

SUR LA POSTULATION GÉNÉRIQUE DES COURBES RATIONNELLES

BY

A. HIRSCHOWITZ

Université de Nice, France

§ 0. Introduction

Dans un récent travail, Hartshorne demande (en particulier) le degré des surfaces de \mathbf{P}_3 contenant une courbe rationnelle suffisamment générale ([H1] Remark 3.3.1). L'objet du présent travail est de démontrer le résultat conjecturé par Hartshorne en prouvant le

THÉORÈME 0.1. *Soient d et m deux entiers naturels vérifiant $dm + 1 \geq \binom{m+3}{3}$. Alors il existe une courbe rationnelle lisse de degré d dans $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ et $\binom{m+3}{3}$ points sur cette courbe tels que la seule section globale de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(m)$ s'annulant sur ces points soit la section nulle.*

On peut observer que cet énoncé géométrique admet la traduction algébrique suivante :

THÉORÈME 0.2. *Soient d et m deux entiers naturels vérifiant $dm + 1 \geq \binom{m+3}{3}$. Alors il existe quatre polynômes, P_1, P_2, P_3, P_4 à une variable de degré au plus d , tels que pour tout polynôme homogène non nul R à quatre variables et de degré au plus m , le polynôme $R(P_1, P_2, P_3, P_4)$ soit non nul.*

La démonstration se fait par récurrence sur m conformément au schéma suivant : on fixe une quadrique Q dans \mathbf{P}_3 (avec un plan, à la place de la quadrique, la méthode semble plus difficile à mettre en oeuvre). Si C est une courbe rationnelle de degré d coupant Q en $(m+1)^2$ points en « position générale » alors toute section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(m)$ s'annulant sur C s'annule sur Q . La division par une équation de Q fournit alors une section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(m-2)$ à laquelle on essaie d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Les difficultés de ce programme naïf sont les suivantes : une courbe rationnelle irréductible de degré d coupe Q en $2d$ points et non en $(m+1)^2$. On doit donc considérer des courbes réductibles pour augmenter artificiellement le nombre de « points d'intersection ». La principale difficulté consiste précisément à ajuster ce nombre : elle est résolue aux §§ 4 et 5 avec la définition des schémas U : ici on a recours à des courbes rationnelles avec nilpotents. La deuxième difficulté est constituée par le problème de position générale sur la quadrique dont la solution, qui

utilise aussi des courbes rationnelles dégénérées, est exposée au § 2.6. La troisième difficulté apparaît lorsqu'on veut appliquer une hypothèse de récurrence car on n'a plus affaire à une simple courbe rationnelle mais à un schéma un peu plus compliqué. Le contrôle de cette complexité est obtenu par la formulation d'hypothèses de récurrence adéquates (§ 3). Suivant les valeurs de m , le raisonnement par récurrence prend six formes (§§ 4 et 5) correspondant aux six figures suivantes :

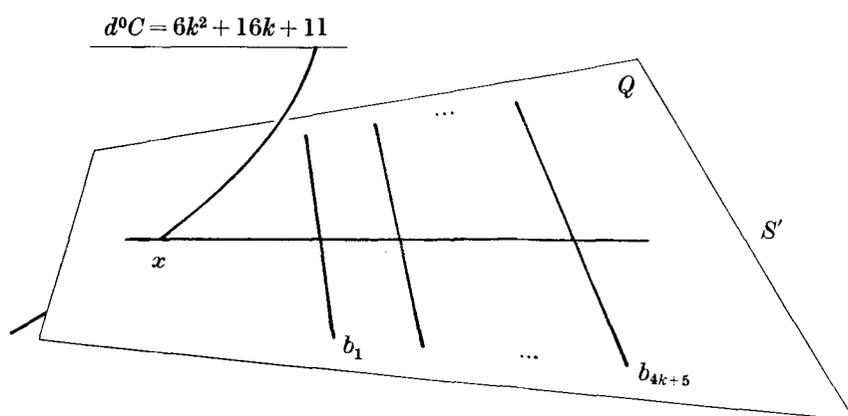


Fig. 1. Courbe rationnelle de degré $6k^2 + 20k + 17$ coupant Q « suffisamment » et dont le schéma résiduel à Q est une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 16k + 11$ (cf. § 4.3).

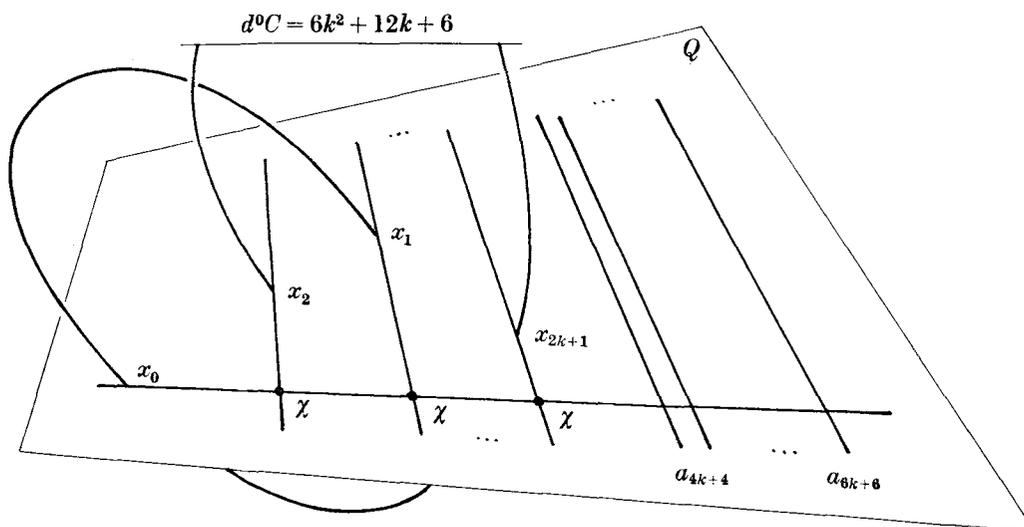


Fig. 2. Courbe rationnelle de degré $6k^2 + 16k + 11$ avec ses nilpotents (cf. § 1.4 pour les notations), coupant Q « suffisamment » et dont le schéma résiduel à Q est réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 12k + 6$ avec $2k + 1$ points (cf. § 4.2).

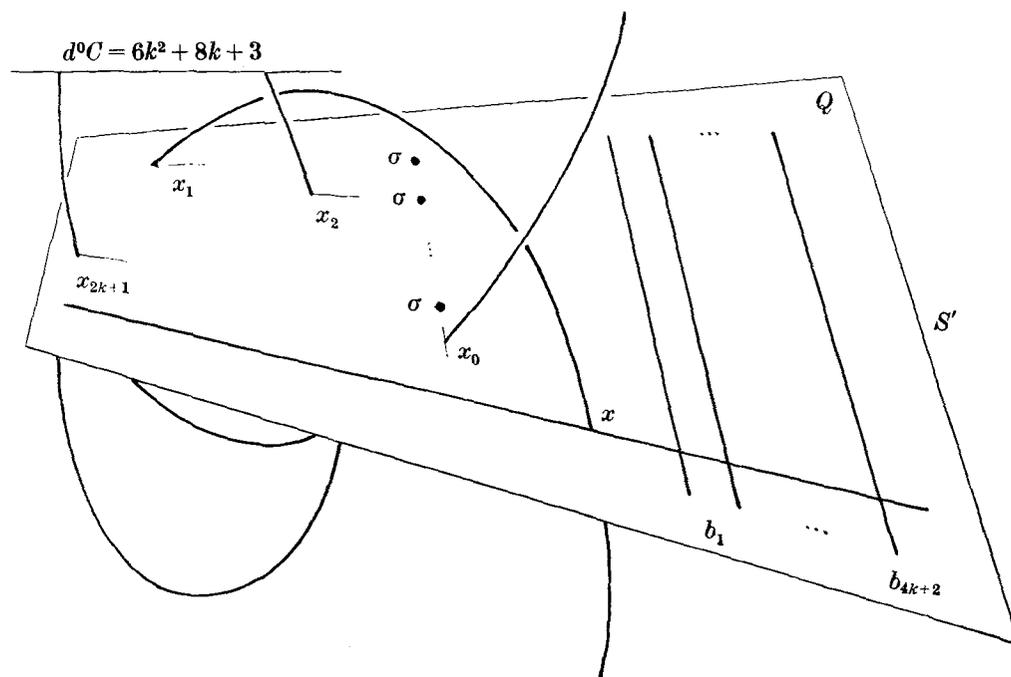


Fig. 3. Réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 12k + 6$ avec $2k + 1$ points, coupant Q « suffisamment » et dont le schéma résiduel à Q est une courbe rationnelle de degré $6(k - 1)^2 + 20(k - 1) + 17$ (cf. § 4.1).

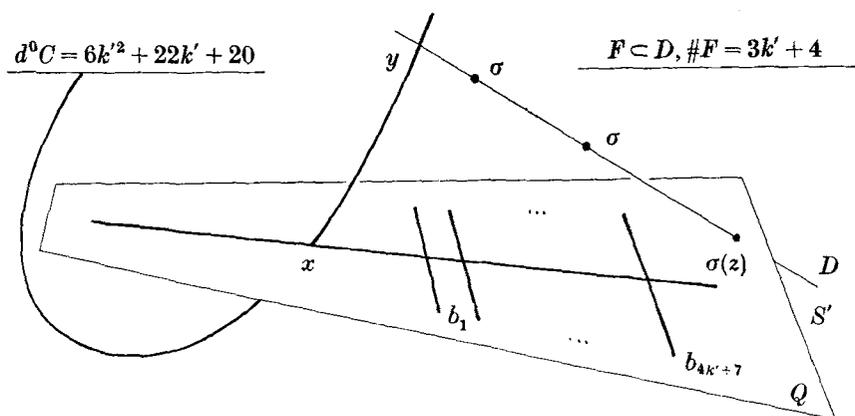


Fig. 4. Réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k'^2 + 26k' + 28$ avec $3k' + 5$ points, coupant Q « suffisamment » et dont le schéma résiduel à Q est réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k'^2 + 22k' + 20$ avec $3k' + 4$ points (cf. § 5.1 avec $k = k' - 1$).

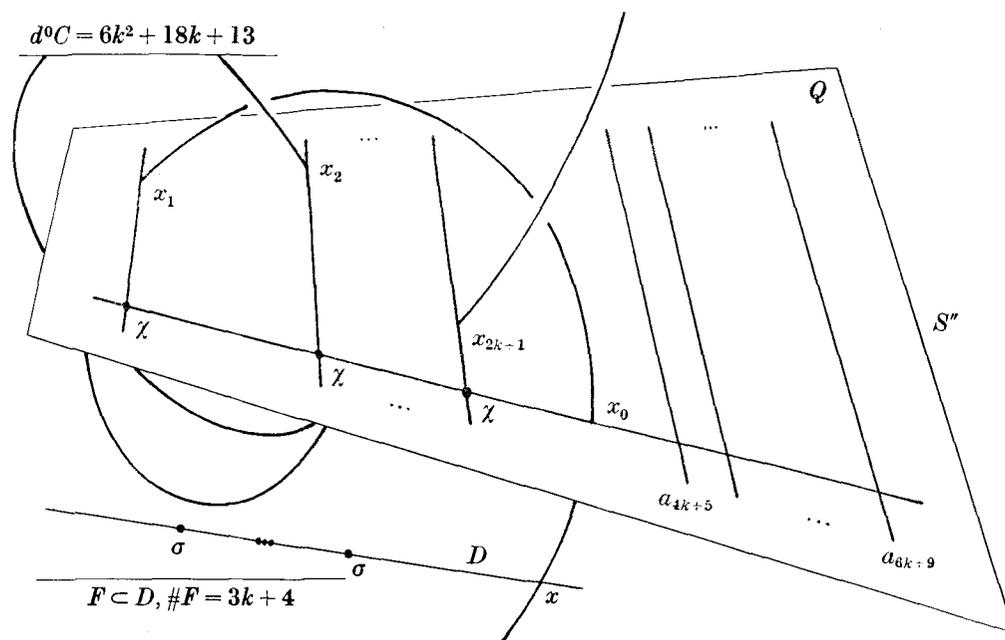


Fig. 5. Réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 22k + 20$ (non réduite) avec $3k + 4$ points, coupant Q « suffisamment », et dont le schéma résiduel à Q est réunion d'une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 18k + 13$ avec $5k + 5$ points (cf. § 5.3).

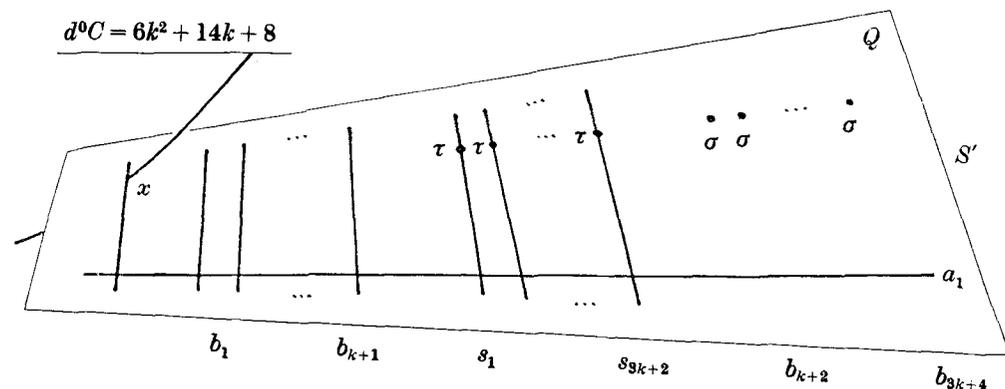


Fig. 6. « Réunion » d'une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 18k + 13$ avec $5k + 5$ points (alignés!), coupant Q « suffisamment » et dont le schéma résiduel à Q est réunion d'une courbe rationnelle de degré $6(k - 1)^2 + 26(k - 1) + 28$ avec $3(k - 1) + 5$ points (cf. § 5.2).

Cette démonstration illustre le théorème de semi-continuité pour les faisceaux plats, qui assure que les propriétés du type $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_Y(m)) = 0$ sont ouvertes dans le schéma de Hilbert : c'est ce qui permet en particulier, en fin de démonstration (§ 3), de repasser des courbes singulières aux courbes lisses. Elle illustre aussi le fait que dans une variété, l'inter-

section de deux ouverts de Zariski non vide est non vide; il faut observer qu'en aucun cas elle ne fournit une courbe explicite (fût-elle singulière) ayant la postulation générique. Enfin elle illustre combien il est profitable de compléter les variétés de modules par la considération de schémas avec nilpotents, même pour l'étude des courbes lisses. Après avoir précisé les notations (§ 1), on expose au § 2 la méthode commune aux six raisonnements avec son mode d'emploi et ses accessoires. Puis on formule les hypothèses de récurrence en montrant qu'elles impliquent le théorème (§ 3). Enfin le coeur de la démonstration est exposé aux §§ 4 et 5.

Je remercie R. Hartshorne, le referee, et J. C. Gontard, qui pour des critiques utiles, qui pour m'avoir, jadis, fait découvrir la quadrique.

§ 1. Notations, conventions

1.1. Variétés, schémas. Par précaution, nous prenons \mathbb{C} comme corps de base mais nos propos semblent devoir s'adapter au cas d'un corps infini quelconque. Tous les schémas considérés sont quasi-projectifs. Les variétés sont les schémas réduits et irréductibles. La seule topologie utilisée est celle de Zariski.

1.2. Sous-schémas. Les sous-schémas considérés sont propres. Si Y est un sous-schéma de \mathbb{P}_3 , on note \mathcal{O}_Y son faisceau structural, \mathcal{J}_Y son faisceau d'idéaux et $T_x Y$ son espace tangent (de Zariski) au point x . Si Q est un autre sous-schéma de \mathbb{P}_3 , on dit que Q et Y sont transverses (resp. quasi-transverses) en un de leurs points communs x , s'ils y sont non singuliers et si l'application naturelle de $T_x Q \oplus T_x Y$ dans $T_x \mathbb{P}_3$ est surjective (resp. de rang maximum). Si Y est contenu dans Q , on note $\mathcal{J}_{Y,Q}$ son faisceau d'idéaux dans \mathcal{O}_Q . Enfin le schéma résiduel de Y à Q est défini par l'idéal noyau du morphisme naturel de \mathcal{O}_Y dans $\text{Hom}(\mathcal{J}_Q, \mathcal{O}_Y)$.

1.3. L'espace projectif. On appelle m -polynôme toute section globale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(m)$. On note Grass la variété grassmannienne des droites de \mathbb{P}_3 et Drap la variété d'incidence dans $\mathbb{P}_3 \times \text{Grass}$.

1.4. Sous-schémas de \mathbb{P}_3 . On note Q une quadrique non singulière de \mathbb{P}_3 fixée une fois pour toutes. Si x est un point de \mathbb{P}_3 , on note aussi $\sigma(x)$ le sous-schéma associé et $\chi(x)$ son premier voisinage infinitésimal (défini par $\mathcal{J}_{\sigma(x)}^2$). Si P est un plan contenant x , on note $\tau(x, P)$ le sous-schéma défini par $\mathcal{J}_P + \mathcal{J}_{\chi(x)}$: c'est le premier voisinage infinitésimal de x dans P . Si D et D' sont deux droites distinctes concourantes, on note $[D, D']$ le plan qu'elles engendrent. De même si x et x' sont deux points distincts, on note $[x, x']$ la droite qu'ils engendrent. Toutes ces conventions s'étendent de façon évidente au cas avec paramètre.

1.5. La quadrique. On note S' et S'' les deux systèmes de génératrices de Q et $(\pi', \pi'') : Q \rightarrow S' \times S''$, l'identification naturelle. Si x, y, z, \dots sont des points de Q , on note x', y', z', \dots et x'', y'', z'', \dots respectivement leurs projections sur S' et S'' . On fixe une fois pour toutes une suite de points (injective), a_0, a_1, \dots dans S' et une autre b_0, b_1, \dots dans S'' . Pour s' dans S' , on pose $\Delta_{s'}' := \pi'^{-1}(s')$ et pour x dans Q , $\Delta_x' := \Delta_{x'}'$. On définit de façon analogue $\Delta_{s''}''$ et Δ_x'' . Enfin pour s' et s'' dans S' et S'' , on pose abusivement $(s', s'') = \Delta_{s'}' \cap \Delta_{s''}''$. Ces conventions s'étendent elles aussi de façon évidente au cas relatif.

1.6. Propriétés génériques. Soit S une variété. Nous disons qu'une propriété est générique sur S si elle est commune aux points d'un ouvert de Zariski non vide de S . En particulier, nous attribuons une propriété à la fibre générique d'un morphisme $X \rightarrow S$ si l'ensemble des points s de S où la fibre $X(s)$ possède cette propriété est un ouvert de Zariski non vide.

1.7. Schémas de Hilbert de points. Si X est un S -schéma, on note $\text{Hilb}^p X/S$ le S -schéma de Hilbert des sous-schémas de colongueur p des fibres de $X \rightarrow S$. Si $X \rightarrow S$ est une fibration en droites projectives, on sait que $\text{Hilb}^p X/S \rightarrow S$ est une fibration en espaces projectifs de dimension p .

1.8. Schémas de Hilbert de courbes. On note Z_d la fermeture dans le schéma de Hilbert des sous-schémas de \mathbf{P}_3 de l'ensemble des courbes rationnelles non singulières de degré d . On appelle ici courbe rationnelle de degré d tout sous-schéma de \mathbf{P}_3 correspondant à un point de Z_d (voir en 2.5.4 quelques remarques concernant cette définition peu usuelle). Pour $l \leq d+1$, on note $Z_{d,l}$ le schéma des couples $(\gamma; x_1, \dots, x_l)$ dans $Z_d \times Q^l$ constitués d'une courbe γ rationnelle de degré d et de l points distincts de Q tels que γ et Q soient transverses en chacun des points x_i . On verra (§ 2.3) que les schémas Z_d et $Z_{d,l}$ sont irréductibles moyennant quoi on les considèrera comme des variétés. On notera C_d et $C_{d,l}$ la courbe universelle dans $Z_d \times \mathbf{P}_3$ et $Z_{d,l} \times \mathbf{P}_3$; lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté on la notera simplement C . Enfin on commettra systématiquement l'abus qui consiste à identifier un morphisme à valeurs dans un schéma de Hilbert avec le sous-schéma correspondant. Ainsi $C_{d,l}$, ou simplement C , désigne aussi le morphisme naturel $Z_{d,l} \rightarrow Z_d$.

1.9. La notation $H_m(T/S) = 0$. Si S est une variété et T un sous-schéma de $S \times \mathbf{P}_3$, on note $H_m(T/S) = 0$ l'énoncé suivant : $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{T(S)}(m))$ est génériquement nul.

§ 2. La méthode

Le coeur de notre démonstration comporte six raisonnements assez voisins les uns des autres. Dans le présent paragraphe, nous présentons la méthode commune à ces six raisonnements. Son point de départ est le Lemme 2.1 qui est une variante avec nilpotents

et paramètres de la remarque suivante : soit m un entier, U une courbe réduite de \mathbf{P}_3 , U' son intersection avec Q et U'' la réunion des composantes irréductibles de U non contenues dans Q . On suppose que $H^0(Q, \mathcal{J}_{U', Q}(m))$ est nul. Si $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U''}(m-2))=0$ alors $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_U(m))=0$.

2.1. Le lemme-cadre. Soit m un entier, W une variété et U, U', U'' trois sous-schémas de $W \times \mathbf{P}_3$ avec U' contenu dans $W \times Q$, tels que pour w générique dans W , $U'(w)$ soit égal à (ou contenu dans) $Q \cap U(w)$ et $U''(w)$ égal au (ou contenu dans le) schéma résiduel à Q de $U(w)$. On suppose qu'il existe un point w' au-dessus duquel U' est plat et vérifie $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U'(w'), Q}(m))=0$. Si $H_{m-2}(U''/W)=0$ alors $H_m(U/W)=0$.

Démonstration. Par semi-continuité, la condition $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U'(w), Q}(m))=0$ est générique. Soit alors w vérifiant les deux inclusions génériques de l'énoncé, la condition précédente et $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U'(w)}(m-2))=0$. Si P est un m -polynôme s'annulant sur $U(w)$, il s'annule sur $U'(w)$ donc sur Q . Si q est une équation de Q , alors, comme $\mathcal{J}_{U'(w)}(m-2)$ contient le noyau de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(m-2) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{J}_Q(2), \mathcal{J}_{U'(w)}(m))$, P/q est un $(m-2)$ -polynôme s'annulant sur $U''(w)$ donc identiquement nul.

2.2. Le mode d'emploi. Ce lemme s'applique aux §§ 4 et 5 pour montrer six énoncés du type

$$H_{m-2}(Y^{m-2}/Z^{m-2})=0 \quad \Rightarrow \quad H_m(Y^m/Z^m)=0.$$

Pour se mettre en position d'appliquer le lemme, on définit des schémas W, U, U', U'' : en vérité, ce choix est inspiré par les figures 1 à 6 et c'est le point de départ de toute la démonstration bien que dans l'exposition les hypothèses de récurrence apparaissent antérieurement.

Il faut alors vérifier les hypothèses du lemme-cadre :

— à chaque fois l'irréductibilité de W résulte sans commentaire des préliminaires du § 2.3.

— à chaque fois les inclusions génériques résultent sans commentaire des préliminaires du § 2.4.

— pour choisir le point w' , il nous faut des préliminaires concernant la platitude et le calcul de fibres (§ 2.8) et surtout il nous faut contrôler l'intersection de la courbe rationnelle générique avec Q . C'est le second point délicat de la démonstration, qui nécessite la connaissance de certaines courbes rationnelles dégénérées (§ 2.5). Ce point délicat est traité au § 2.6.

Une fois vérifiées les hypothèses du lemme-cadre, il reste à prouver les deux implications :

$$H_{m-2}(Y^{m-2}/Z^{m-2}) = 0 \Rightarrow H_{m-2}(U''/W) = 0$$

et

$$H_m(U/W) = 0 \Rightarrow H_m(Y^m/Z^m) = 0.$$

C'est pourquoi on doit étudier au § 2.7 comment se comporte la propriété $H_k = 0$ vis-à-vis des changements de base.

Grâce à tous ces préparatifs, chacun des six raisonnements ne comportera que les quatre étapes suivantes :

- (1°) Définitions de W, U, U', U'' .
- (2°) Validité de U (i.e. $H_m(U/W) = 0 \Rightarrow H_m(Y^m/Z^m) = 0$).
- (3°) Validité de U' (i.e. recherche de w').
- (4°) Validité de U'' (i.e. $H_{m-2}(Y^{m-2}/Z^{m-2}) = 0 \Rightarrow H_{m-2}(U''/W) = 0$).

2.3. Irréductibilité. Nous énonçons ici les résultats d'irréductibilité qui nous seront utiles. Au passage on montre que les morphismes $Z_{d,i} \rightarrow Z_d$ sont dominants.

La démonstration de la proposition suivante est laissée au lecteur :

PROPOSITION 2.3.1. *Soit $X \rightarrow S$ un morphisme ouvert. Si S et la fibre générique sont irréductibles, alors X est irréductible.*

PROPOSITION 2.3.2. *Le schéma Z_d est irréductible.*

Indication de démonstration. On considère dans l'espace vectoriel des applications polynomiales homogènes de degré d de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C}^4 l'ouvert V_d de celles qui induisent un plongement de $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ dans $\mathbb{C}^4 \setminus 0$. Cette variété V_d est munie d'un morphisme naturel p dans Z_d , morphisme qui est dominant par définition de Z_d .

PROPOSITION 2.3.3 ($Z_{d,i}/Z_d$). *Pour $l \leq d+1$, le schéma $Z_{d,i}$ est irréductible et le morphisme naturel $Z_{d,i} \rightarrow Z_d$ est dominant.*

Démonstration. On reprend les notations précédentes et on note q un polynôme de degré deux sur \mathbb{C}^4 s'annulant sur le cône \hat{Q} de Q . On considère dans $V_d \times (\mathbb{C}^2 \setminus 0)^l$ le sous-schéma localement fermé

$$V_{d,i} := \{(\varphi; x_1, \dots, x_l) \in V_d \times (\mathbb{C}^2 \setminus 0)^l \mid q \circ \varphi(x_i) = 0 \text{ et } d_{x_i}(q \circ \varphi) \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, l\}$$

où d_{x_i} désigne la différentielle au point x_i . Si π désigne la projection de $\mathbb{C}^4 \setminus 0$ sur \mathbb{P}_3 , l'application $(\varphi; x_1, \dots, x_l) \mapsto (p(\varphi); \pi \circ \varphi(x_1), \dots, \pi \circ \varphi(x_l))$ définit un morphisme p_l de $V_{a,l}$ dans $Z_{a,l}$. Nous allons montrer successivement que p_l est dominant et que $V_{a,l}$ est irréductible. Pour démontrer que p_l , dont l'image est l'ensemble des $(\gamma; y_1, \dots, y_l)$ avec γ lisse, est dominant, nous montrons que $Z_{a,l} \rightarrow Z_a$ est ouvert (donc dominant!). Posons $M := C_a \cap (Z_a \times Q)$ et notons M^0 l'ouvert de M des points $(\gamma; x)$ tels que γ coupe Q transversalement en x . La transversalité assure que $M^0 \rightarrow Z_a$ est étale. Or $Z_{a,l}$ s'identifie à un ouvert du produit fibré au-dessus de Z_a de l copies de M^0 . Par suite $Z_{a,l} \rightarrow Z_a$ est étale donc ouvert.

Pour montrer que $V_{a,l}$ est irréductible, considérons le morphisme θ de $V_{a,l}$ dans $(\mathbb{C}^2)^l \times \hat{Q}^l$ qui à $(\varphi; x_1, \dots, x_l)$ associe $(x_1, \dots, x_l; \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_l))$, et montrons que θ est ouvert en tout point $(\varphi^0; x_1^0, \dots, x_l^0)$. Pour cela complétons x_1^0, \dots, x_l^0 en un système x_1^0, \dots, x_{d+1}^0 de points deux à deux indépendants de \mathbb{C}^2 et définissons un germe de section $\hat{\sigma}$ de θ par $\hat{\sigma}(x_1, \dots, x_l; q_1, \dots, q_l) = (\sigma; x_1, \dots, x_l)$ et $\sigma(x_i) = q_i$ pour $i \leq l$, $\sigma(x_j^0) = \varphi^0(x_j^0)$ pour $j > l$. Il reste à observer que les fibres de θ sont des ouverts d'espaces vectoriels ce qui permet d'appliquer la Proposition 2.3.1.

Les résultats précédents donnent immédiatement le

COROLLAIRE 2.3.4. *Les schémas C_a et $C_{a,l}$ sont irréductibles.*

2.4. Les inclusions génériques. Elles se déduisent six fois sans commentaires des lemmes suivants dont nous laissons la démonstration au lecteur.

Pour les inclusions concernant U' :

LEMME 2.4.1. *Soient Y_1, \dots, Y_k des sous-schémas de $S \times X$, où S est une variété et X est propre. Alors la fibre générique de $Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ est la réunion des fibres de Y_1, \dots, Y_k . De plus la fibre de l'intersection $Y_1 \cap \dots \cap Y_k$ est l'intersection des fibres de Y_1, \dots, Y_k .*

LEMME 2.4.2. *Si Y_1, \dots, Y_k sont des sous-schémas de \mathbb{P}_3 , alors $(Q \cap Y_1) \cup \dots \cup (Q \cap Y_k)$ est contenu dans $Q \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_k)$.*

Pour les inclusions concernant U'' :

LEMME 2.4.3. *Le schéma résiduel à Q d'une réunion de sous-schémas est la réunion des schémas résiduels.*

LEMME 2.4.4. *Si X est un sous-schéma réduit et irréductible de \mathbb{P}_3 non contenu dans Q , alors il est égal à son schéma résiduel à Q .*

LEMME 2.4.5. *Le support du schéma résiduel à Q de X est l'ensemble des points x où la fibre du faisceau \mathcal{J}_Q n'est pas contenue dans celle du faisceau \mathcal{J}_X .*

2.5. Courbes rationnelles dégénérées. Les courbes rationnelles que nous considérerons n'auront que des dégénérescences modérées obtenues par application (éventuellement itérée) des trois observations suivantes :

PROPOSITION 2.5.1. *Soit E une courbe rationnelle de degré d et D une droite coupant E en un seul point et ce quasi-transversalement. Alors $E \cup D$ est une courbe rationnelle de degré $d+1$.*

Indication de démonstration. Le cas général se réduit au cas où E est lisse, lequel se traite à l'aide de polynômes : si $(P_i(x, y))_{0 \leq i \leq 3}$ et $(Q_i(x, y))_{0 \leq i \leq 3}$ paramètrent deux courbes rationnelles E et F lisses de degrés d et $d+1$, alors $(xP_i + tQ_i)_{0 \leq i \leq 3}$ définit une famille de courbes rationnelles dont la fibre en $t=0$ a pour support la réunion de E avec la droite joignant $(P_0(0, 1), \dots, P_3(0, 1))$ à $(Q_0(0, 1), \dots, Q_3(0, 1))$, du moins si ces deux points sont distincts.

PROPOSITION 2.5.2. *Soient D_1, \dots, D_d des droites distinctes de réunion connexe. Alors il existe une courbe rationnelle de degré d ayant même support et même lieu singulier que $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_d$.*

Démonstration. Soit $m(i, j)$ le minimum des degrés des courbes connexes C vérifiant

$$D_i \cup D_j \subset C \subset D_1 \cup \dots \cup D_d.$$

On note C_{ij} une telle courbe de degré $m(i, j)$. Si D_k (avec $i \neq k \neq j$) est contenue dans C_{ij} , alors $\overline{C - D_k}$ est non-connexe et si C_{ij}^k désigne la composante connexe de D_i dans $\overline{C - D_k}$, le degré de C_{ij}^k est au plus $m(i, j) - 2$. Comme D_k rencontre C_{ij}^k , on a $m(i, k) < m(i, j)$. Supposons, ce qui est évidemment légitime que m atteint son maximum en (i, d) . D'après ce qui précède, pour $j \leq d-1$, C_{ij} ne contient pas D_d , donc $D_1 \cup \dots \cup D_{d-1}$ est connexe. On peut donc raisonner par récurrence (le cas initial est trivial). Si Y est une courbe rationnelle ayant même support et même lieu singulier que $D_1 \cup \dots \cup D_{d-1}$, et si D_d rencontre D_i en x_0 , on considère une droite variable $L(x)$ paramétrée par le point courant x de D_i , rencontrant D_i en x , vérifiant $L(x_0) = D_d$, et pour x générique, ne rencontrant pas Y ailleurs qu'en x . Alors $(D_i \times Y) \cup L \rightarrow D_i$ est plat (car sans torsion) et sa fibre générique est une courbe rationnelle de degré d d'après la Proposition 2.5.1 (et le Lemme 2.4.1). Par suite sa fibre en x_0 est la courbe rationnelle cherchée.

PROPOSITION 2.5.3. *Soit E une courbe réduite et D une droite de \mathbf{P}_3 . Soit L une droite distincte de D ne coupant E qu'en x , et coupant D en un point y distinct de x . Si F est une courbe rationnelle de degré d , de support $E \cup D$ coupant L quasi-transversalement en x et y , alors $F \cup L \cup \chi(y)$ est une courbe rationnelle de degré $d+1$.*

Démonstration. Elle résulte de la Proposition 2.5.1, parce que $D \cup L \cup \chi(y)$ se déforme en $D \cup L'$ où L' est une droite passant par x sans rencontrer D (cf. [H0] III, 9.8.4 et Fig. 11 p. 260).

Remarque 2.5.4. Les trois propositions précédentes peuvent être considérablement généralisées : on peut par exemple montrer comme en la Proposition 2.5.1 que la réunion de deux courbes rationnelles lisses se coupant en un seul point et ce quasi-transversalement est encore une courbe rationnelle. Il en résulte que toute réunion connexe et simplement connexe de courbes rationnelles lisses dont les tangentes en les points d'intersection sont indépendantes est une courbe rationnelle. Telles sont d'ailleurs les seules courbes connexes réduites de genre arithmétique nul. Donnons enfin un exemple concernant le cas non réduit : soient A, B, C, D quatre points non coplanaires de \mathbf{P}_3 et E un troisième point de $[A, B]$. Posons $\Gamma = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A] \cup [D, E]$. Alors $\Gamma \cup \chi(A), \Gamma \cup \chi(B), \Gamma \cup \chi(C)$ et $\Gamma \cup \chi(E)$ ont leur genre arithmétique nul mais seuls les trois premiers de ces schémas sont des courbes rationnelles.

2.6. Position sur la quadrique. Il nous faut contrôler l'intersection $C \cap Q$ de la courbe rationnelle générique C avec Q non seulement pour prouver $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U^{(w)}, Q}(m)) = 0$ mais aussi, dans les constructions des §§ 4 et 5, où on considère la réunion de la courbe rationnelle générique avec certaines génératrices de Q , pour éviter les intersections parasites qui pourraient compromettre la rationalité, ou la platitude. Ce contrôle prend deux formes : le premier énoncé assure qu'on peut imposer à $C \cap Q$ une allure très spéciale, le second assure qu'on peut interdire à $C \cap Q$ certaines configurations trop spéciales. Le second est une conséquence facile du premier, dont la démonstration repose sur la considération de courbes rationnelles dégénérées.

PROPOSITION 2.6.1 (Pos. Spec. quad.). *Soit $m : S' \rightarrow \mathbf{N}$ une fonction de support fini. On note l le cardinal du support et on suppose que la somme des valeurs prises par m est un entier pair noté $2d$. On suppose vérifiée l'une des deux hypothèses suivantes :*

- (i) $m \leq d-1$ et m prend au moins deux fois la valeur 1.
- (ii) $l \geq 5$ et $m \leq d-2$.

On se donne encore une partie finie B de S'' . Alors il existe une courbe rationnelle Y de degré d , coupant Q transversalement en $2d$ points et vérifiant les deux conditions suivantes :

- (a) la projection sur S'' de $Y \cap Q$ est constituée de $2d$ points distincts, tous hors de B ,
 (b) les fibres de la projection de $Y \cap Q$ sur S' ont pour cardinal la fonction m .

Démonstration. On utilise les courbes rationnelles données par la Proposition 2.5.2 et le fait que trois droites disjointes ont une infinité de sécantes communes. On cherche donc le support de Y sous la forme $D_1 \cup \dots \cup D_d$.

(i) Supposons que $m(s_1) = m(s_2) = 1$ et soit D_1 une droite non contenue dans Q et coupant Δ'_{s_1} et Δ'_{s_2} en des points se projetant hors de B . On raisonne alors par récurrence sur d :

— Si $d = 2$, on a $m(s_3) = m(s_4) = 1$ et on prend pour D_2 une droite générale coupant D_1 , Δ'_{s_3} et Δ'_{s_4} .

— Si $d > 2$, soient s_3 et s_4 deux points où m prend ses plus grandes valeurs et définissons m' par $m'(s_3) = m(s_3) - 1$, $m'(s_4) = m(s_4) - 1$ et $m' = m$ ailleurs. Si $m(s_3) = m(s_4) = d - 1$ alors $l = 4$ et dans tous les cas, $m' \leq d - 2$. L'hypothèse de récurrence fournit D_2, \dots, D_{d-1} et on peut choisir D_d générale coupant D_1 , Δ'_{s_3} et Δ'_{s_4} .

(ii) Soient s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 des points où m prend ses plus grandes valeurs avec $m(s_1) \geq \dots \geq m(s_5)$.

D'après (i) on peut se contenter de traiter le cas où $m(s_4) \geq 2$. Choisissons la droite D_1 coupant Δ'_{s_4} et Δ'_{s_5} et compatible avec (a). Choisissons D_2 coupant D_1 , Δ'_{s_3} et Δ'_{s_2} et compatible avec (a). Choisissons D_3 coupant D_1 , Δ'_{s_3} et Δ'_{s_1} et compatible avec (a). Enfin choisissons D_4 coupant D_1 , Δ'_{s_2} et Δ'_{s_5} et compatible avec (a). Définissons $d' = d - 4$ et m' par $m'(s_1) = m(s_1) - 2$, $m'(s_2) = m(s_2) - 2$, $m'(s_3) = m(s_3) - 2$, $m'(s_4) = m(s_4) - 1$, $m'(s_5) = m(s_5) - 1$ et $m' = m$ ailleurs. On a $m' \leq d'$ et $\sum_x m'(x) = 2d'$. On va alors montrer par récurrence sur d' qu'on peut choisir $D_5, \dots, D_{d'+4}$, chacune de ces droites rencontrant $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ et telles que $D_1 \cup \dots \cup D_{d'+4}$ vérifie (a) et (b).

Pour $d' = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit donc $d' > 0$ et choisissons deux points t_1 et t_2 où m' prend ses plus grandes valeurs. Si on définit m'' par $m''(t_1) = m'(t_1) - 1$, $m''(t_2) = m'(t_2) - 1$ et $m'' = m'$ ailleurs, on a $m'' \leq d' - 1$ et $\sum_s m''(s) = 2d' - 2$. L'hypothèse de récurrence donne alors $D_5, \dots, D_{d'+3}$ et il reste à choisir $D_{d'+4}$ coupant les trois droites $\Delta'_{t_1}, \Delta'_{t_2}$ et D_1 où i , vérifiant $1 \leq i \leq 4$, est choisi de sorte que D_i ne rencontre ni Δ'_{t_1} ni Δ'_{t_2} .

Remarque 2.6.2. Cet énoncé sera employé de façon à permettre l'utilisation des deux évidences suivantes :

— Tout m -polynôme s'annulant en $m + 1$ points d'une droite s'annule en tout point de cette droite.

— Tout m -polynôme s'annulant identiquement sur $m + 1$ génératrices d'un même système de Q s'annule identiquement sur Q .

Définition 2.6.3. Nous dirons que la courbe rationnelle Y de degré d coupe Q *sainement* si l'intersection est transverse et se projette injectivement sur S' et sur S'' .

COROLLAIRE 2.6.4 (Pos. Sain. Quad.). *Soient D_1, \dots, D_p des génératrices de Q . Alors la courbe rationnelle générique de degré d ne rencontre pas $D_1 \cup \dots \cup D_p$ et coupe Q sainement.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.6.1 avec B et m convenablement choisis (en particulier $m \leq 1$) en observant que les conditions requises sont ouvertes.

2.7. Changement de base. Les propriétés $H_m = 0$ avant et après un changement de base peuvent être reliées à l'aide de la remarque suivante :

Soient Z et Z' deux variétés et Y et Y' des sous-schémas respectivement de $Z \times \mathbf{P}_3$ et $Z' \times \mathbf{P}_3$. On note $\text{Plat}(Y'/Z')$ la restriction de la projection de Y' dans Z' à l'ouvert de Z' où elle est plate. Si la fibre générique de $Y \rightarrow Z$ est une fibre de $\text{Plat}(Y'/Z')$ alors

$$H_m(Y/Z) = 0 \Rightarrow H_m(Y'/Z') = 0.$$

Cette remarque s'applique en particulier lorsque Y' se déduit de Y par un changement de base $Z' \rightarrow Z$ dominant (par platitude générique); ou encore quand $Y' \rightarrow Z'$ est plat et que Y se déduit de Y' par un changement de base $Z \rightarrow Z'$ quelconque.

Ces deux situations peuvent se combiner et il nous arrivera (§ 5) de montrer que $H_m(Y/Z) = 0$ implique $H_m(Y'/Z') = 0$ en prouvant que la fibre générique de $Y \rightarrow Z$ admet une déformation (plate) dans \mathbf{P}_3 dont la fibre générique est fibre de $\text{Plat}(Y'/Z')$.

2.8. Platitudes. Pour reconnaître la platitude et calculer les fibres de certains schémas explicites, nous utiliserons les énoncés suivants :

PROPOSITION 2.8.1 (plat. et transv.). *Soit $U \subset S \times \mathbf{P}_3$ une famille plate de courbes paramétrée par le germe de variété (S, s) . On suppose que $U(s)$ coupe Q transversalement en t . Alors $U \cap (S \times Q) \rightarrow S$ est plat en (s, t) et sa fibre en s est $U(s) \cap Q$.*

Démonstration. Elle résulte du fait que $U \rightarrow S$ est une submersion en (s, t) .

PROPOSITION 2.8.2 (plat. et quasitransv.). *Soient U_1 et U_2 deux sous-schémas S -plats de $S \times \mathbf{P}_3$, avec S variété. On suppose qu'il existe une section $\sigma : S \rightarrow S \times \mathbf{P}_3$ telle que, pour tout s , $U_1(s)$ et $U_2(s)$ se coupent quasi-transversalement en $\sigma(s)$. Alors $U_1 \cup U_2 \rightarrow S$ est plat le long du graphe de σ et pour tout s , les germes en $\sigma(s)$ de $(U_1 \cup U_2)(s)$ et de $U_1(s) \cup U_2(s)$ sont égaux.*

Démonstration (soufflée par Peskine). Il suffit d'écrire la suite exacte des Tor pour

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_1 \cup U_2} \rightarrow \mathcal{O}_{U_1} \oplus \mathcal{O}_{U_2} \rightarrow \mathcal{O}_{U_1 \cap U_2} \rightarrow 0$$

PROPOSITION 2.8.3 (Collision droite-pt). *Soit $D \subset \Delta \times \mathbf{P}_2$ une droite de \mathbf{P}_2 paramétrée par une courbe lisse Δ . Soit x un point de \mathbf{P}_2 non contenu dans la fibre générique de D . Alors $D \cup (\Delta \times \{x\})$ est plat sur Δ et si une fibre $D(\delta)$ contient x , alors la fibre en δ de $D \cup (\Delta \times \{x\})$ est la réunion de la fibre de D avec le premier voisinage infinitésimal de x dans \mathbf{P}_2 .*

Démonstration. La platitude résulte de l'absence de torsion. Posons $F = D \cup (\Delta \times \{x\})$. La fibre $F(\delta)$ vérifiant $H^1(F(\delta), \mathcal{O}_{F(\delta)}) = 0$ doit vérifier $H^0(F(\delta), \mathcal{O}_{F(\delta)}) = 2$. Elle doit donc être singulière en x et par conséquent contenir le premier voisinage infinitésimal $\theta(x)$ de x . Comme $H^0(D(\delta) \cup \theta(x), \mathcal{O}_{D(\delta) \cup \theta(x)})$ est déjà égal à 2, $F(\delta)$ ne peut pas être strictement plus grand.

§ 3. Les hypothèses de récurrence

Dans ce paragraphe, nous énonçons en la Proposition 3.1 sous forme de proposition, les hypothèses de récurrence qui sont autant de variantes du théorème. Nous démontrons en § 3.3 ces hypothèses de récurrence dans les deux cas initiaux et nous montrons en § 3.2 que ces hypothèses de récurrence impliquent le Théorème 0.1.

PROPOSITION 3.1. *On a, pour tout entier $m \geq 1$, $H_m(Y^m/Z^m) = 0$, où Z^m et Y^m sont définis ci-dessous.*

3.1.1. *Si m est de la forme $6k + 1$. $Z^m := Z_{6k^2+8k+3}$, $Y^m := C$.*

3.1.2. *Si m est de la forme $6k + 2$. On pose $d := 6k^2 + 10k + 4$, $A := C_d \times_{\mathbf{P}_3} \text{Drap}$. Comme A est un fibré en plans projectifs sur C_d , c'est une variété d'après le Corollaire 2.3.4 et le Lemme 2.3.1. On note B le sous-fibré en droites projectives naturels de $A \times \mathbf{P}_3$ (il provient du morphisme composé $A \rightarrow \text{Drap} \rightarrow \text{Grass}$). C'est encore une variété toujours d'après Lemme 2.3.1. On pose alors $Z^m := \text{Hilb}^{3k+1} B/A$. C'est une variété d'après le Lemme 2.3.1 (cf. aussi § 1.7), qui est munie d'un morphisme vers Z_d et d'un autre vers $\text{Hilb}^{3k+1} \mathbf{P}_3$. Par définition Y^m est la réunion des sous-schémas de $Z^m \times \mathbf{P}_3$ associés à ces deux morphismes.*

3.1.3. *Si m est de la forme $6k + 3$. On pose $Z^m := Z_{6k^2+12k+6, 2k+2}$. On note x_0, \dots, x_{2k+1} les projections de Z^m sur Q et on pose $Y^m := C \cup \sigma(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \sigma(x'_{2k+1}, x''_0)$.*

3.1.4. *Si m est de la forme $6k + 4$. On pose $Z^m := Z_{6k^2+14k+8, 1} \times S''^{3k+2}$. On note x la projection naturelle de Z^m sur Q , s_1, \dots, s_{3k+2} les projections sur S'' , et on pose*

$$Y^m := C \cup \sigma(x', s_1) \cup \dots \cup \sigma(x', s_{3k+2}).$$

3.1.5. Si m est de la forme $6k+5$. On pose $Z^m := Z_{6k^2+16k+11}$ et $Y^m := C$.

3.1.6. Si m est de la forme $6k+6$. On pose $Z^m := Z_{6k^2+18k+13, 2k+2} \times S^{n_{3k+4}}$. On note $(x_0, \dots, x_{2k+1}; s_1, \dots, s_{3k+4})$ la projection de Z^m vers $Q^{2k+2} \times S^{n_{3k+4}}$ et on pose

$$Y^m := C \cup \sigma(x'_0, x'_1) \cup \dots \cup \sigma(x'_0, x''_{2k+1}) \cup \sigma(x'_0, s_1) \cup \dots \cup \sigma(x'_0, s_{3k+4}).$$

3.2. Réduction du théorème. Dans ce paragraphe, on réduit d'abord le théorème à une proposition voisine (3.2.0) puis cette proposition à l'hypothèse de récurrence (Proposition 3.1).

PROPOSITION 3.2.0. Soit m un entier au moins égal à un et d_m le plus petit entier vérifiant $md_m+1 \geq \binom{m+3}{3}$. Alors il existe une courbe rationnelle γ de degré d_m et $\binom{m+3}{3}$ points dans la partie lisse de γ tels que tout m -polynôme s'annulant sur ces points soit identiquement nul.

Pour réduire le Théorème 0.1 à cette proposition, on observe que si d majore d_m , on peut construire d'après la Proposition 2.5.1 une courbe rationnelle de degré d contenant γ et restant lisse aux $\binom{m+3}{3}$ points considérés. Pour achever la réduction, il nous suffit, grâce au théorème de semi-continuité d'observer qu'on peut déformer (platement) ces $\binom{m+3}{3}$ points en autant de points d'une courbe rationnelle lisse de degré d , car un produit fibré de morphismes lisses est encore lisse. Dans la suite on réduit donc la Proposition 3.2.0 aux hypothèses de récurrence.

3.2.1. Si m est de la forme $6k+1$. Ici $d_m = 6k^2 + 8k + 3$. Comme $H_m(Y^m/Z^m) = 0$, il existe une courbe rationnelle lisse γ de degré $6k^2 + 8k + 3$ vérifiant $H^0(\mathbb{P}_3, \mathcal{J}_\gamma(m)) = 0$. Si F est une partie finie à $\binom{m+3}{3}$ éléments de γ , alors toute section de $\mathcal{O}_\gamma(m)$ s'annulant sur F est nulle parce que $\binom{m+3}{3}$ est égal à $(6k^2 + 8k + 3)m + 1$. Par suite $H^0(\mathbb{P}_3, \mathcal{J}_F(m))$ est nul.

3.2.2. Si m est de la forme $6k+2$. Ici $d_m = 6k^2 + 10k + 5$. Comme $H_m(Y^m/Z^m) = 0$, il existe une courbe γ_0 rationnelle de degré $6k^2 + 10k + 4$, une droite D rencontrant γ_0 et une partie finie F à $3k+1$ éléments de D telles que $H^0(\mathbb{P}_3, \mathcal{J}_{\gamma_0 \cup F}(m))$ soit nul. Comme le morphisme naturel de Z^m dans $Z_{6k^2+10k+4}$ est dominant (car plat), on peut supposer que γ_0 est lisse. On peut de plus supposer que D coupe γ_0 en un seul point x et ce quasi transversalement. Enfin on peut évidemment supposer que F et γ_0 sont disjoints. Soit F' une partie à $(6k^2 + 10k + 4)m + 1$ éléments de $\gamma_0 - \{x\}$. Alors $\gamma_0 \cup D$ est une courbe rationnelle de degré d_m (cf. la Proposition 2.5.1) et $F \cup F'$ est une partie de la partie lisse de cette courbe, de cardinal $(6k+2)(6k^2 + 10k + 4) + 3k + 2$, c'est-à-dire $\binom{m+3}{3}$. Tout m -polynôme s'annulant sur $F \cup F'$ s'annule sur F' donc sur γ_0 , donc sur $\gamma_0 \cup F$. Il est alors identiquement nul puisque $H^0(\mathbb{P}_3, \mathcal{J}_{\gamma_0 \cup F}(m))$ est nul.

3.2.3. *Si m est de la forme $6k+3$.* Ici $d_m = 6k^2 + 12k + 7$. Soit $z = (\gamma_0; x_0, \dots, x_{2k+1})$ un point de Z^m tel que $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{Y^m(z)}(m))$ soit nul. D'après la Proposition 2.3.3, on peut supposer que γ_0 est lisse et d'après le Corollaire 2.6.4 qu'elle rencontre Δ_{x_0}'' seulement en x_0 . On peut aussi supposer, d'après le Corollaire 2.6.4, que pour $1 \leq i \leq 2k+1$, le point (x'_i, x''_i) est distinct de x_0 . Soit F l'ensemble des $(x'_i, x''_i)_{1 \leq i \leq 2k+1}$ et F' une partie à $m(6k^2 + 12k + 6) + 1$ éléments de $\gamma_0 - \{x_0\}$. Alors $\gamma = \gamma_0 \cup \Delta_{x_0}''$ est une courbe rationnelle de degré d_m d'après la Proposition 2.5.1, et $F \cup F'$ est bien une partie de la partie lisse de γ et de cardinal $\binom{m+3}{3}$. Si un m -polynôme s'annule sur $F \cup F'$, il s'annule sur F' donc sur γ_0 , donc sur $\gamma_0 \cup F$ qui est $Y^m(z)$. Ce m -polynôme est donc nul.

3.2.4. *Si m est de la forme $6k+4$.* Ici $d_m = 6k^2 + 14k + 9$. Nous ne détaillons pas ce cas qui se traite comme le précédent grâce à l'égalité

$$\binom{m+3}{3} = (6k^2 + 14k + 8)(6k + 4) + 3k + 3.$$

3.2.5. *Si m est de la forme $6k+5$.* Ici $d_m = 6k^2 + 16k + 11$. Nous ne détaillons pas ce cas qui se traite comme le premier grâce à l'égalité

$$\binom{m+3}{3} = (6k^2 + 16k + 11)(6k + 5) + 1.$$

3.2.6. *Si m est de la forme $6k+6$.* Ici $d_m = 6k^2 + 18k + 14$. Nous ne détaillons pas ce cas qui se traite comme en § 3.2.3 grâce à l'égalité

$$\binom{m+3}{3} = (6k^2 + 18k + 13)(6k + 6) + 5k + 6.$$

3.3. Initialisation. L'énoncé $H_1(Y^1/Z^1) = 0$ signifie que la cubique rationnelle (générique) n'est pas plane, ce qui est bien connu. L'énoncé $H_2(Y^2/Z^2) = 0$ signifie que la quartique rationnelle générique est contenue dans une seule quadrique : c'est bien le cas des courbes de bidegré (1, 3) sur une quadrique non-singulière.

§ 4. Les cas impairs

Dans ce paragraphe, nous démontrons la Proposition 3.1 dans le cas où m est impair, ce cas étant sensiblement plus facile que l'autre.

4.1. Le cas $6k+3$. Ici on montre que, pour $k \geq 0$,

$$H_{6k+1}(Y^{6k+1}/Z^{6k+1}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+3}(Y^{6k+3}/Z^{6k+3}) = 0.$$

4.1.1. *Les définitions.* On pose $W := Z_{6k^2+8k+3, 2k+3}$. On note $(C; x_0, \dots, x_{2k+1}, x)$ le morphisme naturel de W vers $Z_{6k^2+8k+3} \times Q_{2k+3}$ et on pose (voir Fig. 3)

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \Delta'_x \cup \Delta''_{b_1} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{4k+2}} \cup \sigma(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \sigma(x'_{2k+1}, x''_0) \\ U &:= C \cup \Gamma \\ U' &:= (C \cup (W \times Q)) \cup \Gamma \\ U'' &:= C. \end{aligned}$$

4.1.2. *Validité de U .* Lorsque $C(w)$ coupe Q sagement et ne rencontre pas $\Gamma(w)$ ailleurs qu'en x , ce qui est générique d'après le Corollaire 2.6.4, alors, d'après la Proposition 2.8.2, on a $U(w) = C(w) \cup \Gamma(w)$. D'après la Proposition 2.5.1, $C(w) \cup \Delta'_{x(w)} \cup \Delta''_{b_1} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{4k+2}}$ est une courbe rationnelle de degré $6k^2 + 12k + 6$ qui coupe Q transversalement en $x_0(w), \dots, x_{2k+1}(w)$. Par suite $U(w)$ est une fibre de $Y^{6k+3} \rightarrow Z^{6k+3}$.

4.1.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 8k + 3$, $l := 6k + 4$, $m(a_0) := 1$, $m(a_1) := \dots := m(a_{2k+1}) := 2k + 1$, $m(a_{2k+2}) := \dots := m(a_{6k+3}) := 2k + 2$, et $B := \{b_1, \dots, b_{4k+2}\}$. On vérifie que $1 + (2k + 1)^2 + (4k + 2)(2k + 2) = 2d$. On note $C(w)$ la courbe obtenue et on choisit, pour $i = 1, \dots, 2k + 1$, $x_i(w)$ dans $C(w) \cap \Delta'_{a_i}$ et $x_0(w)$ dans $C(w) \cap \Delta'_{a_{6k+3}}$. Enfin on pose $x(w) := C(w) \cap \Delta'_{a_0}$. La platitude de U' au-dessus du point w ainsi défini résulte des Propositions 2.8.1 et 2.8.2. Tout $(6k + 3)$ -polynôme s'annulant sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_0}, \dots, \Delta'_{a_{6k+3}}$ donc s'annule identiquement sur Q .

4.1.4. *Validité de U'' .* Elle résulte de la Proposition 2.3.3 et de § 2.7.

4.2. **Le cas $6k + 5$.** Ici on montre que, pour $k \geq 0$,

$$H_{6k+3}(Y^{6k+3}/Z^{6k+3}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+5}(Y^{6k+5}/Z^{6k+5}) = 0.$$

4.2.1. *Les définitions.* On pose $W := Z_{6k^2+12k+6, 2k+2}$. On note $(C; x_0, \dots, x_{2k+1})$ le morphisme naturel de W dans $Z_{6k^2+12k+6} \times Q^{2k+2}$, et on pose (voir Fig. 2)

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \Delta'_{x_1} \cup \dots \cup \Delta'_{x_{2k+1}} \cup \Delta'_{a_{4k+4}} \cup \dots \cup \Delta'_{a_{6k+6}} \cup \Delta''_{x_0} \\ U &:= C \cup \Gamma \cup \chi(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \chi(x'_{2k+1}, x''_0) \\ U' &:= (C \cap (W \times Q)) \cup \Gamma \\ U'' &:= C \cup \sigma(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \sigma(x'_{2k+1}, x''_0). \end{aligned}$$

4.2.2. *Validité de U .* Elle résulte comme dans le cas précédent du Corollaire 2.6.4 et des Propositions 2.8.2, 2.5.1 et 2.5.3.

4.2.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 12k + 6$, $l := 4k + 4$ $m(a_0) := \dots := m(a_{2k+1}) := 1$, $m(a_{2k+2}) := \dots := m(a_{4k+3}) := 6k + 5$, $B := \emptyset$. On vérifie que

$$2k + 2 + (6k + 5)(2k + 2) = 2d.$$

On note $C(w)$ la courbe obtenue et on pose, pour $i = 0, \dots, 2k + 1$, $x_i(w) := C(w) \cap \Delta'_{a_i}$. La platitude de U' au-dessus du point w ainsi défini résulte des Propositions 2.8.1 et 2.8.2. Tout $(6k + 5)$ -polynôme s'annulant sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_1}, \dots, \Delta'_{a_{2k+1}}, \Delta'_{a_{2k+2}}, \dots, \Delta'_{a_{4k+3}}, \Delta'_{a_{4k+4}}, \dots, \Delta'_{a_{6k+6}}$ donc s'annule identiquement sur Q .

4.2.4. *Validité de U'' .* Elle est évidente car $U'' \rightarrow W$ est égal à $Y^{6k+3} \rightarrow Z^{6k+3}$.

4.3. **Le cas $6k + 7$.** Ici on montre que pour $k \geq 0$,

$$H_{6k+5}(Y^{6k+5}/Z^{6k+5}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+7}(Y^{6k+7}/Z^{6k+7}) = 0.$$

4.3.1. *Les définitions.* On pose $W := Z_{6k^2+16k+11,1}$. On note (C, x) le morphisme naturel de W dans $Z_{6k^2+16k+11} \times Q$ et on pose (voir Fig. 1)

$$\Gamma := \Delta'_x \cup \Delta''_{b_1} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{4k+5}}$$

$$U := C \cup \Gamma$$

$$U' := (C \cap (W \times Q)) \cup \Gamma$$

$$U'' := C.$$

4.3.2. *Validité de U .* Elle se démontre comme dans les cas précédents.

4.3.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 16k + 11$, $l := 6k + 8$, $m(a_1) := 1$, $m(a_2) := \dots := m(a_{6k+8}) := 2k + 3$ et $B := \{b_1, \dots, b_{4k+5}\}$. On vérifie que

$$1 + (6k + 7)(2k + 3) = 2d.$$

On note $C(w)$ la courbe obtenue et on pose $x(w) := C(w) \cap \Delta'_{a_1}$. La platitude de U' au-dessus de w résulte de la Proposition 2.8.2. Tout $(6k + 7)$ -polynôme s'annulant sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_1}, \dots, \Delta'_{a_{6k+8}}$, donc s'annule identiquement sur Q .

4.3.4. *Validité de U'' .* Elle résulte de la Proposition 2.3.3 (cf. § 2.7).

§ 5. Les cas pairs

Dans ce paragraphe, nous démontrons la Proposition 3.1 dans le cas où m est pair.

5.1. **Le cas $6k + 4$.** Ici on montre que, pour tout $k \geq 0$,

$$H_{6k+2}(Y^{6k+2}/Z^{6k+2}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+4}(Y^{6k+4}/Z^{6k+4}) = 0.$$

5.1.1. *Les définitions.* On pose $d := 6k^2 + 10k + 4$ et on considère la variété (cf. le Corollaire 2.3.4) $K := (C_{d,1} - (Z_{d,1} \times Q)) \times Q$. Elle est munie d'une projection notée x sur Q (via $Z_{d,1} \rightarrow Q$) d'une projection notée y sur $\mathbf{P}_3 - Q$ (via $C_{d,1} \rightarrow \mathbf{P}_3$) et d'une projection sur le second facteur Q notée z . On pose $D := [y, z]$. C'est un sous-fibré en droites projectives de $K \times \mathbf{P}_3$ et on pose $W := \text{Hilb}^{3k+1} D/K$. On note encore (C, x) la projection naturelle de W vers $Z_{d,1}$ (via K et $C_{d,1}$) et F la projection naturelle de W vers $\text{Hilb}^{3k+1} \mathbf{P}_3$. On pose (voir Fig. 4)

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \Delta'_x \cup \Delta''_{b_1} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{4k+3}} \\ U &:= C \cup \Gamma \cup F \cup \sigma(z) \\ U' &:= (C \cap (W \times Q)) \cup \Gamma \cup \sigma(z) \\ U'' &:= C \cup F. \end{aligned}$$

5.1.2. *Validité de U .* Chaque condition requise étant générique, on peut trouver w tel que $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U(w)}(6k+4))$ soit nul, que $U(w)$ soit réunion disjointe de $C(w) \cup \Gamma(w)$, $F(w)$ et $\sigma(z(w))$ et que $C(w)$ et $D(w)$ soient quasi-transverses en $y(w)$. Soit g une transformation projective telle que $gC(w)$ soit transverse à Q en $g(y(w))$ et que $gD(w)$ soit égal à $\Delta'_{g(y(w))}$. Si on numérote f_1, \dots, f_{3k+1} les éléments de $F(w)$, alors $Y^{6k+4} \rightarrow Z^{6k+4}$ est plat au-dessus du point $t := (gC(w) \cup g\Gamma(w), g(y(w)); (gf_1)'' , \dots, (gf_{3k+1})'' , (g\sigma z(w))'')$ et $Y^{6k+4}(t)$ est égal à $gU(w)$. On a donc $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{Y^{6k+4}(t)}(6k+4)) = H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{gU(w)}(6k+4)) \cong H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U(w)}(6k+4)) = 0$.

5.1.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 10k + 4$, $l := 6k + 6$, $m(a_0) := 1$, $m(a_1) := \dots := m(a_{6k+4}) := 2k + 2$, $m(a_{6k+5}) := 2k + 1$, et $B = \{b_1, \dots, b_{4k+3}\}$. On vérifie que $1 + (6k+3)(2k+2) + 2k+1 = 2d$. On note $C(w)$ la courbe ainsi obtenue et $x(w)$ son intersection avec Δ'_{a_0} . On choisit $z(w)$ sur $\Delta'_{a_{6k+5}}$ hors de $C(w) \cup \Gamma(w)$. Enfin on choisit $y(w)$ arbitrairement sur $C(w) - Q$ et $F(w)$ arbitrairement dans $[y(w), z(w)]$. La platitude de U' au-dessus du point w ainsi défini résulte des Propositions 2.8.1 et 2.8.2. Un $(6k+4)$ -polynôme qui s'annule sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_1}, \dots, \Delta'_{a_{6k+5}}$ donc s'annule sur Q .

5.1.4. *Validité de U'' .* On observe que W est muni d'un morphisme naturel f à valeurs dans Z^{6k+2} et vérifiant $U'' = f^* Y^{6k+2}$. Ce morphisme est dominant puisque son image contient l'image réciproque de l'ouvert dense $(C_d - (Z_d \times Q)) \times \mathbf{P}_3$ Drap dans la fibration $Z^{6k+2} \rightarrow A$. La validité de U'' résulte alors de § 2.7.

5.2. **Le cas $6k+6$.** Ici on montre que, pour tout $k \geq 0$,

$$H_{6k+4}(Y^{6k+4}/Z^{6k+4}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+6}(Y^{6k+6}/Z^{6k+6}) = 0.$$

5.2.1. *Les définitions.* On pose $W := Z^{6k+4} = Z_{6k^2+14k+8,1} \times S^{3k+2}$. On note $(C, x; s_1, \dots, s_{3k+2})$ le morphisme de W dans $Z_{6k^2+14k+8} \times Q \times S^{3k+2}$, et on pose (voir Fig. 6)

$$\begin{aligned}\Gamma &:= \Delta'_{a_1} \cup \Delta''_{b_1} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{k+1}} \cup \Delta''_{x'} \cup \Delta''_{s_1} \cup \dots \cup \Delta''_{s_{3k+2}} \cup \sigma(x', b_{k+2}) \cup \dots \cup \sigma(x', b_{3k+4}) \\ U &:= C \cup \Gamma \cup \tau(x', s_1, [\Delta'_{a_0}, \Delta''_{s_1}]) \cup \dots \cup \tau(x', s_{3k+2}, [\Delta'_{a_0}, \Delta''_{s_{3k+2}}]) \\ U' &:= (C \cap (W \times Q)) \cup \Gamma \\ U'' &:= C \cup \sigma(x', s_1) \cup \dots \cup \sigma(x', s_{3k+2}).\end{aligned}$$

5.2.2. *Validité de U .* Ici on va montrer que, pour w générique, $U(w)$ se déforme en fibre de $Y^{6k+6} \rightarrow Z^{6k+6}$. Choisissons donc w de façon que $s_1(w), \dots, s_{3k+2}(w)$ soient distincts et que $C(w) \cap Q$ se projette sur S'' en dehors de $\{b_1, \dots, b_{3k+4}, s_1(w), \dots, s_{3k+2}(w)\}$ et sur S' en dehors de a_1 . Ces conditions sont génériquement satisfaites d'après le Corollaire 2.6.4. D'après le Lemme 2.4.1, on peut de plus supposer que

$$U(w) = C(w) \cup \Gamma(w) \cup \tau(x'(w), s_1(w), [\Delta'_{a_0}, \Delta''_{s_1(w)}]) \cup \dots \cup \tau(x'(w), s_{3k+2}(w), [\Delta'_{a_0}, \Delta''_{s_{3k+2}(w)}]).$$

Posons $G := (\Delta'_{a_1})^{3k+8}$ et notons g_0, \dots, g_{3k+2} les projections naturelles de G sur Δ'_{a_i} . Posons

$$\begin{aligned}H &:= (G \times C(w)) \cup \Delta'_{a_1} \cup [g_0, (x'(w), b_1)] \cup \Delta''_{b_2} \cup \dots \cup \Delta''_{b_{k+1}} \cup \Delta''_{x(w)} \\ &\quad \cup [g_1, (a_0, s_1(w))] \cup \dots \cup [g_{3k+2}, (a_0, s_{3k+2}(w))] \cup \sigma(x'(w), b_{k+2}) \\ &\quad \cup \dots \cup \sigma(x'(w), b_{3k+4}) \cup \sigma(x'(w), s_1(w)) \cup \dots \cup \sigma(x'(w), s_{3k+2}(w)).\end{aligned}$$

Observons d'abord que $H((a_1, b_1), (a_1, s_1(w)), \dots, (a_1, s_{3k+2}(w)))$ est égal à $U(w)$: cela résulte des Propositions 2.8.2 et 2.8.3 : pour appliquer la Proposition 2.8.3 il faut remarquer qu'au voisinage du point $((a_1, b_1), (a_1, s_1(w)), \dots, (a_1, s_{3k+2}(w)); (x'(w), s_i(w)))$ de $G \times \mathbf{P}_3$, H s'obtient, après changement de base par g_i , à partir de la réunion d'une droite et d'un point paramétrés par Δ'_{a_i} . Si g_0 est distinct de (a_1, b_1) et si pour $j=1, \dots, 3k+2$, g_j est distinct de $(a_1, s_j(w))$, alors $H(g)$ coupe Q transversalement en $(x'(w), b_1)$ et pour $j=1, \dots, 3k+2$, en $(a_0, s_j(w))$. Si de plus les fibres en g des composantes irréductibles de H n'ont pas d'intersection trois à trois et ont pour seules intersections deux à deux les points $x(w), g_0, \dots, g_{3k+2}, (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_{k+1})$ et $(a_1, x''(w))$, alors $H(g)$ est une fibre de $Y^{6k+6} \rightarrow Z^{6k+6}$ d'après les Propositions 2.8.2 et 2.5.1. Toutes ces conditions sur g étant génériques, la validité de U résulte de § 2.7.

5.2.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 14k + 8$, $l := 6k + 6$, $m(a_2) := 1$, $m(a_3) := \dots := m(a_{6k+7}) := 2k + 3$, et $B := \{b_1, \dots, b_{3k+4}\}$. On vérifie que $(2k+3)(6k+5) + 1 = 2d$. On note $C(w)$ la courbe obtenue et $x(w)$ son intersection avec Δ'_{a_2} . On choisit $s_1(w), \dots, s_{3k+2}(w)$ distincts entre eux, hors de B et de la projection sur S'' de

$C(w) \cap Q$. On définit ainsi un point w de W . La platitude de U' au-dessus de w est assurée par les Propositions 2.8.1 et 2.8.2. Un $(6k+6)$ -polynôme s'annulant sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_1}, \dots, \Delta'_{a_{6k+7}}$ donc s'annule sur Q .

5.2.4. *Validité de U'' .* Elle est triviale car $U'' \rightarrow W$ et $Y^{6k+4} \rightarrow Z^{6k+4}$ sont égaux.

5.3. **Le cas $6k+8$.** Ici on montre que, pour tout $k \geq 0$,

$$H_{6k+6}(Y^{6k+6}/Z^{6k+6}) = 0 \quad \text{implique} \quad H_{6k+8}(Y^{6k+8}/Z^{6k+8}) = 0.$$

5.3.1. *Les définitions.* On pose $d := 6k^2 + 18k + 13$ et on considère la variété (cf. le Corollaire 2.3.4 et la Proposition 2.3.1) $A := C_{d, 2k+2} \times \mathbf{P}_3$ Drap. Elle est munie d'un sous-fibré en droites projectives (provenant de Drap) de $A \times \mathbf{P}_3$. On note $K \rightarrow A$ cette fibration et on pose $W := \text{Hilb}^{3k+4}K/A$. On note $(C, x_0, \dots, x_{2k+1}; x, D, F)$ le morphisme naturel de W dans $Z_d \times Q^{2k+2} \times \mathbf{P}_3 \times \text{Grass} \times \text{Hilb}^{3k+4}\mathbf{P}_3$; et on pose (voir Fig. 5)

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \Delta'_{x_1} \cup \dots \cup \Delta'_{x_{2k+1}} \cup \Delta'_{a_{4k+5}} \cup \dots \cup \Delta'_{a_{6k+9}} \cup \Delta'_{x_0} \\ U &:= C \cup \Gamma \cup \chi(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \chi(x'_{2k+1}, x''_0) \cup F \\ U' &:= (C \cap (W \times Q)) \cup \Gamma \\ U'' &:= C \cup F \cup \sigma(x'_1, x''_0) \cup \dots \cup \sigma(x'_{2k+1}, x''_0). \end{aligned}$$

5.3.2. *Validité de U .* Choisissons w tel que $F(w)$ soit disjoint de $C(w) \cup Q$, que $C(w) \cap \Gamma(w)$ soit réduit à $\{x_0(w), \dots, x_{2k+1}(w)\}$, que les projections de $x_0(w), \dots, x_{2k+1}(w)$ sur S' (respectivement S'') soient distinctes, que $U(w)$ soit égal à $C(w) \cup \Gamma(w) \cup \chi(x'_1(w), x''_0(w)) \cup \dots \cup \chi(x'_{2k+1}(w), x''_0(w)) \cup F(w)$, et enfin que $H^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{J}_{U(w)}(6k+8))$ soit nul. Un tel choix est possible parce que toutes les conditions requises sont génériques (cf. le Corollaire 2.6.4 et le Lemme 2.4.1). Alors U est plat au-dessus de w d'après la Proposition 2.8.2 et $U(w)$ est une fibre de $Y^{6k+8} \rightarrow Z^{6k+8}$ d'après les Propositions 2.5.1 et 2.5.3.

5.3.3. *Validité de U' .* On applique la Proposition 2.6.1 avec $d := 6k^2 + 18k + 13$, $l := 4k + 5$, $m(a_0) := \dots := m(a_{2k+1}) := 1$, $m(a_{2k+2}) := \dots := m(a_{4k+4}) := 6k + 8$, et $B := \emptyset$. On vérifie que $2k + 2 + (2k + 3)(6k + 8) = 2d$.

On note $C(w)$ la courbe obtenue et, pour $i = 0, \dots, 2k + 1$, on pose $x_i(w) := C(w) \cap \Delta'_{a_i}$. Enfin on choisit arbitrairement $x(w)$ sur $C(w)$, $D(w)$ passant par $x(w)$, et $F(w)$ dans $\text{Hilb}^{3k+4}D(w)$. La platitude de U' au-dessus du point w ainsi défini est assurée par les Propositions 2.8.1 et 2.8.2. Un $(6k+8)$ -polynôme s'annulant sur $U'(w)$ s'annule sur $\Delta'_{a_1}, \dots, \Delta'_{a_{4k+4}}$ et sur $\Delta'_{a_{4k+5}}, \dots, \Delta'_{a_{6k+9}}$ donc s'annule sur Q .

5.3.4. *Validité de U'' .* On applique l'hypothèse $H_{6k+6}(Y^{6k+6}/Z^{6k+6})=0$ en échangeant les rôles de S' et S'' : on obtient ainsi une courbe qu'on note $C(w)$, des points de Q qu'on note $x_0(w), \dots, x_{2k+1}(w)$ et des points s_1, \dots, s_{3k+4} de S' tels que tout $(6k+6)$ -polynôme s'annulant sur $C(w)$, sur $(x_i(w), x_0''(w))$ pour $i=1, \dots, 2k+1$, et sur $(s_j, x_0''(w))$ pour $j=1, \dots, 3k+4$, s'annule identiquement. D'après la Proposition 2.3.3 et le Corollaire 2.6.4, on peut supposer que les $5k+5$ points considérés sur $\Delta_{x_0}''(w)$ sont distincts et hors de $C(w)$. Cela signifie que si on complète la définition de w par $x(w) := x_0(w)$, $D(w) := \Delta_{x(w)}''$, et $F(w) := \{(s_j, x''(w))_{j=1, \dots, 3k+4}\}$, alors U'' est plat au-dessus de w et tout $(6k+6)$ -polynôme s'annulant sur $U''(w)$ est identiquement nul.

Références

- [H0] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [H1] — On the classification of algebraic space curves, in: *Vector Bundles and Differential Equations*. Proceedings Nice, 12–17th June 1979. Progress in Math. 7 (Birkhauser Boston), p. 83–112.

Reçu le 26 juin 1980