$.

Nous dirons qu'un ensemble $A\subset E$ est $K_\sigma$-convexe s'il est convexe et réunion d'une suite d'ensembles convexes compacts. L'enveloppe convexe de deux ensembles convexes compacts, étant compacte, on peut toujours supposer qu'un $K_\sigma$-convexe est réunion d'une suite croissante d'ensembles convexes compacts.

**1.** Les chapeaux du cône $\tilde{X}$ sont en bijection avec les fonctions affines s.c.i. positives sur $\tilde{X}$ [8] strictement positives sur $\tilde{X}\setminus\{0\}$ et valant zéro à l'origine, c'est à dire avec les fonctions s.c.i. et $>0$ sur $X$.

**2.** On notera par $F(\psi)$ la face de $X$ relative à la fonction affine s.c.i. positive $\psi$ c'est à dire l'ensemble $\{x\in X;\ \psi(x)<+\infty\}$; c'est aussi l'intersection de $X$ avec la face du cône $\tilde{X}$ engendrée par le chapeau $\{x\in\tilde{X};\ \psi(x)\leqslant 1\}$. Il sera aisé de voir que $F(\psi)$ est une face stable, c'est à dire que $F(\psi)$ porte toute mesure de probabilité $\mu$ sur $X$ dont le barycentre $r(\mu)$ appartient à $F(\psi)$.

**3.** Notons, pour toute fonction $f$ sur $X$ par $\tilde{f}$ la fonction sur $\tilde{X}$ définie au point $x\in\tilde{X}$ par $\tilde{f}(x)=e(x)f(x/e(x))$, il est clair que c'est une fonction positivement homogène sur $\tilde{X}$ et qui si $f$ est affine alors $\tilde{f}$ est affine aussi.

LEMME. *Soit $K$ un convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$, $K\subset X_1=\{x\in\tilde{X};\ e(x)\leqslant 1\}$. Pour tout $h\in E'$ et tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction affine continue positive $g$ sur $X$ telle que $\tilde{g}\geqslant h$ et $\tilde{g}(x)\leqslant \sup_K h+\varepsilon$ pour tout $x\in K$.*

*Démonstration.* Considérons la fonction $\hat{h}$ définie sur $X_1$ par $\hat{h}(x)=\sup\{h(y);\ 0\leqslant y\leqslant x\}$. Sur l'ensemble $X_1$, la fonction $\hat{h}$ est concave, s.cs., positive et vérifie $\sup_K h=\sup_K \hat{h}$. Considérons, dans $X_1\times\mathbf{R}^+$, d'une part le sous graphe de $\hat{h}$ et d'autre part l'ensemble $K\times\{\sup_K h+\varepsilon\}$. Ce sont deux convexes compacts disjoints que l'on peut séparer.

Il existe donc une fonction affine continue $l$ sur $X_1$ telle que $0\leqslant\hat{h}\leqslant l$ et $l(x)\leqslant\sup_K h+\varepsilon$ pour tout $x\in K$. La fonction $g$, restriction de $l$ à $X$ répond alors aux conditions de l'énoncé. □

La proposition suivante jouera un rôle fondamental dans toute la suite.

PROPOSITION 1. *Soit $X$ un convexe compact et $K$ un sous convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$. Pour toute fonction affine continue $f$ définie sur $K$ il existe un chapeau $C$ de $\tilde{X}$ contenant $K$ et une fonction affine continue $\bar{f}$ sur $C$ telle que $\bar{f}_K=f$.*

*Démonstration.* On peut sans restreindre la généralité supposer que $f(0)=0$ et que $K\subset X_1$; D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une suite $(f_n)\subset E'$ telle que $\sup_K|f_n-f|\leqslant 2^{-(n+2)}$. Posons $h_n=f_n-f_{n+1}$. Le lemme précédent appliqué aux fonctions $h_n$ et $(-h_n)$ permet de construire, pour tout $n\in N$, des fonctions affines continues $\geqslant 0$ sur $X$, $g_n^1$ et $g_n^2$ telles que $h_n\leqslant\tilde{g}_n^1$, $-h_n\leqslant\tilde{g}_n^2$ et

$$\sup_K \tilde{g}_n^1\leqslant 2^{-n},\ \sup_K \tilde{g}_n^2\leqslant 2^{-n}$$

Posons $g_n=g_n^1+g_n^2$ et $\psi=\Sigma_{n\geqslant 1}\, n\tilde{g}_n$. La fonction $\psi$ est affine s.c.i. positive sur $\tilde{X}$ et majorée sur $K$ par $2\Sigma_{n\geqslant 1}\, n\cdot 2^{-n}$. Pour $m,\ n\geqslant p$, on a $|f_m-f_n|\leqslant p^{-1}\psi$, de sorte que sur le chapeau $K_\psi=\{\psi\leqslant 1\}$ la suite $(f_m)$ est une suite de Cauchy pour la topologie de la convergence uniforme, la limite $\bar{f}$ de la suite $(f_m)$ vérifie les conditions de l'énoncé; on prend alors pour $C$ un homothétique de $K_\psi$ soit $2\Sigma_{n\geqslant 1}\, 2^{-n}\cdot K_\psi$. □

**4.** Définissions pour toute fonction f s.c.s sur $X$ son enveloppe concave $\hat{f}$ en posant $\hat{f}=\inf\{h\in A(X);\ h\geqslant f\}$. Cette fonction vérifie la relation (voir [6]) $\hat{f}(x)=\sup\{\int f d\mu;\ \mu\in\mathcal{M}^+(X),\ r(\mu)=x\}$. Considérons en particulier le cas où $f=\mathbf{1}_B$ fonction caractéristique d'un sous convexe compact $B$ de $X$.

LEMME. *Pour tout $x\in X$ dont la face $F_x$ dans $X$ vérifie $F_x\cap B=\varnothing$ on a $\hat{\mathbf{1}}_B(x)=0$.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une mesure $\mu\in\mathcal{M}^+(X)$ de barycentre $x$ telle que $\mu(B)>0$ et soit $\mu_1$ la restriction de $\mu$ à $B$. L'hypothèse $F_x\cap B=\varnothing$ implique que les cônes $\mathbf{R}^+\cdot F_x$ et $\mathbf{R}^+\cdot B$ ne se coupent qu' à l'origine mais si y désigne le barycentre de $\mu_1$

on voit que l'on devrait avoir $y \in \mathbf{R}^+ \cdot B$, car $B$ est convexe et $y \in (\mathbf{R}^+ \cdot F_x)$ car $\mu$ est de barycentre $x$, par conséquent on a $\mu(B)=0$, c'est à dire $\hat{1}_B(x)=0$. □

Voici la seconde proposition fondamentale sur les extensions des faces:

PROPOSITON 2. *Soient $X$ un convexe compact et $F$ et $G$ deux sous ensembles $K_\sigma$-convexes de $X$. Si $F$ est une face de $X$ disjointe de $G$, il existe une fonction affine s.c.i. positive $\psi$ sur $X$ telle que $\psi$ soit infinie en tout point de $G$ et finie sur $F$.*

*Démonstration.* Posons $G=\bigcup G_n$ et $F=\bigcup F_n$ les suites $(G_n)$ et $(F_n)$ étant deux suites croissantes de convexes compacts. Pour tout $n$, posons $g_n=\hat{1}_{G_n}$. Les fonctions $g_n$ sont concaves, s.c.s. positives et nulles sur $F$. Notons par $\mathcal{G}_n$ le sous graphe de $g_n$ dans $X\times\mathbf{R}^+$ et soit $\mathcal{F}_n=F_n\times\{2^{-n}\}$. Les ensembles $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}_n$ sont des convexes compacts disjoints qu'on peut séparer par un hyperplan fermé. Il existe donc une suite $(h_n)\subset A^+(X)$ telle que l'on ait $h_n(x)\leqslant 2^{-n}$ si $x\in F_n$ et $h_n(x)\geqslant 1$ si $x\in G_n$. La fonction $\psi=\Sigma_{n\geqslant 1}h_n$ répond aux conditions cherchées. □

**5.** La conjonction des deux propositions que nous avons énoncées permet de préciser la Proposition 1:

COROLLAIRE 3. *Sous les hypothèses de la Proposition 1 supposons de plus que la fonction $f$ est positive sur $K$, on peut alors trouver un couple $(C, \bar{f})$ tel que $\bar{f}$ soit positive sur $C$.*

*Démonstration.* A l'aide de la Proposition 1, construisons un premier couple $(C_1, \bar{f}_1)$ avec $\bar{f}_1|_K=f$, $\bar{f}_1$ continue sur le chapeau $C_1=\{\psi_1\leqslant 1\}$. L'ensemble $A=\{\bar{f}_1<0\}$ est $K_\sigma$-convexe dans $C_1$ et par conséquent l'ensemble $G=(\mathbf{R}^+\cdot K)\cap X$ est aussi $K_\sigma$-convexe. Enfin, $F=(\mathbf{R}^+\cdot K)\cap X$ est une face $K_\sigma$-convexe de $X$ disjointe de $G$, il existe donc une fonction affine s.c.i. $\psi_2$ positive sur $\tilde{X}$ finie en tout point de $F$ et infini sur $G$. La fonction $\psi_2$ est bornée sur le convexe compact $K$ engendrant $F$ [7]. En choisissant $\lambda_1, \lambda_2>0$ de telle sorte que le chapeau $C=\{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\leqslant 1\}$ contienne $K$ on obtiendra un nouveau chapeau sur lequel la fonction $\bar{f}$ est positive. □

**6.** On a pu remarquer dans l'énoncé de la Proposition 1 que $\bar{f}$ est un certain prolongement de $f$ à $C$. Existe-t-il un prolongement canonique ? Il semble bien que non si l'on rapproche le problème traité de celui des désintégrations de mesures qu'on verra dans la quatrième partie de ce travail.

Toutefois dans le cas où $X$ est métrisable, on peut apporter les compléments suivants :

COROLLAIRE 4. *On conserve les hypothèses et notations de la Proposition* 1, *supposons de plus $X$ métrisable, il existe alors deux chapeaux $C_1$ et $C_2$ de $\tilde{X}$ avec $K \subset C_2 \subset C_1$ et $C_2 \subset \overline{(\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap C_1}$ tels que, pour tout $x \in C_2$, $\lim \{f(y);\, y \to x, y \in (\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap C_1\}$ existe et définit un prolongement par continuité $\bar{f}$ de $f$ à $C_2$.*

*Démonstration.* Utilisons une première fois la Proposition 1 pour construire un couple $(C_1, \bar{f}_1)$ avec $C_1 = \{\psi_1 \leqslant 1\}$, $\psi_1$, affine s.c.i. positive sur $\tilde{X}$ et où $\bar{f}_1$ est un prolongement continu affine de $f$ à $C_1$. On supposera pour la commodité de la démonstration que $\sup_{x \in K} \psi_1(x) \leqslant 1/2$.

Posons $A = \overline{(\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap C_1}$, l'ensemble $A$ est compact et $C_1 \setminus A$ peut se mettre sous la forme $C_1 \setminus A = \bigcup_n K_n$, où les $K_n$ sont convexes compacts. En effet soit $(\omega_P)$ une base de la topologie de $C_1$, formée d'ouverts convexes (dans $C_1$) alors $C_1 \setminus A = \{U \bar{\omega}_P;\, \bar{\omega}_P \cap A = \emptyset\}$. Posons alors $H_n = (\mathbf{R}^+ \cdot K_n) \cap X$; soint $G$ l'enveloppe convexe de la famille $(H_n)$ et $F = (\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap X$. Les ensembles $F$ et $G$ sont des $K_\sigma$-convexes et, pour tout $n$, $H_n \cap F = \emptyset$, par suite $G \cap F = \emptyset$.

La Proposition 2 appliquée à $F$ et $G$ permet de construire une fonction affine s.c.i. $\varphi$ positive sur $\tilde{X}$ nulle à l'origine telle que $\varphi(x) \leqslant 1/2$ pour tout $x \in K$ et $\varphi(x) = +\infty$ pour tout $x \in G$. Posons alors $\psi_2 = \psi_1 + \varphi$, $C_2 = \{\psi_2 \leqslant 1\}$. On aura $K \subset C_2 \subset C_1$ et la restriction de $f$ à $C_1 \cap (\mathbf{R}^+ \cdot K)$ se prolonge par continuité en $f' = \bar{f}_1|_{C_2}$. □

**7.** Voici, dans le cadre de deux convexes compacts *métrisables,* un théorème de prolongement des applications affines continues :

PROPOSITION 5. *Soient $X$ et $Y$ deux convexes compacts métrisables, $K$ un convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$, $\pi$ une application affine continue de $K$ dans $\tilde{Y}$ telle que $\pi(0) = 0$. Il existe une fonction affine s.c.i. positive $\psi$ sur $\tilde{X}$ nulle en* 0, *une application affine continue $\bar{\pi}$ de $C = \{\psi \leqslant 1\}$ dans $\tilde{Y}$ tels que :*

(*a*) $K \subset C$

(*b*) $\bar{\pi}(x) = \pi(x)$ *pour tout* $x \in K$.

*Démonstration.* Nous supposerons que $\pi(K) \subset Y_1$, enveloppe convexe de 0 et $Y$. Soit alors $H = (f_n)$ une suite dense dans $A_0(Y_1)$. D'après la Proposition 1, il existe pour tout $n$, une fonction $\psi_n$ affine s.c.i. positive sur $\tilde{X}$, une fonction continue $g_n$ sur l'ensemble $\{\psi_n \leqslant 1\}$ telles que $K \subset \{\psi_n \leqslant 1\}$ et $g_n|_K = f_n \circ \pi$. Posons alors $\varphi = \Sigma_{n \leqslant 1} 2^{-(n+1)} \psi_n$ et soit $\psi$ une fonction affine s.c.i. positive sur $\tilde{X}$ telle que $K \subset \{\psi \leqslant 1\} \subset (\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap \{\varphi \leqslant 1\}$ et telle que pour toute fonction $f \in A_0(X_1)$, la fonction $(f \circ \pi)|_{\{\varphi \leqslant 1\} \cap \mathbf{R}^+ \cdot K}$ admette un prolongement $\overline{f \circ \pi}$ par continuité sur l'ensemble $\{\psi \leqslant 1\}$. On définit alors l'application $\bar{\pi}$ par $(\bar{\pi}(x), f) = f \circ \pi(x)$ pout tout $x \in \{\psi \leqslant 1\}$ et $f \in A_0(X_1)$. □

8. Le résultat suivant nous servira dans l'étude des mesures centrales :

PROPOSITION 6. *Soit $\varphi$ une fonction convexe s.c.i. positive sur un convexe compact métrisable $X$, alors l'ensemble $A$ des points $x \in X$ tels que $\varphi|_{F_x}$ ne soit pas affine, est un ensemble $K_\sigma$-convexe.*

*Démonstration.* Soit $x \in X$ tel que $\varphi$ soit affine et finie sur la face $F_x$ engendrée par $x$ dans $X$. Pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}^1(X)$ dont le support est fini et de barycentre $x$ on a $\int \varphi d\nu = \varphi(x) < +\infty$. La fonction $\varphi$ est. s.c.i. on a donc par limite faible $\int \varphi d\mu \leqslant \varphi(x)$ pour toute $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ telle que $r(\mu) = x$, mais la fonction $\varphi$ est convexe donc $\int \varphi d\mu \geqslant \varphi(x)$ soit $\int \varphi d\mu = \varphi(x)$. Le convexe $X$ étant métrisable, il existe une suite croissante $(\varphi_n)$ de fonctions convexes continues positives sur $X$ dont l'enveloppe supérieure est la fonction $\varphi$. Considérons la suite $(\hat{\varphi}_n)$ définie pour tout $n$ par $\hat{\varphi}_n = \inf \{h \in A(X);\, h \geqslant \varphi_n\}$. On sait que, pour tout $x \in X$, on a :

$$\hat{\varphi}_n(x) = \sup \left\{ \int \varphi_n d\mu;\ \mu \in \mathcal{M}^1(X), r(\mu) = x \right\} [6].$$

D'après ce qui précède, si $\varphi$ est affine et finie sur la face $F_x$ de $x$, on a $\hat{\varphi}_n(x) \leqslant \varphi(x)$ pour tout $n$.

Réciproquement, supposons que l'on ait pour un élément $y \in X$, $\hat{\varphi}_n(y) \leqslant \varphi(y) < +\infty$ pour tout $n$ et soit $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, $r(\mu) = y$; on a

$$\int \varphi d\mu = \sup_n \int \varphi_n d\mu \leqslant \sup_n \hat{\varphi}_n(y) \leqslant \varphi(y),$$

comme $\varphi$ est convexe s.c.i. on a aussi $\int \varphi d\mu = \varphi(y)$ autrement dit $\varphi$ est affine sur la face de $y$ dans $X$.

L'ensemble $A$ peut donc s'écrire $A = \bigcup_n \{\hat{\varphi}_n > \varphi\}$. Chacun des ensembles $\{\hat{\varphi}_n \geqslant \varphi + m^{-1}\}$ est convexe compact ce qui entraine ($A$ est convexe) que $A$ est $K_\sigma$-convexe. □

Voici un corollaire facile de cette proposition :

COROLLAIRE 7. *Soient $X$ un convexe compact métrisable, $\varphi$ une fonction convexe s.c.i. positivement homogène sur $\tilde{X}$ et $K \subset \tilde{X}$ un convexe compact héréditaire dans $\tilde{X}$ tel que $\varphi|_K$ soit affine continue sur $K$. Il existe alors un chapeau $K'$ de $\tilde{X}$, $K' \supset K$, tel que $\varphi|_{K'}$ soit affine continue sur $K'$.*

*Démonstration.* D'après le Corollaire 4, il existe deux chapeaux $K_1$, $K_2$ de $\tilde{X}$ tels que $K \subset K_2 \subset K_1$ et une fonction affine continue $f \geqslant 0$ sur $K_1$ telle que $f|_K = \varphi|_K$ et $K_2 \subset \overline{(\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap K_1}$. La fonction $\varphi$ étant s.c.i. on a $\varphi \leqslant f$ sur $K_2$. D'autre part, l'ensemble $B = \{\varphi < f\} \cap K_2$ est $K_\sigma$-convexe et ne rencontre pas $\mathbf{R}^+ \cdot K$, par suite il existe un chapeau $K'$ tel que $K \subset K' \subset 2K_2$ et $(\mathbf{R}^+ \cdot K') \cap B = \emptyset$ autrement dit $\varphi = f$ sur $K'$. □

## II. Support des mesures simpliciales

Ce titre correspond à la première forme de ce travail [1] où l'on se posait le problème suivant : une mesure simpliciale $\mu$ sur un convexe compact $X$ est-elle portée par l'ensemble des points extrémaux d'un simplexe $Y \subset X$, $Y$ borélien, tout barycentre d'une mesure de probabilité sur $Y$ appartent à $Y$ ?

Il nous parait intéressant de mentionner ce point de vue géométrique même si nous avons du l'abandonner pour l'abord plus analytique décrit dans l'introduction.

Les lemmes suivants joueront un rôle fondamental :

LEMME 1. *Soient $X$ et $Y$ deux convexes compacts métrisables et $\pi$ une surjection affine continue de $X$ sur $Y$. Notons par $H$ la réunion des faces $F$ de $X$ telles que $\pi|_F$ soit injective. L'ensemble $X \setminus H$ est alors $K_\sigma$-convexe.*

*Démonstration.* Considérons dans $X^3$ l'ensemble $B$ des triplets $(x, x_1, x_2)$ tels que $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et $\pi(x) = \pi(x_1) = \pi(x_2)$. Cet ensemble est convexe compact. Soit $\Delta$ la diagonale de $X \times X$ et $\gamma$ l'application $(x, x_1, x_2) \to (x_1, x_2)$. L'ensemble $\gamma^{-1}(\Delta)$ est convexe compact et $B \setminus \gamma^{-1}(\Delta)$ est réunion d'une suite $(K_n)$ de convexes compacts. Soit $P$ la projection $(x, x_1, x_2) \to x$, l'ensemble $X \setminus H$ n'est autre que $P(B \setminus \gamma^{-1}(\Delta)) = \bigcup_n P(K_n)$. On sait déjà que $X \setminus H$ est réunion d'une suite de convexes compacts et comme $X \setminus H$ est convexe, $X \setminus H$ est $K_\sigma$-convexe.

THÉORÈME 2. *Soient $X$ et $Y$ deux convexes compacts métrisables et $\pi$ une surjection affine continue de $X$ sur $Y$. Pour toute face $K_\sigma$-convexe $F$ de $X$ telle que $\pi|_F$ est injective il existe une fonction affine s.c.i. positive $\psi$ sur $X$ telle que $\psi$ soit finie sur $F$ et que $\pi$ soit injective sur la face $F(\psi) = \{\psi < +\infty\}$.*

*Démonstration.* Soit $H$ la réunion des faces de $X$ sur lesquelles la restriction de $\pi$ est injective d'après (I, Proposition 2) il existe une fonction affine s.c.i. positive sur $X$ telle que $\psi$ soit finie sur $F$ et infinie en tout point de $X \setminus H$, ceci veut dire $F(\psi) \subset H$ donc $\pi$ est injective sur $F(\psi)$.

*Exemple.* Soit $Y$ un convexe compact métrisable et soit $X = \mathcal{M}^1(Y)$, l'application $r$ faisant correspondre à toute mesure sur $Y$ son barycentre est un exemple d'une surjection affine continue de $\mathcal{M}^1(Y)$ sur $Y$. Rappelons qu'une mesure $\mu$ positive sur un convexe compact $Y$ est dite simpliciale [2] si l'espace des fonctions affines continues sur $Y$ est dense dans $L^1(\mu)$, ou, ce qui revient au même, si l'application $r$ de $\mathcal{M}^1(Y)$ dans $\tilde{Y}$ est injective sur la face $F_\mu$ engendrée par $\mu$ dans $\mathcal{M}^+(X)$ :

PROPOSITION 3. *Soit $Y$ un convexe compact métrisable et $\mu \in \mathcal{M}^1(Y)$ une mesure simpliciale sur $Y$. Il existe une fonction convexe s.c.i. $\varphi$ positive, positivement homogène sur $\tilde{Y}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

(a) *Le cône $P = \{\varphi < +\infty\}$ est un sous cône convexe réticulé de $\tilde{Y}$.*

(b) *L'ensemble $K = \{\varphi \leqslant 1\}$ est un chapeau de $P$, de sorte que $\varphi$ est affine sur $P$.*

(c) *On a $\int \varphi d\mu \leqslant 1$ et $\mu$ est portée par l'ensemble $\mathcal{E}(P)$ des génératrices extrémales de $P$.*

(d) *Toute mesure $\nu \in \mathcal{M}^+(Y)$ portée par $\mathcal{E}(P)$ et telle que $\int \varphi d\nu < +\infty$ est simpliciale.*

*Démonstration.* Notons par $H$ l'ensemble des mesures simpliciales positives sur $Y$. On sait (Lemme 1) que $\mathcal{M}^1(Y) \setminus H$ est un $K_\sigma$-convexe. D'après (I, Proposition 2) il existe une fonction affine s.c.i. positive $\psi$ sur $\mathcal{M}^+(Y)$ nulle en 0 telle que $\psi(\mu) \leqslant 1$ et $\psi(\nu) = +\infty$ pour tout $\nu \notin H$. Nous pouvons supposer que $\psi \geqslant \frac{1}{2}$ sur $\mathcal{M}^1(Y)$.

Par construction, l'application $r$ est injective sur $C = \{\psi \leqslant 1\}$ donc aussi sur $Q = \{\psi < +\infty\}$. Posons $P = r(Q)$, $K = r(C)$ et soit $\varphi$ la fonction affine sur $P$ vérifiant $\varphi(r(x)) = \psi(x)$ $\forall x \in Q$. On prolongera $\varphi$ en une fonction convexe sur $Y$ en posant $\varphi(Y) = +\infty$ $\forall y \notin P$. Cette fonction $\varphi$ est s.c.i. sur $Y$; en effet $\{\varphi \leqslant 1\} = r(\{\psi \leqslant 1\})$ est un chapeau compact de $P$.

Montrons que l'on a pour tout $\nu \in Q$, $\int \varphi d\nu = \psi(\nu)$. Les deux applications $\psi$ et $\nu \to \int \varphi d\nu$ sont affines s.c.i. sur $C = \{\psi \leqslant 1\}$ il suffit donc de vérifier l'égalité cherchée sur l'ensemble $\mathcal{E}(C)$ des points extrémaux de $C$ or $\mathcal{E}(C) \subset \mathcal{E}(\mathcal{M}^+(Y))$ puisque $C$ est un chapeau de $\mathcal{M}^+(Y)$. Par construction pour $\varepsilon_y \in \mathcal{E}(Q)$, $y \in Y$, on a $\psi(\varepsilon_y) = \varphi(r(\varepsilon_y)) = \varphi(y)$ et pour toute $\nu \in \mathcal{M}^1(Y)$ telle que $\psi(\nu) < +\infty$ (ce qui implique que $\nu$ est portée par $\mathcal{E}(Q)$) on a $\int \psi(\varepsilon_y)\ d\nu(y) = \psi(\nu) = \int \varphi(y) d\nu(y) = \varphi(r(\nu))$ puisque $\psi$ est affine s.c.i. sur $\mathcal{M}^+(Y)$. En particulier $\int \varphi d\mu = \psi(\mu) \leqslant 1$.

Considérons l'application $\tau : y \to \varepsilon_y$ de $\tilde{Y}$ dans $\mathcal{M}^+(Y)$. Pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}^1(Y)$ portée par $\mathcal{E}(P)$, la mesure $\tau(\nu)$ est portée par $\mathcal{E}(Q)$, par conséquence $\int \varphi d\nu = \int \psi d(\tau(\nu))$. □

Le corollaire qui suit est une extension d'un théorème de Carathéodory pour les convexes compacts en dimension finie :

COROLLAIRE 4. *Sous les hypothèses et les notations de la Proposition 3, si de plus $\mu$ est maximale, il existe un cône $P'$ vérifiant les conditions (a), (b), (c) et (d) de la Proposition 3* *et tel que* $\mathcal{E}(P') \subset \mathbf{R}^+ \cdot \mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(\tilde{Y})$. *En particulier l'ensemble* $U = P' \cap Y$ *est un simplexe* $K_\sigma$*-convexe (non compact) portant* $\mu$ *et tel que toute mesure* $\nu \in \mathcal{M}^1(Y)$ *portée par* $\mathcal{E}(U)$ *et vérifiant* $\int \varphi d\nu < +\infty$ *soit simpliciale et de barycentre* $r(\nu) \in U$.

*Démonstration.* Construisons d'abord $\psi$ et $\varphi$ vérifiant les conditions de la Proposition 3. Si $\mu$ est portée par $\mathcal{E}(Y)$, l'ensemble $B = P \setminus \mathcal{E}(Y)$ est de $\mu$-mesure nulle. Il existe donc une suite $(\omega_n)$ d'ouverts de $Y$ telles que $B \cap Y \subset \omega_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\mu(\omega_n) \leqslant 2^{-(n+1)}$.

Posons alors $\varphi' = \frac{1}{2}\varphi + \Sigma_n \mathbf{1}_{\omega_n}$, la fonction $\varphi'$ est affine s.c.i., on a $\int \varphi' d\mu \leqslant 1$ et les génératrices extrémales du cône $Q' = \{\varphi' < +\infty\}$ sont engendrées par les points de $\mathcal{E}(Y)$. On termine alors la démonstration comme pour la Proposition 3.

*Remarque.* La Proposition 3 dit que pour tout convexe compact métrisable $Y$ et toute mesure simpliciale $\mu \in \mathcal{M}^1(Y)$, on peut trouver un simplexe $U = P \cap Y$, non compact, tel que $\mu$ soit portée par $\mathcal{E}(U)$. Ce simplexe est évidement un $K_\sigma$. On peut se demander s'il n'est pas possible d'améliorer ce résultat par exemple en imposant à $U$ l'une des conditions suivantes :

(1) L'ensemble $U$ est compact.

(2) L'ensemble $U$ est fortement convexe; c'est à dire qu'il contient le barycentre de toute mesure $\nu \in \mathcal{M}^1(Y)$ portée par $U$.

(3) L'ensemble $U$ est tel que pour toute suite $(x_n)$, $x_n \in U$ pour tout $n$, et toute suite $(\lambda_n)$, $\lambda_n \in \mathbf{R}^+$ pour tout $n$, $\Sigma\lambda_n = 1$, on ait $\Sigma\lambda_n x_n \in U$.

Il est clair que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Voici un exemple de Choquet qui montre que l'on ne peut pas imposer à $U$ de satisfaire à la condition (3).

Notons par $\lambda_1$ (resp. $\lambda_2$) la mesure de probabilité sur $[0, 1]$ définie par sa densité $f_1(x) = (x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2})^+/(\sqrt{2} - \frac{1}{2})$ (resp. $f_2(x) = ((1-x)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2})^+/(\sqrt{2} - \frac{1}{2})$) par rapport à la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$ notée $\lambda$.

Soit $H = \{f \in C[0,1];\ \int f d\lambda_1 = \int f g \lambda_2\}$. Notons par $K$ l'ensemble des formes linéaires positives de norme égale à 1 sur $H$, alors l'ensemble $K$ est faiblement compact, métrisable, et l'ensemble $\mathcal{E}(K)$ de ses points extrémaux est en bijection avec $[0,1]$ par l'application $j : x \to \varepsilon_x$. Notons par $\tilde{\lambda}$ l'élément de $K$ associé à la mesure de Lebesgue $\lambda$ de $[0,1]$, alors $j(\lambda)$ est la seule mesure sur $\mathcal{E}(K)$ représentant $\tilde{\lambda}$, donc $j(\lambda)$ est simpliciale et même centrale. Tout ensemble portant $j(\lambda)$ porte aussi $j(\lambda_1)$ et $j(\lambda_2)$ or ces deux mesures maximales sur $K$ ont, par définition de $H$, le même barycentre dans $K$. Supposons qu'il existe un simplexe géométrique $K'$ satisfaisant à la condition (3) portant $j(\lambda)$, de sorte que le cône $\mathbf{R}^+ \cdot K'$ est complétement-réticulé pour l'ordre induit par $A'_+(K)$. Comme le cône $\mathbf{R}^+ \cdot K'$ contient les deux suites $(r(j(\lambda_1 \wedge n\lambda)))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r(j(\lambda_2 \wedge n\lambda)))_{n\in\mathbf{N}}$ il contiendrait leur borne supérieure commune $\tilde{\lambda}$, or ceci est impossible car, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les élements de rang $n$ de ces suites sont étrangers.

Remarquons teoutefois que pour tout $\varepsilon > 0$ la mesure $j(\lambda)$ est portée à $\varepsilon$ près par l'ensemble $j([\frac{1}{2}\varepsilon, 1-\frac{1}{2}\varepsilon])$ dont l'enveloppe convexe fermée dans $K$ est un simplexe de Bauer.

## III. Faces de mesures centrales

Dans tout ce qui suit on ne s'occupera que de convexes compacts métrisables contenus dans un espace localement convexe séparé $E$.

Rappelons quelques définitions et résultats : [2]

(a) Soit $L$ un espace vectoriel ordonné par un cône positif $L^+$ tel que $L = L^+ - L^+$, la relation d'ordre est notée $\leqslant$. On appelle *centre de L*, noté $Z(L)$ l'espace des applications linéaires $T$ de $L$ dans lui même pour chacune desquelles il existe un $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tel que $-\lambda u \leqslant T_u \leqslant \lambda u$ pour tout $u \in L^+$, l'espace $Z(L)$ est donc une algèbre ordonnée avec unité.

(b) Si $L$ possède une unité d'orde $u$, l'application $\gamma : T \to Tu$ est un isomorphisme d'espace vectoriel ordonné de $Z(L)$ sur $\gamma(Z(L))$. On désigne parfois dans la littérature $\gamma(Z(L))$ comme étant le centre de $L$, mais nous n'adopterons pas cette convention.

(c) Soit $X$ un convexe compact, base compacte d'un cône $\tilde{X}$ tel que $X = \{x \in \tilde{X}, e(x) = 1\}$ où e est une forme linéaire continue sur $\tilde{X} - \tilde{X}$. Pour toute $u \in X$, nous noterons par $F_u$ la plus petite face de $X$ contenant $u$ et par $\tilde{F}_u = \mathbf{R}^+ \cdot F_u = \mathbf{R}^+ \cdot [0,u]$. L'espace vectoriel $V_u = \tilde{F}_u - \tilde{F}_u$ muni de la norme jauge de $[-u,u]$ est un espace de Banach. Si $Z(V_u)$ désigne le centre de $V_u$ ordonné par $\tilde{F}_u$ nous poserons $\tilde{Z}_u = Z^+(V_u) \cdot u$; c'est un sous-cône convexe complétement réticulé de $\tilde{F}_u$ appelé parfois centre local de $u$ et $Z(V_u)$ est complétement réticulé.

(d) Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$ de barycentre $r(\mu) = u$ est dite *sous-centrale* [10] si pour toute décomposition de $\mu$ en $\mu_1 + \mu_2$ avec inf $(\mu_1, \mu_2) = 0$ la face $F_{r(\mu)}$ est somme directe ordonnée des faces $F_{r(\mu_1)}$ et $F_{r(\mu_2)}$. L'application $\nu \to r(\nu)$ restreinte à $L^\infty(\mu)$ est alors un isomorphisme d'espace ordonné sur un sous-espace complétement réticulé de $Z(V_u) \cdot u$. Une mesure sous-centrale est simpliciale.

(e) Soit toujours $X$ convexe compact, $u \in X$; soit $H$ un sous espace réticulé de $Z(V_u)$ contenat l'identité. A toute décomposition $D$ de l'identité $I = T_1 + \ldots + T_n$ $T_i \geqslant 0$ $T_i \in H$ on peut faire correspondre la mesure $\nu_D \in \mathcal{M}^1(X)$ :

$$\nu_D = \sum_{i=1}^{h} e(T_i u) \cdot \varepsilon_{\alpha(i)}, \quad \alpha(i) = [e(T_i u)^{-1}] \cdot T_i u$$

Si $D$ est une décomposition plus fine de $D'$, on a $\nu'_D > \nu_D$ au sens de l'ordre de Choquet et toutes les mesures $\nu_D$ sont de barycentre $u$. La mesure $\nu_H = \lim_{\mathfrak{F}} \nu_D$ suivant le filtre des décompositions de l'identité est une mesure sous centrale dite associée à $H$. En particulier, si $H$ est complétement réticulé, l'application $\nu \to r(\nu)$ de $L^\infty(\nu_H)$ dans $Z(V_u)\cdot u$ est une bijection de $L^\infty(\nu_H)$ sur $H\cdot u$; l'espace $L^\infty(\nu)$ étant considéré comme plongé dans $L^1(\nu)$ (les mesures absolument continues par rapport à $\mu$).

(f) Si $H = Z(V_u)$, la mesure sous centrale $\nu_H$ associée est appellée la mesure centrale *associée à $u$* [10] ou de barycentre $u$. Les points pour lesquels la mesure centrale associée à u est égale à $\varepsilon_u$ sont appelés *points primaires*. Si $X$ est métrisable l'ensemble $O$ des points primaires a un complément analytique et toute mesure centrale est portée par l'ensemble $P$ ([5] et [10]). Ce chapitre est divisé en deux parties, la première est consacrée à l'étude et la définition de deux ensembles de mesures dont l'intersection est l'ensemble des mesures sous-centrales.

## A. Mesures de type surjectif et de type injectif

Soit $X$ un ensemble convexe compact, pour tout élément $t \in \tilde{X}$, on appellera « *décomposition de t* » une famille finie $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\tilde{X}$ tels que $\Sigma_{i \leqslant n} t_i = t$.

*Définition* 1.

(1) Soient $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, $t \in \tilde{X}$; On dira que *$t$ est dominé par $\mu$*, et l'on notera $t \dashv \mu$, si pour toute décomposition $(\mu_i)_{i \leqslant n}$ de $\mu$, il existe une décomposition $(t_i)_{i \leqslant n}$ de $t$ telle que $t_i \leqslant r(\mu_i)$ pour tout $i$.

(2) On dira qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ est *de type injectif* si pour tout $t \in X$, $t \dashv \mu$, et toute décomposition $(\mu_1, \mu_2)$ de $\mu$, telle que $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$ il existe une et une seule décomposition $(t_1, t_2)$ de $t$ telle que $t_1 \dashv \mu_1$ et $t_2 \dashv \mu_2$. Il revient au même de dire que pour toute décomposition de $\mu$ en $(\mu_1, \mu_2)$ avec $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$; l'application $(x, y) \to x + y$ de $[0, r(\mu_1)] \times [0, r(\mu_2)]$ dans $[0, r(\mu_1) + r(\mu_2)]$ est injective.

Tomita [9] a introduit la notion de mesure orthogonale sur l'espace des états $S$ d'une $C^*$-algèbre $B$ : une mesure $\mu$ positive sur $S$ est ***dite orthogonale*** si pour toute décomposition $(\mu_1, \mu_2)$ de $\mu$ telle que $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$ on a $\inf(r(\mu_1), r(\mu_2)) = 0$. Il est aisé de voir que les notions de mesure de type injectif et de mesure orthogonale sont les mêmes sur tout convexe compact qui est l'espace des états d'une $C^*$-algèbre. Il n'en est pas moins aisé de voir que sur un convexe compact quelconque toute mesure de type injectif est une mesure orthogonale et qu'il existe des mesures orthogonales (sur le carré) qui ne sont pas de type injectif

(3) On dira qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ est de *type surjectif* si pour tout $t \leqslant r(\mu)$ on a $t \dashv \mu$.
Il résulte immédiatement de ces définitions que pour qu'une mesure $\mu$ soit sous-centrale il faut et suffit qu'elle soit à la fois de type surjectif et de type injectif. On remarquera que si $t \dashv \mu$ alors $(r(\mu)-t) \dashv \mu$. Rappelons qu'on définit l'ordre de balayage (Choquet) sur $\mathcal{M}^+(X)$ par $(\mu \prec \nu) \Leftrightarrow (\int f d\mu \leqslant \int f d\nu,\ \forall f$ convexe continue sur $X)$. On sait que si $\mu \prec \nu$, alors pour toute décomposition $(\mu_i)_{i\leqslant n}$ de $\mu$ il existe une décomposition $(\nu_i)_{i\leqslant n}$ de $\nu$ telle que $\nu_i \succ \mu_i$ pour tout $i$.

PROPOSITION 2. *Soient $t \in X$, $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$t$ est dominé par $\mu$*

(b) *Il existe $\theta, \nu \in \mathcal{M}^+(X)$ tels que $\nu \succ \mu$, $\theta \leqslant \nu$ et $r(\theta)=t$.*

*Démonstration.* L'implication $b \Rightarrow a$ est évidente, compte tenu du rappel cidessus. Montrons que $a \Rightarrow b$ : Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions de $\mu$; on supposera que $\mu(1)=1$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est ordonné filtrant décroissant pour la relation d'orde "$s'$ est une décomposition plus fine que $s$" qu'on notera $s' < s$.

Soient alors $t, t' \in \tilde{X}$, $t, t'$ dominés par $\mu$, $t+t'=r(\mu)$. On se donne une application $s \to \varrho(s)$ de $\mathcal{D}$ dans l'ensemble des décompositions de $t$ telle que si $s=(\mu_i)_{i\leqslant n}$ et $\varrho(s)=(t_i)_{i\leqslant m}$ on a $m=n$ et $t_i \leqslant r(\mu_i)$. On définit $\varrho'(s)$ en posant $t_i'=r(\mu_i)-t_i$ et $\varrho'(s)=(t_i')$. Posons alors, pour tout $s \in \mathcal{D}$, $\nu_s=\Sigma_{t_i\neq 0}\, e(t_i)\varepsilon_{\alpha(i)}$, $\alpha(i)=e(t_i)^{-1}\cdot t_i$, $e$ étant la forme linéaire définissant la base $X$ du cône $\tilde{X}$ et où $(t_i)=\varrho(s)$. On définit de même $\nu_s'$ de sorte que $r(\nu_s)=t$ $r(\nu_s')=t'$ et $\sigma_s=\nu_s+\nu_s' \in \mathcal{M}^1(X)$.

Soit maintenat $\mathcal{U}$ un ultrafilte sur $\mathcal{D}$ plus fin que le filtre des sections de $\mathcal{D}$ et soit $\theta=\lim_{\mathcal{U}} \nu_s$, $\theta'=\lim_{\mathcal{U}} \nu_s'$ et $\nu=\lim_{\mathcal{U}} \sigma_s$. Par construction on a $\nu \succ \mu$, $\theta+\theta'=\nu$ et $r(\theta)=r(\nu_s)=t$, $r(\theta')=r(\nu_s')=t'$ et la proposition est démontrée. □

COROLLAIRE 3. *Soient $t \in \tilde{X}$, $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, $t$ dominé par $\mu$. Pour toute décomposition $(\mu_i)_{i\leqslant n}$ de $\mu$, il existe une décomposition $(t_i)_{i\leqslant n}$ de $t$ telle que pour tout $i \leqslant n$, $t_i$ soit dominé par $\mu_i$.*

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, il existe $\theta, \nu \in \mathcal{M}^+(X)$ telles que $\theta \leqslant \nu$, $\nu \succ \mu$, $r(\theta)=t$. Comme $\nu \succ \mu$ il existe une décomposition $(\nu_\cdot)_{i\leqslant n}$ de $\nu$ avec $\nu_i \succ \mu_i$ pour $i \leqslant n$. D'autre part $\theta \leqslant \Sigma_{i\leqslant n}\nu_i$; il existe donc une décomposition $(\theta_i)_{i\leqslant n}$ de $\theta$ telle que $\theta_i \leqslant \nu_i$. Posant alors $t_i=r(\theta_i)$ on obtient la décomposition cherchée pour $t$.

COROLLAIRE 4. *L'ensemble* $\Gamma$ *des couples* $(t, \mu) \in \tilde{X} \times \mathcal{M}^1(X)$ *tels que t soit dominé par* $\mu$ *est convexe compact. L'ensemble* $\mathcal{E}(\Gamma)$ *des points extrémaux de* $\Gamma$ *est contenu dans l'ensemble :*

$$D = \{(t, \varepsilon_x);\ (t, \varepsilon_x) \in \Gamma,\ x \in X\}$$

*Démonstration.* Considérons l'ensemble $V$ des triplets $(\theta, \nu, \mu) \in (\mathcal{M}^+(X))^3$ tels que $\theta \leqslant \nu$, $\nu \succ \mu$ et $\mu(1) = 1$, et soit $J$ l'application continue $(\theta, \nu, \mu) \to (r(\theta), \mu)$, on a alors $\Gamma = J(V)$.

La deuxième partie du corollaire résulte directement du corollaire précédent. Ainsi tout point de $\Gamma$ est barycentre d'une mesure $T \geqslant 0$ portée par $D$.

*Dans ce qui suit nous conserverons les notations du corollaire ci-dessus.* On désigne par $p$ l'application : $(t, \varepsilon_x) \to x$ de $D$ dans $X$. Remarquons que pour tout $T \in \mathcal{M}^1(D)$, avec $r(T) = (t, \mu)$ on a $p(T) = \mu$, où $p(T)$ est l'image de $T$ par $p$.

PROPOSITION 5. *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la mesure* $\mu$ *est de type injectif.*

(b) *Pour toutes mesures* $T, T' \in \mathcal{M}^+(D)$ *telles que* $p(T) = p(T') = \mu$, $r(T) = r(T')$ *et toute fonction* $f$ *continue positive sur* $X$ *on a* $r((f \circ p) \cdot T) = r((f \circ p) \cdot T')$.

(c) *Même énoncé que* (b) *ou l'on a remplacé « f continue » par « f borélienne de X dans* $\{0, 1\}$ ».

*Démonstration.* Les conditions (b) et (c) sont trivialement équivalentes. Montrons (a) $\Rightarrow$ (c) : Soit $f = 1_A$, $A$ borélien de $X$, posons $(t_1, \mu_1) = r((f \circ p) \cdot T)$, $(t_2, \mu_2) = r((1 - f) \circ p, T)$, $(t_1', \mu_1') = r((f \circ p), T')$ et $(t_2', \mu_2') = r((1 - f) \circ p, T')$. Comme $p(T) = p(T')$ on a $\mu_1 = \mu_1'$, $\mu_2 = \mu_2'$ et $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$. D'autre part on a $t_1, t_1' \dashv \mu_1$, $t_2, t_2' \dashv \mu_2$, par suite $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*). Soit $(\mu_1, \mu_2)$ une décomposition de $\mu$ telle que $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$ et soient $(t_1, t_2)$, $(t_1', t_2')$ deux décompositions de $t$ telles que $t_1, t_1' \dashv \mu_1$ et $t_2, t_2' \dashv \mu_2$. Il existe des mesures $T_1, T_2, T_1', T_2'$ appartenant à $\mathcal{M}^+(D)$ de barycentres respectifs $(t_1, \mu_1)$, $(t_2, \mu_2)$, $(t_1', \mu_1)$ et $(t_2', \mu_2)$. Posons $T = T_1 + T_2$ et $T' = T_1' + T_2'$. Il existe une fonction borélienne positive $f$, à valeurs 0 ou 1, telle que $\mu_1 = f \cdot \mu$. Comme on a aussi $p(T_1) = p(T_1') = \mu_1$, $T_1 = (f \circ p) \cdot T$, $T_1' = (f \circ p) \cdot T'$ de sorte que si la condition (c) est vérifiée on doit avoir $t_1' = t_1$ et $t_2' = t_2$. $\square$

PROPOSITION 6. *Pour tout convexe compact métrisable* $X$, *l'ensemble* $B$ *des éléments de* $\mathcal{M}^1(X)$ *qui ne sont pas de type injectif est* $K_\sigma$*-convexe.*

*Démonstration.* Conservons les notations $\Gamma$, $D$ du Corollaire 4. On remarque d'abord que si $\mu$ est de type injectif et si $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$ alors $\mu_1$ et $\mu_2$ sont aussi de type injectif, donc l'ensemble $B$ est convexe. Considérons l'ensemble $H$ des systèmes $(T, T', t, \mu)$ où

$T, T' \in \mathcal{M}^1(D)$, $(t, \mu) \in \Gamma$ tels que $r(T) = r(T') = (t, \mu)$ et soit $\varrho$ l'application $(T, T', t, \mu) \to \mu$. L'ensemble $H$ est convexe compact, $\varrho$ est affine continue et l'ensemble :

$$U = \{(T, T', t, \mu) \in H;\ \exists f \in \mathcal{C}^+(X),\ r((f \circ p) \cdot T) \neq r((f \circ p)) \cdot T'\}$$

est ouvert dans $H$ donc réunion d'une suite $(H_n)$ d'ensembles convexes compacts de $H$. D'après le lemme précédent, on a $B = \varrho(U)$ et $B$ est convexe; c'est donc un ensemble $K_\sigma$-convexe. □

La proposition qui suit peut se démontrer de plusieurs façons; nous avons choisi une démonstration qui a l'avantage de fournir des chapeaux de $\tilde{X}$ sur lesquels l'application multivoque $t \to [0,t]$ est affine et continue.

Proposition 7. *Pour tout convexe compact métrisable, l'ensemble. $A$ des éléments de $\mathcal{M}^1(X)$ qui ne sont pas de type surjectif est $K_\sigma$-convexe.*

*Démonstration.* Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ de type surjectif, c'est à dire pour toute décomposition $(\mu_i)_{i \leqslant n}$ de $\mu$ on a la propriété

$$(\mathrm{S}) : [0, r(\mu)] = [0, r(\mu_1)] + \ldots + [0, r(\mu_i)] + \ldots + [0, r(\mu_n)]$$

(où l'on note, pour $H, K \subset \tilde{X}$, $H + K = \{x + y;\ x \in H, y \in K\}$.

Considérons une suite $(f_n)$ dense dans $\mathcal{C}(X)$, soit $(\tilde{f}_n)$ l'ensemble des extensions des éléments de la famille $(f_n)$ à $\mathcal{M}^+(X)$.

La condition $(S)$ équivaut à dire que pour tout $n$ la fonction $g_n$ définie sur $\mathcal{M}^+(X)$ par $g_n(\mu) = \operatorname{Sup} \{\tilde{f}(y);\ 0 \leqslant y \leqslant r(\mu)\}$ est affine sur $[0, \mu]$, ou encore affine sur la face engendrée par $\mu$ dans $\mathcal{M}^1(X)$, si $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

Chaque fonction $g_n$ est concave s.c.s., il en est de même de

$$g = \sum \frac{1}{2^n} \left( \sup_{\mathcal{M}^1(X)} (g_n) \right)^{-1} \cdot g_n \cdot$$

Si $g$ est affine sur $[0, \mu]$ alors toutes les fonctions $g_n$ sont affines sur $[0, \mu]$. L'ensemble $A$ est donc identique à l'ensemble des points $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ tels que $g$ ne soit pas affine sur la face de $\mu$. La fonction $(1 - g)$ est convexe s.c.i. sur $\mathcal{M}^1(X)$. D'après (I, Proposition 6) l'ensemble $A$ est $K_\sigma$-convexe. □

**B. Mesures centrales et sous-centrales**

Nous pouvons, à l'aide des propositions 6 et 7 et de (I, Corollaire 7) énoncer :

THÉORÈME 8. *Pour tout ensemble convexe compact $X$ et toute mesure sous centrale $\mu$ sur $X$ de masse totale 1, il existe une fonction s.c.i. $\varphi$ positive sur $X$ telle que $\int \varphi d\mu < +\infty$ et telle que toute mesure $\nu$ positive vérifiant $\int \varphi d\nu < +\infty$ soit sous-centrale.*

*Démonstration.* On conserve les notations $B$, $A$ des propositions 6 et 7 ainsi que la fonction $g$ utilisée dans la démonstration précédente. Si $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ est de type surjectif, $g$ est affine positive et continue sur $[0, \mu]$; en effet si $\nu \in [0, \mu]$, on a $0 \leqslant g(\nu) \leqslant \nu(1)$. La forme linéaire $e$ continue sur $\tilde{X} - \tilde{X}$ valant 1 sur $X$, la fonction $h = e - g$ est convexe, s.c.i., positive et continue sur $[0, \mu]$. D'autre part $(\mathbf{R}^+ \cdot [0, \mu]) \cap (A \cup B) = \emptyset$. D'après (I, Corollaire 7), il existe une fonction affine $\psi$ s.c.i. positive sur $\mathcal{M}^+(X)$, nulle en 0 telle que :

(a) $\psi(\mu) < +\infty$ et $h$ est continue sur le chapeau $K = \{\psi \leqslant 1\}$

(b) $\psi(\nu) = +\infty$ pour tout $\nu \in A \cup B$.

On remarquera que $A \cup B$ est le complémentaire dans $\mathcal{M}^1(X)$ des mesures sous-centrales donc $A \cup B$ est convexe et aussi $K_\sigma$-convexe.

La démonstration s'achève en remarquant que pour toute fonction $\psi$ affine s.c.i. positive sur $\mathcal{M}^1(X)$, il existe une fonction numérique $\varphi$ s.c.i. sur $X$ telle que $\int \varphi d\mu = \psi(\mu)$ pour toute $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

COROLLAIRE 9. *Supposons toujours $X$ convexe compact métrisable. Soit $Y$ un espace compact, $\nu \in \mathcal{M}^+(Y)$ et soit $y \mapsto \mu_y$ une application mesurable de $Y$ dans $\mathcal{M}^+(X)$. Posons $\mu = \int \mu_y d\nu(y)$.*

(a) *Si $\mu$ est sous-centrale, alors pour $\nu$-presque tout $y$, $\mu_y$ est sous-centrale.*

(b) *Si $\mu$ est centrale alors pour $\nu$-presque tout $y$, $\mu_y$ est centrale.*

*Démonstration*

(a) Soit $\varphi$ une fonction s.c.i. positive sur $X$ vérifiant les propriétés énoncées dans le Théorème 8. On a $\int \varphi d\mu = \int (\int \varphi d\mu_y) d\nu(y)$ par suite $\int \varphi d\mu_y$ est finie $\nu$-presque partout, donc $\mu_y$ est sous-centrale pour $\nu$-presque tout $y$.

(b) On sait que l'ensemble des points primaires a un complémentaire analytique [5] dans $X$ et que toute mesure centrale est portée par l'ensemble des points primaires [10]. Réciproquement, soit $\nu$ une mesure sous-centrale; si $\nu \in \mathcal{M}^1(X)$ est portée par l'ensemble des points primaires $P$ alors $\nu$ est centrale. En effet, on peut supposer que $\mu$ est une mesure centrale plus diffuse que $\nu$. D'après un résultat de Cartier–Fell–Meyer [8] il existe une application $\nu$-mesurable $x \mapsto \mu_x$ de $X$ dans $\mathcal{M}^1(X)$ telle que :

(1) $\mu_x$ soit de barycentre $x$ pour tout $x \in X$

(2) $\mu = \int \mu_x d\nu(x)$

D'après la première du corollaire; $\mu_x$ est sous-centrale pour $\nu$-presque tout $x$, donc si $x$ est primaire $\mu_x = \varepsilon_x$. Par hypothèse $\mu$ est portée par l'ensemble $P$ des points primaires, par suite $\mu = \nu$.

Reprenons la fonction $\varphi$ du début. On a, si $\mu$ est centrale, $\int_P \varphi d\mu = \int (\int_P \varphi d\mu_y) d\nu(y)$, donc pour $\nu$-presque tout $y$, $\mu_y$ est une mesure sous-centrale portée par $P$, donc centrale. □

THÉOREME 10. *Pour tout ensemble convexe compact métrisable $X$ et toute mesure centrale $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, il existe une fonction numérique $\psi$ s.c.i. positive sur $X$ telle que $\int \psi d\mu < +\infty$ et telle que toute mesure $\nu$ positive sur $X$ pour laquelle $\int \psi d\nu < +\infty$ soit centrale.*

*Démonstration.* Soit $\varphi$ une fonction s.c.i. positive sur $X$ vérifiant les conditions du Théorème 8. L'ensemble $U = \{\varphi < +\infty\} \setminus P$ est $\mu$-négligeable. Il existe donc une suite $(\omega_n)$ d'ouverts de $X$ telle que $U \subset \omega_n$ pour tout $n$ et $\mu(\omega_n) \leqslant 2^{-n}$. La fonction $\psi = \varphi + \Sigma_n 2^{-n} \cdot \mathbf{1}_{\omega_n}$ répond aux conditions cherchées. □

Voici un autre moyen de fabriquer des chapeaux de $\mathcal{M}^+(X)$ dont les élements soient des mesures sous-centrales :

Soit $K$ un sous convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$. Supposons qu'il existe une famille $(T(f))_{f \in \mathcal{C}^+(X)}$ indexée par $\mathcal{C}^+(X)$, d'applications affines de $\mathbf{R}^+ \cdot K$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) l'application $(f, v) \to T(f) \cdot v$ est séparément affine et positivement homogène sur $\mathcal{C}^+(X) \times (\mathbf{R}^+ \cdot K)$.

(b) Pour tout $0 \leqslant f \leqslant 1$ et $v \in \mathbf{R}^+ \cdot K$, on a, $0 \leqslant T(f) \cdot v \leqslant v$.

(c) Pour toutes $f, f' \in \mathcal{C}^+(K)$, $[T(f) \circ T(f')] \cdot v = T(ff') \cdot v$ et $T(1) \cdot v = v$ pour tout $v \in K$.

(d) Pour tout $f \in \mathcal{C}^+(K)$ l'application $v \to T(f) \cdot v$ est continue sur $K$.

Il revient au même de se donner un homéomorphisme $T^+$ de $\mathcal{C}(X)$ dans le centre de $A_0(K)$ tel que, pour tout $g \in A_0(K)$, $f \in \mathcal{C}^+(K)$, $v \in K$, on ait

$$\langle T^*(f) \cdot g, v \rangle = \langle g, T(f) \cdot v \rangle,$$

$T^*(1)$ étant l'identité sur $A_0(K)$.

PROPOSITION 11. *Soient $K$ un chapeau de $\tilde{X}$ et $(T(f))_{f\in \mathcal{C}^+(X)}$ une famille d'opérateurs vérifiant les conditions :* (a), (b), (c) *et* (d) *ci-dessus, notons par $C\subset \mathcal{M}^+(X)$ l'ensemble des mesures qui vérifient les conditions :*

(a) *Pour tout $\mu\in C$, $r(\mu)\in K$.*

(b) *Pour toute $f\in \mathcal{C}^+(X)$, $T(f)\cdot r(\mu)=r(f\cdot\mu)$.*

*Alors l'ensemble $C$ est un chapeau de $\mathcal{M}^+(X)$ dont tous les éléments sont des mesures sous-centrales et l'application $\mu\to r(\mu)$ est injective sur $C$.*

*Démonstration.* Soit $\psi$ une fonction affine s.c.i. positive sur $\tilde{X}$, nulle en 0, telle que $K=\{\psi\leqslant 1\}$.

Si $K$ est compact, cela implique que $\psi$ a une borne inférieure strictement positive sur $X$.

Pour toute mesure $\mu\in \mathcal{M}^+(X)$ les relations $(\int\psi d\mu\leqslant 1)$ et $(r(\mu)\in K)$ sont équivalentes et l'ensemble convexe $C'=\{\mu\in \mathcal{M}^+(X); \int\psi d\mu\leqslant 1\}$ est compact.

Les deux applications, définies sur $C'$, $\mu\mapsto r(f\cdot\mu)$ et $\mu\mapsto T(f)\cdot r(\mu)$ sont affines et continues, on en déduit que $C$ est convexe compact.

Soient maintenant $f'\in \mathcal{C}^+(X), \mu\in C$ tels que $\int\psi\cdot f'd\mu\leqslant 1$ alors $\nu=(f'\cdot\mu)\in C$. En effet, on a $r(\nu)\in K$ et pour $f\in \mathcal{C}^+(X)$.

$T(f)\cdot r(\nu)=T(f)\cdot r(f'\mu)=T(f)\circ T(f')\cdot r(\mu)=T(ff')\cdot r(\mu)=r(ff'\cdot\mu)$ d'où $T(f)\cdot r(\nu)=r(f\cdot\nu)$.

L'ensemble $C$ étant convexe compact, pour tout $\mu\in C$ et $f'\in L^1(\mu)$, tels que $\int\psi f'd\mu\leqslant 1$, on aura encore $(f'\cdot\mu)=\nu\in H$, ce qui montre que $C$ est un chapeau de $\mathcal{M}^+(X)$.

Il reste à montrer que toute $\mu\in C$ est une mesure sous-centrale. Notons toujours par $e$ la forme linéaire continue définissant la base $X$ de $\tilde{X}$. On remarque que, pour tout $f\in \mathcal{C}^+(X)$, $e(T(f)\cdot r(\mu)=e(r(f\cdot\mu))=\int fd\mu$, ainsi pour tous $f\in L^\infty_+(\mu)\cap L^1_+(\mu)$ et $\omega\in[0, r(\mu)]$, on peut définir $T(f)\cdot\omega$ par $T(f)\cdot\omega=\lim T(f_n)\cdot\omega$; $f_n\in \mathcal{C}^+(X)$, $\|f_n-f\|_{L^1(\mu)}\to 0$ et que pour tous $f, f'\in L^\infty_+(\mu)$, on a encore $T(f)\circ T(f')=T(ff')$. Il est clair que $\mu$ est de type surjectif; soit alors $(\mu_1, \mu_2)$ une décomposition de $\mu$ telle que $\inf(\mu_1, \mu_2)=0$, et soient $t\in[0, r(\mu)]$, et $(t_1, t_2)$ une décomposition de $t$ telle que $t_1\dashv\mu_1$ et $t_2\dashv\mu_2$.

Soit $f$ une fonction borélienne sur $X$ à valeurs 0 ou 1 telle que $\mu_1=f\cdot\mu$. Soit $v=r(\mu)$. Posons $v_1=T(f)\cdot v=r(\mu_1)$, $v_2=T(1-f)\cdot v=r(\mu_2)$. Par construction on a $T(f)\cdot v_2=0$, $T(1-f)\cdot v_1=0$, comme $0\leqslant t_1\leqslant v_1$, $0\leqslant t_2\leqslant v_2$ on a $T(f)\cdot t_2=0$ et $T(1-f)\cdot t_1=0$ par suite $t_1=T(f)\cdot t$ et $t_2=T(1-f)\cdot t$, ce qui montre que $\mu$ est de type injectif. Enfin l'injectivité de $r$ sur $C$ tient au fait que toute mesure sous-centrale est simpliciale. □

L'intérêt de la proposition ci-dessus vient de ce qu'il est possible de définir des prolongements d'un homorphisme de $\mathcal{C}(X)$ dans le centre de $A_0(K)$, où $K$ est un convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$, en un homorphisme de $\mathcal{C}(X)$ dans le centre de $A_0(K')$ où $K'$ est un chapeau de $\tilde{X}$ contenant $K$; plus précisément :

PROPOSITION 12. *Soient $Y$ un espace compact métrisable et $K$ un convexe compact héréditaire de $\tilde{X}$, soit $R^*$ un homomorphisme de $\mathcal{C}(Y)$ dans le centre de $A_0(K)$ tel que $R^*(1)$ soit l'identité sur $A_0(K)$. Il existe un chapeau $K'$ de $\tilde{X}$, contenant $K$, il existe un homomorphisme $T^*$ de $\mathcal{C}(Y)$ dans le centre de $A_0(K')$ tel que $T^*(1)$ soit l'identité sur $A_0(K')$ et tel que pour tous $f \in \mathcal{C}(Y)$, $g \in A_0(K')$ $(T^*(f)\cdot g)_{|K} = R^*(f)\cdot(g_{|K})$.*

*Démonstration.* Le convexe compact $X$ étant métrisable, le sous-espace vectoriel fermé $H$ de $A_0(K)$ engendré par les fonctions de la forme $R^*(f)\cdot(g_{|K})$, où $f \in \mathcal{C}(Y)$ et $g \in A_0(X_1)$ est a base démonbrable.

D'après (I, Corollaire 4) il existe deux chapeaux $K_1$ et $K_2$ de $\tilde{X}$, une application linéaire positive $\varrho$ de $H$ dans $A_0(K_1)$ telle que pour tout $h \in H$, $\varrho(h)_{|K} = h$ et $K_2 \subset \overline{(\mathbf{R}^+\cdot K)\cap K_1}$. Par construction $A_0(X_1)_{|K_1} \subset H' = \varrho(H)$. Pour tous $f \in \mathcal{C}(Y)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, on peut définir une application $U(f)$ affine continue de $K_1$ dans $K_1$ par la relation :

$$\langle l, U(f)\cdot v\rangle = \langle \varrho(R^*(f)\cdot l_{|K}), v\rangle,\ l \in A_0(K) \quad \text{et } v \in K_1.$$

Soient $f, f' \in \mathcal{C}^+(Y)$, $f, f' \leqslant 1$, les deux applications définies sur $K_1 v \to U(ff')\cdot v$ et $v \to U(f)\cdot[U(f')\cdot v]$ sont continues et égales sur $(\mathbf{R}^+\cdot K)\cap K_1$, donc elles sont égales sur $K_2 \subset \overline{(\mathbf{R}^+\cdot K)\cap K_1}$. L'opérateur $T^*(f)$ de $A_0(K_2)$ dans $A_0(K_2)$, défini en tout élément $g \in A_0(K_2)$ par $\langle T^*(f)\cdot g, v\rangle = \langle g, U(f)\cdot v\rangle \forall v \in K_2$, fournit alors l'homomorphisme cherché de $\mathcal{C}(Y)$ dans $Z(A_0(K_2))$. $\square$

Si l'on veut construire un chapeau $C$ de $\mathcal{M}^+(X)$ contenant une mesure sous-centrale donnée $\mu$ on procède comme suit : soit $u$ le barycentre de $\mu$, on a vu que les espaces $L^\infty_+(\mu)$ et $Z^+(Vu)\cdot u$ sont tous les deux isomorphes à $\tilde{Z}_u = r(L^\infty_+(\mu))$. Plus précisément, si $f \in L^\infty_+(\mu)$, on notera par $R(f)$ l'unique élément de $Z(Vu)$ vérifiant la relation $r(f\cdot\mu) = R(f)\cdot u$ et l'on a $R(f)\cdot R(f')\cdot v = R(ff')\cdot v$ pour tout $v \in V_u$ et $f, f' \in \mathcal{C}(X)$.

LEMME. *Pour tout $f \in L^\infty(\mu)$, l'application $v \to R(f)\cdot v$ est continue sur* $[0, u]$.

*Démonstration.* Prenons $f$ à valeur 0 ou 1. La mesure $\mu$ s'écrit $\mu = f\cdot\mu + (1-f)\mu$ soient $\mu_1 = f\cdot\mu$, $\mu_2 = (1-f)\cdot\mu$ et $r(\mu_1) = u_1$, $r(\mu_2) = u_2$. D'après les propriétés des mesures sous-centrales, l'application continue $\gamma : (x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ est une bijection de $[0, u_1] \times [0, u_2]$ sur $[0, u]$, son inverse $\gamma^{-1}$ est donc continue et pour tout $v \in [0, u]$, $\gamma^{-1}(v) = (R(f)\cdot v, R(1-f)\cdot v)$ ce qui démontre le lemme dans ce cas particulier.

On passe au cas général en remarquant que toute $f \in L^\infty(\mu)$ est limite uniforme de fonctions étagées.

Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, on peut alors définir un opérateur $R^*(f)$ sur $A_0([0, u])$ par la relation : $\langle R^*(f)\cdot g, v\rangle = \langle g, R(f)\cdot v\rangle$ pour tous $g \in A_0([0, u])$ et $v \in [0, u]$. L'application $f \mapsto R^*f$ définit alors un homomorphisme de $\mathcal{C}(X)$ dans le centre de $A_0([0, u])$ qui vérifie les conditions de la Proposition 12. $\square$

Nous allons préciser la Proposition 11 pour faire apparaître une partition de $X$ en trois ensembles, le premier portant $\mu$, le second portant les mesures plus diffuses que $\mu$ et étrangères à $\mu$, le troisième portant les mesures moins diffuses que $\mu$ et étrangères à $\mu$. L'ensemble $X$ est supposé toujours métrisable. On conserve les notations et hypothèses de la Proposition 11. On désigne par $\varphi$ la fonction s.c.i. positive sur $X$ vérifiant $(\mu \in C) \Leftrightarrow \{\int \varphi d\mu \leqslant 1\}$ et par $\mathcal{E} \subset X$ l'ensemble des points extrémaux de $X$ qui sont des génératrices extrémales de $\mathbf{R}^+ \cdot C$.

Notons par $\pi$ l'application affine de $\mathbf{R}^+ \cdot K$ dans $\mathcal{M}^+(X)$ définie pour tous $f \in \mathcal{C}^+(X)$ et $x \in \mathbf{R}^+ \cdot K$ par : $\langle f, \pi(x)\rangle = \langle e, T(f)\cdot x\rangle$, $e$ désigne toujours la forme linéaire continue sur $\tilde{X} - \tilde{X}$ valant 1 sur $X$; l'application $\pi$ est continue sur $K$.

Posons $\psi' = \frac{1}{2}(\psi + \varphi \circ \pi)$ et $K' = \{\psi' \leqslant 1\}$.

LEMME.

(1) *Pour toute* $\mu \in \mathbf{R}^+ \cdot C$, *on a* $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

(2) *Pour tout* $x \in \mathcal{E}$, *on a* $\pi(x) = \varepsilon_x$.

(3) *Pour tout* $x \in r(C)$, *on a* $r(\pi(x)) = x$.

(4) *On a* $r(C) \subset K'$, $\pi$ *est une surjection de* $K'$ *sur* $C$ *et* $r \circ \pi$ *est idempotent sur* $K'$.

*Démonstration :*

(1) Soit $\mu \in \mathbf{R}^+ \cdot C$, les conditions $\int \varphi d\mu \leqslant 1$ et $\int \psi d\mu \leqslant 1$ sont équivalentes, par suite $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

(2) Pour tout $\mu \in C$ et toute $f \in \mathcal{C}^+(X)$ on a par définition $T(f)\cdot r(\mu) = r(f\cdot\mu)$. On a donc, pour $x \in \mathcal{E}$ : $\langle f, \pi(x)\rangle = \langle e, T(f)\cdot x\rangle = \langle e, r(f(x)\cdot\varepsilon_x)\rangle = f(x)$ donc $\pi(x) = \varepsilon_x$.

(3) Le convexe compact $r(C)$ est l'image injective de $C$ par $r$ donc, d'après (2), $r \circ \pi$ est une application affine continue de $r(C)$ dans $\tilde{X}$ et vaut l'identité sur l'ensemble des points extrémaux de $r(C)$ par suite $r \circ \pi(x) = x$ pour tout $x \in r(C)$.

(4) Les applications $\psi$ et $\varphi \circ \pi$ sont affines s.c.i. positives sur $K$, elles sont égales sur $\mathcal{E}(r(C))$, donc égales sur $r(C)$, par suite $r(C) \subset K' = \{\psi \leqslant 1\}$ et $\pi(K') \supset \pi(r(C)) = C$. D'autre part si $x \in K'$ et $\mu = \pi(x)$, on a $\int \varphi d\mu < +\infty$, autrement dit $\mu \in \mathbf{R}^+ \cdot C$ et d'après (1) et (3) $\psi'(x) = \int \psi' d\mu = \psi(x) = \varphi \circ \pi(x) = \int \varphi d\mu$. Comme $x \subset K' = \{\psi \leqslant 1\}$, on a $\int \varphi d\mu \leqslant 1$ et $\pi(x) \in C$.

En fait on peut définir $C$ par :

$$(\mu \in C) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)}\ r(\mu) \in K' \\ \text{(b) pour tout } f \in \mathcal{C}^+(X),\ T(r(\mu)) = r(f \cdot \mu) \end{cases}$$

Enfin (3) implique que $r \circ \pi$ est idempotent sur $K'$.

Nous sommes en mesure d'enconcer la proposition suivante. (On conserve les notations du lemme précédent).

PROPOSITION 13. *Soient* $\mu \in \pi(K') = C$ *et soient*
$E_1 = \{x \in X \cap \mathbf{R}^+ \cdot K';\ \pi(x) = \varepsilon_x\}$.
$E_2 = \{x \in X \cap \mathbf{R}^+ \cdot K';\ \exists y \in X \setminus \{x\}, \pi(x) = \varepsilon_x\}$.
$E_3 = \{x \in X \cap \mathbf{R}^+ \cdot K';\ x \in r(\mathbf{R}^+ \cdot C) \setminus \mathbf{R}^+ \cdot \mathcal{E}.\}$

*Les ensembles* $E_1$, $E_2$, $E_3$ *sont boréliens, deux à deux disjoints,* $E_1$ *porte* $\mu$, $E_2$ *porte toute mesure* $\nu$ *plus diffuse que* $\mu$ *et étrangère à* $\mu$, $E_3$ *porte toute mesure moins diffuse que* $\mu$ *et étrangère à* $\mu$.

*Démonstration.* Les ensembles $E_1$, $E_2$, $E_3$ sont boréliens parce que l'application $\pi$ est continue. Remarquons que si, pour $x \in X \cap \mathbf{R}^+ \cdot K'$, $\pi(x)$ est de la forme $\varepsilon_y$, alors $y \in \mathcal{E}$, car $C$ est un chapeau de $\mathcal{M}^+(X)$. Il s'en suit que $E_1$, $E_2$, $E_3$ sont deux à deux disjoints, que $E_1 = \mathcal{E}$ et que $E_1$ porte $\mu$. Soit alors $\nu \in \mathcal{M}^+(X)$, $\nu \succ \mu$. On a $r(\nu) = r(\mu)$ donc $\int \psi' d\nu = \int \psi' d\mu = \psi'(r(\mu)) \leqslant 1$. Considérons d'abord le cas où $\mu = \varepsilon_x$, $x \in \mathcal{E}$ et soit $h$ la fonction s.c.i. valant 0 en $x$ et 1 ailleurs. La fonction $h' : z \to \langle h, \pi(z) \rangle$ est affine s.c.i. positive sur $X$ et $(h')^{-1}(\{0\}) = \pi^{-1}(\varepsilon_x)$. On doit avoir $\int h' d\nu = h'(x) = 0$ et par conséquent $\nu$ est portée par $\{x\} \cup E_2$. Si $\nu$ est étrangère à $\varepsilon_x$, $\nu$ est portée par $E_2$. Prenons maintenant $\mu$ quelconque. On sait qu'il existe une application mesurable définie sur $X$, $x \to \nu_x$ telle que, pour tout $x$, $\nu_x \in \mathcal{M}^1(X)$, $r(\nu_x) = x$ et $\nu = \int \nu_x d\mu_x$ [6], il s'ensuit que $\nu$ est portée par $E_1 \cup E_2$; Si de plus $\nu$ est étrangère à $\mu$, alors on peut supposer que, pour $\mu$-presque tout $x$, $\nu_x$ est étrangère à $\varepsilon_x$, donc $\nu$ est portée par $E_2$. Soit maintenant $q$ la jauge de $r(C)$ dans $\tilde{X}$; c'est une fonction convexe s.c.i. positive sur $\tilde{X}$ telle que $\{q \leqslant 1\} = r(C)$. Si $\nu \in \mathcal{M}^+(X)$ est une mesure moins diffuse que $\mu$ alors $\int q d\nu \leqslant \int q d\mu \leqslant 1$, autrement dit $\nu$ est portée par le cône $\{q < +\infty\}$. On utilise alors le fait que $r$ est une bijection de $C$ sur $r(C)$ et on vérifie immédiatement que pour tout couple $(\sigma, \theta) \subset \mathcal{M}^1(C)$, $\sigma$ maximale, $\theta \prec \sigma$ et inf $(\sigma, \theta) = 0$, la mesure $\theta$ ne charge pas l'ensemble des points extrémaux de $C$. □

*Remarque.* La proposition précédente peut encore s'interpréter comme suit. Pour tout $x \in E_1$, soit $K_x = \pi^{-1}(\mathbf{R}^+ \cdot \varepsilon_x) \cap K'$; c'est une face fermée de $K'$, soit aussi pour toute $\mu \in C$,

$K_\mu = \{t \in K', t \leqslant r(\mu)\}$. On a alors au sens des intégrales d'ensembles convexes compacts : $K_\mu = \int K_x d\mu(x)$. De plus, pour tout $t \in K_\mu$, il existe une application mesurable, unique à une $\mu$-équivalence près, $x \to t_x$, définie sur $E_1$, telle que $t_x \in K_x$ et telle que $t = \int t_x d\mu_x$.

## IV. Applications

**1.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces compacts métrisables et $p$ une application continue de $X$ sur $Y$. On désigne encore par $p$ l'application de $\mathcal{M}^+(X)$ dans $\mathcal{M}^+(Y)$ qui en dérive.

Proposition 1. *Soit $K \subset \mathcal{M}^+(X)$ un ensemble convexe compact héréditaire tel que $p_{|K}$ soit injective. Il existe une application borélienne $h$ de $Y$ dans $X$ qui est une section de $p$, telle que toute $\mu \in K$ soit portée par $h(Y)$.*

*Démonstration.* D'après (II. Théorème 2), il existe une fonction numérique s.c.i. positive $\varphi$ sur $X$ telle que $p$ soit injective sur

$$K_\varphi = \{\mu \in \mathcal{M}^+(X); \int \varphi d\mu \leqslant 1\} \text{ et telle que } K \subset K_\varphi.$$

Soit $t : Y \to X$ une section borélienne de $p$ [4]. L'ensemble $A = \{\varphi < +\infty\}$ est un $K_\sigma$ qui porte toute $\mu \in K$, et, pour tout $y \in p(A)$, $p^{-1}(y) \cap A$ contient un seul point $u(y)$. On définit la section $h$ cherchée en posant : $h(y) = u(y)$ si $y \in p(A)$ et $h(y) = t(y)$ si $y \in p(A)$. □

**2.** Le résultat suivant va nous servir dans létude des désintégrations des mesures.

Proposition 2. *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles convexes compacts métrisables, $p$ une application affine continue de $X$ sur $Y$ et soit $K \subset \tilde{X}$ un ensemble convexe compact tel que $p(K)$ soit héréditaire dans $Y$ et tel que $p_{|K}$ soit injective. Il existe un sous-ensemble convexe compact $K'$ de $\tilde{X}$, contenant $K$, tel que $p(K')$ soit un chapeau de $\tilde{Y}$ et tel que $p_{|K'}$ soit injective. S i de plus $K$ est héréditaire dans $\tilde{X}$, on peut trouver un chapeau $K'$ de $\tilde{X}$ vérifiant les conditions ci-dessus.*

*Démcnstration.* Considérons l'application affine continue $\pi : y \to p^{-1}(y)$ de $p(K)$ dans $K$. D'après, (I. Proposition 5), il existe deux chapeaux $C_1$, $C_2$ de $\tilde{Y}$ tels que $p(K) \subset C_2 \subset C_1$ et $C_2 \subset \overline{(\mathbf{R}^+ \cdot p(K)) \cap C_1}$ et une application affine continue $\bar{\pi}$ de $C_1$ dans $\tilde{X}$ telle que $\bar{\pi}_{|P(K)} = \pi$. Par construction, pour tout $y \in C_2$ on a $p[\bar{\pi}(y)] = y$, par suite $p$ est injective sur $K' = \bar{\pi}(C_2)$ et $p(K') = C_2$ est un chapeau de $\tilde{Y}$.

Supposons de plus que $K$ est héréditaire dans $\tilde{X}$. Soit $\varphi_2$ la fonction affine s.c.i. définissant le chapeau $C_2$ et soit $K_2 = \{\varphi_2 \circ \bar{\pi} \leqslant 1\} = p^{-1}(C_2)$. Sur le chapeau $K_2$ de $\tilde{X}$, les applications $\bar{\pi} \circ p$ et $id_{K_2}$ (identité de $K_2$) sont affines continues et égales sur l'ensemble héréditaire

$K \subset K_2$. D'après, (I. Proposition 2), il existe un chapeau $K_3$ de $\tilde{X}$, tel que $K \subset K_3 \subset \overline{(\mathbf{R}^+ \cdot K) \cap 2K_2}$, donc pour tout $x \in K_2$ on a $\tilde{\pi} \circ p(x) = x$. Par construction $p(K_3) \subset 2C_2$ et $p$ est injective sur $\mathbf{R}^+ \cdot K_3$. Montrons que $K' = p(K_3)$ est un chapeau de $\tilde{Y}$. Pour cela il suffit de montrer que $p(K_3)$ est héréditaire dans $\tilde{Y}$. Soit alors $t \in K_3$ et $y \in \tilde{Y}$, $0 \leqslant y \leqslant p(t)$. L'application $\tilde{\pi}$ est croissante sur $\mathbf{R}^+ \cdot C_2$ donc $0 \leqslant \tilde{\pi}(y) \leqslant \tilde{\pi}(p(t)) = t$. Comme $K_3$ est un chapeau de $\tilde{X}$, $\tilde{\pi}(y) \in K_3$. Comme $y \in C_2$, on a $p \circ \tilde{\pi}(y) = y \in p(K_3)$. □

Corollaire 3. *Soit $Z$ un ensemble convexe compact métrisable et soit $u \in Z$, barycentre d'une unique mesure $\mu$ portée par $\mathcal{E}(Z)$. Il existe alors un chapeau $C$ de $\tilde{Z}$ contenant $u$ tel que tout point $z$ de $(\mathbf{R}^+ \cdot C) \cap Z$ soit barycentre d'une seule mesure $\mu_z$ portée par $\mathcal{E}(Z)$.*

*Démonstration.* Nous appliquons la proposition précédente au couple. $X = \mathfrak{M}^1(Z)$, $Y = Z$ et à l'application $p = r$ ($r(\nu)$ désigne le barycentre de $\nu$). L'hypothèse faite sur $u$ et $\mu$ implique que $r$ est une bijection de $[0, \mu]$ sur $[0, u]$. Il existe alors un chapeau $K \subset \mathfrak{M}^+(Z)$ tel que $r$ soit injective sur $K$ et que $r(K) = C$ soit un chapeau de $\tilde{Z}$. Soient $\varphi$ et $\psi$ les fonctions affines s.c.i. sur $\tilde{Z}$ et $\mathfrak{M}^+(Z)$ associées aux chapeaux $C$ et $K$. Par construction, pour tout $z \in Z$ sur une génératrice extrémale de $\mathbf{R}^+ \cdot K$ on a $z \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^+ \cdot C)$ donc $z \in \mathcal{E}(Z)$ et $\varphi(z) = \psi(\varepsilon_z)$. Soient alors $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}^+(Z)$ portées par $\mathcal{E}(Z)$ et de barycentre $t \in C$. On a $\int \varphi d\nu_1 = \int \varphi d\nu_2 = \varphi(t) \leqslant 1$, par suite $\psi(\nu_1) = \int \psi(\varepsilon_z) d\nu_1(z) = \int \varphi d\nu_1 = \varphi(t) \leqslant 1$ de même $\psi(\nu_2) \leqslant 1$ donc $\nu_1, \nu_2 \in K$. Comme $r$ est injective sur $K$, on en déduit que $\nu_1 = \nu_2 = r_K^{-1}(t)$ où l'on a noté $r_K^{-1}$ l'inverse de $r_{|K}$. □

**3.** Soient maintenant $X$ et $Y$ des espaces compacts métrisables, $p$ une surjection continue de $X$ sur $Y$. On appellera *désintégration simultanée* d'un ensemble $H \subset \mathfrak{M}^+(X)$ une application universellement mesurable $y \to \sigma_y$ de $Y$ dans $\mathfrak{M}^1(X)$ telle que l'on ait, pour toute $\nu \in H$, $\nu = \int \sigma_y d[p(\nu)](y)$ et pour toute $f \in C^+(Y)$

$$(f \circ p) \cdot \nu = \int (f(y) \cdot \sigma_y) d[p(\nu)](y).$$

Proposition 4. *Soit $H \subset \mathfrak{M}^+(X)$, un ensemble convexe compact vérifiant les conditions suivantes :*

(a) *L'application $\mu \to p(\mu)$ est injective sur $H$.*

(b) *Pour toutes $f \in C(Y)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, et $\mu \in H$, $(f \circ p) \cdot \mu \in H$.*

*Il existe alors une désintégration simultanée de $H$.*

*Démonstration.* L'hypothèse (b) entraîne que $p(H)$ est héréditaire dans $\mathfrak{M}^+(Y)$. D'après la Proposition 2, il existe un ensemble convexe compact $H_1 \subset \mathfrak{M}^+(X)$ contenant $H$, tel que $p(H_1) = C_1$ soit un chapeau de $\mathfrak{M}^+(Y)$, et tel que $p_{|H_1}$ soit injective. On peut également trouver un convexe compact $H_2 \subset 2H_1$ tel que $H \subset H_2$, et que $p(H_2)$ soit un chapeau $C_2 \subset \overline{\mathbf{R}^+ \cdot (pH) \cap 2C_1}$.

Soit $\gamma$ l'application réciproque de $p_{|R^+ \cdot H_1}$; on a $\gamma(C_2) = H_2$. Pour tout $\nu \in H_2$, il existe une suite $(\theta_n) \subset p(H) \cap 2C_1$ telle que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta = p(\nu)$. Pour tout $f \in C^+(Y)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\gamma(f\cdot\theta_n) = (f\circ p)\cdot\gamma(\theta_n)$, par suite $\gamma(f\cdot\theta) = \lim\,(f\circ p)\cdot\gamma(\theta_n) = (f\circ p)\cdot\gamma(\theta) = (f\circ p)\cdot\nu$, comme $f\cdot\theta \in C_2$, ceci implique $(f\circ p)\cdot\nu \in H_2$.

Soit alors $\varphi$ la fonction s.c.i. sur $Y$ définissant le chapeau $C_2$ de $\mathcal{M}^+(Y)$. Pour tout $y \in \{\varphi < +\infty\}$, $\gamma(\varepsilon_y) = \sigma_y$ est définie, et $p(\sigma_y) = \varepsilon_y$, l'ensemble $\{\varphi < +\infty\}$ porte tout élément de $C_2$ et l'on a, pour tout $\theta \in C_2$, $\gamma(\theta) = \int \sigma_y\, d\theta(y)$. Or on vient de voir qu'on a aussi pour tout $f \in C^+(Y)$, $\gamma(f\cdot\theta) = (f\circ p)\gamma(\theta)\, \forall \theta \in C_2$, de sorte que, pour $\nu = \gamma(\theta)$, on a $(f\circ p)\cdot\nu = \int f(y)\cdot\sigma_y\, d\theta(y) = \int f(y)\cdot\sigma_y\, d[p(\nu)](y)$. L'application mesurable $y \to \sigma_y$, définie sur $\{\varphi < +\infty\}$ définit alors une désintégration simultanée de $H$. $\square$

*Remarque.* Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ et soit

$$H = \{\nu \in [0, \mu];\ \exists g \quad \text{borélienne sur } Y \text{ telle que } \nu = (g\circ p)\cdot\mu\}$$

alors $H$ est convexe compact et vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition précédente. On a ainsi un procédé pour désintégrer une seule mesure $\mu$.

*Problème.* Soit $M$ un convexe compact contenu dans $\mathcal{M}^+(X)$ : Si tout couple $(\mu, \nu) \in M^2$ possède une désintégration simultanée, l'ensemble $M$ possède-t-il une désintégration simultanée ? (L'hypothèse $M$ convexe est essentielle.)

## Index des definitions et notations

### Definitions



### Notations

## Reference


[1]. AJLANI, M. & MOKOBODZKI, G., Sur le support des mesures centrales et simpliciales. Proceedings of the advanced Study Institute on facial structure of compact convexe sets and applications. University College of Swansea U.K. July 2–15, 1972.

[2]. ALFSEN, E. M., *Compact convex sets and boundary integrals*. Springer-Verlag, Berlin 1971.

[3]. BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques; Intégration, Chap.* 6—*Intégration vectorielle*. Hermann—Paris.

[4]. —— *Eléments de Mathématiques; Topologie générale, Chap.* 9—*Utilisation des nombres réels en Topologie générale*. Hermann—Paris.

[5]. CHRISTENSEN, J. P. R., Measurability problems in a metrizable convex compact set. Københavns Universitet Matematisk Institut. Preprint séries 1971 N° 8.

[6]. MEYER, P. A., *Probabilité et Potentiel*. Hermann—Paris.

[7]. MOKOBODZKI, G., Quelques propriétés de fonctions numériques convexes (s.c.i. ou s.c.s.) sur un ensemble convexe compact. *Séminaire de Théorie du Potentiel—6éme année* 1961–62 *Fascicule* 2. I.H.P., 11 rue. P. et M. Curie. Paris 5éme.

[8]. PHELPS, R., *Lectures on Choquet's theorem*. Math. Studies, Van Nostrand, Princeton 1966.

[9]. TOMITA, M., Harmonic analysis on locally compact groups. *Math. J. of Okayama University*, 5 (1956), 133–193.

[10]. WILS, W., The ideal center of partially ordered vector spaces. *Acta Math.*, 127 (1971), 41–77.


*Received February* 1, 1974