ISOMORPHISMES ENTRE ESPACES H_1

PAR

BERNARD MAUREY

Université Paris VII, Paris, France

Introduction

L'espace de Hardy H_1 des fonctions holomorphes F dans le disque unité telles que $\sup_{r<1} \int |F(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty$ a été étudié depuis de nombreuses années. Plus récemment, après la découverte de la dualité H_1 $-$BMO, une théorie parallèle des espaces H_1 de martingales s'est développée. Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on introduit l'espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ des $\mathcal{F}_n$-martingales dont la fonction maximale est intégrable (voir la section 0 pour les définitions précises). Nous étudierons en particulier le cas où les $(\mathcal{F}_n)$ sont les algèbres dyadiques $(\mathcal{A}_n)$ sur $[0, 1]$, et nous appellerons $H_1(\delta)$ l'espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ obtenu dans ce cas.

La similitude des résultats obtenus dans la théorie classique et dans la théorie « martingales » amène à se poser la question de la comparaison de H_1 et $H_1(\delta)$ en tant qu'espaces de Banach. Le résultat essentiel de notre article est le suivant :

THÉORÈME. *Les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes.*

On sait depuis Paley que l'espace L_p, $1 < p < \infty$, admet le système de Haar comme base inconditionnelle. Au contraire L_1 ne peut pas se plonger dans un espace à base inconditionnelle. Le cas intermédiaire de l'espace H_1 est resté ouvert, mais le théorème précédent apporte une réponse, puisque $H_1(\delta)$ admet aussi le système de Haar pour base inconditionnelle (voir section 0). On obtient par conséquent :

COROLLAIRE. *L'espace H_1 admet des bases inconditionnelles.*

Nous n'expliciterons pas la base de H_1 dont l'existence résulte du théorème. Cela serait théoriquement possible, mais le système de fonctions ainsi obtenu serait trop compliqué pour être pratiquement utilisable. Le problème suivant reste donc posé :

Problème. Trouver une base inconditionnelle explicite pour H_1.[1]

La démonstration du théorème principal est contenue dans les sections 1, 2, et 3. Pour montrer que deux espaces de Banach X et Y sont isomorphes, il suffit souvent de démontrer des propriétés apparemment plus faciles à vérifier : supposons en effet que X soit isomorphe à un sous-espace complémenté de Y, c'est-à-dire que Y soit isomorphe à un produit $X \times U$, et que Y soit isomorphe à un sous-espace complémenté de X, c'est-à-dire $X \sim Y \times V$ (nous emploierons le signe $\sim$ pour noter l'isomorphisme de deux espaces). Faisons l'hypothèse supplémentaire que X et Y soient isomorphes à leurs carrés respectifs $X \times X$ et $Y \times Y$. Nous pourrons écrire :

$$X \sim Y \times V \sim Y \times Y \times V \sim Y \times X \sim X \times U \times X \sim X \times U \sim Y,$$

ce qui montre que X et Y sont isomorphes. Nous appliquerons cette démarche aux espaces H_1 et $H_1(\delta)$. Nous vérifierons d'abord en (0.8) que H_1 est isomorphe à $H_1 \times H_1$ et $H_1(\delta)$ à $H_1(\delta) \times H_1(\delta)$. Nous montrerons ensuite que $H_1(\delta)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H_1 dans la section 2, et finalement que H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1(\delta)$ dans la section 3. La démonstration du théorème sera alors complète.

Passons maintenant en revue de façon plus détaillée le contenu des sections. La section 0 contient des notations et des rappels concernant H_1, BMO et les espaces H_1 de martingales. La section 1 décrit certains plongements complémentés de $H_1(\delta)$ dans un espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ (théorème 1.4). Ces plongements complémentés sont utilisés dans la section 2 pour montrer que $H_1(\delta)$ se plonge de façon complémentée dans H_1. Cette deuxième section présente un mélange des arguments de martingales de la section 1 et d'arguments d'analyse harmonique concernant l'existence de certains multiplicateurs de H_1 (lemme 2.1). Dans la section 3 on utilise les rapports bien connus entre les fonctions de H_1 et les martingales H_1 du mouvement brownien dans le disque unité, ainsi qu'une discrétisation convenable des tribus du brownien, pour montrer que H_1 se plonge de façon complémentée dans $H_1(\delta)$.

Les sections 4 et 5 contiennent des résultats complémentaires concernant les espaces H_1 de martingales et les espaces $H_1(\mathbf{R}^n)$. Nous montrons dans la section 4 (théorème 4.14) que l'espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ correspondant à une suite $(\mathcal{F}_n)$ d'algèbres finies est isomorphe à H_1 dès que la suite $(\mathcal{F}_n)$ vérifie $\lim_n \delta_n = 0$, où :

$$\delta_n = \sup \{P(A);\ A \text{ atome de } \mathcal{F}_n\}.$$

Nous considérons dans la section 5 les espaces $H_1(\mathbf{R}^n)$ et $H_1(S^n)$, $n \geqslant 1$, et nous montrons au théorème 5.4 que ces espaces sont tous isomorphes à H_1. Ici encore, il suffit de

[1] Voir la note ajoutée à la correction des épreuves.

montrer, par exemple, que H_1 et $H_1(S^n)$ sont chacun isomorphe à un sous-espace complémenté de l'autre. On voit assez facilement que H_1 se plonge de façon complémentée dans $H_1(S^n)$, et il est facile de généraliser les résultats de la section 3 pour montrer que $H_1(S^n)$ se plonge de façon complémentée dans $H_1(\delta)$ en utilisant le mouvement brownien dans la boule unité de $\mathbf{R}^{n+1}$. La section 5 contient également un résultat concernant l'espace $H_1(T^2)$ des fonctions F holomorphes dans le bidisque $D \times D$ telles que

$$\sup_{r_1, r_2 < 1} \int |F(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})| \, d\theta_1 \, d\theta_2 < \infty.$$

Nous montrons au théorème 5.6 que $H_1(T^2)$ est isomorphe à l'espace $H_1(\delta^2)$ des martingales dyadiques à deux indices. Par contre nous ne savons pas si H_1 et $H_1(T^2)$ sont isomorphes (question 5.7).

Je tiens à remercier A. Pełczynski pour les encouragements qu'il m'a prodigués et l'attention qu'il m'a consacrée pendant la phase initiale de ce travail.

Je remercie également W. B. Johnson qui m'a aidé à clarifier la section 2, et Svante Janson pour des conversations concernant le contenu de la section 5.

Les résultats principaux de cet article ont été annoncés dans deux notes ([11] et [12]).

0. Généralités. Notations

Nous utiliserons les notations classiques des probabilités : si $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un espace un espace de probabilité et si f est une variable aléatoire complexe P-intégrable sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, l'espérance $\int f(\omega)\,dP(\omega)$ de f sera désignée par Ef. Si $\mathcal{G}$ est une sous-σ-algèbre de $\mathfrak{F}$, l'espérance conditionnelle de f sur $\mathcal{G}$ sera notée $E(f \mid \mathcal{G})$. La norme de f dans $L_p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sera notée $\|f\|_p$.

Supposons donnée une suite croissante $(\mathfrak{F}_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, de sous-σ-algèbres de $\mathfrak{F}$. Une $\mathfrak{F}_n$-martingale est une suite (f_n) de variables aléatoires (complexes) intégrables sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ telle que $f_n = E(f_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On définit l'espace $H_1[\Omega, (\mathfrak{F}_n), P]$, en abrégé $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, comme l'espace des martingales (complexes) (f_n) telles que :

$$\left(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P).$$

On sait (voir [6]) que cette condition est équivalente à :

$$\sup_{n \geqslant 0} |f_n| \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P).$$

Désignons par $\mathfrak{F}_\infty$ la σ-algèbre $\bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ engendrée par l'algèbre $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. Sous la condition précédente, on sait que la martingale (f_n) converge dans $L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vers une limite f, qui est nécessairement $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Inversement, la donnée de f permet de retrouver la martingale (f_n) par $f_n = E(f \mid \mathcal{F}_n)$. On peut donc considérer $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ comme un espace de fonctions $\mathcal{F}_\infty$-mesurables, l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ telles que la martingale $f_n = E(f \mid \mathcal{F}_n)$ appartienne à $H_1[(\mathcal{F}_n)]$. Cet espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ peut être muni de deux normes équivalentes :

$$\|f\|_{H_1,1} = E\left(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.1}$$

$$\|f\|_{H_1,2} = E \sup |f_n| \tag{0.2}$$

Rappelons la construction du système usuel de Haar sur $[0, 1]$. On pose $h_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ on définit des fonctions $h_{n,i}$ sur $[0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, par :

$$h_{n,i} = 2^{(1-n)/2}(\mathbf{1}_{[(2i-2)2^{-n},(2i-1)2^{-n}]} - \mathbf{1}_{[(2i-1)2^{-n},2i\cdot 2^{-n}]})$$

On désignera par $\mathcal{A}_n$ l'algèbre de parties de $[0, 1]$ engendrée par les fonctions $h_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, c'est-à-dire aussi l'algèbre engendrée par les intervalles $[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. La suite $(\mathcal{A}_n)$ est croissante, et $\mathcal{A}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ est la σ-algèbre borélienne de $[0, 1]$. Munissons $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue λ. L'espace $H_1[[0, 1], (\mathcal{A}_n), \lambda]$ sera simplement noté $H_1(\delta)$. Si on munit $H_1(\delta)$ de la norme $(0, 1)$, on voit que h_0 et les $(h_{n,i})$ constituent une base 1-inconditionnelle de $H_1(\delta)$, c'est-à-dire que si $\alpha_0, \theta_0, \alpha_{n,i}, \theta_{n,i}$ sont des nombres complexes avec $|\theta_0| = |\theta_{n,i}| = 1$, on a :

$$\|\alpha_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i} h_{n,i}\|_{H_1} = E(|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i} |\alpha_{n,i} h_{n,i}|^2)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha_0 \theta_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i} \theta_{n,i} h_{n,i}\|_{H_1}.$$

Dans le cas d'une famille continue $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-σ-algèbres de $\mathcal{F}$, on posera $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$, et on définira l'espace $H_1[(\mathcal{F}_t)]$ comme l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ telles que :

$$\|f\|_{H_1} = E \sup_{t \geq 0} |f_t| < \infty, \text{ où } f_t = E(f \mid \mathcal{F}_t).$$

(On peut aussi généraliser la norme (0.1), mais c'est plus compliqué et nous ne l'utiliserons pas dans la suite.)

Rappelons que le dual de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ s'identifie à l'espace des martingales BMO, c'est-à-dire aussi l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ telles que

$$\max \{|f_0|, \sup_{n \geq 1} (E(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n))^{\frac{1}{2}}\} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P),$$

où l'on a posé $f_n = E(f \mid \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$.

(On remarquera que $E(|f - f_{n-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n) = E(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^2 \mid \mathcal{F}_n)$. Cette relation sera utilisée par la suite.)

On peut normer l'espace $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]$ par :

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \|\max\{|f_0|, \sup_{n\geqslant 1} (E(|f-f_{n-1}|^2|\mathfrak{F}_n))^{\frac{1}{2}}\}\|_\infty \tag{0.3}$$

L'espace BMO correspondant aux σ-algèbres $(\mathcal{A}_n)$ du système de Haar sera noté $\mathrm{BMO}(\delta)$.

La dualité $H_1-\mathrm{BMO}$ s'accompagne d'une difficulté : en général, le produit fg n'est pas intégrable lorsque $f\in H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, $g\in\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]$. Cependant, comme $L_p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ est contenu dans $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ pour $p>1$, et comme par ailleurs $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]$ est contenu dans tous les $L_q(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ pour $q<\infty$, nous pourrons écrire :

$$|E(fg)| \leqslant C\|f\|_{H_1}\cdot\|g\|_{\mathrm{BMO}} \quad \text{si} \quad g\in L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P) \tag{0.4}$$

$$\text{ou si} \quad f\in L_p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P) \quad \text{pour un } p>1.$$

et inversement :

$$\|f\|_{H_1} \leqslant C \sup\{|E(fg)|;\, g\in L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P),\ \|g\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant 1\} \tag{0.5}$$

$$f\in L_p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P),\ p>1,\ \|f\|_{H_1} \leqslant C\sup\{|E(fg)|;\ \|g\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant 1\}.$$

Dans le cas de familles continues $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de σ-algèbres, nous nous contenterons du cas de fonctions $f\in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ telles que la martingale correspondante $(f_t)_{t\geqslant 0}$ soit à trajectoires continues. On définit alors la norme $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_t)]$ de f par :

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \|\max\{|f_0|, \sup_{t\geqslant 0} (E(|f-f_t|^2|\mathfrak{F}_t))^{\frac{1}{2}}\}\|_\infty$$

Passons maintenant à quelques rappels concernant l'espace de Hardy H_1. C'est l'espace des fonctions F holomorphes dans le disque unité du plan complexe, et telles que :

$$\sup_{r<1}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

On sait que F admet alors une valeur limite $F(e^{i\theta})$ définie presque partout sur le cercle unité T, et intégrable. Inversement, la donnée de $F(e^{i\theta})$ détermine F dans le disque unité. On peut donc considérer H_1 comme un espace de fonctions (complexes) sur T. On normera F dans H_1 par :

$$\|F\|_{H_1} = \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \|F\|_1.$$

Nous utiliserons occasionnellement la densité de H_2 dans H_1, où H_2 est le sous-espace des fonctions $f\in L_2(T, d\theta/(2\pi))$ qui admettent une représentation $f=\sum_{n=0}^\infty a_n e^{in\theta}$, avec $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2<\infty$.

Nous désignerons par BMO l'espace des fonctions G holomorphes dans le disque unité et admettant une valeur limite $G(e^{i\theta})$ sur le cercle unité, presque partout définie, telles que $\|G\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$, où :

$$\|G\|_{\mathrm{BMO}} = \left|\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right| + \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I \left|G(e^{i\theta}) - \frac{1}{|I|}\int_I G(e^{i\lambda})\frac{d\lambda}{2\pi}\right|\frac{d\theta}{2\pi}\right\},$$

où I décrit la famille des intervalles du cercle T, et où $|I|$ désigne la mesure de I (pour la mesure $d\theta/(2\pi)$).

Un élément G de BMO définit une forme linéaire sur H_2 par

$$F \to \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,\overline{G(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

En fait pour cette dualité BMO s'identifie (antilinéairement) au dual de H_1, et les inégalités analogues à (0.4) et (0.5) sont vérifiées :

$$\left|\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\overline{G(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}\right| \leqslant C\|F\|_1\|G\|_{\mathrm{BMO}} \text{ si } G \in L_\infty\left(T, \frac{d\theta}{2\pi}\right) \tag{0.6}$$

ou si $F \in L_p\ (T, d\theta/2\pi)$ pour un $p > 1$.

(0.7) Si $F \in L_p\ (T, d\theta/2\pi)$ pour un $p > 1$,

$$\|F\|_1 \leqslant C \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,\overline{G(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}\right|;\ \|G\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1\right\}.$$

(0.8) Nous allons indiquer rapidement pourquoi H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes à leurs carrés respectifs. Le cas de H_1 est très simple. Il est clair que les sous-espaces X_1 et X_2 de H_1 qui sont respectivement les adhérences des ensembles des polynômes trigonométriques de la forme :

$$P_1(\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}\,e^{i(2n+1)\theta}$$

et

$$P_2(\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_{2n}\,e^{i2n\theta}$$

sont chacun isomorphe à H_1 et complémenté dans H_1, ($Qf(\theta) = \frac{1}{2}(f(\theta) + f(\theta+\pi))$ est une projection de H_1 sur X_2, et $(1-Q)$ une projection sur X_1.) On a donc :

$$H_1 \sim X_1 \oplus X_2 \sim H_1 \times H_1.$$

Pour $H_1(\delta)$ on peut obtenir un isomorphisme de $H_1(\delta)\times H_1(\delta)$ sur $H_1(\delta)$ de la façon suivante : si $f=(f_1, f_2)$ est un élément de $H_1(\delta)\times H_1(\delta)$, posons :

$$\alpha_i = Ef_i, g_i = f_i - Ef_i, \quad i = 1, 2.$$

On prolonge chaque g_i à l'intervalle $[-1, 2]$ en posant $g_i=0$ en dehors de $[0, 1]$, et on pose :

$$Tf(t) = \alpha_1 h_0(t) + \alpha_2 h_{1,1}(t) + g_1(2t) + g_2(2t-1).$$

On vérifiera sans trop de peine que T est un isomorphisme de $H_1(\delta)\times H_1(\delta)$ sur $H_1(\delta)$. On remarquera aussi que T fournit un isomorphisme aussi bien dans le cas de l'espace complexe $H_1(\delta)$ que dans le cas de l'espace $H_1(\delta)$ des martingales réelles.

(0.9) Notons encore que H_1 est isomorphe à ses hyperplans (fermés). Comme tous les hyperplans fermés d'un même espace sont isomorphes, il suffit de remarquer que l'application $F(z)\to zF(z)$ est une isométrie (pour la norme de H_1) qui envoie H_1 sur l'hyperplan formé des fonctions G telles que $G(0)=0$.

1. Plongements complémentés de $H_1(\delta)$ dans un espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante de σ-algèbres de parties d'un ensemble Ω, et soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, où $\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n$.

Un arbre d'ensembles compatible avec la suite $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ est une famille $(A_{n,i})$ de parties de Ω, $n=1, 2, \ldots; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ telle que :

(1) $A_{1,1}=\Omega$, et $A_{n,i}$ est réunion des ensembles disjoints $A_{n+1,2i-1}$ et $A_{n+1,2i}$.

(2) $E(\mathbf{1}_{A_{n+1,2i-1}}|\mathcal{F}_n)=\frac{1}{2}\mathbf{1}_{A_{n,i}}$.

Il résulte de ces deux propriétés que pour n fixé, les ensembles $(A_{n,i})$, $i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, réalisent une partition de Ω en ensembles $\mathcal{F}_n$-mesurables de probabilité $2^{-(n-1)}$. On désignera par $\mathcal{G}_n$ l'algèbre engendrée par les ensembles $(A_{n,i})$, $i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. On a $\mathcal{G}_n\subset\mathcal{F}_n$, et la suite $(\mathcal{G}_n)$ est croissante. On posera $\mathcal{G}_\infty=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$.

Si f est une fonction P-intégrable $\mathcal{G}_\infty$-mesurable, la propriété (2) entraîne :

$$E(f|\mathcal{F}_n) = E(f|\mathcal{G}_n). \tag{1.1}$$

L'égalité (1.1) est claire si f est $\mathcal{G}_{n+1}$-mesurable. On la démontre par récurrence lorsque f est $\mathcal{G}_{n+k}$-mesurable, $k\geq 1$, puis par passage à la limite pour $f\,\mathcal{G}_\infty$-mesurable.

On peut construire une application mesurable φ de $(\Omega, \mathcal{G}_\infty)$ dans $[0, 1]$ telle que :

$$\varphi^{-1}([(i-1)2^{-n+1}, i2^{-n+1}]) = A_{n,i}.$$

En utilisant φ, on voit que $\mathcal{G}_n$ correspond à l'algèbre $\mathcal{A}_{n-1}$ du système de Haar. Précisément, si h est une fonction intégrable sur $[0, 1]$:

$$E(h\circ\varphi \,|\, \mathcal{G}_n) = E(h\,|\,\mathcal{A}_{n-1})\circ\varphi.$$

Dans ce qui suit, nous associerons à un arbre d'ensembles $(A_{n,i})$ la suite de fonctions $u_{n,i} = P(A_{n,i})^{-\frac{1}{2}}\cdot 1_{A_{n,i}}$. Nous utiliserons sur $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ la norme (0.1).

Nous supposons donné dans tout ce paragraphe un arbre d'ensembles $(A_{n,i})$ compatible avec la suite $(\mathcal{F}_n)$.

LEMME 1.2. *Soit* $(d_{n,i})$, $n=1, 2, \ldots; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ *une suite de variables aléatoires complexes sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ *telle que :*

(a) $d_{n,i}$ *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable et* $E(d_{n,i}\,|\,\mathcal{F}_{n-1}) = 0$

(b) $|d_{n,i}| = u_{n,i}$.

On a alors pour toute suite α_0, $(\alpha_{n,i})$ *de nombres complexes, en posant* $f = \alpha_0 + \sum_{n,i}\alpha_{n,i}d_{n,i}$ *et* $g = \alpha_0 + \sum_{n,i}\alpha_{n,i}h_{n,i}$

$$\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} = \|g\|_{H_1(\delta)} \text{ et } \|f\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant \|g\|_{\mathrm{BMO}(\delta)}.$$

Démonstration. $\|f\|_{H_1} = E(|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i}|\alpha_{n,i}|^2 u_{n,i}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Il est clair qu'au moyen de l'application φ la fonction $\mathcal{G}_\infty$-mesurable $(|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i}|\alpha_{n,i}|^2 u_{n,i}^2)^{\frac{1}{2}}$ est transformée en $(|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i}|\alpha_{n,i}h_{n,i}|^2)^{\frac{1}{2}}$, et ceci explique la première partie du lemme.

D'autre part :

$$\|g\|_{\mathrm{BMO}} = \max\left\{|\alpha_0|, \sup_{n\geq 1}\left\|\left\{E\left(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}h_{k,i}|^2\,|\,\mathcal{A}_n\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty\right\}$$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \max\left\{|\alpha_0|, \sup_{n\geq 1}\left\|\left\{E\left(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2\,|\,\mathcal{F}_n\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty\right\}$$

En utilisant la propriété (1.1), on voit que :

$$E\left(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2\,|\,\mathcal{F}_n\right) = E\left(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2\,|\,\mathcal{G}_n\right)$$

et cette expression correspond au moyen de φ à l'expression $E(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}h_{k,i}|^2\,|\,\mathcal{A}_{n-1})$, dont la norme dans L_∞ est majorée par celle de $E(\sum_{k\geq n}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|\alpha_{k,i}h_{k,i}|^2\,|\,\mathcal{A}_n)$.

LEMME 1.3. *Soit* $(\tilde{d}_{n,i})$, $n=1, 2, \ldots; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, *une suite de variables aléatoires complexes sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ *telle que :*

(a) $\tilde{d}_{n,i}$ *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable et* $E(\tilde{d}_{n,i}\,|\,\mathcal{F}_{n-1}) = 0$

(b) $\| |\tilde{d}_{n,i}| - u_{n,i}\|_2 \leqslant c\, 4^{-n}$

(c) $|\tilde{d}_{n,i}| \leqslant u_{n,i} + c\, 4^{-n}$.

Pour $c>0$ assez petit, on a, en posant $f = \alpha_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i}\tilde{d}_{n,i}$ et $g = \alpha_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i} h_{n,i}$:

$$\tfrac{1}{2}\|g\|_{H_1(\delta)} \leqslant \|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant 2\|g\|_{H_1(\delta)} \quad \textit{et} \quad \|f\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant 2\|g\|_{\mathrm{BMO}(\delta)}.$$

Démonstration. Considérons l'expression :

$$B = |(|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i} |\alpha_{n,i}|^2 u_{n,i}^2)^{\frac{1}{2}} - (|\alpha_0|^2 + \sum_{n,i} |\alpha_{n,i}\tilde{d}_{n,i}|^2)^{\frac{1}{2}}|$$

On a :

$$B \leqslant (\sum_{n,i} |\alpha_{n,i}|^2 (u_{n,i} - |\tilde{d}_{n,i}|)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\max_{n,i} 2^{(1-n)/2}|\alpha_{n,i}|) \cdot (\sum_{n,i} 2^{n-1}(u_{n,i} - |\tilde{d}_{n,i}|)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On trouvera après intégration :

$$\begin{aligned} EB &\leqslant (\max_{n,i} 2^{(1-n)/2}|\alpha_{n,i}|)\,(E\sum_{n,i} 2^{n-1}(u_{n,i} - |\tilde{d}_{n,i}|)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant (\max_{n,i} 2^{(1-n)/2}|\alpha_{n,i}|) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} c^2 \cdot 4^n \cdot 4^{-2n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \tfrac{1}{2} (\max_{n,i} 2^{(1-n)/2}|\alpha_{n,i}|) \end{aligned}$$

pour c assez petit. Si on suppose que $\|g\|_{H_1} = 1$, on aura

$$\|\alpha_{n,i} h_{n,i}\|_1 = 2^{(1-n)/2}|\alpha_{n,i}| \leqslant 1, \quad \text{donc} \quad \tfrac{1}{2} \leqslant \|f\|_{H_1} \leqslant \tfrac{3}{2}.$$

Dans le cas BMO, on écrira :

$$\begin{aligned} C_n = \sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}\tilde{d}_{k,i}|^2 &\leqslant \sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}|^2 (u_{k,i} + c4^{-k})^2 \\ &\leqslant 2\sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2 + 2c^2 \sum_{k\geqslant n} 4^{-2k} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}|^2. \end{aligned}$$

Supposons que $\|g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1$. On a alors pour tout n,

$$E\left(\sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i} h_{k,i}|^2 \,|\, \mathcal{A}_n\right) \leqslant 1$$

et en particulier,

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} |\alpha_{n,i} h_{n,i}|^2 \leqslant 1, \text{ donc } \sum_{i=1}^{2^{n-1}} |\alpha_{n,i}|^2 \leqslant 1.$$

On en déduit :

$$C_n \leqslant 2\sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2 + 2c^2 \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-2k} \leqslant 2\sum_{k\geqslant n} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |\alpha_{k,i}|^2 u_{k,i}^2 + 2$$

pour c assez petit.

En utilisant le lemme 1.2, on trouve finalement :

$$E(C_n \mid \mathfrak{F}_n) \leqslant 4,$$

d'où le résultat.

Nous allons maintenant énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe : si une suite de fonctions orthogonales $(\varphi_{n,i})$ est telle que la suite des modules $(|\varphi_{n,i}|)$ est « suffisamment proche » de la suite $(u_{n,i})$, elle engendre (avec la fonction 1) un sous-espace X de $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ qui est isomorphe à $H_1(\delta)$ et qui est complémenté dans $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$.

THÉORÈME 1.4. *Soit* $(\varphi_{n,i})$, $n=1, 2, \ldots; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ *une suite de fonctions complexes dans* $L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ *telle que :*

(a) *les fonctions* $(\varphi_{n,i})$ *sont orthogonales, et* $E\varphi_{n,i}=0$, $E|\varphi_{n,i}|^2=1$

(b) $\| u_{n,i} - |\varphi_{n,i}| \|_2 \leqslant c4^{-n}$

(c) $|\varphi_{n,i}| \leqslant u_{n,i} + c4^{-n}$,

(d) $|\varphi_{n,i} - \{E(\varphi_{n,i} \mid \mathfrak{F}_n) - E(\varphi_{n,i} \mid \mathfrak{F}_{n-1})\}| \leqslant c4^{-n}$.

Lorsque $c>0$ *est suffisamment petit, l'espace fermé* X *engendré par* 1 *et par les fonctions* $(\varphi_{n,i})$ *dans* $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ *est isomorphe à* $H_1(\delta)$ *et la projection orthogonale* $Qf=(f\mid 1)1+\sum_{n,i}(f\mid\varphi_{n,i})\varphi_{n,i}$ *est bornée sur* $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$.

Démonstration. Posons pour commencer :

$$\tilde{\varphi}_{n,i} = E(\varphi_{n,i} \mid \mathfrak{F}_n) - E(\varphi_{n,i} \mid \mathfrak{F}_{n-1}).$$

La suite $(\tilde{\varphi}_{n,i})$ est une suite de différences de $\mathfrak{F}_n$-martingale qui vérifie les hypothèses du lemme 1.3 (avec c remplacé par $2c$). Nous allons montrer que les suites $(\varphi_{n,i})$ et $(\tilde{\varphi}_{n,i})$ sont équivalentes, à la fois dans $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ et dans $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]$. (L'argument que nous allons donner est bien connu : si $(\tilde{x}_n)$ est une suite basique normalisée dans un espace de Banach E et si (x_n) est une suite telle que $\sum_{n=0}^\infty \|x_n - \tilde{x}_n\|$ soit assez petit, les suites (x_n) et $(\tilde{x}_n)$ sont équivalentes.) Notons tout d'abord que lorsque c est assez petit, on a :

$$\gamma_{n,i} = \|\tilde{\varphi}_{n,i}\|_{H_1} = \|\tilde{\varphi}_{n,i}\|_1 \geqslant 2^{(1-n)/2} - 2c4^{-n} \geqslant 2^{-n/2}$$

et

$$\delta_{n,i} = \|\tilde{\varphi}_{n,i}\|_{\mathrm{BMO}} = \|\tilde{\varphi}_{n,i}\|_\infty \geqslant 2^{(n-1)/2} - 2c4^{-n} \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Posons $f=\alpha_0+\sum_{n,i}\alpha_{n,i}\varphi_{n,i}$ et $\tilde{f}=\alpha_0+\sum_{n,i}\alpha_{n,i}\tilde{\varphi}_{n,i}$. Nous aurons

$$\begin{aligned} \big|\|f\|_{H_1} - \|\tilde{f}\|_{H_1}\big| &\leqslant (\max_{n,i} \gamma_{n,i}|\alpha_{n,i}|) \cdot (\sum_{n,i} \gamma_{n,i}^{-1} \|\varphi_{n,i} - \tilde{\varphi}_{n,i}\|_{H_1}) \\ &\leqslant (\max_{n,i} \gamma_{n,i}|\alpha_{n,i}|) \sum_{n=1}^{\infty} c2^{3n/2}4^{-n} \leqslant \tfrac{1}{2} \max_{n,i} \gamma_{n,i}|\alpha_{n,i}| \end{aligned}$$

pour c suffisamment petit. Si on remarque que : $\max_{n,i} \gamma_{n,i} |\alpha_{n,i}| \leqslant \|\tilde{f}\|_{H_1}$, on déduit :

$$\tfrac{1}{2}\|\tilde{f}\|_{H_1} \leqslant \|f\|_{H_1} \leqslant 2\|\tilde{f}\|_{H_1}. \tag{1.5}$$

Dans le cas BMO, on écrira :

$$\big| \|f\|_{\mathrm{BMO}} - \|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}} \big| \leqslant (\max_{n,i} |\alpha_{n,i}|) \sum_{n,i} \|\varphi_{n,i} - \tilde{\varphi}_{n,i}\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \tfrac{1}{4} \max_{n,i} |\alpha_{n,i}|$$

pour c assez petit. Si on note que $\frac{1}{2} \max_{n,i} |\alpha_{n,i}| \leqslant \max_{n,i} \delta_{n,i} |\alpha_{n,i}| \leqslant \|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}}$, on écrit :

$$\tfrac{1}{2}\|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 2\|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{1.6}$$

L'inégalité (1.5) ci-dessus et le lemme 1.3 montrent que X est isomorphe à $H_1(\delta)$. Nous montrons pour finir que la projection orthogonale Q est bornée. Soit $g \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Nous aurons, en utilisant (0.4), (0.5), le lemme 1.3, et (1.5), (1.6) :

$$\begin{aligned}
\|Qg\|_{H_1} &= \|(g|1)\,1 + \sum_{n,i} (g|\varphi_{n,i})\,\varphi_{n,i}\|_{H_1} \leqslant 4\|(g|1)\,h_0 + \sum_{n,i} (g|\varphi_{n,i})\,h_{n,i}\|_{H_1} \\
&\leqslant 4C \sup \{\beta_0(g|1) + \sum_{n,i} \beta_{n,i}(g|\varphi_{n,i});\ \|\beta_0 + \sum_{n,i} \beta_{n,i} h_{n,i}\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1\} \\
&\leqslant 16C \sup \{\beta_0(g|1) + \sum_{n,i} \beta_{n,i}(g|\varphi_{n,i});\ \|\beta_0 + \sum_{n,i} \beta_{n,i} \varphi_{n,i}\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1\} \\
&\leqslant 16C^2\|g\|_{H_1}
\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Nous allons terminer cette section par un lemme très simple concernant les « martingales approximatives », qui sera utilisé dans le paragraphe suivant :

Lemme 1.7. *Soit* (d_n), $n=0, 1, 2, \ldots$, *une suite de variables aléatoires complexes sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ *telle que pour tout* $n \geqslant 1$, *on ait :*

$$|d_n - \{E(d_n | \mathcal{F}_n) - E(d_n | \mathcal{F}_{n-1})\}| \leqslant 2^{-n}\|d_n\|_1,$$

et

$$|d_0 - E(d_0 | \mathcal{F}_0)| \leqslant \|d_0\|_1.$$

On a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} d_n \right\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant 5 \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1.$$

Démonstration. On pose $\tilde{d}_0 = E(d_0 | \mathcal{F}_0)$ et pour $n \geqslant 1$, $\tilde{d}_n = E(d_n | \mathcal{F}_n) - E(d_n | \mathcal{F}_{n-1})$. On a $\|d_n - \tilde{d}_n\|_{H_1} \leqslant \|d_n - \tilde{d}_n\|_\infty \leqslant 2^{-n}\|d_n\|_1 \leqslant 2^{-n}A$ pour tout $n \geqslant 0$, où $A = \|(\sum_{n=0}^\infty |d_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_1$. On peut écrire :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{d}_n\right\|_{H_1} = \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{d}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_1 \leqslant A + \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n - \tilde{d}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_1$$

$$\leqslant A + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|d_n - \tilde{d}_n\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3A.$$

On achève en écrivant :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right\|_{H_1} \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{d}_n\right\|_{H_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n - \tilde{d}_n\|_\infty \leqslant 5A.$$

2. $H_1(\delta)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H_1

Le plan de cette section étant plus complexe, nous commencerons par indiquer les grandes lignes de la démonstration.

Nous utiliserons de façon essentielle une conséquence d'un résultat de E. M. Stein [16], qui sera donnée dans le lemme 2.1 : on peut construire quatre suites d'entiers (a_k, b_k, c_k, d_k) telles que $c_k \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant d_k < c_{k+1}$, $\lim (b_k - a_k) = +\infty$ et des opérateurs (Q_k) sur H_1 tels que :

(a) $Q_k(e^{in\theta}) = \begin{cases} e^{in\theta} & \text{si} \quad n \in [a_k, b_k] \\ 0 & \text{si} \quad n \notin [c_k, d_k] \end{cases}$

(b) L'opérateur $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k Q_k$ est borné sur H_1 pour tout choix de signes (ε_k).

Désignons par Z le sous-espace de H_1 engendré par les fonctions $(e^{in\theta})$, $a_k \leqslant n \leqslant b_k$, $k = 0, 1, \ldots$. On va construire par récurrence une suite $(\mathcal{B}_n)$ d'algèbres de parties de T, un arbre d'ensembles $(A_{n,i})$ compatible avec la suite $(\mathcal{B}_n)$, un système $(\varphi_{n,i})$ d'éléments de Z vérifiant une partie des conditions du théorème 1.4 et une sous-suite $R_n = Q_{k_n}$ de la suite (Q_k) tels que :

— les indices des coefficients de Fourier non nuls de $\varphi_{n,i}$ sont contenus dans $[a_{k_n}, b_{k_n}]$ (de sorte que $R_n(\varphi_{n,i}) = \varphi_{n,i}$)

— pour tout $f \in H_1$, $R_n f$ est « presque » $\mathcal{B}_n$-mesurable.

Notre idée est d'essayer d'utiliser la structure de $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ au lieu de celle de H_1. Pour $f \in H_1$, nous aimerions considérer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n f$ comme une $\mathcal{B}_n$-martingale approximative (au sens du lemme 1.7). Malheureusement, on ne peut pas supposer que $E(R_n f \mid \mathcal{B}_{n-1})$ soit petit. Cela va nous obliger à compliquer la situation, en travaillant sur $\Omega = T \times [0, 1]$. Considérons sur Ω les algèbres $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{A}_n (\mathcal{A}_n$ du système de Haar) et posons :

$$\psi_{n,i} = \varphi_{n,i} \otimes r_n; \quad S_n f = R_n f \otimes r_n,$$

où (r_n) désigne la suite des fonctions de Rademacher sur [0, 1]. Dans cette nouvelle situation, $\tilde{A}_{n,i}=A_{n,i}\times[0,1]$ est un arbre d'ensembles compatible avec la suite $(\mathcal{F}_n)$, et le système $(\psi_{n,i})$ vérifie les conditions du théorème 1.4. Par ailleurs $\sum_{n=0}^{\infty} S_n f$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale approximative au sens du lemme 1.7. On montre ensuite que l'on peut définir un opérateur borné S de H_1 dans $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ en posant pour $f\in H_1$:

$$Sf=\sum_{n=0}^{\infty} S_n f.$$

On voit que $S1=1$ et $S\varphi_{n,i}=\psi_{n,i}$. On montre alors que la restriction de S au sous-espace X de H_1 engendré par 1 et les $(\varphi_{n,i})$ est un isomorphisme. D'après le théorème 1.4, $S(X)$ (donc aussi X) est isomorphe à $H_1(\delta)$ et la projection orthogonale Q est bornée de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ sur $S(X)$. Si U désigne l'inverse de S, défini sur $S(X)$, l'opérateur UQS sera une projection de H_1 sur X, ce qui achévera la démonstration.

Le premier lemme de cette section est une conséquence d'un résultat de E. M. Stein [16] (voir aussi Coifman et Weiss [4], theorem 1.20).

LEMME 2.1. *Il existe une constante K et des suites d'entiers (a_k, b_k, c_k, d_k), $k=0, 1, \ldots$, telles que $0\leqslant c_k\leqslant a_k\leqslant b_k\leqslant d_k<c_{k+1}$, et que $\lim_k (b_k-a_k)=+\infty$, et une suite d'opérateurs (Q_k) sur H_1, $k=0, 1, \ldots$, tels que*

$$Q_0 f=\int_0^{2\pi} f\frac{d\theta}{2\pi}$$

et :

(a) $Q_k(e^{in\theta})=\begin{cases} e^{in\theta} & \text{si} \quad n\in[a_k, b_k] \\ 0 & \text{si} \quad n\notin[c_k, d_k]\end{cases}$

(b) *pour toute fonction $f\in H_1$ et tout choix de signes (ε_k) :*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k Q_k f\right\|_1\leqslant K\|f\|_1.$$

Nous utiliserons la suite des fonctions de Rademacher (r_n), $n=0, 1, \ldots$; Rappelons que $r_0=1$ et pour $n\geqslant 1$:

$$r_n=2^{(1-n)/2}\sum_{i=1}^{2^{n-1}} h_{n,i}$$

Rappelons aussi les inégalités de Khinchine :

$$\frac{1}{A}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac12}\leqslant\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n r_n(t)\right|dt\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac12},$$

pour toute suite (c_n) de nombres complexes. (On peut prendre $A=\sqrt{2}$, cf. [17].)

En remplaçant dans (b) (ε_k) par $(r_k(t))$ et en intégrant, l'inégalité de Khinchine donne :

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqslant AK \|f\|_1. \tag{2.2}$$

Nous allons définir par récurrence une suite croissante $(\mathcal{B}_n)$ d'algèbres finies de parties de T, engendrées par des intervalles, une suite $(\varphi_{n,i})$, $n=1, 2, \ldots; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ d'éléments de $H_1 \cap L_\infty$, deux à deux orthogonaux, un arbre d'ensembles $(A_{n,i})$ compatible avec la suite $(\mathcal{B}_n)$ et une sous-suite $R_n = Q_{k_n}$ de la suite (Q_k) du lemme 2.1, tels que :

1. $\| u_{n,i} - |\varphi_{n,i}| \|_2 \leqslant c4^{-n}$ et $|\varphi_{n,i}| \leqslant u_{n,i} + c4^{-n}$.
2. les indices des coefficients de Fourier non nuls de $\varphi_{n,i}$ sont contenus dans $[a_{k_n}, b_{k_n}]$.
3. pour toute fonction $f \in H_1$,

$$|R_n f - E(R_n f | \mathcal{B}_n)| \leqslant 2^{-n} \|R_n f\|_1$$

et

$$|\varphi_{n,i} - E(\varphi_{n,i} | \mathcal{B}_n)| \leqslant c4^{-n}.$$

On commence la construction en posant $\mathcal{B}_0 = (\emptyset, T)$, $R_0 = Q_0$, $R_1 = Q_1$. On pose $\varphi_{1,1}(\theta) = e^{in\theta}$ où $n \in [a_1, b_1]$, et on choisit pour $\mathcal{B}_1$ une algèbre finie engendrée par des intervalles telle que :

$$|R_1 f - E(R_1 f | \mathcal{B}_1)| \leqslant \tfrac{1}{2} \|R_1 f\|_1$$

pour tout $f \in H_1$ et

$$|\varphi_{1,1} - E(\varphi_{1,1} | \mathcal{B}_1)| \leqslant c/4.$$

Supposons tous ces éléments construits jusqu'à l'étape $n, n \geqslant 1$. Posons $\mathcal{G}_n = \sigma\{A_{n,i}; i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$. Pour chaque atome $A = A_{n,i}$ de $\mathcal{G}_n$ soit $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ la décomposition de A en atomes (donc intervalles de T) de $\mathcal{B}_n$. Pour chaque α découpons l'intervalle B_α en deux intervalles disjoints B'_α et B''_α de même longueur, puis posons $A' = \bigcup_\alpha B'_\alpha$ et $A'' = \bigcup_\alpha B''_\alpha$. Choisissons des polynômes trigonométriques P'_α et P''_α tels que $E|P'_A|^2 = E|P''_A|^2 = 1$

et :

$$\| |A'|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{A'} - P'_A \|_2 \leqslant c4^{-n-1}, \quad |P'_A| \leqslant |A'|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{A'} + c4^{-n-1}$$

$$\| |A''|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{A''} - P''_A \|_2 \leqslant c4^{-n-1}, \quad |P''_A| \leqslant |A''|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{A''} + c4^{-n-1}.$$

Choisissons un entier M tel que tous les polynômes P'_A et P''_A (lorsque A varie parmi les atomes de $\mathcal{G}_n$) soient combinaisons linéaires des $e^{in\theta}$, pour $|n| < M$. Choisissons maintenant un entier k tel que $k > k_n$ et tel que $b_k - a_k > 2^{n+1} M$. On peut choisir des entiers K'_A, K''_A tels que les polynômes trigonométriques $\exp(iK'_A\theta) \cdot P'_A$ et $\exp(iK''_A\theta) \cdot P''_A$ aient des spectres deux à deux disjoints, tous contenus dans $[a_k, b_k]$ (nous appelons spectre d'un polynôme trigonométrique P l'ensemble des indices des coefficients de Fourier non nuls de P).

On posera alors $R_{n+1}=Q_k$, et si $A=A_{n,i}$ on posera :

$$\varphi_{n+1,2i-1}=\exp(iK'_A\theta)\cdot P'_A, \quad \varphi_{n+1,2i}=\exp(iK''_A\theta)\cdot P''_A$$

$$A_{n+1,2i-1}=A', \quad A_{n+1,2i}=A''.$$

On remarquera que les $(\varphi_{n+1,j})$ sont orthogonales entre elles, et aussi orthogonales aux $(\varphi_{m,i})$, $m\leqslant n$. Par ailleurs on a :

$$\|u_{n+1,2i-1}-|\varphi_{n+1,2i-1}|\|_2\leqslant c4^{-n-1}, \quad |\varphi_{n+1,2i-1}|\leqslant u_{n+1,2i-1}+c4^{-n-1}$$

$$\|u_{n+1,2i}-|\varphi_{n+1,2i}|\|_2\leqslant c4^{-n-1}, \quad |\varphi_{n+1,2i}|\leqslant u_{n+1,2i}+c4^{-n-1}$$

Pour achever la construction à l'étape $(n+1)$, on choisira une algèbre finie $\mathcal{B}_{n+1}$ contenant $\mathcal{B}_n$ et les ensembles $(A_{n+1,i})$, $i=1, 2, ..., 2^n$, engendrée par des intervalles, et telle que :

(a) $|g-E(g|\mathcal{B}_{n+1})|\leqslant 2^{-n-1}\|g\|_1$ pour tout polynôme trigonométrique g à spectre dans $[0, d_k]$. (Ceci s'appliquera en particulier si $g=R_{n+1}f$, $f\in H_1$.)

(b) $|\varphi_{n+1,i}-E(\varphi_{n+1,i}|\mathcal{B}_{n+1})|\leqslant c4^{-n-1}$, $i=1, 2, ..., 2^n$.

On remarquera que les longueurs des intervalles-atomes de $\mathcal{B}_n$ tendent vers zéro. Il en résulte que $\mathcal{B}_\infty=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n$ est la tribu borélienne de T.

Considérons maintenant sur $\Omega=T\times[0, 1]$, muni de la probabilité $(d\theta/2\pi)\otimes dt$, la suite croissante d'algèbres $\mathcal{F}_n=\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{A}_n$. Si f est une fonction sur T et g une fonction sur $[0, 1]$, $f\otimes g$ est la fonction sur Ω définie par :

$$f\otimes g(\theta, t)=f(\theta)g(t).$$

On vérifie immédiatement que :

$$E(f\otimes g|\mathcal{F}_n)=E(f|\mathcal{B}_n)\otimes E(g|\mathcal{A}_n).$$

En utilisant cette propriété, on voit que la suite d'ensembles $\tilde{A}_{n,i}=A_{n,i}\times[0, 1]$ constitue un arbre compatible avec la suite $(\mathcal{F}_n)$. En effet, $\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n,i}}=\mathbf{1}_{A_{n,i}}\otimes 1$, donc :

$$E(\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n+1,2i-1}}|\mathcal{F}_n)=E(\mathbf{1}_{A_{n+1,2i-1}}|\mathcal{B}_n)\otimes 1=\tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{A_{n,i}}\otimes 1=\tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n,i}}.$$

Posons par ailleurs $\psi_{n,i}=\varphi_{n,i}\otimes r_n$ et pour $f\in H_1$, $S_nf=R_nf\otimes r_n$. Nous allons voir que la suite $(\psi_{n,i})$ vérifie les conditions du théorème 1.4, avec l'arbre d'ensembles $(\tilde{A}_{n,i})$ et les fonctions $(\tilde{u}_{n,i})$ correspondantes. Tout d'abord :

$E\psi_{n,i}=E\varphi_{n,i}\cdot Er_n=0$, et $E\psi_{n,i}\overline{\psi_{m,j}}=E(\varphi_{n,i}\overline{\varphi_{m,j}})E(r_nr_m)=0$ sauf si $(n, i)=(m, j)$. Par ailleurs, $\tilde{u}_{n,i}=u_{n,i}\otimes 1$ et $|\psi_{n,i}|=|\varphi_{n,i}|\otimes 1$, donc $\|\tilde{u}_{n,i}-|\psi_{n,i}|\|_2=\|u_{n,i}-|\varphi_{n,i}|\|_2\leqslant$

$c4^{-n}$; $|\psi_{n,i}| \leqslant \tilde{u}_{n,i} + c4^{-n}$. Enfin $E(\psi_{n,i}|\mathcal{F}_{n-1}) = E(\varphi_{n,i}|\mathcal{B}_{n-1}) \otimes E(r_n|\mathcal{A}_{n-1}) = 0$ et :

$$|\psi_{n,i} - E(\psi_{n,i}|\mathcal{F}_n)| = |(\varphi_{n,i} - E(\varphi_{n,i}|\mathcal{B}_n)) \otimes r_n| \leqslant c4^{-n}.$$

D'après le théorème 1.4, il existe une constante M telle que la suite $(\psi_{n,i})$ soit M-équivalente dans $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ au système de Haar $(h_{n,i})$ dans $H_1(\delta)$ et telle que la projection orthogonale Q: $g \to (g|1) + \sum_{n,i} (g|\psi_{n,i})\psi_{n,i}$ soit de norme $\leqslant M$ dans $H_1[(\mathcal{F}_n)]$.

En particulier la suite $(\psi_{n,i})$ est M^2-inconditionnelle. En utilisant l'inégalité de Khinchine, on aura donc

$$\left\| \left(|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \alpha_{n,i} \psi_{n,i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqslant AM^2B \|\alpha_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i} \psi_{n,i}\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \tag{2.3}$$

où B est une constante telle que : $\|g\|_1 \leqslant B\|g\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}$ (on remarquera que $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ est la σ-algèbre $\mathcal{B}_\infty \otimes \mathcal{A}_\infty$ qui coïncide avec la σ-algèbre borélienne de $T \times [0, 1]$).

Nous allons maintenant vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} S_n f$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale approximative au sens du lemme 1.7. On a pour $n \geqslant 1$:

$$E(S_n f|\mathcal{F}_{n-1}) = E(R_n f|\mathcal{B}_{n-1}) \otimes E(r_n|\mathcal{A}_{n-1}) = 0,$$

et $|S_n f - E(S_n f|\mathcal{F}_n)| = |(R_n f - E(R_n f|\mathcal{B}_n)) \otimes r_n| \leqslant 2^{-n}\|R_n f\|_1 = 2^{-n}\|S_n f\|_1$.

D'après le lemme 1.7 on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} S_n f \right\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant 5 \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |S_n f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1.$$

Or

$$\left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |S_n f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 = \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |R_n f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqslant AK\|f\|_1$$

d'après (2.2). Nous retiendrons que :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} S_n f \right\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant 5AK\|f\|_1. \tag{2.4}$$

L'inégalité (2.4) signifie que l'opérateur S défini par $Sf = \sum_{n=0}^{\infty} S_n f$ est borné de H_1 dans $H_1[(\mathcal{F}_n)]$. Désignons par X le sous-espace fermé de H_1 engendré par 1 et les fonctions $(\varphi_{n,i})$. Nous allons montrer que la restriction de S à X est un isomorphisme. Notons tout d'abord que $S1 = 1$ et $S\varphi_{n,i} = \psi_{n,i}$. Soit $x = \alpha_0 + \sum_{n,i} \alpha_{n,i} \varphi_{n,i}$ un élément de X. On a d'après le lemme 2.1, en appliquant l'opérateur $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n R_n$:

$$\|x\|_1 \leqslant K\|\varepsilon_0 \alpha_0 + \sum_{n,i} \varepsilon_n \alpha_{n,i} \varphi_{n,i}\|_1.$$

On en déduit par la deuxième partie des inégalités de Khinchine et par (2.3) :

$$\|x\|_1 \leqslant K \left\| \left(|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \alpha_{n,i} \varphi_{n,i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1$$

$$= K \left\| \left(|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \alpha_{n,i} \psi_{n,i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqslant KAM^2B \|Sx\|_{H_1[(\mathfrak{F}_n)]}$$

Cet argument montre déjà que la suite $(\varphi_{n,i})$ dans H_1 est équivalente à la suite $(\psi_{n,i})$ dans $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, c'est-à-dire aussi au système de Haar $(h_{n,i})$ dans $H_1(\delta)$ d'après le théorème 1.4. En particulier X est isomorphe à $H_1(\delta)$. Par ailleurs en désignant par U l'inverse de S, défini de $S(X)$ dans X, on voit que X est complémenté dans H_1 par la projection UQS. On a donc montré que $H_1(\delta)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H_1, ce qui était le but de ce paragraphe.

On peut préciser que UQS est en fait la projection orthogonale de H_1 sur X. En effet on a si $x \in X$ et $f \in H_1$:

$$(Sf \mid Sx) = (f \mid x).$$

(Il suffit de le vérifier lorsque $x = \varphi_{n,i}$, et cela résulte facilement de la construction.)

3. H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1(\delta)$

Il est bien connu que l'espace H_1 se plonge de façon naturelle dans un espace H_1 de martingales, en utilisant le mouvement brownien complexe. Nous noterons $(X_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement brownien complexe partant de 0, normalisé par $E|X_t|^2 = t$, $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}$ désignera la famille des σ-algèbres du brownien, et τ désignera le premier temps t tel que X_t atteigne le cercle unité $\{|z| = 1\}$. Si $f \in H_1$, le processus $(f(X_{t\wedge\tau}))_{t\geqslant 0}$ (où $t\wedge\tau = \inf(t, \tau)$) est une martingale par rapport à la famille de σ-algèbres $(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})_{t\geqslant 0}$. On sait (voir par exemple [14]) que cette correspondance réalise un plongement de H_1 dans $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$. En même temps, $(g(X_{t\wedge\tau}))_{t\geqslant 0}$ est une martingale BMO lorsque $g \in \mathrm{BMO}$, et plus précisément il existe une constante K telle que :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} K^{-1}\|f\|_{H_1} \leqslant \|f(X_\tau)\|_{H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} \leqslant K\|f\|_{H_1} \\ K^{-1}\|g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \|g(X_\tau)\|_{\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} \leqslant K\|g\|_{\mathrm{BMO}}. \end{cases}$$

Notre objectif sera de remplacer les σ-algèbres $(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})$ par des algèbres finies $(\mathfrak{F}_n)$, de façon que les inégalités (3.1) subsistent quand on remplace $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$ par $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ et $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$ par $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]$. De cette façon nous aurons plongé H_1 dans un espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, mais nous voudrons imposer aux $(\mathfrak{F}_n)$ une condition supplémentaire :

(3.2) Il existe un entier $N \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, chaque atome A de $\mathcal{F}_n$ se divise en N atomes de $\mathcal{F}_{n+1}$ de probabilité égale à $P(A)/N$.

Nous allons donc chercher à construire des algèbres $(\mathcal{F}_n)$ vérifiant la condition (3.2) pour N convenable, et telles que les inégalités (3.1) subsistent.

Commençons par donner quelques majorations simples obtenues à partir de la formule de Cauchy. Désignons par D le disque ouvert $\{|z| < 1\}$ du plan complexe C. Si a et b sont deux points de D et si $f \in H_1$,

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left\{ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - a} - \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - b} \right\} d\theta.$$

On en déduit :

$$|f(a) - f(b)| \leqslant |b - a| . \sup_\theta \left(\frac{1}{|e^{i\theta} - a| \, |e^{i\theta} - b|} \right) \|f\|_1 \leqslant \frac{|b - a|}{(1 - |a|)(1 - |b|)} \|f\|_1.$$

Dans la suite de ce paragraphe, ε désignera un nombre réel de $]0, 1[$ tel que $4K\varepsilon \leqslant 1$, où K est la constante qui apparait dans (3.1). Supposons que x et $y \in D$, avec $|x - y| \leqslant \varepsilon(1 - |x|^2)/2$. Nous aurons :

$$1 - |y| \geqslant (1 - |x|)\{1 - (1 - |x|)/2\} \geqslant (1 - |x|)/2$$

donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x - y|}{(1 - |x|)(1 - |y|)} \|f\|_1 \leqslant \varepsilon \|f\|_1.$$

Pour chaque $x \in D$, nous poserons $\varrho(x) = \varepsilon(1 - |x|)^2/2$ et nous désignerons par $D(x)$ le disque centré en x et de rayon $\varrho(x)$. On notera que $D(x) \subset D$. Nous désignerons par $S(x)$ le cercle $\partial D(x)$.

Si $y \in D(x)$ on aura :

$$\varrho(y) \geqslant \varepsilon(1 - |x| - \varrho(x))^2/2 \geqslant \varrho(x)\{1 - \varepsilon(1 - |x|)/2\}^2 \geqslant \varrho(x)/2.$$

Nous retiendrons les inégalités que nous venons d'établir :

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} \text{Si } y \in D(x),\ \varrho(y) \geqslant \varrho(x)/2 \text{ et} \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \|f\|_1 \text{ pour toute fonction } f \in H_1. \end{cases}$$

Si I est un intervalle sur le cercle $S(x)$, de longueur $1 \leqslant \varrho(x)/2$, et si z désigne le centre de I, ce qui précède montre que I est contenu dans le disque centré en z et de rayon $\varrho(z)/2$. Par ailleurs on constate en examinant le noyau de Poisson que si u appartient au disque centré en x et de rayon $\varrho(x)/2$, la probabilité $P_u(A)$ pour que le brownien partant de u atteigne le cercle $S(x)$ en un point de A, où A est un sous-ensemble de $S(x)$, est comprise entre $P(A)/3$ et $3P(A)$, où P désigne la probabilité uniformément répartie sur $S(x)$. Nous pouvons énoncer :

LEMME 3.4. *Soient $x \in D$ et I un intervalle sur le cercle $S(x)$, de longueur $1 \leqslant \varrho(x)/2$ et de centre z. La probabilité pour que le brownien partant d'un point $u \in I$ atteigne $S(z)$ en un point de $A \subset S(z)$ est comprise entre $P(A)/3$ et $3P(A)$, où P désigne la probabilité uniformément répartie sur $S(z)$.*

Nous choisissons un entier $N \geqslant 40$ et nous allons construire par récurrence :

(a) une suite croissante (τ_n), $n=0, 1, \ldots$, de temps d'arrêt.

(b) une suite de variables aléatoires complexes (Z_n), $n=0, 1, \ldots$, prenant un nombre fini de valeurs dans D. On désignera par $\mathfrak{F}_n$ l'algèbre finie $\sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

(c) pour $n \geqslant 1$, une suite de partitions des cercles $S(Z_{n-1}(\omega))$ en N intervalles $(I_j(Z_{n-1}(\omega)), j=1, 2, \ldots, N$, de longueur $\leqslant \varrho(Z_{n-1}(\omega))/2$, de centres $(z_j(Z_{n-1}(\omega)))$, $j=1, 2, \ldots, N$ tels que :

$$-Z_n = z_j(Z_{n-1}) \Leftrightarrow X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1})$$

– pour tout atome B de $\mathfrak{F}_{n-1}$ et pour $j=1, 2, \ldots, N$:

$$P(X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1}) \mid B) = 1/N.$$

Nous commençons la construction en posant $\tau_0=0$, $Z_0=0$, $\mathfrak{F}_0=(\emptyset, \Omega)$. Supposons que tous les éléments précédents soient définis jusqu'à l'ordre n. Nous allons définir les éléments d'ordre $(n+1)$ en les construisant sur chaque atome de $\mathfrak{F}_n$. Soit donc B un atome de $\mathfrak{F}_n$. Soit z la valeur de Z_n sur B. Nous définirons τ_{n+1} sur B comme le premier temps $t > \tau_n$ tel que $X_t \in S(z) = S(Z_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, z est le centre d'un intervalle $I = I_j(Z_{n-1}(\omega))$, $\omega \in B$, de longueur $\leqslant \varrho(Z_{n-1}(\omega))/2$. D'après le lemme 3.4, la probabilité pour que le brownien partant d'un point $u \in I$ atteigne $S(z)$ en un point de $A \subset S(z)$ est comprise entre $P(A)/3$ et $3P(A)$. Si on remarque que pour tout $\omega \in B$ on a $X_{\tau_n(\omega)}(\omega) \in I$, on déduit :

$$P(A)/3 \leqslant P(X_{\tau_{n+1}} \in A \mid B) \leqslant 3P(A),$$

où $P(A)$ est égale à la « longueur » de A divisée par $2\pi\varrho(z)$.

On peut découper $S(z) = S(Z_n)$ en N intervalles disjoints $(I_j(Z_n))$, $j=1, 2, \ldots, N$, de centres $(z_j(Z_n))$, $j=1, 2, \ldots, N$, tels que :

$$P(X_{\tau_{n+1}} \in I_j(Z_n) \mid B) = 1/N, \quad \text{pour } j=1, 2, \ldots, N.$$

Chacun de ces intervalles $(I_j(Z_n))$ a une longueur inférieure ou égale à $3 \times 2\pi\varrho(z)/N \leqslant \varrho(z)/2 = \varrho(Z_n)/2$.

On définira Z_{n+1} sur B par :

$$Z_{n+1} = z_j(Z_n) \Leftrightarrow X_{\tau_{n+1}} \in I_j(Z_n).$$

(On remarque que Z_{n+1} est $\mathfrak{F}_{\tau_{n+1}}$-mesurable. On aura par conséquent $\mathfrak{F}_{n+1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_{n+1}}$.) La possibilité de la construction par récurrence est démontrée.

Par construction, pour tout $n \geqslant 0$, chaque atome B de $\mathfrak{F}_n$ est divisé en N atomes de $\mathfrak{F}_{n+1}$ de même probabilité $P(B)/N$. La suite d'algèbres $(\mathfrak{F}_n)$ vérifie donc la condition (3.2). Nous allons montrer que l'espace H_1 se plonge de façon complémentée dans $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$. Le plongement utilisé sera simplement l'application $f \in H_1 \rightarrow f(X_\tau)$, déjà utilisée pour le plongement de H_1 dans $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})$. Nous allons chercher à montrer que sur les variables aléatoires de la forme $f(X_\tau)$, les normes de $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ et de $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$ sont équivalentes. Nous utiliserons dans ce paragraphe les normes H_1 du type (0.2).

Remarquons qu'entre les temps τ_n et τ_{n+1}, X_t reste dans le disque $D(Z_n)$ et donc d'après (3.3) on a pour $f \in H_1$:

$$\sup \{|f(X_t)|;\, \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}\} \leqslant |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon \|f\|_1.$$

Par ailleurs il faut noter que τ_n tend presque surement vers τ. On peut voir que :

$$|X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}| \geqslant \varrho(Z_n)/2.$$

La suite (X_{τ_n}) est une martingale complexe bornée, donc p.s. convergente lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que $\varrho(Z_n)$ converge p.s. vers zéro, donc $|Z_n|$ tend p.s. vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Puisque $|Z_n - X_{\tau_n}| \leqslant \varrho(Z_n)$, on voit aussi que $|X_{\tau_n}|$ tend p.s. vers 1, ce qui montre que la limite de X_{τ_n} est sur le cercle unité. On a donc $\tau = \sup_n \tau_n$ p.s.

Soit $f \in H_1$. Nous aurons :

$$\text{(3.5)} \qquad \|f(X_\tau)\|_{H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} = E \sup_{t\geqslant 0} |f(X_{t\wedge\tau})| = E \sup_n \sup \{|f(X_t)|;\, \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}\}$$
$$\leqslant E \sup_{n\geqslant 0} |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon \|f\|_1.$$

Posons $f_n = E(f(X_\tau)|\mathfrak{F}_n)$. Soit B un atome de $\mathfrak{F}_n$. Puisque $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F}_{\tau_n}$, nous pouvons écrire :

$$f_n = P(B)^{-1} \int_B E(f(X_\tau)|\mathfrak{F}_{\tau_n})\, dP = P(B)^{-1} \int_B f(X_{\tau_n})\, dP$$

d'après la propriété de Markov forte. Puisque B est un atome de $\mathfrak{F}_n$, X_{τ_n} reste (sur B) dans un même disque $D(x)$ (par exemple $D(Z_{n-1})$), donc d'après (3.3) l'oscillation de

$f(X_{\tau_n})$ sur B est $\leqslant \varepsilon\|f\|_1$. On a par conséquent :

$$|f_n - f(X_{\tau_n})| \leqslant \varepsilon \|f\|_1. \tag{3.6}$$

Remarquons encore que X_τ est $\mathfrak{F}_\infty$-mesurable, où $\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. En effet, si on applique ce qui précède à $f(z) = z$, on peut dire que l'oscillation de $f(X_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$ sur B est $\leqslant \varrho(Z_{n-1})$. On en déduit $|f_n - X_{\tau_n}| \leqslant \varrho(Z_{n-1})$. Nous savons que $\varrho(Z_{n-1})$ tend p.s. vers zéro, donc $X_\tau = \lim_n X_{\tau_n} = \lim_n f_n$ est $\mathfrak{F}_\infty$-mesurable.

PROPOSITION 3.7. *Il existe une constante M telle que l'on ait pour toute fonction $f \in H_1$ et pour toute fonction $g \in \mathrm{BMO}$:*

$$M^{-1}\|f\|_1 \leqslant \|f(X_\tau)\|_{H_1[(\mathfrak{F}_n)]} \leqslant M\|f\|_1$$

et

$$\|g(X_\tau)\|_{\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_n)]} \leqslant M\|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Démonstration. Compte tenu de (3.1), nous utiliserons $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$ et $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$ au lieu de H_1 et BMO. Nous aurons tout d'abord d'après (3.5) et (3.6), et en utilisant (3.1) :

$$E\sup_{t\geqslant 0}|f(X_{t\wedge\tau})| \leqslant E\sup_n |f_n| + 2\varepsilon\|f\|_1 \leqslant E\sup_n|f_n| + \tfrac{1}{2}E\sup_{t\geqslant 0}|f(X_{t\wedge\tau})|,$$

et inversement,

$$\sup_n |f_n| \leqslant \sup_n |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon\|f\|_1 \leqslant \sup_{t\geqslant 0}|f(X_{t\wedge\tau})| + \varepsilon\|f\|_1$$

d'où après intégration et utilisation de (3.1) :

$$E\sup_n |f_n| \leqslant 2E\sup_{t\geqslant 0}|f(X_{t\wedge\tau})|.$$

Pour l'inégalité concernant BMO, supposons que $g \in \mathrm{BMO}$ et que $g(X_\tau)$ soit de norme $\leqslant 1$ dans $\mathrm{BMO}[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$. Nous aurons pour tout temps d'arrêt $\sigma \leqslant \tau$:

$$E\left\{\int_\sigma^\tau |g'(X_s)|^2 ds \,|\, \mathfrak{F}_\sigma\right\} \leqslant 1, \quad \text{et } |g(0)| \leqslant 1.$$

On aura en particulier avec $\sigma = 0$, $\|g - g(0)\|_1 \leqslant \|g-g(0)\|_2 \leqslant 1$. Posons $g_n = E(g(X_\tau)\,|\,\mathfrak{F}_n)$ et évaluons la norme BMO de (g_n) : On a tout d'abord $|g_0| = |g(0)| \leqslant 1$. D'autre part pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} E(|g(X_\tau) - g_{n-1}|^2\,|\,\mathfrak{F}_n) &= E(|g(X_\tau) - g_n|^2\,|\,\mathfrak{F}_n) + |g_n - g_{n-1}|^2. \\ &= E(|g(X_\tau)|^2\,|\,\mathfrak{F}_n) - |g_n|^2 + |g_n - g_{n-1}|^2. \end{aligned}$$

Nous aurons :

$$|g_n - g_{n-1}| \leqslant |g_n - g(X_{\tau_n})| + |g(X_{\tau_n}) - g(X_{\tau_{n-1}})| + |g(X_{\tau_{n-1}}) - g_{n-1}|.$$

En appliquant l'inégalité (3.6) à la fonction $g-g(0)$, on voit que le premier et le troisième terme sont $\leqslant \varepsilon$. Pour le deuxième, on applique (3.3) à $g-g(0)$, puisque X_{τ_n} et $X_{\tau_{n-1}}$ sont dans un même disque $D(x)$. Finalement :

$$|g_n - g_{n-1}| \leqslant 3\varepsilon.$$

On aura :

$$E(|g(X_\tau)|^2 | \mathcal{F}_{\tau_n}) = |g(X_{\tau_n})|^2 + E\left\{\int_{\tau_n}^{\tau} |g'(X_s)|^2 ds \,|\, \mathcal{F}_{\tau_n}\right\} \leqslant |g(X_{\tau_n})|^2 + 1.$$

Alors :

$$E(|g(X_\tau)|^2 \,|\, \mathcal{F}_n) - |g_n|^2 \leqslant 1 + E(|g(X_{\tau_n})|^2 \,|\, \mathcal{F}_n) - |g_n|^2$$
$$= 1 + E(|g(X_{\tau_n}) - g_n|^2 \,|\, \mathcal{F}_n) \leqslant 1 + \varepsilon^2.$$

Finalement $E(|g(X_\tau) - g_{n-1}|^2 \,|\, \mathcal{F}_n) \leqslant 1 + 10\varepsilon^2$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition 3.7 montre que le sous-espace E_1 de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ formé des fonctions de la forme $f(X_\tau)$, avec $f \in H_1$, est isomorphe à H_1.

De la même façon désignons par E_2 le sous-espace fermé de $L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ formé des fonctions $f(X_\tau)$, avec $f \in H_2$. Nous allons montrer pour terminer ce paragraphe que la projection orthogonale Q de $L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ sur E_2 est continue pour la norme de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$.

Soit $f \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Sa projection Qf est de la forme $h(X_\tau)$, avec $h \in H_2$. Pour évaluer la norme de h dans H_1 on écrit d'après (0.7) :

$$\|Qf\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant K\|h\|_1 \leqslant KC \sup\left\{\int_0^{2\pi} h\bar{g}\frac{d\theta}{2\pi}\;;\; \|g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1\right\}.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} h\bar{g}\frac{d\theta}{2\pi} = E\{h(X_\tau)\overline{g(X_\tau)}\} = (h(X_\tau)|g(X_\tau)) = (f|g(X_\tau))$$

puisque $g(X_\tau) \in E_2$. En utilisant (0.4) et la proposition 3.7, on aura :

$$|E(f\overline{g(X_\tau)})| \leqslant C\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}\|\overline{g(X_\tau)}\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_n)]} = C\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}\|g(X_\tau)\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_n)]} \leqslant CM\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]},$$

ce qui montre finalement que Q est de norme $\leqslant KC^2M$ dans $H_1[(\mathcal{F}_n)]$.

Choisissons maintenant $N = 64$. Nous voulons définir une suite d'algèbres $(\mathcal{B}_n)$ isomorphe à la suite $(\mathcal{A}_n)$ des algèbres du système de Haar, de façon que $\mathcal{B}_{6n} = \mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Soit m un entier tel que $6n < m < 6(n+1)$. Nous définirons l'algèbre $\mathcal{B}_m$ en la définissant sur chaque atome B de $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}_{6n}$. Soient B_j, $j = 1, 2, \ldots, 64$, les atomes de $\mathcal{F}_{n+1}$ contenus dans B. Nous définirons les atomes de $\mathcal{B}_m$ contenus dans B par :

$$C_k = \bigcup\{B_j;\; (k-1)2^{6(n+1)-m} + 1 \leqslant j \leqslant k2^{6(n+1)-m}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{m-6n}.$$

Il est facile de constater que les algèbres $(\mathcal{B}_n)$ ainsi construites sont isomorphes aux algèbres $(\mathcal{A}_n)$ du système de Haar, et par conséquent $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ est isométrique à $H_1(\delta)$.

Considérons encore l'application $T: f \in H_1 \to f(X_\tau)$. Si nous montrons que les normes de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ et de $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ sont équivalentes sur les fonctions de la forme $f(X_\tau)$, nous déduirons de la proposition 3.7 que l'application T réalise un plongement de H_1 dans $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ et la projection orthogonale sera a fortiori continue de $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ sur l'image $T(H_1)$.

Posons $f_k = E(f(X_\tau) \mid \mathcal{B}_k)$. Supposons que $6n < k < 6(n+1)$. On a d'après (3.6) :

$$|f_{6n} - f(X_{\tau_n})| \leqslant \varepsilon \|f\|_1 \quad \text{et} \quad |f_{6(n+1)} - f(X_{\tau_{n+1}})| \leqslant \varepsilon \|f\|_1.$$

Par ailleurs, par construction :

$$|f(X_{\tau_n}) - f(X_{\tau_{n+1}})| \leqslant \varepsilon \|f\|_1.$$

On en déduit

$$|f_{6(n+1)} - f_{6n}| \leqslant 3\varepsilon \|f\|_1, \quad \text{donc } |f_k - f_{6n}| \leqslant 3\varepsilon \|f\|_1.$$

On aura donc :

$$E \sup_k |f_k| \leqslant E \sup_n |f_{6n}| + 3\varepsilon \|f\|_1,$$

ce qui montre, compte tenu de (3.7) et de l'inégalité évidente en sens inverse, que les normes de $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ et de $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ sont équivalentes sur les fonctions de la forme $f(X_\tau)$. Ceci achève la démonstration du résultat annoncé dans le titre de ce paragraphe.

Remarque 3.8. Soit $(\mathcal{C}_k)$ une suite croissante d'algèbres finies de parties d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Posons :

$$\delta_k = \sup \{P(A);\ A \text{ atome de } \mathcal{C}_k\}.$$

Supposons que $\lim_k \delta_k = 0$. On peut dans ce cas construire une sous-suite $(\mathcal{C}_{k_n})$ de la suite $(\mathcal{C}_k)$ telle que : pour tout $n \geqslant 0$, chaque atome B de $\mathcal{C}_{k_n}$ se divise en atomes (B_α), $\alpha = 1, 2, \ldots, M$, dans $\mathcal{C}_{k_{n+1}}$ de façon que $P(B_\alpha) \leqslant P(B)/40$, $\alpha = 1, 2, \ldots, M$.

Il est clair que l'on peut modifier la construction des algèbres $(\mathcal{F}_n)$ de ce paragraphe de façon à les rendre isomorphes aux algèbres $(\mathcal{C}_{k_n})$, sans que la démonstration soit modifiée. On en déduit comme en (3.7) un plongement complémenté de H_1 dans $H_1[(\mathcal{C}_{k_n})]$. On définit une suite d'algèbres $(\mathcal{B}_k)$ isomorphe à la suite $(\mathcal{C}_k)$ et telle que $\mathcal{B}_{k_n} = \mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, comme nous l'avons fait ci-dessus. Par le même argument que ci-dessus, on conclut finalement :

(3.9) Si $(\mathcal{C}_k)$ est une suite d'algèbres finies telle que $\lim_k \delta_k = 0$, l'espace H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1[(\mathcal{C}_k)]$.

4. Isomorphismes entre espaces $H_1[(\mathcal{F}_n)]$

Nous montrons dans cette section que l'espace $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ est isomorphe à $H_1(\delta)$, c'est-à-dire aussi à H_1, dès que la suite $(\mathcal{F}_n)$ vérifie la condition (3.9), autrement dit lorsque le maximum des probabilités des atomes de $(\mathcal{F}_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Cette condition (3.9) n'est pas nécessaire pour que l'isomorphisme soit vrai, et nous discuterons à la fin de ce paragraphe des extensions possibles du résultat.

Avant de commencer, nous rappellerons le principe de la méthode de décomposition de Pełczynski, qui permet de réduire dans certains cas le problème de l'isomorphisme de deux espaces de Banach à des questions apparemment plus simples :

(4.1) Soit X un espace de Banach. Si X est isomorphe à un sous-espace complémenté de H_1 et si H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de X, les deux espaces X et H_1 sont isomorphes.

On sait [18] (voir aussi (4.25)) que l'espace H_1 est isomorphe à la l_1-somme infinie $(\oplus H_1)_1$. L'affirmation (4.1) résulte donc de la méthode de décomposition (cf. [10]).

Nous commencerons par un résultat technique qui est inspiré d'un résultat de C. Herz ([7], theorem C). Nous rappelons que $(\mathcal{A}_n)$ désigne la suite des algèbres du système de Haar. Dans le début de ce paragraphe, nous poserons $\Omega = [0, 1]$, et nous considérerons la situation suivante :

(4.2) On se donne une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$, et on considère la suite d'algèbres :

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{A}_{n_k}.$$

Nous désignerons par F_0 l'espace des fonctions $\mathcal{F}_0$-mesurables, et pour $k \geq 1$ nous désignerons par F_k l'espace des fonctions $\mathcal{F}_k$-mesurables f telles que $E(f \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Pour tout $k \geq 0$, G_k sera l'espace des fonctions $g \mathcal{A}_{n_k+1}$-mesurables telle que $E(g \mid \mathcal{A}_{n_k}) = 0$.

Les fonctions de Haar $(h_{n_k+1,i})$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n_k}$, forment une base orthonormée de G_k. Pour simplifier nous poserons :

$$d_{k,i} = h_{n_k+1,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^{n_k}.$$

Si G est un sous-espace de G_k engendré par certaines des fonctions $(d_{k,i})$, on voit immédiatement que la projection orthogonale Qf d'une fonction f de G_k sur G vérifie :

$$|Qf| \leq |f|. \tag{4.3}$$

Par ailleurs, on constate immédiatement que :

(4.4) Pour toute fonction $g \in G_k$, la fonction $|g|$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable.

Considérons une fonction de la forme $g=\sum_{k=0}^{\infty} d_k$, où $d_k \in G_k$. Nous associerons à g deux suites croissantes de fonctions :

$$g_k^* = \sup\left\{\left|\sum_{j=0}^{l} d_j\right| ; l \leqslant k\right\} ; g_k^{**} = \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} (g_{j-1}^* + |d_j|)$$

(et $g_0^{**} = |d_0|$).

Nous désignerons par g_∞^*, g_∞^{**} les limites respectives de ces deux suites. Notons que pour la norme (0.2) :

$$\|g\|_{H_1[(\mathcal{A}_n)]} = Eg_\infty^*.$$

On a d'autre part $|d_k| \leqslant 2g_k^*$ et $g_k^* \leqslant g_{k-1}^* + |d_k|$, donc :

$$g_k^* \leqslant g_k^{**} \leqslant 3g_k^*. \tag{4.5}$$

Nous allons maintenant considérer un opérateur T défini sur $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ possédant les propriétés suivantes :

(a) il existe une constante K telle que :

$$\|f\|_2/K \leqslant \|Tf\|_2 \leqslant K\|f\|_2 \quad \text{pour toute } f \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P),$$

et pour tout $k \geqslant 0$:

$$\|f\|_1/K \leqslant \|Tf\|_1 \leqslant K\|f\|_1 \quad \text{si } f \in F_k.$$

(b) pour tout $k \geqslant 0$, on a $T(F_k) \subset G_k$, et plus précisément $T(F_k)$ est engendré par celles des fonctions $(d_{k,i})$ qu'il contient.

(c) pour tout $k \geqslant 0$, on a si f est $\mathfrak{F}_k$-mesurable et si $h \in F_{k+1}$:

$$T(fh) = fTh.$$

PROPOSITION 4.6. *Sous les hypothèses* (a), (b) *et* (c), *l'opérateur T établit un isomorphisme de $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ dans $H_1(\delta)$, dont l'image est complémentée dans $H_1(\delta)$.*

Nous commencerons par démontrer la dernière affirmation. Soit $f \in H_1[(\mathcal{A}_n)]$, et posons $f_n = E(f | \mathcal{A}_n)$. En utilisant la norme (0.1), on voit que la fonction $g = Pf = \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_k+1} - f_{n_k})$ appartient à $H_1[(\mathcal{A}_n)]$, avec $\|g\|_{H_1} \leqslant \|f\|_{H_1}$. L'opérateur P réalise une projection de $H_1[(\mathcal{A}_n)]$ sur la somme directe $\oplus_{k=0}^{\infty} G_k$. Désignons maintenant par Q_k la projection orthogonale de G_k sur $T(F_k)$. D'après (b) et la relation (4.3), on aura

$$|Q_k(f_{n_k+1} - f_{n_k})| \leqslant |f_{n_k+1} - f_{n_k}|,$$

et donc :

$$Qf = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(f_{n_k+1} - f_{n_k})$$

est une projection continue de $H_1[(\mathcal{A}_n)]$ sur l'adhérence de l'image de T (en fait l'image de T est fermée, d'après ce que nous allons démontrer).

Nous allons montrer maintenant que T est borné de $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ dans $H_1[(\mathcal{A}_n)]$. Soit f un élément de $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$, de norme $\leqslant 1$ pour la norme (0.2). Posons $f_k = E(f\,|\,\mathfrak{F}_k)$, et $f_k^* = \sup\{|f_j|\,;\, j \leqslant k\}$.

Nous allons effectuer la décomposition de Davis (voir [6]) de la $\mathfrak{F}_k$-martingale (f_k) : on peut décomposer (f_k) en somme de deux $\mathfrak{F}_k$-martingales, soit $f_k = f_k' + f_k''$, avec $f_0' = 0$ et :

$$|f_k'| \leqslant M f_{k-1}^* \,;\, E\left(|f_0''| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k'' - f_{k-1}''|\right) \leqslant M,$$

où M est une constante universelle. Nous poserons :

$$d_k' = f_k' - f_{k-1}', \quad d_k'' = f_k'' - f_{k-1}'',$$

et :

$$\bar{f}_k = \sum_{j=1}^{k} (f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} d_j'.$$

On trouve au moyen de la transformation d'Abel :

$$|\bar{f}_k| = \left|\sum_{j=1}^{k-1} \{(f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} - (f_j^*)^{-\frac{1}{2}}\} f_j' + (f_{k-1}^*)^{-\frac{1}{2}} f_k'\right|$$

$$\leqslant M\left(\sum_{j=1}^{k-1} \{(f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} - (f_j^*)^{-\frac{1}{2}}\} f_{j-1}^* + (f_{k-1}^*)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant 2M(f_{k-1}^*)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité montre que la $\mathfrak{F}_k$-martingale $(\bar{f}_k)$ est bornée dans $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$, donc elle converge vers une fonction $\bar{f} \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$. Si on applique T à $\bar{f}$, on obtiendra d'après la propriété (c) de T :

$$T\bar{f} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k-1}^*)^{-\frac{1}{2}} T d_k'.$$

D'après (a), $T\bar{f} \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ et d'après l'inégalité de Doob :

$$E \sup_{k \geqslant 1} \left|\sum_{j=1}^{k} (f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} T d_j'\right|^2 \leqslant 4E|T\bar{f}|^2 \leqslant 4K^2 E|\bar{f}|^2 \leqslant 16K^2M^2. \tag{4.7}$$

Par ailleurs puisque la suite $(f_{j-1}^*)^{\frac{1}{2}}$ est croissante on peut écrire :

$$\left|\sum_{j=1}^{k} T d_j'\right| \leqslant 2 \sup_{l \leqslant k} \left|\sum_{j=1}^{l} (f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} T d_j'\right| (f_{k-1}^*)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit :

$$\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k} Td_j'\right| \leqslant 2 \sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k} (f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} Td_j'\right| (f_\infty^*)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient en posant $f'=\sum_{k=1}^{\infty} d_k'$:

$$\|Tf'\|_{H_1} = E \sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k} Td_j'\right| \leqslant 2\left(E \sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k} (f_{j-1}^*)^{-\frac{1}{2}} Td_j'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 8KM.$$

On a par ailleurs en posant $f''=\sum_{k=0}^{\infty} d_k''$, $\sup_{k\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{\infty} Td_j''\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left|Td_k''\right|$, et $\|Tf''\|_{H_1}= E\sup_{k\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{k} Td_j''\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} E\left|Td_k''\right| \leqslant KM$.

On obtient finalement, puisque $f=f'+f^*$:

$$\|Tf\|_{H_1} \leqslant 9KM,$$

ce qui montre que T est borné.

Montrons maintenant que T est un isomorphisme. En désignant toujours par f le même élément de $H_1[(\mathcal{F}_k)]$, posons $d_0=f_0$ et pour $k\geqslant 1$, $d_k=f_k-f_{k-1}$. Considérons $g=Tf$, $\delta_k=Td_k$. Soit $(d_{k,i})$ la base de G_k considérée précédemment. On peut écrire :

$$\delta_k=\sum_{i=1}^{2^{n_k}} \alpha_{k,i}\, d_{k,i}.$$

(On notera que l'hypothèse (b) sur T signifie que $d_{k,i}\in T(F_k)$ pour tout indice i tel que $\alpha_{k,i}\neq 0$.)

Introduisons les suites $g_k=\sum_{j=0}^{k}\delta_j$, $g_k^*=\sup\{|g_j|;\, j\leqslant k\}$ et $g_k^{**}=\sup_{1\leqslant j\leqslant k}(g_{j-1}^*+|\delta_j|)$ pour $k\geqslant 1$, $g_0^{**}=|\delta_0|$.

Pour tout $k\geqslant 1$, on posera :

$$I_k=\{i;\, 1\leqslant i\leqslant 2^{n_k},\ |\alpha_{k,i}d_{k,i}|\leqslant 4g_{k-1}^{**}\}.$$

Posons maintenant $\delta_0'=0$, et pour $k\geqslant 1$:

$$\delta_k'=\sum_{i\in I_k}\alpha_{k,i}\, d_{k,i},\quad \delta_k''=\delta_k-\delta_k'.$$

(On notera que δ_k' et δ_k'' sont à supports disjoints.)

On a $|\delta_k'|\leqslant 4g_{k-1}^{**}$. Par ailleurs, lorsque $i\notin I_k$, on a sur le support de $d_{k,i}$:

$$|\alpha_{k,i}\, d_{k,i}|\geqslant 4g_{k-1}^{**}\geqslant 4g_{k-1}^*$$

d'après (4.4) et (4.5), ce qui s'écrit encore :

$$|\delta_k''|\geqslant 4g_{k-1}^*\cdot \mathbf{1}_{\{\delta_k''\neq 0\}}$$

Si ω est un point tel que $\delta_k''(\omega) \neq 0$, on peut écrire :

$$g_k^*(\omega) \geqslant |\delta_k''(\omega)| - g_{k-1}^*(\omega) \geqslant \tfrac{1}{2}|\delta_k''(\omega)| + g_{k-1}^*(\omega),$$

ce qui donne finalement :

$$|\delta_k''| \leqslant 2(g_k^* - g_{k-1}^*),$$

d'où après sommation :

$$E\sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k''| \leqslant 2Eg_\infty^* = 2\|g\|_{H_1}. \tag{4.8}$$

On obtient aussi :

$$\sum_{j=0}^{k} |\delta_j''| \leqslant 2g_k^*, \text{ d'où :}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \delta_j'\right| \leqslant |g_k| + \sum_{j=0}^{k} |\delta_j''| \leqslant 3g_k^*.$$

En posant $g_k' = \sum_{j=1}^k \delta_j'$, on aura :

$$|g_k'| \leqslant |g_{k-1}'| + |\delta_k'| \leqslant 3g_{k-1}^* + 4g_{k-1}^{**}$$

ce qui donne d'après (4.5) :

$$|g_k'| \leqslant 7g_{k-1}^{**}. \tag{4.9}$$

Considérons maintenant :

$$\tilde{g}_k = \sum_{j=1}^{k} (g_{j-1}^{**})^{-\frac{1}{2}} \delta_j'.$$

D'après la propriété (b) de T, on peut écrire $\delta_j' = T(d_{j,1})$, où $d_{j,1} \in F_j$. Puisque g_{j-1}^{**} est $\mathcal{F}_{j-1}$-mesurable, on a d'après la propriété (c) de T :

$$(g_{j-1}^{**})^{-\frac{1}{2}} \delta_j' = T((g_{j-1}^{**})^{-\frac{1}{2}} d_{j,1}).$$

Le calcul fait précédemment pour $\tilde{f}_k$ donne ici, en utilisant (4.9) :

$$|\tilde{g}_k| \leqslant 14(g_{k-1}^{**})^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de cette inégalité et de (4.5) que la suite $(\tilde{g}_k)$ est bornée dans $L_2(\Omega, \mathcal{A}_\infty, P)$, donc convergente vers une fonction $\tilde{g}$ de $L_2(\Omega, \mathcal{A}_\infty, P)$. On peut écrire :

$$\tilde{g} = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} (g_{k-1}^{**})^{-\frac{1}{2}} d_{k,1}\right)$$

et d'après la propriété (a) de T :

$$E\left|\sum_{k=1}^{\infty}(g_{k-1}^{**})^{-\frac{1}{2}}d_{k,1}\right|^2 \leqslant (14K)^2 E g_\infty^{**} \leqslant 3(14K)^2\|g\|_{H_1}.$$

D'après l'inégalité de Doob, on aura :

$$E\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k}(g_{j-1}^{**})^{-\frac{1}{2}}d_{j,1}\right|^2 \leqslant 12(14K)^2\|g\|_{H_1}$$

ce qui entraîne, puisque $(g_{j-1}^{**})^{\frac{1}{2}}$ est croissante, en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$E\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{k}d_{j,1}\right| \leqslant 2(Eg_\infty^{**})^{\frac{1}{2}}\cdot 14\sqrt{12}K\|g\|_{H_1}^{\frac{1}{2}} \leqslant 168K\|g\|_{H_1}$$

Posons $\delta_k'' = T(d_{k,2})$. D'après (4.8) et la propriété a) de T, nous aurons :

$$E\sup_{k\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{k}d_{j,2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}E|d_{k,2}| \leqslant K\sum_{k=0}^{\infty}E|\delta_k''| \leqslant 2K\|g\|_{H_1}.$$

Pour finir, notons que $T(d_{k,1}+d_{k,2}) = \delta_k = T(d_k)$, ce qui montre que $d_k = d_{k,1}+d_{k,2}$ puisque T est un isomorphisme sur F_k. On trouve finalement

$$\|f\|_{H_1} = E\sup_{k\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{k}d_j\right| \leqslant (2K+168K)\|g\|_{H_1}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 4.6. Nous allons maintenant démontrer un lemme. Nous noterons $L^*(\mathcal{A}_n)$ le sous-espace de L_1 formé des fonctions $\mathcal{A}_n$-mesurables nulles sur $[0, 2^{-n}]$, et $L^0(\mathcal{A}_n)$ le sous-espace formé des fonctions $\mathcal{A}_n$-mesurables d'intégrale nulle.

LEMME 4.10. *Pour tout entier $n \geqslant 1$ on peut construire un opérateur T de $L^*(\mathcal{A}_n)$ sur $L^0(\mathcal{A}_n)$ tel que :*

$$\|f\|_p/9 \leqslant \|Tf\|_p \leqslant 8\|f\|_p,$$

pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et pour toute fonction f de $L^*(\mathcal{A}_n)$.

Démonstration. Désignons par $\mathcal{C}_n$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}_n$ engendrée par les ensembles :

$$(0, 2^{-n});\ (2^{-n}, 2^{-n+1});\ \ldots;\ (2^{-k}, 2^{-k+1});\ \ldots;\ (1/2, 1).$$

Désignons par D l'opérateur défini sur L_1 par :

$$Df(t) = \begin{cases} 2f(2t) & \text{si } 2^{-n} \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{(on a posé } f(t)=0 \text{ pour } t>1) \\ 2f(t+2^{-n}) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2^{-n}. \end{cases}$$

On notera que :

(4.11) $$\|Df\|_p \leqslant 2\|f\|_p \quad \text{pour toute } f\in L_p \text{ et } 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

et

$$\|f\|_p \leqslant \|Df\|_p \quad \text{lorsque } f\in L^*(\mathcal{A}_n),\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Posons maintenant :

$$Uf = f - E(f\,|\,\mathcal{C}_n) + DE(f\,|\,\mathcal{C}_n).$$

Lorsque $f\in L^*(\mathcal{A}_n)$, on remarque que $DE(f\,|\,\mathcal{C}_n) = E(Df\,|\,\mathcal{C}_n)$, et par conséquent $E(Uf\,|\,\mathcal{C}_n) = D(Ef\,|\,\mathcal{C}_n)$. De plus $E(f\,|\,\mathcal{C}_n)\in L^*(\mathcal{A}_n)$; donc d'après (4.11) :

$$\|E(f\,|\,\mathcal{C}_n)\| \leqslant \|D(Ef\,|\,\mathcal{C}_n)\|_p \leqslant \|Uf\|_p,$$

d'où :

$$\|f\|_p \leqslant 3\|Uf\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\ f\in L^*(\mathcal{A}_n).$$

Inversement, en utilisant encore 4.11 :

$$\|Uf\|_p \leqslant 4\|f\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Pour finir considèrons l'automorphisme τ de $[0, 1]$ défini par $\tau(x) = x+\frac{1}{2}r_1(x)$, où $r_1 = h_{1,1}$ désigne la première fonction de Rademacher. Considérons l'opérateur :

$$Vg = g + r_1(g\circ\tau).$$

Il est clair que V agit dans tous les L_p avec une norme $\leqslant 2$. Par ailleurs, si $\mathcal{D}$ désigne la σ-algèbre des événements τ-invariants :

$$E(Vg\,|\,\mathcal{D}) = \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1)}\,g + (\mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1)}\,g)\circ\tau.$$

On en déduit $\|\mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1)}\,g\|_p \leqslant \|Vg\|_p$, d'où :

$$\|\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{2})}\,g\|_p \leqslant \|Vg\|_p + \|E(Vg\,|\,\mathcal{D})\|_p \leqslant 2\|Vg\|_p,$$

et :

$$\|g\|_p \leqslant 3\|Vg\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

L'opérateur $T = V\circ U$ envoie $L^*(\mathcal{A}_n)$ dans $L^0(\mathcal{A}_n)$, surjectivement pour des raisons de dimension, et :

$$\|f\|_p/9 \leqslant \|Tf\|_p \leqslant 8\|f\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\ f\in L^*(\mathcal{A}_n).$$

Le lecteur familier avec les techniques des espaces de Banach reconnaîtra dans la démonstration du lemme 4.10 l'application de la version de de dimension finie de la méthode de décomposition de Pełczynski, introduite dans [1] (voir aussi [9]).

Nous allons construire maintenant un opérateur T satisfaisant les hypothèses de la proposition 4.6. Nous allons construire T en le construisant séparément sur chaque espace

F_k, $k=0, 1, \ldots$. Considérons d'abord le cas de F_0. Nous définirons T sur F_0 par :

$$T(|d_{0,i}|) = d_{0,i}, \quad i=1, 2, \ldots, 2^{n_0}.$$

Pour $f \in F_0$, on a $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$, et $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. Soient maintenant k un entier $\geqslant 1$, et B un atome de $\mathfrak{F}_{k-1}$.

L'atome B se divise en 2^m atomes de $\mathfrak{F}_k$, $m = 2^{n_k - n_{k-1}}$, soit (B_j), $j=1, \ldots, 2^m$. Désignons par $L^0(B, \mathfrak{F}_k)$ l'espace des fonctions $\mathfrak{F}_k$-mesurables, nulles hors de B et d'intégrale nulle (c'est-à-dire les fonctions de F_k nulles hors de B). On notera $L^*(B, \mathfrak{F}_k)$ les fonctions $\mathfrak{F}_k$-mesurables nulles hors de $B \setminus B_1$. D'après le lemme 4.10 il existe un opérateur T_0 de $L^0(B, \mathfrak{F}_k)$ sur $L^*(B, \mathfrak{F}_k)$ tel que :

$$\|f\|_p/8 \leqslant \|T_0 f\|_p \leqslant 9\|f\|_p, \quad f \in L^0(B, \mathfrak{F}_k),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

On définit maintenant T_0 sur F_k en recollant les définitions de T_0 sur chaque atome B de $\mathfrak{F}_{k-1}$. Il est clair que l'inégalité ci-dessus subsiste.

Soit maintenant $(d_{k,i})$, $i=1, \ldots, 2^{n_k}$, la base de G_k considérée précédemment. Définissons un opérateur U de $L_1(\Omega, \mathfrak{F}_k)$ dans G_k par :

$$U(|d_{k,i}|) = d_{k,i}, \quad i=1, 2, \ldots, 2^{n_k}.$$

On voit que $\|Uf\|_2 = \|f\|_2$ et $\|Uf\|_1 = \|f\|_1$ lorsque f est $\mathfrak{F}_k$-mesurable.

On complète la définition de T sur F_k en posant $T = U \circ T_0$. On vérifie, lorsque $f \in F_k$:

$$\|f\|_1/8 \leqslant \|Tf\|_1 \leqslant 9\|f\|_1 \quad \text{et} \qquad (4.12)$$

$$\|f\|_2/8 \leqslant \|Tf\|_2 \leqslant 9\|f\|_2.$$

Par construction, on a $T(F_k) \subset G_k$ pour tout entier $k \geqslant 0$, et l'image $T(F_k)$ est engendrée par les fonctions $(d_{k,i})$ qu'elle contient. La condition (b) est donc satisfaite. Par ailleurs, les espaces (F_k) sont deux à deux orthogonaux, ainsi que les espaces (G_k). On déduit donc de la deuxième inégalité dans (4.12) :

$$\|f\|_2/8 \leqslant \|Tf\|_2 \leqslant 9\|f\|_2 \quad \text{pour } f \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P),$$

ce qui, joint à la première inégalité de (4.12), montre que la propriété (a) est vérifiée. Pour finir, soit f une fonction $\mathfrak{F}_k$-mesurable. Si B est un atome de $\mathfrak{F}_k$, f est constante sur B. On a donc si $h \in L^0(B, \mathfrak{F}_{k+1})$:

$$T(fh) = fTh$$

ce qui montre que la propriété (c) est réalisée.

Nous pouvons donc déduire finalement de la proposition 4.6 :

PROPOSITION 4.13. *Pour tout suite strictement croissante d'entiers* (n_k), *l'espace* $H_1[(\mathcal{A}_{n_k})]$ *est isomorphe à un sous-espace complémenté de l'espace* $H_1(\delta)$.

Nous allons maintenant démontrer le résultat essentiel de ce paragraphe :

THÉORÈME 4.14. *Soit* $(\mathfrak{F}_k)$ *une suite croissante d'algèbres finies de parties d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$, *telle que la condition* (3.9) *soit satisfaite, c'est-à-dire* $\lim_k \delta_k = 0$, *où :*

$$\delta_k = \sup \{P(A);\ A \text{ atome de } \mathfrak{F}_k\}.$$

L'espace $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ *est isomorphe à* H_1.

D'après (3.9) et (4.1), il suffit de montrer que $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1(\delta)$. Cela est vrai indépendamment de la condition (3.9) :

PROPOSITION 4.15. *Tout espace* $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ *est isomorphe à un sous-espace complémenté de* H_1.

En utilisant la proposition 4.13, la proposition 4.15 se réduit au lemme suivant :

LEMME 4.16. *Pour tout espace* $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ *il existe une suite strictement croissante d'entiers* (n_k) *telle que* $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ *soit isomorphe à un sous-espace complémenté de* $H_1[(\mathcal{A}_{n_k})]$.

On remarque pour commencer que tout espace $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ est isomorphe à un espace $H_1[(\tilde{\mathfrak{F}}_k)$, où les algèbres $\tilde{\mathfrak{F}}_k$ vérifient la condition suivante :

(4.17) Il existe une suite d'entiers (m_k) telle que pour tout $k \geqslant 1$, pour tout atome B de $\tilde{\mathfrak{F}}_{k-1}$ et pour tout atome B' de $\tilde{\mathfrak{F}}_k$ tel que $B' \subset B$,

$2^{m_k} P(B')/P(B)$ soit entier, et telle que $2^{m_0} P(A)$ soit entier pour tout atome A de $\tilde{\mathfrak{F}}_0$.

(L'affirmation concernant l'existence des $(\tilde{\mathfrak{F}}_k)$ sera justifiée à la fin de cette section, voir (4.22).)

Supposons désormais que la suite $(\mathfrak{F}_k)$ vérifie (4.17). Nous allons montrer que $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1[(\mathcal{A}_{n_k})]$ où $n_k = \sum_{j=0}^{k} m_j$.

Nous allons construire sur $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, 1]$, muni de la probabilité $P \otimes dt$, une suite d'algèbres $(\mathcal{G}_k)$ telle que :

— $\mathfrak{F}_k \subset \mathcal{G}_k$,[1]

— tout atome A de $\mathcal{G}_k$ est de la forme $B \times C$, où B est un atome de $\mathfrak{F}_k$ et $C \subset [0, 1]$.

— $\mathcal{G}_k$ possède 2^{n_k} atomes de probabilité 2^{-n_k}.

(1) On a identifié $A \in \mathfrak{F}_k$ avec $A \times [0, 1]$.

Dans ces conditions il est clair que $H_1[(\mathcal{G}_k)]$ sera isométrique à $H_1[(\mathcal{A}_{n_k})]$. Nous allons vérifier que $H_1[(\mathcal{F}_k)]$ sera complémenté dans $H_1[(\mathcal{G}_k)]$. Si nous identifions $H_1[(\mathcal{F}_k)]$ à un espace de fonctions $\mathcal{F}_\infty$-mesurables, où $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{k=0}^\infty \mathcal{F}_k$, et $H_1[(\mathcal{G}_k)]$ à un espace de fonctions $\mathcal{G}_\infty$-mesurables, où $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{k=0}^\infty \mathcal{G}_k$, la projection de $H_1[(\mathcal{G}_k)]$ sur $H_1[(\mathcal{F}_k)]$ sera simplement donnée par l'espérance conditionnelle sur $\mathcal{F}_\infty$, $g \to E(g \mid \mathcal{F}_\infty)$. Pour démontrer ce point, nous allons montrer que :

(4.18) Si g est $\mathcal{G}_k$-mesurable, $E(g \mid \mathcal{F}_\infty) = E(g \mid \mathcal{F}_k)$, $\forall k \geq 0$.

Pour vérifier (4.18), il suffit de considérer $g = \mathbf{1}_A$, où A est un atome de $\mathcal{G}_k$. On aura $A = B \times C$, où B est un atome de $\mathcal{F}_k$. Si B' est un atome de $\mathcal{F}_{k+1}$ contenu dans B, l'espérance conditionnelle $E(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{k+1})$ est égale à $|C|$ sur B', ce qui montre que $E(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{k+1}) = |C| \, \mathbf{1}_B = E(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_k)$. On voit donc que $E(g \mid \mathcal{F}_{k+1}) = E(g \mid \mathcal{F}_k)$ lorsque g est $\mathcal{G}_k$-mesurable, puis $E(g \mid \mathcal{F}_{k+l}) = E(g \mid \mathcal{F}_k)$ par récurrence, et enfin $E(g \mid \mathcal{F}_\infty) = E(g \mid \mathcal{F}_k)$ par passage à la limite.

Soient alors $g \in H_1[(\mathcal{G}_k)]$, $g_k = E(g \mid \mathcal{G}_k)$, $d_0 = g_0$, $d_{k+1} = g_{k+1} - g_k$. Nous devons montrer que $Pg = E(g \mid \mathcal{F}_\infty) = f$ appartient à $H_1[(\mathcal{F}_k)]$. Posons $f_k = E(f \mid \mathcal{F}_k)$, $\delta_0 = f_0$, $\delta_{k+1} = f_{k+1} - f_k$. Nous aurons :

$$f_k = E(g \mid \mathcal{F}_k) = E(g_k \mid \mathcal{F}_k) = E(g_k \mid \mathcal{F}_\infty) = Pg_k$$

pour tout $k \geq 0$, d'après (4.18). On a donc $\delta_k = Pd_k$ et on peut écrire d'après Khinchine :

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=0}^\infty |\delta_k|^2\right)^{\frac12} &\leq \sqrt{2} E \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^\infty \delta_k r_k(t) \right| dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 E \left| E\left(\sum_{k=0}^\infty d_k r_k(t) \mid \mathcal{F}_\infty \right) \right| dt \leq \sqrt{2} \int_0^1 E \left| \sum_{k=0}^\infty d_k r_k(t) \right| dt \\ &\leq \sqrt{2} E \left(\sum_{k=0}^\infty |d_k|^2 \right)^{\frac12}, \end{aligned}$$

ce qui montre que dans la norme (0.1), l'opérateur P est de norme $\leq \sqrt{2}$ de $H_1[(\mathcal{G}_k)]$ dans $H_1[(\mathcal{F}_k)]$.

Par ailleurs, $H_1[(\mathcal{F}_k)]$ est un sous-espace de $H_1[(\mathcal{G}_k)]$, avec la norme induite. On a › effet :

(4.19) Si f est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, $E(f \mid \mathcal{F}_k) = E(f \mid \mathcal{G}_k)$.

Cette propriété est identique à la propriété (1.1), et équivalente à (4.18). En effet, les deux propriétés (4.18) et (4.19) signifient que l'orthogonal U_k de $L^2(\mathcal{F}_k)$ dans $L^2(\mathcal{G}_k)$ et l'orthogonal V_k de $L^2(\mathcal{F}_k)$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que

$$E(g - E(g \mid \mathfrak{F}_k))(f - E(f \mid \mathfrak{F}_k)) = 0$$

lorsque f est $\mathfrak{F}_\infty$-mesurable et g $\mathcal{G}_k$-mesurable.

Pour terminer la démonstration du lemme 4.16, il reste à construire les algèbres $(\mathcal{G}_k)$. La construction se fait par récurrence. Considérons d'abord $k=0$. Soit A un atome de $\mathfrak{F}_0$. Le nombre $l=2^{m_0}P(A)$ est entier. Posons $C_j=((j-1)/l, j/l)$, $j=1, 2, ..., l$. Les atomes de $\mathcal{G}_0$ contenus dans A seront les ensembles $A \times C_j$, $j=1, 2, ..., l$ (ils sont bien de probabilité $2^{-n_0}=2^{-m_0}$).

Supposons $\mathcal{G}_{k-1}$ définie, $k \geqslant 1$. Soit $B \times C$ un atome de $\mathcal{G}_{k-1}$, où B est un atome de $\mathfrak{F}_{k-1}$, et soit B' un atome de $\mathfrak{F}_k$ contenu dans B. Considérons l'entier $l=2^{m_k}P(B')/P(B)$. Divisons l'ensemble C en l ensembles C_j, $j=1, 2, ..., l$, de mesure $|C|/l$. Les atomes de $\mathcal{G}_k$ contenus dans $B' \times C$ seront les ensembles $B' \times C_j$, $j=1, 2, ..., l$. Leur probabilité est égale à :

$$|C_j| \cdot P(B') = |C| \cdot P(B')/l = |C| P(B) 2^{-m_k} = 2^{-n_{k-1}-m_k} = 2^{-n_k}.$$

Cet argument démontre la possibilité de la construction des $(\mathcal{G}_k)$, et achève la démonstration du lemme 4.16.

Nous allons terminer cette section en discutant des extensions possibles du théorème 4.14. Il est clair que la condition (3.9) n'est pas nécessaire pour que $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ soit isomorphe à H_1. (On peut prendre par exemple sur $[0, 1]$ l'algèbre $\mathfrak{F}_k$ engendrée par les ensembles $[(j-1)2^{-k}, j2^{-k}]$, $j=1, 2, ..., 2^{k-1}$ et $[1/2, 1]$.).

Inversement il existe des suites d'algèbres finies $(\mathfrak{F}_k)$ telles que $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ soit isomorphe à l_1. (Il suffit de prendre des algèbres $(\mathfrak{F}_k)$ telles que chaque atome B de $\mathfrak{F}_k$ se divise en deux atomes B' et B'' de $\mathfrak{F}_{k+1}$, de façon que $P(B') \geqslant n_k \cdot P(B'')$, où (n_k) est une suite tendant rapidement vers l'infini.)

Soit $(\mathfrak{F}_k)$ une suite croissante d'algèbres finies de parties d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, et soit $\varepsilon > 0$. Posons :

$$A_k^\varepsilon = \bigcup \{B \,;\, B \in \mathfrak{F}_k \quad \text{et } P(B) \leqslant \varepsilon\},$$

$$A_\infty^\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^\varepsilon \quad \text{et } A_\infty = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\infty^\varepsilon.$$

Nous faisons la conjecture suivante :

Conjecture 4.20. Si $P(A_\infty) > 0$, l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ est isomorphe à H_1.

Cette conjecture est en partie inspirée par les résultats de Gamlen et Gaudet [5]. Noter qu'en vertu de (4.1) et de la proposition 4.15, il suffit de montrer que H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ lorsque $P(A_\infty) > 0$.

Nous avons rencontré deux classes d'isomorphisme pour les espaces $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, à savoir H_1 et l_1. Plus généralement :

Question 4.21. Peut-on classifier les classes d'isomorphisme des espaces $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$?

(4.22) Nous allons justifier ici le fait que tout espace $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$ soit isomorphe à un espace $H_1[(\tilde{\mathfrak{F}}_k)]$, où les algèbres $(\tilde{\mathfrak{F}}_k)$ vérifient la condition (4.17).

Supposons donnée une suite (π_k) de fonctions >0 sur Ω, telle que π_k soit $\mathfrak{F}_k$-mesurable et telle que pour $k\geqslant 1$, on ait $E(\pi_k | \mathfrak{F}_{k-1})=1$. Dans ce cas, la suite $g_k=\prod_{j=0}^k \pi_j$ est une $\mathfrak{F}_k$-martingale positive. Supposons de plus que :

(a) $E\pi_0=1$
(b) pour tout $k\geqslant 0$, $|1-\pi_k| \leqslant c_k$,

où la suite c_k est telle que $\frac{1}{2}\leqslant \prod_{k=0}^\infty (1-c_k)$, et $\prod_{k=0}^\infty (1+c_k)\leqslant 2$. Dans ce cas, on a $Eg_k=1$, et $\frac{1}{2}\leqslant g_k \leqslant 2$ pour tout $k\geqslant 0$. La suite (g_k) converge dans L_1 vers une fonction g_∞, telle que $Eg_\infty=1$. Définissons une nouvelle probabilité P sur Ω par $\tilde{P}=g_\infty P$. Si (f_k) est une martingale pour P, la suite $\tilde{f}_k=f_k/g_k$ est une martingale pour $\tilde{P}$, et puisque l'on a $\frac{1}{2}\leqslant g_k\leqslant 2$ pour tout k, on voit que :

$$\frac{1}{4}\int \sup_{k\geqslant 0} |f_k|\,dP \leqslant \int \sup_{k\geqslant 0} |\tilde{f}_k|\,d\tilde{P} \leqslant 4\int \sup_{k\geqslant 0} |f_k|\,dP. \tag{4.23}$$

Désignons par $(\tilde{\mathfrak{F}}_k)$ la suite des algèbres $(\mathfrak{F}_k)$, munies de la probabilité $\tilde{P}$. Les inégalités (4.23) montrent que $H_1[(\tilde{\mathfrak{F}}_k)]$ est isomorphe à $H_1[(\mathfrak{F}_k)]$. Par ailleurs, si B est un atome de $\tilde{\mathfrak{F}}_{k-1}$ et B' un atome de $\tilde{\mathfrak{F}}_k$ contenu dans B, on a :

$$\tilde{P}(B')/\tilde{P}(B)=\frac{\int_{B'} g_{k-1}\pi_k\,dP}{\int_B g_{k-1}\,dP}=\frac{\int_{B'}\pi_k\,dP}{P(B)}.$$

Supposons $\pi_0, \ldots, \pi_{k-1}$ déjà définis. Nous voulons déterminer π_k et un entier m_k de façon que $(2^{m_k}\int_{B'}\pi_k dP)/P(B)$ soit entier pour tout atome B de $\mathfrak{F}_{k-1}$ et pour tout atome B' de $\mathfrak{F}_k$ contenu dans B. Soit B un atome de $\mathfrak{F}_k$ et soient $B_1', \ldots, B_l'$ les atomes de $\mathfrak{F}_k$ contenus dans B. Désignons par $p_1, \ldots, p_l$ les valeurs de π_k sur chacun de ces atomes. Nous voulons que :

(a) $|1-p_i| \leqslant c_k$ et $h_i=(p_i 2^{m_k}P(B_i'))/P(B)$ soit un entier, $i=1, 2, \ldots, l$.
(b) $\sum_{i=1}^l p_i P(B_i')/P(B)=1$.

Soit m un entier donné. Désignons par k_i le plus grand entier tel que :

$$k_i 2^{-m} \leqslant \sum_{j=1}^{i} P(B'_j)/P(B)$$

et $h_1 = k_1$, $h_{i+1} = k_{i+1} - k_i$.

On a $k_l = 2^m$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{l} h_i = 2^m$, et il est clair que pour m assez grand, on aura :

$$(4.24) \qquad (1-c_k)P(B'_i)/P(B) \leqslant h_i 2^{-m} \leqslant (1+c_k)P(B'_i)/P(B), \quad i=1, 2, \ldots, l,$$

et ceci pour tout atome B de $\mathfrak{F}_{k-1}$. On choisira pour m_k un entier m tel que (4.24) soit réalisée.

Posons alors $p_i = h_i 2^{-m} P(B)/P(B'_i)$, $i=1, 2, \ldots, l$.

Nous aurons d'après (4.24) :

$$|1-p_i| \leqslant c_k, \quad i=1, \ldots, l,$$

et les deux autres propriétés seront également satisfaites.

(4.25) Nous allons justifier rapidement le fait que H_1 (ou $H_1(\delta)$) soit isomorphe à la l_1-somme infinie $Y = (\oplus H_1(\delta))_1$. Il est clair que Y est isomorphe à $Y \times Y$, et que $H_1(\delta)$ est complémenté dans Y. Il suffit donc de montrer que Y est complémenté dans $H_1(\delta)$. Considérons sur (0.1) la σ-algèbre $\mathcal{C}$ engendrée par les ensembles $(2^{-n-1}, 2^{-n})$, $n=0, 1, \ldots$. Posons :

$$A = \{(n, i);\ E(h_{n,i} | \mathcal{C}) = 0\}.$$

Désignons par Z le sous-espace de $H_1(\delta)$ engendré par les fonctions $(h_{n,i})$ telles que $(n, i) \in A$. Il est facile de voir que Z se décompose en une l_1-somme $Z = (\oplus_{k=0}^{\infty} Z_k)_1$, où Z_k est engendré par les fonctions $(h_{n,i})$ dont le support est contenu dans $(2^{-k-1}, 2^{-k})$. On remarque pour finir que chaque Z_k est isométrique à $H_1(\delta)_0 = \{f \in H_1(\delta);\ Ef = 0\}$, et $H_1(\delta)_0$ est isomorphe à $H_1(\delta)$.

5. Isomorphismes entre H_1 et les espaces $H_1(\mathbf{R}^n)$ ou $H_1(S^n)$

Nous allons montrer dans cette section que l'espace H_1 est isomorphe aux espaces $H_1(\mathbf{R}^n)$, ainsi qu'aux espaces $H_1(S^n)$, pour tous les entiers $n \geqslant 1$. Il s'agira dans cette section d'espaces de fonctions réelles. Dans le cas $n=1$ l'espace $H_1(S^1)$ est l'espace $\operatorname{Re} H_1$ formé des parties réelles des fonctions de H_1, c'est-à-dire des fonctions réelles f de $L_1(T)$ dont la conjuguée harmonique $\tilde{f}$ est intégrable sur T. Cet espace peut être muni de la norme :

$$|||f||| = \|f\|_1 + \|\tilde{f}\|_1.$$

En tant qu'espace vectoriel sur le corps des réels, H_1 est isomorphe à Re H_1 (l'application $f \to \operatorname{Re} f$ réalise un isomorphisme entre les fonctions de H_1 d'intégrale nulle et les fonctions de Re H_1 d'intégrale nulle. D'après (0.9) H_1 est isomorphe à l'hyperplan (complexe) des fonctions d'intégrale nulle, et Re H_1 est isomorphe à l'hyperplan (réel) des fonctions d'intégrale nulle, au moyen de l'application $f \to \cos\theta f(e^{i\theta}) - \sin\theta \tilde{f}(e^{i\theta})$). On sait par (0.8) que l'espace complexe $H_1(\delta)$ est isomorphe au carré de l'espace réel $H_1(\delta)$, donc à l'espace réel $H_1(\delta)$ lui-même. Finalement, $H_1(S^1)$ est isomorphe à l'espace réel $H_1(\delta)$.

L'espace $H_1(\mathbf{R})$ est l'espace des fonctions réelles f de $L_1(\mathbf{R})$ telles que la transformée de Hilbert $\tilde{f}$ soit intégrable, muni de la norme $\|f\|_1 + \|\tilde{f}\|_1$. On sait que les espaces $H_1(S^1)$ et $H_1(\mathbf{R})$ sont isomorphes. (L'isomorphisme des espaces complexes est démontré dans [8]. Le cas réel en découle.)

Les deux espaces $H_1(S^1)$ et $H_1(\mathbf{R})$ admettent aussi une description en termes d'atomes, qui se généralise facilement à une dimension n quelconque pour définir $H_1(S^n)$ et $H_1(\mathbf{R}^n)$. Munissons S^n de la distance géodésique et $\mathbf{R}^n$ de la distance euclidienne. Un atome est une fonction réelle a (sur $\mathbf{R}^n$ ou sur S^n), d'intégrale nulle, et pour laquelle existe une boule $B(x, \varepsilon)$ telle que :

$$\{a \neq 0\} \subset B(x, \varepsilon) \quad \text{et} \quad |a| \leqslant \varepsilon^{-n}.$$

Dans le cas de S^n, on ajoute aux atomes la fonction constante égale à 1. Une fonction f appartient à $H_1(S^n)$ ou à $H_1(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si elle admet une décomposition $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$, où les (a_n) sont des atomes et où $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$. La norme de f dans $H_1(S^n)$ ou $H_1(\mathbf{R}^n)$ est équivalente à l'expression $\inf \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|$, où l'inf est pris sur toutes les représentations possibles de f. Le dual de $H_1(S^n)$ (resp. $H_1(\mathbf{R}^n)$) est l'espace réel BMO(S^n) (resp. BMO$(\mathbf{R}^n)$).

Désignons par φ l'application de projection stéréographique de S^n sur $\mathbf{R}^n$. On sait (voir [15]) que l'application $g \to g \circ \varphi$ est un isomorphisme de BMO$(\mathbf{R}^n)$ sur BMO(S^n). En utilisant la dualité H_1-BMO, on en déduit que $H_1(\mathbf{R}^n)$ est isomorphe au sous-espace de $H_1(S^n)$ formé des fonctions d'intégrale nulle, l'isomorphisme étant donné par $f \to (f \circ \varphi) \cdot \psi$, où ψ est la fonction sur S^n telle que l'on ait pour toute fonction h intégrable sur $\mathbf{R}^n$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\, dx = \int_{S^n} h(\varphi(y))\, \psi(y)\, d\sigma(y)$$

On peut répéter ici les arguments de la section 3. Soit (X_t) le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^{n+1}$, partant du point 0, et soit τ le premier temps $t > 0$ tel que $X_t \in S^n$. On peut généraliser les estimations (3.1) :

LEMME 5.1. *Il existe une constante K telle que :*

$$\|g(X_{t\wedge\tau})\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})]} \leqslant K\|g\|_{\mathrm{BMO}(S^n)}, \quad \forall g \in \mathrm{BMO}(S^n)$$

$$\|f(X_{t\wedge\tau})\|_{H_1[(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})]} \leqslant K\|f\|_{H_1(S^n)}, \quad \forall f \in H_1(S^n).$$

Démonstration. La première inégalité se traite comme dans le cas $n=1$. Il suffit de montrer que :

$$\int\left|g(y)-\left(\int g\,d\mu_x\right)\right|d\mu_x(y) \leqslant K\|g\|_{\mathrm{BMO}}$$

pour tout point x tel que $\|x\|<1$, en désignant par μ_x la probabilité sur S^n :

$$\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^{n+1}}\,d\sigma(y)$$

σ désignant la probabilité uniforme sur S^n.

Pour la deuxième inégalité il suffit de considérer le cas où f est un atome. Supposons f nulle en dehors d'une boule $B(y_0, \varepsilon)$, $y_0 \in S^n$, et désignons encore par f le prolongement de f en fonction harmonique dans la boule unité de $\mathbf{R}^{n+1}$. Soit $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\|x\|<1$. On a :

$$f(x) = \int f(y)\,\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^{n+1}}\,d\sigma(y).$$

Puisque f est d'intégrale nulle, portée par $B(y_0, \varepsilon)$, et puisque $\int|f|\,d\sigma \leqslant C$, où C ne dépend que de n, on voit que $|f(x)|$ est inférieur à la variation de $C(1-\|x\|^2)\cdot\|x-y\|^{-n-1}$ sur $B(y_0, \varepsilon)$. On obtient donc, puisque $|f|$ est majoré par ε^{-n} :

$$|f(x)| \leqslant K \inf\left\{\varepsilon^{-n}, \frac{\varepsilon(1-\|x\|^2)}{\|x-y_0\|^{n+2}}\right\}$$

Introduisons le point $z=(1+\varepsilon)y_0$. On voit que :

$$|f(x)| \leqslant K'\varepsilon\|x-z\|^{-n-1} = g(x).$$

On constate que $g^\alpha(x)$ est sous-harmonique pour $(n-1)/(n+1) \leqslant \alpha < 1$. Il en résulte que $g^\alpha(X_{t\wedge\tau})$ est une sous-martingale, avec $g^\alpha(X_\tau \in L_p$, $p=1/\alpha>1$. On en déduit par l'ingalité de Doob dans L_p :

$$E\sup_{t>0}|f(X_{t\wedge\tau})| \leqslant E\sup_{t>0} g(X_{t\wedge\tau}) \leqslant C_p E g(X_\tau) = C_p\int K'\varepsilon\|y-z\|^{-n-1}\,d\sigma(y) \leqslant K''.$$

Il est assez clair que le raisonnement de discrétisation de la section 3 peut être repris ici sans modification notable :

LEMME 5.2. *Il existe une suite* $(\mathcal{F}_n)$ *de sous-σ-algèbres de* $(\mathcal{F}_\tau)$, *isomorphes aux σ-algèbres* $(\mathcal{A}_n)$ *du système de Haar, et une constante K telles que l'on ait :*

$$\|f(X_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leq K\|f\|_{H_1(S^n)}, \ \forall f \in H_1(S^n)$$

$$\|g(X_\tau)\|_{\mathrm{BMO}[(\mathcal{F}_n)]} \leq K\|g\|_{\mathrm{BMO}(S^n)}, \ \forall g \in \mathrm{BMO}(S^n)$$

A partir de là, le même raisonnement que dans la section 3 montre que :

LEMME 5.3. *L'espace* $H_1(S^n)$ *est isomorphe à un sous-espace complémenté de* $H_1(\delta)$.

On obtient finalement :

THÉORÈME 5.4. *Pour tout entier* $n \geq 1$, *les espaces* $H_1(S^n)$ *et* $H_1(\mathbf{R}^n)$ *sont isomorphes à* H_1.

Démonstration. Nous allons montrer pour commencer que $H_1(S^{n-1})$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1(S^n)$ pour tout $n \geq 2$. Ecrivons chaque point de $\mathbf{R}^{n+1}$ sous la forme (x, t), $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$. Si f est un élément de $H_1(S^{n-1})$, on définit une fonction Tf sur S^n par :

$$Tf(x,t) = \begin{cases} f((1-t^2)^{-\frac{1}{2}}x) & \text{si } |t| \leq \sin \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que T définit un opérateur borné de $H_1(S^{n-1})$ dans $H_1(S^n)$. Par ailleurs on définit un opérateur P de $H_1(S^n)$ dans $H_1(S^{n-1})$ par :

$$Pu(x) = \int_{-1}^{+1} u((1-t^2)^{\frac{1}{2}}x, t)\,(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

On vérifie que $P \circ T$ est l'identité de $H_1(S^{n-1})$, ce qui démontre notre affirmation préliminaire. Puisque H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes, on voit d'après le lemme 5.3 et ce qui précède que H_1 et $H_1(S^n)$ sont chacun isomorphe à un sous-espace complémenté de l'autre, donc ils sont isomorphes d'après (4.1). Par ailleurs, nous avons vu précédemment que $H_1(\mathbf{R}^n)$ est isomorphe à un hyperplan de $H_1(S^n)$, soit encore à un hyperplan (réel) de H_1, donc à H_1 lui-même.

Nous allons terminer cette section en nous intéressant au cas du bidisque D^2. Nous reprenons maintenant les espaces de fonctions complexes. On définira l'espace $H_1(T^2)$ comme l'adhérence dans $L_1(T^2)$ de l'espace des polynômes trigonométriques à deux variables à coefficients complexes,

$$P(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m}\, e^{i(nx+my)},$$

c'est-à-dire aussi l'adhérence de $H_1 \otimes H_1$ dans $L_1(T^2) = L_1 \otimes L_1$.

Nous allons voir que l'espace $H_1(T^2)$ est isomorphe à l'espace $H_1(\delta^2)$ des martingales dyadiques à deux indices. Plus précisément, $H_1(\delta^2)$ est l'espace des séries de Haar doubles de la forme :

$$f(x,y)=\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\,h_\alpha(x)\,h_\beta(y),$$

avec la norme :

$$\|f\|=\int\left(\sum_{\alpha,\beta}|c_{\alpha,\beta}\,h_\alpha(x)\,h_\beta(y)|^2\right)^{\frac12}dx\,dy.$$

(Pour simplifier l'écriture, on a désigné le système de Haar par (h_α), à la place de 'écriture $(h_{n,i})$ utilisée précédemment.) L'espace $H_1(\delta^2)$ admet une norme équivalente du type (0.2), cf. [2].

Nous noterons pour commencer que $H_1(\delta)$ est isomorphe à un sous-espace de $L_1((0,1)^2)$. Associons à chaque élément $f(x)=\sum_\alpha c_\alpha h_\alpha(x)$ de $H_1(\delta)$ la fonction :

$$Tf(x,s)=\sum_\alpha c_\alpha\,h_\alpha(x)\,r_\alpha(s)$$

où (r_α) désigne la suite des fonctions de Rademacher. On voit en utilisant les inégalités de Khinchine que :

$$\frac{1}{\sqrt2}\int\left(\sum_\alpha|c_\alpha h_\alpha(x)|^2\right)^{\frac12}dx\leqslant\int|Tf(x,s)|\,dx\,ds\leqslant\int\left(\sum_\alpha|c_\alpha h_\alpha(x)|^2\right)^{\frac12}dx,$$

ce qui montre que T est un isomorphisme de $H_1(\delta)$ sur le sous-espace $X=T(H_1(\delta))$ de $L_1([0,1]^2)$. Considérons maintenant la norme induite par $L_1([0,1]^4)$ sur $X\otimes X$. Si $g=\sum_{\alpha,\beta}c_{\alpha,\beta}\,h_\alpha(x)h_\beta(y)r_\alpha(s)r_\beta(t)$ est un élément de $X\otimes X$, on aura en utilisant l'inégalité de Khinchine itérée :

$$\begin{aligned}\frac12\int\left(\sum_{\alpha,\beta}|c_{\alpha,\beta}\,h_\alpha(x)\,h_\beta(y)|^2\right)^{\frac12}dx\,dy&\leqslant\int|g(x,y,s,t)|\,dx\,dy\,ds\,dt\\&\leqslant\int\left(\sum_{\alpha,\beta}|c_{\alpha,\beta}\,h_\alpha(x)\,h_\beta(y)|^2\right)^{\frac12}dx\,dy.\end{aligned}$$

Cela montre que $H_1(\delta^2)$ est isomorphe à l'adhérence de $X\otimes X$ dans $L_1([0,1]^4)$. Pour montrer l'isomorphisme entre $H_1(T^2)$ et $H_1(\delta^2)$, nous aurons besoin d'un lemme.

Soient X_1, X_2, Y_1, Y_2 des sous-espaces de L_1, S et T deux opérateurs bornés de X_1 dans X_2 et de Y_1 dans Y_2 respectivement. On définit un opérateur $S\otimes T$ de $X_1\otimes Y_1$ dans $X_2\otimes Y_2$ par :

$$S\otimes T\left(\sum_{n=1}^N x_n\otimes y_n\right)=\sum_{n=1}^N S(x_n)\otimes T(y_n).$$

On a alors :

LEMME 5.5. *L'opérateur $S\otimes T$ est borné de $X_1\otimes Y_1$ dans $X_2\otimes Y_2$, munis des normes induites par $L_1([0, 1]^2)$, et plus précisément $\|S\otimes T\| \leqslant \|S\|\,\|T\|$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $T = \mathrm{Id}$, $Y_1 = Y_2$. Si $f(s,t) = \sum_{n=1}^{N} x_n(s)y_n(t)$ est un élément de $X_1\otimes Y_1$, on peut écrire pour t fixé :

$$(S\otimes \mathrm{Id})(f)(s,t) = \sum_{n=1}^{N}(Sx_n)(s)\,y_n(t) = S\left(\sum_{n=1}^{N} x_n y_n(t)\right)(s)$$

On obtient donc :

$$\int |(S\otimes \mathrm{Id})(f)(s,t)|\,ds \leqslant \|S\| \int \left|\sum_{n=1}^{N} x_n(s)\,y_n(t)\right| ds,$$

et on obtient le résultat après intégration par rapport à t.

Le lemme 5.5 implique que l'adhérence $X_1\bar{\otimes} Y_1$ de $X_1\otimes Y_1$ dans $L_1([0, 1]^2)$ est isomorphe à $X_2\bar{\otimes} Y_2$ lorsque X_1 est isomorphe à X_2 et Y_1 isomorphe à Y_2. On utilise pour S et T les isomorphismes entre X_1 et X_2, Y_1 et Y_2 ainsi que la relation

$$(S^{-1}\otimes T^{-1})\circ(S\otimes T) = (S\otimes T)\circ(S^{-1}\otimes T^{-1}) = \mathrm{Id}.$$

En appliquant ce qui précède à $X_1 = Y_1 = H_1$ et à $X_2 = Y_2 = H_1(\delta)$, on obtient finalement :

THÉORÈME 5.6. *Les espaces $H_1(T^2)$ et $H_1(\delta^2)$ sont isomorphes.*

Cela montre en particulier que $H_1(T^2)$ possède une base inconditionnelle, équivalente au double système de Haar $(h_\alpha(x)h_\beta(y))$. Il est clair que la méthode présentée ci-dessus se généralise aux polydisques : l'espace $H_1(T^n)$ est isomorphe à l'espace $H_1(\delta^n)$ des martingales dyadiques à multi-indice dans $\mathbf{N}^n$.

Nous n'avons pas su décider si H_1 et $H_1(T^2)$ sont isomorphes ou non. Nous laisserons ceci sous forme de question :

Question 5.7. Les espaces H_1 et $H_1(T^2)$ sont-ils isomorphes? [1] Plus généralement, l'espace $H_1(T^n)$ est-il isomorphe à $H_1(T^m)$ lorsque $n \neq m$?

Il est clair que H_1 est isomorphe à un sous-espace complémenté de $H_1(T^2)$. La question se réduit donc à savoir si $H_1(T^2)$ (ou $H_1(\delta^2)$) est isomorphe à un sous-espace complémenté de H_1. Il est également facile de voir que $H_1(T^2)$ est isomorphe à un sous-espace de H_1. En fait tout sous-espace de L_1 possédant une base inconditionnelle est isomorphe à un sous-espace de H_1.

---

[1] Voir la note ajoutée à la correction des épreuves.

Note ajoutée à la correction des épreuves : L. Carleson a donné récemment une base inconditionnelle esplicité pour H_1, qui permet aussi de vérifier directement l'isomorphisme entre H_1 et $H_1(\delta)$. Plus récemment P. Wojtaszczyk a annoncé que le systéme de Franklin est une base inconditionnelle pour H_1. Par ailleurs J. Bourgain a montré que H_1 et $H_1(T^2)$ ne sont pas isomorphes.

Bibliographie

[1] Bennett, G., Dor, L. E., Goodman, V., Johnson, W. B. & Newman, C. M., On uncomplemented subspaces of L_p, $1 < p < 2$. *Israel J. Math.*, 26 (1977), 178–187.

[2] Brossard, J., Généralisation des inégalités de Burkholder-Gundy aux martingales régulières à deux indices. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 288 (1979), 267–270.

[3] Burkholder, D. L., Gundy, R. F. & Silverstein, M. L., A maximal function characterization of the class H^p. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157 (1971), 137–153.

[4] Coifman, R. R. & Weiss, G., Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 (1977), 569–645.

[5] Gamlen, J. L. & Gaudet, R. J., On subsequences of the Haar system in $L_p[0, 1]$ $(1 < p < \infty)$. *Israel J. Math*, 15 (1973), 404–413.

[6] Garsia, A. M., *Martingale inequalities.* Seminar notes on recent progress, Benjamin, 1973.

[7] Herz, C., Bounded mean oscillation and regulated martingales. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 193 (1974), 199–215.

[8] Hoffman, K., *Banach spaces of analytic functions.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[9] Johnson, W. B., Maurey, B., Schechtman, G. & Tzafriri, L., Symmetric structures in Banach spaces. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 217 (1979).

[10] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Springer Verlag, Ergebnisse 92, 1977.

[11] Maurey, B., Plongement de H_1 dans un espace à base inconditionnelle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 287 (1978), 865–867.

[12] —— Isomorphismes entre espaces H_1. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 288 (1979), 271–273.

[13] Paley, R. E., A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. London Math. Soc.*, 34 (1932), 241–264.

[14] Petersen, K. E., *Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation.* Lecture notes series 28. Cambridge U. Press.

[15] Reimann, H. M. & Rychener, T., *Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation.* Lecture notes 487, Springer Verlag.

[16] Stein, E. M., Classes H^p, multiplicateurs et fonctions de Littlewood-Paley. *C. R. Acak. Sci. Paris*, 263 (1966), 780–781.

[17] Szarek, S. J., On the best constants in the Khintchine inequality. *Studia Math.*, 58 (1976), 197–208.

[18] Wojtaszczyk, P., Decomposition of H_p-spaces. Preprint n° 144, Institut Math., Polish Acad. Sc.

[19] Zygmund, A., *Trigonometric series I, II,* second edition. Cambridge University Press, 1959.

Reçu le 24 septembre, 1979