SOUS-ESPACES INVARIANTS DE TYPE FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE BANACH

PAR

B. BEAUZAMY

Université Claude Bernard
Lyon, France

Nous nous intéressons, dans les pages qui suivent, aux opérateurs T, linéaires continus, d'un espace de Banach E dans lui-même, possédant la propriété suivante, que nous notons $\mathfrak{H}$ (le symbole $\not\to$ significant « ne tend pas ») :

$$\mathfrak{H} : \|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in E, \text{ tel que } T^n x_0 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

La question de savoir si un tel opérateur possède nécessairement un sous-espace invariant non trivial est assez ancienne et reste ouverte (rappelons qu'un sous-espace vectoriel fermé F est dit invariant par T si $TF \subset F$; il est non trivial si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$).

Nous allons montrer qu'avec une hypothèse supplémentaire sur T, que l'on peut juger assez faible (qui est, en tout cas, beaucoup plus faible que celles déjà connues), elle admet une réponse positive; les sous-espaces invariants ainsi construits seront en outre d'un type très particulier; nous reviendrons sur ce point par la suite (au § 5).

Comme c'est l'usage, les sous-espaces invariants que nous construirons seront en fait hyper-invariants, c'est-à-dire invariants par tout opérateur qui commute avec T. C'était déjà le cas pour les résultats obtenus par divers auteurs dans cette direction. Mentionnons-les : — Si T et ${}^tT$ vérifient $\mathfrak{H}$, dans E et E' respectivement, et si E est réflexif, T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial (en abrégé S.H.N.T.) (Colojoară-Foiaş [3], p. 136, cor. 1.10; voir aussi B. Beauzamy [2]).

— Si le spectre de T est contenu dans le cercle unité, n'est pas réduit à un point, et si

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\log \|T^n\|}{1+n^2} < \infty, \tag{1}$$

T a un S.H.N.T. (Wermer [9] avec quelques hypothèses techniques supplémentaires; Colojoară-Foiaş [3], p. 154, cor. 3.3). Le cas où le spectre de T est réduit à un point a été traité, mais sous une hypothèse un peu plus forte que (1), par A. Atzmon [1].

La condition (1), dite « Condition de Beurling » a le défaut de porter sur les normes $\|T^n\|$ $(n \in \mathbf{Z})$, et non sur les normes des itérés d'un point $y_0 \in E$, c'est-à-dire sur les quantités $\|T^n y_0\|$ $(n \in \mathbf{Z})$. C'est premièrement à ce défaut que remédie notre condition. Elle nous permet aussi d'abandonner toute condition d'inversibilité ou de spectre. Enfin, elle ne porte pas directement sur l'opérateur T lui-même, mais sur un opérateur « asymptotiquement voisin » de T, ce qui paraît raisonnable, car le comportement asymptotique des itérés $(T^n x)_{n \to +\infty}$ devrait suffire à caractériser les sous-espaces invariants. Ces remarques étant faites, passons au résultat proprement dit. Nous l'avons divisé en deux parties, énoncées respectivement aux théorèmes 1 et 2. Le premier réclame une inversibilité locale pour $\mathfrak{U}$; ce n'est pas le cas du second, mais il demande à la place que $\mathfrak{U}$ soit faiblement compact (ce qui se produira, par exemple, si l'espace E est réflexif).

Remarquons enfin qu'on ne fait aucune hypothèse de commutation entre T et $\mathfrak{U}$.

Théorème 1. *Soit E un espace de Banach, et T un opérateur de E dans E, non égal à un multiple de l'identité, et vérifiant $\mathfrak{H}$.*

On suppose qu'il existe un opérateur $\mathfrak{U}$, tel que :

$$\forall x,\ \mathfrak{U}^n x - T^n x \to 0, \quad n \to +\infty,$$

qu'il existe une suite croissante $(\varrho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_n \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad \varrho_{m+n} \leqslant \varrho_m \cdot \varrho_n \quad \forall m, \forall n \in \mathbf{N} \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} < \infty \end{array}\right\} \tag{2}$$

et une suite de points $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ avec :

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{U} y_k = y_{k-1}, \quad \forall k \geqslant 1 \\ \|y_0\| = 1,\ \|y_k\| \leqslant \varrho_k, \quad \forall k \geqslant 1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Alors T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Théorème 2. *Soit E un espace de Banach et T un opérateur de E dans E, non égal à un multiple de l'identité, et vérifiant $\mathfrak{H}$.*

On suppose qu'il existe un opérateur faiblement compact $\mathfrak{U}$, avec

$$\|\mathfrak{U}^n - T^n\|_{\mathrm{op}} \to 0, \quad n \to +\infty$$

qu'il existe une suite croissante $(\varrho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (2), *un point $y_0 \in E$ avec $\|y_0\| = 1$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $C(\varepsilon) > 0$ et une suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$ de points de E, avec :*

$$\left.\begin{array}{ll}\|\mathcal{U}^k y_k - y_0\| < \varepsilon, & \forall k \geqslant 1 \\ \|\mathcal{U}^j y_k\| \leqslant C(\varepsilon)\varrho_{k-j}, & \forall k \geqslant 1, \forall j \leqslant k.\end{array}\right\} \tag{3'}$$

Alors T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

L'hypothèse du théorème 1 signifie qu'un certain point y_0 admet une chaîne d'inverses par $\mathcal{U}$ dont les normes ne croissent pas trop vite; celle du théorème 2 a le même sens pour des inverses approchés. Il faut noter que dans ce second cas, il n'y a pas a priori de relation entre y_k et y_{k-1}.

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes, donnons un corollaire évident du théorème 1 :

COROLLAIRE. *Si T vérifie $\mathfrak{H}$, est inversible, et si, pour un certain point $y_0 \in E$, on a $\|T^{-n} y_0\| \leqslant \varrho_n$, pour une suite $(\varrho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ du type précédent, T a un sous-espace hyper-invariant non trivial.*

Il suffit en effet de prendre $\mathcal{U} = T$ et $y_k = T^k y_0$.

Un certain nombre de faits simples sont bien connus; nous allons les rappeler brièvement. Dans les énoncés qui suivent, le mot « doit » signifie que dans le cas contraire le problème est résolu.

(1) T ne doit pas posséder de vecteur propre : si $\exists \lambda$ et $x \neq 0$ tels que $Tx = \lambda x$, l'ensemble $\{z \in E,\ Tz = \lambda z\}$ est un sous-espace fermé, hyper-invariant pour T, non réduit à 0, et non égal à E si T n'est pas un multiple de l'identité; T ne peut donc vérifier d'équation fonctionnelle du type $\sum_0^N a_k T^k = 0$.

(2) T doit être injectif et d'image dense, faute de quoi Ker T ou Im T sont des sous-espaces hyper-invariants non triviaux.

(3) Si l'on considère $F = \{x \in E,\ T^n x \to 0,\ n \to +\infty\}$, on a un sous-espace fermé, non égal à E si on admet $\mathfrak{H}$, et hyper-invariant pour T. Il doit donc être réduit à $\{0\}$. Autrement dit, $\mathfrak{H}$ implique que $\forall x \neq 0$, $T^n x \not\to 0$, $n \to +\infty$.

Nous allons maintenant passer à la démonstration des théorèmes 1 et 2. La plus grande partie concernera les deux théorèmes simultanément : nous allons développer un critère permettant d'assurer l'existence de S.H.N.T. Cette approche nous a initialement été suggérée par P. Enflo.

§ 1. Représentation d'un opérateur sur l'orbite d'un point

Soit x_0 un point de E, avec $\|x_0\|=1$. Posons $F_{x_0}=\overline{\text{span}}\,\{x_0, Tx_0, ..., T^n x_0, ...\}$. Les combinaisons linéaires finies $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k T^k x_0$ sont denses dans F_{x_0}; sur celles-ci, T agit comme un shift : $T(\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k T^k_{x_0} x_0)=\sum \alpha_k T^{k+1} x_0$. On peut donc représenter T comme la multiplication par x sur un espace de polynômes, en identifiant

$$p(x)=\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k \;\leftrightarrow\; \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k T^k x_0$$

et en posant

$$\|p\|=\|\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k T^k x_0\|_E.$$

L'espace F_{x_0} s'identifie ainsi isométriquement à la complétion, pour la norme $\|\ \|$, d'un espace de polynômes; cet espace complété sera noté B_{x_0}, ou simplement B, si aucune confusion n'est à craindre.

En particulier, si $\sum_0^\infty |\alpha_k|<\infty$, la série $\sum_0^\infty \alpha_k x^k$ définit un élément de B.

Pour un polynôme $p=\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$, on pose

$$\|p\|_{\text{op}}=\sup_{\|q\|\leqslant 1}\|p\times q\|=\sup_{\|\Sigma \beta_j T^j x_0\|\leqslant 1}\|(\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k T^k)(\sum \beta_j T^j x_0)\|_E,$$

et cette définition s'étend aux éléments avec $\sum_0^\infty |\alpha_k|<\infty$. Chacun d'eux a ainsi une norme $\|p\|$ et une norme $\|p\|_{\text{op}}$, et on a évidemment :

$$\|p\| = \|p\times 1\| \leqslant \|p\|_{\text{op}}\cdot\|1\|,$$

et comme $\|1\|=\|x_0\|_E=1$,

$$\|p\| \leqslant \|p\|_{\text{op}}. \tag{4}$$

Nous pouvons, dès à présent, fixer le point sur l'orbite duquel la représentation de T sera faite : il s'agit du point y_0 donné dans l'énoncé des théorèmes 1 et 2. En vertu de la remarque 3, l'hypothèse $\mathfrak{H}$ se traduit dans $B_{y_0}=B$ par :

$$\left.\begin{array}{l}\|x\|_{\text{op}}=1\\ x^n \nrightarrow 0, \quad n\to+\infty\end{array}\right\} \tag{5}$$

et, toujours en vertu de cette remarque 3, on a, $\forall p\neq 0$, $x^n p\nrightarrow 0$, $n\to+\infty$.

§ 2. Séries de Fourier absolument convergentes

Nous notons $A(\mathbf{T})$ l'ensemble des fonctions, définies sur le tore, dont la série de Fourier est absolument convergente :

$$f(\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad \text{avec } \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k|<\infty.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{A(\mathbf{T})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|.$$

Pour toute fonction $f \in A(\mathbf{T})$, si $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$, nous poserons, pour $m \geq 0$:

$$\varphi_m(f)(\theta) = \sum_{k \geq -m} c_k e^{i(k+m)\theta}$$

(c'est une suite d'éléments de $A(\mathbf{T})$) et

$$\psi_m(f) = \sum_{k \geq -m} c_k x^{k+m}$$

(c'est une suite d'éléments de B).

Remarquons que puisque $\|x\|_{\text{op}} = 1$, on a :

$$\|\psi_m(f)\|_{\text{op}} \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| = \|f\|_{A(\mathbf{T})}, \quad \forall m \in \mathbf{N}, \tag{6}$$

et donc a fortiori

$$\|\psi_m(f)\| \leq \|f\|_{A(\mathbf{T})}, \quad \forall m \in \mathbf{N},$$

ce qui signifie que les $\psi_m(f)$ sont uniformément bornées, en norme et en norme d'opérateurs.

PROPOSITION 1. *Soit $(\varrho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant les hypothèses* (2). *On peut trouver deux fonctions f et g, définies sur le tore, à supports disjoints, appartenant à $A(\mathbf{T})$, avec :*

$$\begin{cases} \psi_m(f) \not\to 0, & m \to +\infty, \text{ dans } B \\ \psi_m(g) \not\to 0, & m \to +\infty, \text{ dans } B \end{cases}$$

et si $c_n(g)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction g,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \varrho_{|n|} |c_n(g)| < \infty.$$

Démonstration. Les fonctions g et f seront construites successivement.

LEMME 1. *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on peut trouver une fonction g_N, à support dans un intervalle de largeur $4\pi/N$, telle que*

$$\begin{cases} \psi_m(g_N) \not\to 0, & m \to +\infty \\ \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varrho_{|n|} |c_n(g_N)| < \infty. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que si une suite $(\varrho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les conditions (2), le sous-espace de $A(\mathbf{T})$ constitué des f telles que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|\,\varrho_{|n|} < \infty \tag{7}$$

est une algèbre de Beurling non quasi-analytique (voir par exemple Y. Domar [4], p. 18) : il résulte en effet de Paley-Wiener ([8], th. XII) que l'on peut trouver dans cette classe des fonctions dont le support est arbitrairement petit et qui ne sont pas identiquement nulles.

On en déduit alors aisément l'existence de partitions de l'unité; pour tout $N\in\mathbf{N}$, notons $(g_{N,j})_{j=1,\dots,N}$ une telle partition, dans laquelle chacun des supports est de largeur au plus $4\pi/N$, chacune des fonctions vérifiant (7).

On a donc $\sum_{j=1}^{N} g_{N,j}=1$, et par conséquent $\sum_{j=1}^{N} \varphi_m(g_{N,j})=e^{im\theta}$, $\forall m\in\mathbf{N}$. Il en résulte que, dans B :

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_m(g_{N,j}) = x^m.$$

Puisque $x^m \not\to 0$, $m\to+\infty$, pour un j au moins $\psi_m(g_{N,j})\not\to 0$, $m\to+\infty$. Ceci prouve le lemme, la fonction g_N étant le $g_{N,j}$ correspondant.

Remarquons que l'on obtient facilement, pour cet indice j :

$$\liminf_{m\to+\infty} \|\psi_m(g_{N,j})\| \geq \frac{\alpha_0}{N}$$

où $\alpha_0=\lim_{m\to+\infty}\|x^m\|$.

Pour chaque $N=1, 2, \dots$, choisissons une fonction g_N donnée par le lemme 1, et notons a_N le point du tore qui est le centre de l'intervalle où $g_N=1$.

Soit a un point d'accumulation de la suite des $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Pour tout voisinage $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ du point a, on peut trouver une fonction g_N, donnée par le lemme 1, pour N assez grand, dont le support est entièrement contenu dans ce voisinage. Posons $a=e^{i\theta_0}$.

Posons $p_0=a-x$. D'après la remarque 1, on a $p_0\neq 0$, car $p_0=0$ signifierait, revenant à E, que a $y_0=Ty_0$ et y_0 serait vecteur propre.

D'après la remarque 3, on peut supposer $x^m p_0 \not\to 0$, $m\to+\infty$, dans B, il existe donc un $\gamma>0$ tel que

$$\forall m\in\mathbf{N},\ \|x^m p_0\| \geq \gamma > 0. \tag{8}$$

Posons $f_0(\theta)=e^{i\theta_0}-e^{i\theta}$. La fonction f_0 s'annule au seul point $\theta=\theta_0$. Il résulte alors du théorème de Wiener-Ditkin (voir J. P. Kahane [7]) que l'on peut trouver une suite $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $A(\mathbf{T})$, convergeant vers f_0 dans $A(\mathbf{T})$, chacune étant identiquement nulle sur un voisinage de $\theta=\theta_0$.

LEMME 2. *On peut trouver des entiers k_0 et m_0 tels que*

$$\forall m \geqslant m_0, \ \|\psi_m(f_{k_0})\|_B \geqslant \gamma/2.$$

Démonstration. Puisque $f_k \to f_0$, $k \to +\infty$, dans $A(\mathbf{T})$, on peut trouver k_0 assez grand pour que :

$$\|f_{k_0} - f_0\|_{A(\mathbf{T})} \leqslant \gamma/4.$$

On a alors, $\forall m \in \mathbf{N}$

$$\|e^{im\theta} f_{k_0}(\theta) - e^{im\theta} f_0(\theta)\|_{A(\mathbf{T})} \leqslant \gamma/4.$$

Si on choisit m_0 assez grand pour que $\forall m \geqslant m_0$

$$\|e^{im\theta} f_{k_0}(\theta) - \varphi_m(f_{k_0})(\theta)\|_{A(\mathbf{T})} \leqslant \gamma/4,$$

on aura alors, $\forall m \geqslant m_0$

$$\|\varphi_m(f_{k_0})(\theta) - e^{im\theta} f_0(\theta)\|_{A(\mathbf{T})} \leqslant \gamma/2$$

et donc

$$\|\psi_m(f_{k_0}) - x^m p_0\|_B \leqslant \gamma/2.$$

Mais d'après (8) $\|x^m p_0\|_B \geqslant \gamma$, $\forall m$, et donc $\|\psi_m(f_{k_0})\|_B \geqslant \gamma/2$ si $m \geqslant m_0$; le lemme 2 est donc démontré.

Soit V le voisinage de $\theta = \theta_0$ sur lequel f_{k_0} s'annule identiquement. D'après le lemme 1, pour N assez grand, on peut trouver une fonction g_N dont le support soit tout entier contenu dans V; les fonctions f_{k_0} et g_N ainsi obtenues seront alors à supports disjoints : ce seront respectivement les fonctions f et g annoncées par la proposition 1, dont la démonstration est ainsi achevée.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'opérateur $\mathcal{U}$.

§ 3. Opérateurs asymptotiquement équivalents

Nous avons fait, aux théorèmes 1 et 2 respectivement, l'hypothèse de l'existence d'un opérateur $\mathcal{U}$ satisfaisant :

$$\forall x, \ T^n x - \mathcal{U}^n x \to 0, \quad n \to +\infty$$

ou

$$\|T^n - \mathcal{U}^n\|_{\mathrm{op}} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

La première condition ne se réduit pas à la seconde (on peut par exemple, comme nous l'a fait remarquer C. Foiaş, trouver un opérateur T vérifiant $\|T^n\| = 1 \ \forall n$ et $\forall x$, $T^n x \to 0$, $n \to +\infty$) : elle est strictement plus faible. La seconde est plus faible que la notion d'équivalence asymptotique introduite par C. Apostol (voir [3], p. 28) qui demandait $\|T^n - \mathcal{U}^n\|^{1/n} \to 0$; elle diffère donc de celle de « quasi-Nilpotent-équivalence » ([3], p. 11).

Nous allons maintenant distinguer entre les démonstrations des théorèmes 1 et 2. Pour alléger les notations, nous posons :

$$p_m = \frac{1}{\|g\|_{A(\mathbf{T})}} \psi_m(g)$$

$$h_m = \frac{1}{\|f\|_{A(\mathbf{T})}} \psi_m(f),$$

pour les deux fonctions g et f, à supports disjoints, que nous avons trouvées, et soit $\alpha > 0$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l} \liminf\limits_{m\to+\infty} \|h_m\| \geqslant \alpha > 0 \\ \liminf\limits_{m\to+\infty} \|p_m\| \geqslant \alpha > 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Nous notons $(a_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier de $g/\|g\|_{A(\mathbf{T})}$, si bien que $p_m = a_{-m} + a_{-m+1}x + \dots + a_{-m+j}x^j + \dots$, dans B.

Du fait de l'introduction de l'opérateur $\mathcal{U}$, nous ne pourrons pas nous limiter à l'espace B, et, dans E, nous utiliserons la notation :

$$p_m(T) = a_{-m}I + a_{-m+1}T + \dots + a_{-m+j}T^j + \dots$$

avec les notations $\|p_m(T)\|_{op}$, et $\|p_m(T)(y_0)\|_E$, dont le sens est évident.

Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses du théorème 1.

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe un point $z_0 \neq 0$ dans E tel que*

$$p_m(T)(y_0) - T^m z_0 \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Démonstration. Dans l'espace E, posons, si $m \in \mathbf{N}$:

$$q_m = a_{-m}y_m + \dots + a_{-m+j}y_{m-j} + \dots + a_{-1}y_1 + a_0y_0 + a_1\mathcal{U}y_0 + \dots + a_j\mathcal{U}^jy_0 + \dots,$$

où les $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont les points donnés par les hypothèses du théorème 1.

LEMME 3. *La suite q_m converge vers un point z_0 de E.*

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer que la série $\sum_0^\infty a_{-j}y_j$ est normalement convergente (remarquons au passage que c'est ici qu'on utilise le fait que l'espace E est complet, fait sans lequel la conclusion du théorème 1 ne subsiste pas).

Mais on a par hypothèse $\|y_j\| \leqslant \varrho_j$, et d'après la proposition 1, $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{-j}| \varrho_j < \infty$, d'où le lemme.

Remarquons que, puisque $\forall x$, $\mathcal{U}^n x - T^n x \to 0$, on a, $\forall x$, $\sup_n \|\mathcal{U}^n x\| < \infty$ et, d'après Banach-Steinhaus, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \|\mathcal{U}^n\| \leqslant M. \tag{10}$$

Toujours dans l'espace E, posons

$$p'_m = \mathcal{U}^m q_m \quad m \geqslant 0.$$

Dans E, p_m s'écrit :

$$p_m = a_{-m} y_0 + a_{-m+1} T y_0 + \ldots + a_{-m+j} T^j y_0 + \ldots.$$

LEMME 4. *On a, dans E, $p'_m - p_m \to 0$, $m \to +\infty$.*

Démonstration. On peut écrire :

$$\|p'_m - p_m\|_E \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_{-m+j}| \, \|T^j y_0 - \mathcal{U}^j y_0\|.$$

Le lemme en résulte aussitôt.

LEMME 5. *Dans E, on a*

$$\|p_m - T^m z_0\|_E \to 0, \quad \text{et } z_0 \neq 0.$$

Démonstration. On a, d'après le lemme 3,

$$q_m \to z_0, \quad m \to +\infty$$

et donc, d'après (10) :

$$\|p'_m - \mathcal{U}^m z_0\| \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Mais on a

$$\|p'_m - p_m\| \to 0, \quad m \to +\infty \text{ (lemme 4)}$$

et

$$\mathcal{U}^m z_0 - T^m z_0 \to 0, \quad m \to +\infty \text{ (par hypothèse)}$$

et donc

$$\|p_m - T^m z_0\| \to 0, \quad m \to +\infty,$$

comme annoncé.

Supposons maintenant $z_0 = 0$. Alors $p_m \to 0$, $m \to +\infty$ ce qui contredit la proposition 1. Ceci achève la preuve de la proposition 2. Remarquons que z_0 peut ne pas appartenir à F_{y_0}, mais, bien sûr,

$$\operatorname{dist}(F_{y_0}, T^n z_0) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Nous allons maintenant démontrer l'analogue de la proposition 2 dans le cadre des hypothèses du théorème 2.

PROPOSITION 3. *Sous les hypothèses du théorème 2, il existe un point $z_0 \in E$, avec $z_0 \neq 0$, une suite d'entiers $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$, strictement croissante, une suite de scalaires $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\forall i$, avec $\forall n$, $\sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_i = 1$, et un entier $j \in \mathbf{N}$ tels que*

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k \, p_{k+j}(T)\,(\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k) - T^{m_{n+1}} z_0 \to 0, \quad n \to +\infty$$

où les points $y_k \in E$ sont ceux donnés par les hypothèses du théorème 2, pour la valeur $\varepsilon = \alpha/8M^2$ (α donné par la proposition 1, M donné par (10)), et l'opérateur $p_{k+j}(T)$ est, selon nos notations précédentes :

$$p_{k+j}(T) = a_{-(k+j)} I + \ldots + a_{-(k+j)+m} T^m + \ldots$$

Démonstration de la proposition 3.

LEMME 6. *Il existe un entier $j \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\|p'_j(\mathcal{U})\,(\mathcal{U} y_0)\| \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

et

$$\|p'_{k+j}(\mathcal{U})\,(\mathcal{U} y_k) - p'_j(\mathcal{U})\,(\mathcal{U} y_0)\| \leqslant \frac{\alpha}{4}, \quad \forall k.$$

Démonstration. On sait (prop. 1) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|p_m\| \geqslant \alpha, \ \forall m \geqslant m_0, \text{ c'est-à-dire } \|p_m(T)\,(y_0)\| \geqslant \alpha.$$

On en déduit, d'après le lemme 4, qu'il existe m_1 tel que $\forall m \geqslant m_1$,

$$\|p'_m(\mathcal{U})\,(y_0)\| \geqslant \frac{3\alpha}{4}.$$

Mais comme $p'_{m+1}(\mathcal{U})(y_0) - p'_m(\mathcal{U})(\mathcal{U} y_0) = a_{-(m+1)} y_0$, il existe m_2 tel que si $m \geqslant m_2$,

$$\|p'_m(\mathcal{U})\,(\mathcal{U} y_0)\| \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

On peut écrire, $\forall k, j \in \mathbf{N}$

$$p'_{k+j}(\mathcal{U})\,(y_k) = a_{-(k+j)} y_k + \ldots + a_{-j}\, \mathcal{U}^k y_k + \ldots + a_{-(k+j)+m}\, \mathcal{U}^m y_k + \ldots + a_0\, \mathcal{U}^{k+j} y_k + \ldots$$

Mais on a, par hypothèse

$$\|\mathcal{U}^k y_k - y_0\| < \frac{\alpha}{8M^2} \leqslant \frac{\alpha}{8M}$$

et donc, $\forall l \geqslant 0$,

$$\|\mathcal{U}^{k+l} y_k - \mathcal{U}^l y_0\| \leqslant \frac{\alpha M}{8M^2} = \frac{\alpha}{8M},$$

d'où l'on déduit :

$$\|(a_{-j}\mathcal{U}^k y_k + \ldots + a_{-j+l}\mathcal{U}^{k+l} y_k + \ldots) - (a_{-j} y_0 + \ldots + a_{-j+l}\mathcal{U}^l y_0 + \ldots)\|$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |a_{-j+l}| \|\mathcal{U}^{k+l} y_k - \mathcal{U}^l y_0\| < \frac{\alpha}{8M},$$

et ce, pour tout $j \in \mathbf{N}$.

On a donc :

$$\|(a_{-j}\mathcal{U}^k y_k + \ldots + a_{-j+l}\mathcal{U}^{k+l} y_k + \ldots) - p_j'(\mathcal{U})(y_0)\| < \frac{\alpha}{8M}, \quad \forall k, j \in \mathbf{N}.$$

Mais par ailleurs :

$$\|a_{-(k+j)} y_k + a_{-(k+j)+1}\mathcal{U} y_k + \ldots + a_{-j-1}\mathcal{U}^{k-1} y_k\| \leqslant C(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k |a_{-(k+j)}|$$

et il résulte immédiatement des estimations faites sur les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ que cette quantité tend vers 0 lorsque $j \to +\infty$; on peut donc la rendre inférieure à $\alpha/8M$ en prenant j assez grand. Pour cet entier j, on a donc, $\forall k \in \mathbf{N}$:

$$\|p_{k+j}'(\mathcal{U})(y_k) - p_j'(\mathcal{U})(y_0)\| < \frac{\alpha}{4M}, \tag{12'}$$

et donc

$$\|p_{k+j}'(\mathcal{U})(\mathcal{U} y_k) - p_j'(\mathcal{U})(\mathcal{U} y_0)\| < \frac{\alpha}{4};$$

le lemme en résulte aussitôt, si on choisit $j \geqslant m_2$.

La suite $\{p_{k+j}'(\mathcal{U})(y_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ est donc bornée, d'après (12′) si j est ainsi choisi. Si $\mathcal{U}$ est faiblement compact, les images $\{p_{k+j}'(\mathcal{U})(\mathcal{U} y_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ possèdent une sous-suite faiblement convergente vers un $z_0 \in E$; ce point z_0 vérifie aussi

$$\|z_0 - p_j'(\mathcal{U})(\mathcal{U} y_0)\| < \frac{\alpha}{4}$$

et il résulte de (12) que $z_0 \neq 0$.

On en déduit qu'il existe une suite d'entiers $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement croissante, une suite de réels $\alpha_i \geqslant 0$, avec $\forall n$, $\sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_i = 1$, tels que

$$\left\| \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p'_{k+j}(\mathcal{U})\,(\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k) - \mathcal{U}^{m_{n+1}} z_0 \right\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Mais $\mathcal{U}^{m_{n+1}} z_0 - T^{m_{n+1}} z_0 \to 0$, et

$$\left\| \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p'_{k+j}(\mathcal{U})\,(\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k) - \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p_{k+j}(T)\,(\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k) \right\|$$
$$\leqslant \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} |\alpha_k|\, \|p'_{k+j}(\mathcal{U}) - p_{k+j}(T)\|_{\mathrm{op}} \|\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k\|_E.$$

Mais

$$\|\mathcal{U}^{m_{n+1}+1} y_k\| \leqslant \|\mathcal{U}^{m_{n+1}-k+1}\|_{\mathrm{op}} \|\mathcal{U}^k y_k\| \leqslant 2M,$$

et $\|p'_{k+j}(\mathcal{U}) - p_{k+j}(T)\|_{\mathrm{op}} \to 0$, $k \to +\infty$ par un calcul analogue à celui du lemme 4. Ceci prouve la proposition 3.

Si $m_n + 1 \leqslant k \leqslant m_{n+1}$, nous poserons :

$$y'_k = \mathcal{U}^{m_n+1} y_k.$$

On a vu que

$$\|y'_k\| \leqslant 2M, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{13}$$

§ 4. Sous-espaces hyperinvariants

Nous allons maintenant reprendre la démonstration simultanée des théorèmes 1 et 2.

PROPOSITION 4. *Soient f et g deux fonctions de $A(\mathbf{T})$, à supports disjoints. On note $(b_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier de f, $(a_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ ceux de g. On a, dans B, $\forall m, n \in \mathbf{N}$:*

$$\|\varphi_m(f)\cdot\varphi_n(g)\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|f\|_{A(\mathbf{T})} \cdot \sum_{k<0} |a_{k-m}| + \|g\|_{A(\mathbf{T})} \sum_{j<0} |b_{j-m}|.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi'_m(f)(\theta) = \sum_{k<-m} b_k e^{i(k+m)\theta},$$
$$\varphi'_n(g)(\theta) = \sum_{j<-n} a_j e^{i(j+n)\theta}.$$

Puisque f et g sont à supports disjoints, on a :

$$(\varphi_m(f) + \varphi'_m(f))\,(\varphi_n(g) + \varphi'_n(g)) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbf{N},$$

et donc, puisque $A(\mathbf{T})$ est une algèbre :

$$\|\varphi_m(f)\cdot\varphi_n(g)\|_{A(\mathbf{T})}\leqslant\|\varphi_m'(f)\|_{A(\mathbf{T})}\cdot\|g\|_{A(\mathbf{T})}+\|\varphi_m(f)\|_{A(\mathbf{T})}\cdot\|\varphi_n'(g)\|_{A(\mathbf{T})}$$

d'où la proposition résulte immédiatement, puisque

$$\|\varphi_m(f)\|_{A(\mathbf{T})}\leqslant\|f\|_{A(\mathbf{T})}$$

et

$$\|\psi_m(f)\cdot\psi_n(g)\|_{\mathrm{op}}\leqslant\|\varphi_m(f)\cdot\varphi_n(g)\|_{A(\mathbf{T})}.$$

Il résulte donc de la proposition 4 que, avec nos notations précédentes :

$$\|h_m p_n\|_{\mathrm{op}}\to 0,\quad m,n\to+\infty$$

ou encore

$$\|h_m(T)\cdot p_n(T)\|_{\mathrm{op}}\to 0,\quad m,n\to+\infty.$$

LEMME 7. *On a, pour toute suite croissante d'entiers ν_m,*

$$\|x^{\nu_m}h_m\|_B\geqslant\frac{\alpha}{2},\quad \text{si } m\geqslant m_0.$$

Démonstration. D'après la proposition 1, on a $\|h_m\|_B\geqslant\alpha$ si $m\geqslant m_0$. Mais on peut écrire :

$$\|x^{\nu_m}h_m-h_{m+\nu_m}\|\leqslant\sum_{j<-m}|b_j|$$

et ce second membre peut être rendu inférieur à $\alpha/2$ en choisissant m assez grand.

Nous pouvons maintenant achever les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Fin de la démonstration du théorème 1. Considérons le sous-espace vectoriel de E :

$$F=\{z\in E;\ T^m h_m(T)z\to 0,\quad m\to\infty\}.$$

C'est un sous-espace fermé (car $\|T^m h_m(T)\|_{\mathrm{op}}\leqslant 1$, $\forall m$), hyper-invariant pour T. Il ne contient pas le point y_0, d'après le lemme 7, et n'est donc pas l'espace tout entier. Reste à voir qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$. Pour cela, nous allons montrer qu'il contient le point z_0 donné par la proposition 3.

On a en effet :

$$\|T^m h_m(T)z_0\|\leqslant\|h_m(T)\|_{\mathrm{op}}\|p_m(T)(y_0)-T^m z_0\|+\|h_m(T)p_m(T)\|_{\mathrm{op}}\|y_0\|.$$

Mais $\|h_m(T)\|_{\mathrm{op}}\leqslant 1$, $p_m(T)y_0-T^m z_0\to 0$ d'après la proposition 2 et $\|h_m(T)p_m(T)\|_{\mathrm{op}}\to 0$ d'après la proposition 4; ceci achève la démonstration du théorème 1.

Fin de la démonstration du théorème 2. De la même façon, considérons :

$$G = \{z,\ T^{m_n+1} h_n(T) z \to 0\},$$

où les (m_n) sont les entiers donnés par la proposition 3. C'est un sous-espace fermé hyper-invariant, qui ne contient pas y_0 d'après le lemme 7, mais qui contient le point z_0 donné par la proposition 3, car :

$$\|T^{m_n+1}h_n(T)(z_0)\| \leqslant \left\| h_n(T)\left(\sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p_{k+j}(T)(y'_k) - T^{m_n+1}z_0\right)\right\| + \left\| h_n(T)\left[\sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p_{k+j}(T)(y'_k)\right]\right\|.$$

Mais le premier terme tend vers 0 en vertu de la proposition 3, et, pour le second, on peut écrire :

$$\left\| h_n(T) \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} \alpha_k p_{k+j}(T)(y'_k)\right\| \leqslant \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} |\alpha_k| \, \|h_n(T)\, p_{k+j}(T)\|_{\mathrm{op}} \|y'_k\|$$

et $\|y'_k\| \leqslant 2M$ d'après (13), tandis que

$$\|h_n(T) p_{k+j}(T)\|_{\mathrm{op}} \to 0, \quad n \to \infty,\ k \geqslant m_n + 1,$$

d'après la proposition 4.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Si on s'intéresse seulement à l'opérateur T lui-même, on peut faire la constatation suivante : le sous-espace invariant non trivial que nous obtenons pour cet opérateur est engendré par les itérés d'un élément $p \in B$, $p \neq 0$, pour lequel il existe une suite $(h_m)_{m\in\mathbf{N}}$ avec $\|h_m\|_{\mathrm{op}} \leqslant C$, $\|h_m\| \geqslant \alpha$, et $h_m p \to 0$.

Dans le cas particulier du shift sur $l^2(\mathbf{Z})$ $(Te_n = e_{n+1},\ \forall n \in \mathbf{Z})$, les sous-espaces invariants obtenus par cette méthode sont les suivants : ce sont les sous-espaces engendrés par les itérés d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, qui est constituée des coefficients de Fourier d'une fonction f s'annulant identiquement sur un intervalle du tore; ce ne sont pas les sous-espaces constitués des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour lesquelles $a_n = 0$ si $n \leqslant n_0$ $(n_0 \in \mathbf{Z})$.

Nous allons maintenant donner les limites de la méthode que nous venons de développer.

§ 5. Sous-espaces invariants ou hyper-invariants de type fonctionnel

Soit $f \in A(\mathbf{T})$, non identiquement nulle. On écrit sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ik\theta}.$$

Si T est de norme 1, on définit une suite d'opérateurs en posant

$$h_n(T) = \sum_{k \geqslant -n} a_k T^{k+n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

et on a

$$\|h_n(T)\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|f\|_{A(\mathbf{T})} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Le sous-espace vectoriel

$$F = \{z \in E, \ h_n(T)z \to 0, \quad n \to +\infty\}$$

est alors fermé, et, de toute évidence, il est hyper-invariant pour T.

Ce sous-espace n'est pas E tout entier s'il existe y_0 tel que $h_n(T)y_0 \not\to 0$ (et ceci peut toujours être réalisé si T vérifie $\mathfrak{H}$, comme le montre la proposition 1); il n'est pas réduit à $\{0\}$ s'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $h_n(T)z_0 \to 0$. Si ces conditions sont satisfaites, nous dirons que nous sommes en présence d'un sous-espace hyper-invariant non trivial de type fonctionnel.

Les théorèmes 1 et 2 nous ont permis d'obtenir des sous-espaces de type fonctionnel. On peut évidemment se demander si tout opérateur vérifiant ($\mathfrak{H}$) ne possède pas ce type de sous-espace invariant, et si les restrictions (2) et (3) que nous avons imposées sont bien nécessaires.

Le théorème qui suit résout ce problème : non seulement ces conditions sont nécessaires (pour obtenir ce type de sous-espace, répétons-le), mais encore elles sont les meilleures possibles (ce qui répond à une question posée par C. Foiaş).

THÉORÈME 3. *Pour toute suite croissante $(\varrho_n)_{n \in \mathbf{N}}$, satisfaisant*

$$\varrho_{m+n} \leqslant \varrho_m \cdot \varrho_n \ \forall m, n \in \mathbf{N}, \quad \varrho_n \geqslant 1 \ \forall n \in \mathbf{N},$$

et

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} = +\infty,$$

on peut trouver un opérateur T, vérifiant $\mathfrak{H}$, inversible, tel que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \ \|T^{-k}\| = \varrho_k; \ \forall x, \ \inf_{k \in \mathbf{N}} \frac{\|T^{-k}x\|}{\varrho_k} > 0,$$

et qui ne possède aucun sous-espace invariant non trivial de type fonctionnel.

Démonstration. Soit $(\varrho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite vérifiant les conditions précédentes. Convenons, pour simplifier les notations, que $\varrho_0 = 1$. Posons $v_1 = 1/\varrho_1, \ldots, v_l = \varrho_{k-1}/\varrho_k, \ldots$, (on a $0 < v_k \leqslant 1$,

$\forall k$). L'opérateur annoncé sera un « shift à poids » sur $l^2(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire un opérateur défini par :

$$Te_k = w_k e_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

($(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est la base canonique de $l^2(\mathbf{Z})$).

Pour notre exemple, les coefficients w_k valent :

$$\begin{cases} w_k = 1 & \text{si } k \geqslant 0 \\ w_k = v_{-k} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Il est évident que T est de norme 1 et qu'il vérifie $\mathfrak{H}$ (les poids valant 1 du côté positif).

LEMME 8. *On a, pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $\|T^{-k}\| = \varrho_k$, *et*, $\forall x \neq 0 \; \exists\, C(x) > 0$ tel que

$$\forall k, \; \|T^{-k}x\| \geqslant C(x)\varrho_k.$$

Démonstration. Soit $x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n e_n$. On vérifie immédiatement que

$$T^{-k}x = \sum_n \alpha_n \frac{1}{w_{n-1} \dots w_{n-k}} e_{n-k},$$

et donc que

$$\|T^{-k}x\|^2 = \sum_{n\leqslant 0} |\alpha_n|^2 \left(\frac{\varrho_{k-n}}{\varrho_{-n}}\right)^2 + |\alpha_1|^2 \varrho_{k-1}^2 + \dots + |\alpha_{k-1}|^2 \varrho_1^2 + \sum_{n\geqslant k} |\alpha_n|^2.$$

Les assertions du lemme en résultent immédiatement, en utilisant la croissance de la suite $(\varrho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et la propriété $\varrho_{m+n} \leqslant \varrho_m \cdot \varrho_n$. Il nous reste à montrer que T, ainsi défini, ne possède aucun sous-espace invariant non trivial de type fonctionnel.

Soit $f \in \mathbf{A}(\mathbf{T})$, non identiquement nulle; et $h_n(T) = \sum_{k\geqslant -n} a_k T^{k+n}$. Supposons qu'il existe $z \in l^2(\mathbf{Z})$ tel que $h_n(T)z \to 0$, $n \to +\infty$; nous allons voir que $z = 0$, ce qui démontre bien le théorème.

Pour tout $p \in l^2(\mathbf{Z})$, nous notons $(\varrho_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ ses coordonnées, et nous désignons par p' l'élément de $l^2(\mathbf{Z})$ défini par :

$$\begin{aligned} p'_k &= p_k & \text{si } k \geqslant 0 \\ &= w_{-1} \dots w_k p_k & \text{si } k < 0. \end{aligned}$$

Notons T_0 le shift usuel sur $l^2(\mathbf{Z})$ ($T_0 e_n = e_{n+1}$, $\forall n$).

LEMME 9. *Pour tout* $p \in l^2(\mathbf{Z})$, *on a :*

$$h_n(T)p \to 0, \; n \to +\infty \Leftrightarrow h_n(T_0)p' \to 0, \; n \to +\infty.$$

Démonstration. La j-ème coordonnée de $T^k p$, notée $(T^k p)(j)$, vaut :

$$p_{j-k} w_{j-k} w_{j-k+1} \dots w_{j-1}.$$

La j-ème coordonnée de $h_n(T)p$ vaut donc :

$$(h_n(T)p)(j) = a_{-n}p_j + \dots + a_{-n+k}\, p_{j-k}\, w_{j-k} \dots w_{j-1} + \dots$$

et, si $j \geqslant 0$, ceci s'écrit :

$$(h_n(T)p)(j) = a_{-n}\, p_j + \dots + a_{-n+j}\, p_0 + a_{-n+j+1}\, p_{-1} w_{-1} + \dots + a_{-n+j+l}\, p_{-l} w_{-l} \dots w_{-1} + \dots.$$

Il est immédiat de vérifier que, pour $j \geqslant 0$, la j-ème coordonnée de $h_n(T_0)p'$ est donnée par la même formule. Mais comme par ailleurs

$$\begin{cases} \sum_{j<0} |(h_n(T)\,p)\,(j)|^2 \to 0, & n \to +\infty, \\ \sum_{j<0} |(h_n(T_0)\,p')\,(j)|^2 \to 0, & n \to +\infty, \end{cases}$$

le lemme en résulte aussitôt.

Il résulte du lemme que $h_n(T_0)z' \to 0$, $n \to +\infty$.

LEMME 10. *On a, pour tout* $m \in \mathbf{Z}$, $\sum_{j\in\mathbf{Z}} a_{m-j} z'_j = 0$.

Démonstration. Pour $m \in \mathbf{Z}$, la $n+m$-ème coordonnée de $h_n(T_0)z'$ s'écrit :

$$(h_n(T_0)\,z')\,(n+m) = \sum_{j \leqslant m+n} a_{m-j}\, z'_j$$

et, comme $|(h_n(T_0)z')(n+m)| \to 0$, $n \to +\infty$ le lemme en résulte aussitôt.

Posons $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} z'_k e^{ik\theta}$. On obtient une fonction de $L^2(\mathbf{T})$, et le lemme 3 signifie que cette fonction est orthogonale, dans $L^2(\mathbf{T})$, aux fonctions $e^{im\theta} f$, $\forall m \in \mathbf{Z}$. Comme $f \in A(\mathbf{T})$, f est continue, et $\varphi \bar{f} \in L^2$. On doit donc avoir $\varphi \bar{f} = 0$ p.p. Mais on a supposé f non identiquement nulle : il y a donc un intervalle ouvert sur lequel f ne s'annule pas; φ est donc nulle p.p. sur cet intervalle. Il nous reste à voir que ceci implique que φ est identiquement nulle.

On a, si $k < 0$,

$$\begin{aligned} z'_k &= w_{-1} \dots w_k\, z_k, \quad \text{et } (z_k) \in l^2 \\ &= \frac{1}{\varrho_{-k}}\, z_k. \end{aligned}$$

Considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par :

$$\alpha(t) = \log \varrho_n \quad \text{si } n \leqslant t < n+1 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

on obtient une fonction positive croissante, vérifiant

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = +\infty$$

et on a $|z'_{-k}| \leqslant Ce^{-\alpha(k)}$, pour $k \geqslant 0$.

Il résulte alors d'un théorème de N. Levinson ([5]) p. 74, ou [6]) que φ est identiquement nulle.

Nous voyons ainsi que, pour obtenir des sous-espaces de type fonctionnel, les hypothèses à imposer sont bien des restrictions sur la croissance d'une suite de points qui sont, en gros, les itérés par T^{-1} (lorsque celui-ci existe) d'un point donné. Il faut noter, à cet égard, que le résultat de Colojoară-Foiaş, dans le cas où T et ${}^tT$ vérifient $\mathfrak{H}$, n'est qu'un cas particulier du théorème 2 : il est en effet facile de démontrer (comme nous l'avons fait dans [2]), que dans ce cas, il existe un point y_0 de norme 1 et une suite de points y_n, de norme bornée, tels que $T^n y_n \to y_0$, $n \to +\infty$.

Je tiens à remercier MM. A. Atzmon, C. Foiaş, J. L. Krivine, M. Zeller-Meïer, B. Maurey pour leurs observations et commentaires, J. P. Kahane, qui m'a aidé à mettre les pages précédentes sous leur forme présente, et surtout, bien sûr, P. Enflo, qui m'a introduit à ces questions et m'a suggéré l'approche développée ici.

Bibliographie

[1] Atzmon, A., Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces. *Acta Math.*, 144 (1980), 27–63.

[2] Beauzamy, B., Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach : quelques résultats positifs. *Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique* (Palaiseau-France) 1978–79, exposé 13.

[3] Colojoară, I. & Foiaş, C., *General spectral theory*. Gordon and Breach, 1968.

[4] Domar, Y., Harmonic analysis based on certain commutative algebras. *Acta Math.*, 96 (1956), 1–66.

[5] Levinson, N., *Gaps and density theorems*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, New York, 1940.

[6] —— Vanishing functions. *Proc. London Math. Soc., Ser. 2*, 41 (1936), 393–407.

[7] Kahane, J. P., *Séries de Fourier absolument convergentes*. Springer Verlag, 1970.

[8] Paley, R. & Wiener, N., *Fourier transforms in the complex domain*. New York, 1934.

[9] Wermer, J., The existence of invariant subspaces. *Duke Math. J.*, 19 (1952), 615–622.

Reçu le 3 Juin 1979