Sur le prolongement des courants positifs fermés

par

HASSINE EL MIR

Faculté des sciences et techniques de Monastir, Tunisie

Introduction

Soit A un sous-ensemble fermé d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et T un courant positif fermé de bidimension (p, p) sur $\Omega\setminus A$. Existe-t-il un prolongement de T par un courant positif et fermé défini dans Ω?

Les résultats obtenus ici présentent une certaine analogie avec le théorème bien classique de Riemann concernant le prolongement des fonctions holomorphes et les théorèmes analogues obtenus pour les fonctions plurisousharmoniques. On distinguera le cas où l'on suppose que le courant T est de masse finie (cf. théoréme II.1) du cas où l'on s'affranchit de cette hypothèse (cf. théorème III.7).

A certains égards les courants positifs et fermés, définis dans [17] apparaissent aujourd'hui comme une généralisation des sous-ensembles analytiques complexes X ou plus précisément des courants d'intégration $[X]$ sur X. Des théorèmes de prolongement ont d'abord été obtenus pour les sous-ensembles analytiques complexes.

En 1935 P. Thullen [cf. 29] obtenait une condition nécessaire pour qu'on puisse prolonger une hypersurface analytique définie dans le complémentaire d'une autre. A partir de 1950 l'école allemande et notamment W. Rothstein étudient d'une manière plus systématique les prolongements des sous-ensembles analytiques complexes et les obstructions.

En 1953 R. Remmert et K. Stein [cf. 22] ont généralisé le résultat de Thullen aux sous-ensembles analytiques sous une hypothèse de dimension. Mais les problèmes et les méthodes de ce travail ont leurs sources dans le mémoire devenu classique de P. Lelong [cf. 17]. En effet ce mémoire après avoir défini les courants positifs, fermés, T et montré l'existence d'un nombre de Lelong $\nu(x, T)$ fini obtient l'existence d'un courant d'intégration sur un ensemble analytique X, par un prolongement $\tilde{T}$ du courant

1−848282 *Acta Mathematica* 153. Imprimé le 8 août 1984

d'intégration $T=[\mathring{X}]$ sur l'ensemble des points réguliers de X à travers l'ensemble fermé $X'=X\setminus\mathring{X}$ des points singuliers X. Le prolongement $\tilde{T}$ est positif et fermé et la démonstration de cette propriété repose essentiellement sur une majoration de la masse de T au voisinage de X'.

En 1964, E. Bishop [cf. 5] a montré que si A est un sous-ensemble analytique de Ω et X est un sous-ensemble analytique de $\Omega\setminus A$ de dimension pure p et de volume localement fini alors $\bar{X}$ est un sous-ensemble analytique de Ω. Ce résultat contient des résultats partiels de Stoll donnant une condition pour qu'une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ soit algébrique.

Dans la première partie de ce travail nous avons obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME II.1. *Soit A un sous-ensemble fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de masse localement finie au voisinage de A.*

Alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T par zéro au-dessus de A est un courant positif fermé dans Ω.

On retrouve le résultat de E. Bishop en appliquant le théorème II.1 au courant d'intégration $[X]$ sur X. En 1975, R. Harvey et J. Polking [cf. 16] avaient obtenu théorème II.1 dans le cas particulier où A est un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure p égale à la dimension complexe du courant T. A la même époque Y. T. Siu [cf. 26] a généralisé le théorème de E. Bishop au cas où A est fermé pluripolaire complet obtenant ainsi certains résultats sur le prolongement des fonctions méromorphes.

Récemment H. Skoda [cf. 28] a obtenu la conclusion du théorème II.1 en supposant que A est un sous-ensemble analytique de Ω. Sa méthode s'appuie d'une part sur une formule du type Lelong-Jensen, d'autre part sur l'étude du comportement d'un courant positif au voisinage d'une hypersurface analytique complexe. Notre méthode présente une certaine analogie avec ce dernier travail, en particulier on étudiera les troncatures du courant T au voisinage de l'ensemble pluripolaire complet A. L'emploi de la formule du type Lelong-Jensen est remplacé par une étude directe donnant une majoration du courant $T\wedge dd^c v$ (cf. I.8) au voisinage de A défini comme ensemble des $-\infty$ de v.

Les résultats obtenus dans la seconde partie de ce travail concernent une autre direction de recherche où nous ne faisons plus l'hypothèse de masse finie de T au voisinage de A. B. Shiffman en 1970 [cf. 24] avait montré que si X est un sous-ensemble analytique de $\Omega\setminus\mathbf{R}^n$ de dimension pure p, $p\geqslant 2$ et de volume fini alors $\bar{X}$ est un sous-ensemble analytique dans Ω.

Rappelons que l'intersection $\mathbf{R}^n\cap\Omega$ si elle n'est pas vide n'est pas pluripolaire dans Ω [cf. 21] donc ce résultat ne découle pas du théorème II.1. Pour $p=1$, on devait supposer de plus X stable pour la conjugaison complexe. En 1972 J. Becker [cf. 1] s'affranchissait de l'hypothèse portant sur le volume de X. En 1978 K. Funahashi [cf. 12] généralisant le résultat de Becker a montré que X se prolongeait à travers tout fermé de $\mathbf{R}^s\times\mathbf{C}^k$, si on suppose $k<p-1$. En 1979 E. M. Cirka [cf. 7] étend ce résultat aux sous-variétés réelles de $\mathbf{C}^n$. Les démonstrations obtenues dans cette deuxième direction sont étroitement liées à des propriétés géométriques fines des ensembles analytiques.

Dans ce travail nous obtenons le théorème suivant qui contient et simplifie les énoncés précédents :

THÉORÈME III.7. *Soit M une sous-variété réelle de classe $\mathscr{C}^2$ plongée dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soient A un sous-ensemble fermé de M et T un courant positif, fermé dans $\Omega\setminus A$ de bidimension (p,p). Supposons $p>\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)+1$ pour tout $z\in A$.*

Alors T est de masse finie au voisinage de chaque point A. De plus l'extension triviale $\tilde{T}$ (par zéro au-dessus de A) est l'unique courant positif fermé dans Ω qui coïncide avec T sur $\Omega\setminus A$.

L'espace $H_z(M)$ est défini comme le plus grand sous-espace complexe de l'espace tangent à M au point z. On voit ainsi que seule la structure complexe associée à la sous-variété M joue un rôle. Quand $\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)<p-1$ cette structure est insuffisante pour constituer une barrière.

On montrera par un exemple simple qu'il n'est pas possible en général de s'affranchir de l'hypothèse $p>\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)+1$.

Les démonstrations font appel aux résultats suivants que nous démontrons d'abord dans le paragraphe I.

THÉORÈME I.5. *Soit v une fonction, continue, positive, plurisousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Posons $A=\{z\in\Omega; v(z)=0\}$. Soit T un courant positif dans $\Omega\setminus A$ de masse localement finie au voisinage de A et $\tilde{T}$ son extension triviale (par zéro au-dessus de A).*

Alors $dd^c[v\tilde{T}]$ est un courant positif fermé dans Ω.

Si v est de classe $\mathscr{C}^2$ dans $\Omega\setminus A$, $dd^c[vT]$ coïncide avec $T\wedge dd^c v$. Ainsi en choisissant v tel que "$dd^c v$ est assez grand au voisinage de A", on parvient à préciser le comportement de T au voisinage de A. Pour aboutir au théorème III.7 on généralise le théorème I.5 au cas où v est presque-plurisousharmonique continue (cf. théorème I.10). On consacrera donc un premier paragraphe à étudier le produit d'un courant positif fermé T et d'une fonction presque-plurisousharmonique continue v (l'hypothèse de la continuité de v n'est pas essentielle). L'objet principal du paragraphe II est de montrer le théorème II.1 et de donner certaines applications. Dans le paragraphe III on démontre le théorème III.7, mais auparavant on donne une version réduite (cf. théorème III.1) applicable dans le cadre des sous-espaces réels de $\mathbf{C}^n$ et des variétés totalement réelles.

Dans le paragraphe IV on démontre qu'un courant T positif fermé défini dans le complémentaire d'une boule de $\mathbf{C}^n$ est de masse finie au voisinage de la boule. En particulier $T \wedge \beta$ se prolonge en un courant positif fermé à tout $\mathbf{C}^n$. Ce qui permet d'établir le théorème IV.1. Puis à l'aide d'un exemple dû à Sadullaev [23] on construit un ensemble pluripolaire, complet et compact non trivial.

Notons que les problèmes qu'on considère sont des problèmes locaux : la plupart des résultats obtenus restent vrais si on suppose que Ω est une variété analytique complexe.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Pierre Lelong pour ses conseils et l'attention qu'il a portée à mes recherches.

I. Sur le produit d'un courant positif fermé et d'une fonction presque-plurisousharmonique

Ce paragraphe est consacré au développement de certains outils qui permettent de prolonger des courants, positifs, fermés. Les méthodes qu'on utilise sont fondées sur l'étude du produit vT où v est une fonction plurisousharmonique continue et T un courant positif fermé. On montre notamment (cf. théorème I.5) que $dd^c(vT)$ est un courant positif fermé. On généralise ce résultat au cas où v est une fonction presque-plurisousharmonique au sens défini dans le théorème I.9.

Rappelons d'abord quelques notions connues sur les types de positivité des formes et des courants.

L'algèbre extérieure $\Lambda^{n,n}(\mathbf{C}^n)$ est orientée par $i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$. Soit $\alpha \in \Lambda^{n,n}(\mathbf{C}^n)$, on dira que α est positif si l'on a :

$$\alpha = \lambda i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots dz_n \wedge d\bar{z}_n \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel positif.}$$

Définition. (1) $\alpha \in \Lambda^{p,p}(\mathbf{C}^n)$ est dit *faiblement positif* si pour tout $f_1, \ldots, f_k \in \Lambda^{1,0}(\mathbf{C}^n)$, $\alpha \wedge i f_1 \wedge \bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge i f_k \wedge \bar{f}_k$ est positif où $(k=n-p)$

(2) $\alpha \in \Lambda^{p,p}(\mathbf{C}^n)$ est dit *m-positif* (*moyennement positif*) si pour tout $f \in \Lambda^{k,0}(\mathbf{C}^n)$ on a : $\alpha \wedge i^{k^2}(f \wedge \bar{f})$ est positif

(3) $\alpha \in \Lambda^{p,p}$:$\mathbf{C}^n)$ est *fortement positif* si

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} i f_{1,j} \wedge \bar{f}_{1,j} \wedge \ldots \wedge i f_{p,j} \wedge \bar{f}_{p,j} \quad \text{ou } f_{k,j} \in \Lambda^{1,0}(\mathbf{C}^n).$$

On désigne par $\mathscr{C}^k_{p,q}(\Omega)$ (respect. $\mathscr{D}^k_{p,q}(\Omega)$) l'espace des formes de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω et de bidegré (p, q) (respect. à support compact). Pour simplifier les notations on pose $\mathscr{D}^\infty_{p,q}(\Omega) = \mathscr{D}_{p,q}(\Omega)$. Une forme $\varphi \in \mathscr{C}_{p,p}(\Omega)$ est faiblement positive (respect. m-positive, respect. fortement positive) si pour tout $z \in \Omega$, $\varphi(z)$ est faiblement positif (respect. m-positif, respect. fortement positif). L'espace des courants d'ordre k et de bidimension (p, q) ou de bidegré $(n-p, n-q)$ est par définition l'espace dual de $\mathscr{D}^k_{p,q}(\Omega)$ muni de sa topologie classique. Quand on ne précise pas l'ordre de T on sous-entend que T est d'ordre infini.

Un courant $T \in \mathscr{D}'_{p,p}(\Omega)$ est faiblement positif (respect. m-positif, respect. fortement positif) si $\langle T, \varphi \rangle$ (qu'on note aussi $\int_\Omega T \wedge \varphi$) est positif pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_{p,p}(\Omega)$ fortement positive (respect. m-positive, respect. faiblement positive).

Tout courant faiblement positif T est d'ordre nul, ses coefficients sont donc des mesures [cf. 19]. Rappelons qu'on a les implications suivantes : T fortement positif $\Rightarrow T$ m-positif $\Rightarrow T$ faiblement positif. Pour les bidegrés $(1, 1)$ et $(n-1, n-1)$ les différentes formes de positivité coïncident.

Un point $z \in \mathbf{C}^n$ sera désigné par ses coordonnées : $z=(z_1, \ldots, z_n)$ où $z_j = x_j + i y_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, la norme $\|z\|$ est définie par $\|z\|^2 = \Sigma_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$. On considère les opérateurs définis sur $\mathscr{D}_{p,k}(\Omega)$ par :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Si $\varphi \in \mathscr{D}_{p,k}(\Omega)$, on définit

$$\partial \varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} dz_j \quad \text{et} \quad \bar{\partial} \varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

L'opérateur ∂ est du type $(1, 0)$ alors que $\bar{\partial}$ est du type $(0, 1)$, on note $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. Ces opérateurs se prolongent par dualité à $\mathscr{D}'_{p,k}(\Omega)$.

On note $\beta=\frac{1}{4}dd^c\|z\|^2$ et $\beta^p=\beta\wedge\beta\wedge\ldots\wedge\beta$ (p fois) la mesure trace σ_T d'un courant positif T de bidimension (p,p) est définie par

$$\sigma_T=\frac{1}{p!}T\wedge\beta^p.$$

le nombre de Lelong $\nu_T(z)$ du courant T au point z est défini par la limite

$$\nu(T,z)=\lim_{r\to 0}\frac{\sigma_T(z,r)}{r^{2p}\tau_{2p}}$$

si la limite existe où $\sigma_T(z,r)$ est la mesure trace du courant T portée par la boule de centre z et de rayon r et $\tau_{2p}=\pi^p/p!$. Un courant positif et fermé et plus généralement un courant positif T tel que $dd^cT\wedge\beta^{p-1}$ est positif admet un nombre de Lelong en tout point [cf. 8 et 28]. Pour un courant T positif on note $\|T\|_E$ la masse de T portée par un ensemble borélien E ([cf. 19] pour la définition de la masse).

On sait [cf. 19] qu'il existe une constante c qui ne dépend que de n et p telle qu'on ait :

$$\frac{1}{c}\,\sigma_T(E)\leqslant\|T\|_E\leqslant c\sigma_T(E).$$

Une fonction v de $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans $[-\infty,+\infty[$ est dite plurisousharmonique dans un domaine G de $\mathbf{C}^n$ si :

(1) v est une fonction localement intégrable.

(2) v est semi-continue supérieurement en précisant au sens métrique, c'est-à dire avec $v(x)=\inf\{A\in\mathbf{R}$; il existe un voisinage ω' de x dans lequel $\{z\in\omega';u(z)>A\}$ est de mesure nulle$\}$.

(3) dd^cv est un courant positif fermé.

On rappelle que si v est plurisousharmonique et ψ une fonction convexe croissante, alors $\psi\circ v$ est plurisousharmonique.

Dans la suite on aura besoin des deux lemmes suivants :

LEMME I.1. *Soit $u_1,\ldots,u_n$ une base de $\mathscr{C}^0_{1,0}(\Omega)$ considéré comme module sur $\mathscr{C}(\Omega)$. Il existe alors une base $\omega_1,\ldots,\omega_N$, $N=\binom{n}{p}^2$ du module $\mathscr{C}_{p,p}(\Omega)$ donnée par :*

$$\omega_j=if_{j,1}\wedge\bar{f}_{j,1}\wedge\ldots\wedge if_{j,p}\wedge\bar{f}_{j,p}$$

où chaque $f_{j,k}$ est une combinaison linéaire des u_l à coefficients constants.

Démonstration. Les formes $u_{i,1}\wedge\ldots\wedge u_{i,p}\wedge\bar{u}_{j,1}\wedge\ldots\wedge\bar{u}_{j,p}$ engendrent $\mathscr{C}_{p,p}(\Omega)$. En raisonnant par récurrence, il suffit de prouver que $u_l\wedge\bar{u}_t$ est engendré par de telles formes. Or on a :

$$u_l\wedge\bar{u}_t=\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}i^{\nu-1}i(u_l+i^\nu u_t)\wedge\overline{(u_l+i^\nu u_t)},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Remarque. Si les u_l sont des formes constantes il en résulte que les ω_j le sont aussi.

LEMME I.2. *Soit T un courant m-positif de bidimension (p,p) dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et φ et $\psi\in\mathscr{D}^0_{p,0}(\Omega)$. Alors on a :*

$$|\langle T,\varphi\wedge\bar{\psi}\rangle|\leqslant\langle T,i^{p^2}\varphi\wedge\bar{\varphi}\rangle+\langle T,i^{p^2}\psi\wedge\bar{\psi}\rangle.$$

Démonstration. T est positif, il est donc d'ordre nul, les différents termes de l'inégalité ont un sens. De plus on a d'après la positivité :

$$\langle T,i^{p^2}(\varphi+\lambda\psi)\wedge\overline{(\varphi+\lambda\psi)}\rangle\geqslant 0\quad\text{pour tout }\lambda\in\mathbf{C}.$$

En donnant à λ successivement les valeurs $i,-i,1,-1$ on obtient le lemme. Remarquons que ce raisonnement n'est pas valable si T est supposé faiblement positif; on a utilisé la propriété plus stricte pour T de la m-positivité.

Dans la suite, positif pour un courant T signifie que T est faiblement positif. Soit T un courant positif, dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, de bidimension (p,p). Soit v une fonction continue dans Ω. On définit le courant vT par la formule suivante :

$$\langle vT,\varphi\rangle=\langle T,v\varphi\rangle\quad\text{pour tout }\varphi\in\mathscr{D}_{p,p}(\Omega).$$

Puisque T est un courant positif, ses coefficients sont donc des mesures; la définition de vT est donc une conséquence de celle du produit des mesures coefficients de T par la fonction continue v. Si T est un courant positif fermé et v une fonction continue on définit les courants $T\wedge dv$, $T\wedge d^cv$, $T\wedge dd^cv$ par :

$$dd^c[vT]=T\wedge dd^cv$$
$$d[vT]=T\wedge dv$$
$$d^c[vT]=T\wedge d^cv.$$

Les premiers membres de ces égalités sont bien définis. Lorsque v est $\mathscr{C}^2$, le courant $dd^c[vT]$ (respect. $d(vT)$, $d^c(vT)$) est le produit du courant positif fermé T par la forme différentielle à coefficients continus dd^cv (respect. dv, d^cv). En effet pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_{p-1,p-1}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\langle dd^c[vT], \varphi\rangle &= \langle vT, dd^c\varphi\rangle \\ &= \langle T, d(v\wedge d^c\varphi)\rangle - \langle T, dv\wedge d^c\varphi\rangle \\ &= \langle T, -dv\wedge d^c\varphi\rangle \\ &= \langle T, d^c(dv\wedge\varphi)\rangle + \langle T, dd^cv\wedge\varphi\rangle \\ &= \langle T\wedge dd^cv, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

La 1^{re} égalité est la définition de $dd^c[vT]$. La 2^{e} égalité provient du développement de $d(v\wedge d^c\varphi)$. La 3^{e} égalité est une conséquence de la fermeture de T. La 4^{e} est simplement le développement de $d^c(dv\wedge\varphi)$. La 5^{e} est une conséquence de $dT=0$ qui entraîne $\partial T=\bar\partial T=0$. On a $d^cT=i(\bar\partial-\partial)\,T=0$ et $dd^cv=2i\partial\bar\partial v=-2i\bar\partial\partial v=-d^cdv$.

On va maintenant étudier $T\wedge dd^cv$ où v est une fonction plurisousharmonique continue.

PROPOSITION I.3. *Soit T un courant positif fermé dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ de bidimension (p,p) et v une fonction plurisousharmonique continue dans Ω.*

Alors $T\wedge dd^cv$ est un courant positif fermé dans Ω.

Démonstration. Soit v_j une suite de fonctions plurisousharmoniques de classe $\mathscr{C}^\infty$ décroissante vers v. On a $\langle dd^c[v_jT], \varphi\rangle = \langle T\wedge dd^cv_j, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi\in\mathscr{D}_{p,p}(\Omega)$ où

$$dd^cv_j = 2i\sum_{k,s=1}^{n}\frac{\partial^2 v_j}{\partial z_k\,\partial\bar z_s}\,dz_k\wedge d\bar z_s$$

est une forme différentielle positive à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ car v_j est plurisousharmonique $\mathscr{C}^\infty$. Donc les $dd^c[v_jT]$ sont des courants positifs fermés dans Ω. Or (v_jT) converge pour la topologie de la masse vers vT, la convergence des v_j vers v est uniforme sur tout compact. Il en résulte que $(dd^c[v_jT])$ converge faiblement vers $dd^c[vT]=T\wedge dd^cv$. Ainsi $T\wedge dd^cv$ est un courant positif fermé.

Remarque. Soient $v_1, \dots, v_k$, $k\leqslant p$ des fonctions plurisousharmoniques continues. D'après la proposition I.3 on peut définir par récurrence $v_1T\wedge dd^cv_k\wedge\dots\wedge dd^cv_2$ et ensuite

$$dd^c[v_1 T \wedge dd^c v_k \wedge \ldots \wedge dd^c v_2] = T \wedge dd^c v_k \wedge \ldots \wedge dd^c v_1.$$

Le courant $T \wedge dd^c v_k \wedge \ldots \wedge dd^c v_1$ est un courant positif fermé; de plus il est symétrique en $v_1, \ldots, v_k$ (cf. Beford et Taylor [4] pour l'étude $(dd^c v)^k$).

Définition. Soit v une fonction continue et T un courant positif fermé; on définit le courant $T \wedge dv \wedge d^c v$ par la formule suivante :

$$\langle T \wedge dv \wedge\ d^c v, \varphi \rangle = \langle\ \tfrac{1}{2} dd^c[v^2 T] - v dd^c[vT], \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_{p-1,p-1}(\Omega)$.

Quand v est de classe $\mathscr{C}^2$, le courant $T \wedge dv \wedge d^c v$ n'est autre que le produit extérieur du courant positif fermé T par la forme différentielle positive à coefficients continus $dv \wedge d^c v$.

THÉORÈME I.4. *Soient $(v_1^j), \ldots, (v_k^j)$; $k \leq p$ des suites des fonctions plurisousharmoniques continues qui convergent uniformément sur tout compact de Ω vers les fonctions continues et plurisousharmoniques $v_1, \ldots, v_k$. Soit T un courant positif fermé de bidimension (p, p) dans Ω.*

Alors on a :

(i) $\lim_{j \to \infty} v_1^j T \wedge dd^c v_2^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_k^j = v_1 T \wedge dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_k$

(ii) $\lim_{j \to \infty} T \wedge dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_k^j = T \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_k$

(iii) $\lim_{j \to \infty} T \wedge dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j \wedge dv_k^j \wedge d^c v_k^j = T \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1} \wedge dv_k \wedge d^c v_k$.

Les limites étant prises au sens de la convergence faible des courants.

Démonstration. On convient d'écrire $T \geq T'$ entre courants T et T' si et seulement si $T - T'$ est un courant positif.

(a) On montre (ii) par récurrence sur k. Pour $k=0$ il n'y a rien a démontrer. Supposons (ii) vrai pour $k-1$, on a alors :

$$\lim_{j \to \infty} T \wedge\ dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j = T \wedge\ dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}.$$

Soit K un compact de Ω; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_{(\varepsilon)}$ tel que pour $j \geq j_{(\varepsilon)}$ on a $v_k \varepsilon \leq v_k^j \leq v_k + \varepsilon$ sur K.

Comme $T\wedge dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j$ est positif, il en résulte que sur K on a :

$$(v_k+\varepsilon)\lim_{j\to\infty} T\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j \geqslant \lim_{j\to\infty} v_k^j T\wedge\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j$$

$$\geqslant \lim_{j\to\infty} (v_k-\varepsilon) T\wedge\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_k^j$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence :

$$(v_k+\varepsilon) T\wedge\; dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1} \geqslant \lim_{j\to\infty} v_k^j T\wedge\; dd^c v_1^j \ldots dd^c v_{k-1}^j$$

$$\geqslant (v_k-\varepsilon) T\wedge\; dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$ et tout compact K de Ω, donc on a

$$\lim_{j\to\infty} v^j T\wedge\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j = v_k T\wedge\; dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}$$

donc on a

$$\lim_{j\to\infty} dd^c\big[v_k^j \wedge\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j\big] = dd^c\big[v_k T\wedge\; dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}\big].$$

Ainsi on a prouvé (ii).

(b) D'après (ii) on a :

$$\lim_{j\to\infty} T\wedge\; dd^c v_2^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j = T\wedge\; dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}.$$

D'après la démonstration de (ii) on a

$$\lim_{j\to\infty} v_1^j T\; dd^c v_2^j \ldots dd^c v_{k-1}^j = v_1 T\wedge\; dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_k.$$

(c) Pour montrer (iii) on remarque d'abord que le problème est local. Donc quitte à ajouter une constante on peut supposer que tous les (v_i^j) sont positifs, dans ces conditions les $(v_i^j)^2$ sont des fonctions plurisousharmoniques continues et convergent uniformément sur tout compact vers $(v_i)^2$.

Donc d'après (i) et (ii) on a :

$$\lim_{j\to\infty} T\wedge\; dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^i \wedge dv_k^j \wedge d^c v_k^j$$

$$= \lim_{j\to\infty} T\wedge\ dd^c v_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1}^j \wedge (\tfrac{1}{2} dd^c (v_k^j)^2 - v_k^j\ dd^c v_k^j)$$

$$= T\wedge\ dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1} \wedge (\tfrac{1}{2} dd^c v_k^2 - v_k\ dd^c v_k)$$

$$= T\wedge\ dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{k-1} \wedge dv_k \wedge\ d^c v_k.$$

Comme conséquence de ce théorème on a le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME I.5. *Soit v une fonction continue positive plurisousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Posons $A=\{z\in\Omega; v(z)=0\}$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de masse finie au voisinage de chaque point de A. Alors $dd^c(vT)$ se prolonge en un courant positif fermé dans Ω.*

Démonstration. Considérons (vT), c'est un courant positif dans $\Omega\setminus A$, ses coefficients sont des mesures $(\mu_I|_{\Omega\setminus A}|)$ qui sont de masse localement finie au voisinage de A. Ainsi les μ_I peuvent être considérés comme des mesures sur Ω, et par conséquent (vT) est un courant positif sur Ω.

Soit $v_n=\sup(v-1/n, 0)$ la fonction v_n est plurisousharmonique continue dans Ω pour tout $n\in\mathbf{N}$, nulle dans un voisinage de A. Donc $v_n T$ est un courant positif dans Ω. Or la suite $(v_n T)$ converge pour la topologie de la masse vers vT donc $dd^c(v_n T)$ converge vers $dd^c(vT)$ au sens de la topologie faible des courants sur Ω.

D'après la proposition I.3 $dd^c(v_n T)$ est positif dans $\Omega\setminus A$ de plus par construction $dd^c[v_n T]$ est nul au voisinage de A donc $dd^c(v_n T)$ est un courant positif fermé dans Ω, donc $dd^c(vT)$ l'est aussi.

En appliquant ce raisonnement k fois on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME I.6. *Soient $v_1, \ldots, v_k$ des fonctions plurisousharmoniques positives de classe $\mathscr{C}^2$ (respect. continues) dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Posons $A_i=\{z\in\Omega; v_i(z)=0\}$. Soit T un courant positif fermé de masse finie dans $\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^k A_i$ (respect. $\Omega\setminus A_1$). Alors $T\wedge dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_k$ est un courant positif fermé dans Ω.*

Démonstration. (1) dans le cas où les v_i sont de classe $\mathscr{C}^2$, $T\wedge dd^c v_1$ est défini dans $\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^k A_i$ et il est localement de masse finie dans Ω; ainsi par récurrence $T\wedge dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_k$ est défini dans Ω

(2) dans le cas des v_i continus $T\wedge dd^c v_1$ (d'après le théorème I.5) est positif fermé dans Ω. D'où $T\wedge dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_k$ est donc positif fermé dans Ω d'aprés la proposition I.3.

Pour les fonctions f continues dans Ω on note $\|f\|_{K,\infty}=\sup_{x\in K}|f(x)|$. Le théorème suivant donne une estimation de la masse de $T\wedge dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_k$ en fonction des $\|v_i\|_{\Omega,\infty}$. Il est essentiellement du à S. S. Chern, H. I. Levine et L. Nirenberg [13].

THÉORÈME I.7. *Soit T un courant positif fermé de bidimension (k,k) dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et $v_1,\ldots,v_k$ des fonctions plurisousharmoniques continues dans Ω. Alors pour tout compact K de Ω il existe une constante $C(K,T)$ telle qu'on ait :*

$$(1)\qquad \int_K T\wedge\ dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_k \leqslant C\|v_1\|_{\Omega,\infty}\cdots\|v_k\|_{\Omega,\infty}$$

$$(2)\qquad \int_K T\wedge\ dd^c v_1\wedge\ldots\wedge dd^c v_{k-1}\wedge dv_k\wedge\ d^c v_k \leqslant C\|v_1\|_{\Omega,\infty}\cdots\|v_{k-1}\|_{\Omega,\infty}\|v_k\|^2_{\Omega,\infty}.$$

Démonstration. (1) Par l'absurde, en effet, si on a pas (1) alors il existe (après éventuellement une permutation des indices) une suite $(v_{i,n})$ telle que l'on ait :

$$\|v_{i,n}\|_{\Omega,\infty}\leqslant 1\quad\text{et}\quad \int_K T\wedge\ dd^c v_{1,n}\wedge\ dd^c v_{2,n}\wedge\ldots\wedge\ dd^c v_{k,n}\geqslant n^{2k},$$

ce qui implique

$$\int_K T\wedge\ dd^c\left[\sum_{n=1}^{\infty}(v_{1,n})\frac{1}{n^2}\right]\wedge\ldots\wedge dd^c\left[\sum_{n=1}^{\infty}(v_{k,n})\frac{1}{n^2}\right]=+\infty.$$

D'où la contradiction avec théorème I.5 car les fonction $(\Sigma_{n=1}^{\infty}v_{i,n}(1/n^2))$ sont plurisousharmoniques continues.

La démonstration de (2) est identique et le facteur $\|v_k\|^2$ provient de la définition de $dv_k\wedge d^c v_k$.

Comme conséquence du théorème I.7 on a le résultat suivant :

THÉORÈME I.8. *Soit u une fonction plurisousharmonique vérifiant $u<-1$ dans Ω, telle que e^u soit continue. Posons $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de bidimension (p,p), de masse localement finie au voisinage de A.*

Alors pour tout compact K de Ω et tout $\alpha>0$, on a :

$$\int_{K\setminus A} T\wedge du\wedge\ d^c u\,\frac{\beta^{p-1}}{u^2(\log(-u))^{1+\alpha}}<\infty.$$

Démonstration. La fonction $1/[\log(-x)]^{\alpha}$ est convexe croissante pour $x<-1$. Il en résulte que $v=1/(\log(-u))^{\alpha}$ est plurisousharmonique dans Ω. La fonction v est continue d'après l'hypothèse faite sur e^u.

D'après le théorème I.5 $T\wedge dd^c v$ est un courant positif fermé dans Ω. Soit (u_j) une suite de fonctions plurisousharmoniques de classe $\mathscr{C}^2$ décroissante vers u. Posons $v_j=1/[\log(-u_j)]^\alpha$ et on suppose $(u_j<-1)$. On a :

$$T\wedge dd^c v_j = T\wedge\left[\frac{-\alpha\, dd^c u_j}{u_j[\log(-u_j)]^{1+\alpha}}+\frac{\alpha\, du_j\wedge d^c u_j}{u_j^2[\log(-u_j)]^{1+\alpha}}+\alpha(\alpha+1)\frac{du_j\wedge d^c u_j}{u_j^2[\log(-u_j)]^{2+\alpha}}\right].$$

Les trois termes entre les crochets donnent des courants positifs; donc

$$T\wedge dd^c v_j \geqslant \alpha T\wedge\frac{du_j\wedge d^c u_j}{(u_j)^2[\log(-u_j)]^{1+\alpha}}.$$

Or sur $\Omega\smallsetminus A$ on a :

$$T\wedge dd^c v = \lim_{j\to\infty} T\wedge dd^c v_j \geqslant \lim_{j\to\infty}\alpha T\wedge\frac{du_j\wedge d^c u_j}{(u_j)^2\log(-u_j)^{1+\alpha}} = \alpha T\wedge\frac{du\wedge d^c u}{u^2(\log(-u))^{1+\alpha}}.$$

On a donc, en observant que $T\wedge dd^c v$ est positif dans Ω

$$\int_{K\smallsetminus A}\alpha T\wedge\frac{du\wedge d^c u\wedge\beta^{p-1}}{u^2[\log(-u)]^{1+\alpha}} \leqslant \int_K T\wedge dd^c v\wedge\beta^{p-1}<\infty$$

car $T\wedge dd^c v$ est un courant positif dans Ω.

On remarque que lorsque u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega\smallsetminus A$, la démonstration est simplifiée car on peut opérer directement sur $dd^c v$. *De plus l'inégalité du théorème peut être rendue plus précise en remplaçant* $1/[\log(-x)]^\alpha$ *par une autre fonction convexe de décroissance encore plus lente quand* $x\to-\infty$.

Pour étudier le prolongement d'un courant positif fermé T à travers des sous-variétés de $\mathbf{C}^n$. On aura à considérer le produit fT où f est une fonction presque plurisousharmonique. Soit f une fonction continue telle qu'il existe u_1 et u_2 deux fonctions plurisousharmoniques continues vérifiant $f=u_1-u_2$. Alors d'après la proposition I.3 $dd^c fT=T\wedge dd^c u_1-T\wedge dd^c u_2$ est un courant fermé d'ordre nul car c'est la différence de deux courants positifs.

Plus généralement on a le théorème suivant :

THÉORÈME I.9. *Soit* $f=u_1-u_2$ *une fonction continue positive dans* Ω, *différence d'une fonction continue plurisousharmonique* u_1 *et d'une fonction* u_2 *de classe* $\mathscr{C}^2$ *dans* Ω. *Posons* $A=\{z\in\Omega; f(z)=0\}$. *Soit* T *un courant positif fermé dans* $\Omega\smallsetminus A$ *de masse localement finie au voisinage de* A.

Alors $dd^c(fT)$ *est un courant fermé d'ordre nul dans* Ω.

Démonstration. Posons

$$f_n = \sup\left(f-\frac{1}{n}, 0\right)$$
$$f_n = \sup\left(u_1-\frac{1}{n}, u_2\right)-u_2$$
$$v_n = \sup\left(u_1-\frac{1}{n}, u_2\right).$$

On a $dd^c[f_n T]=dd^c[v_n T]-dd^c[u_2 T]$. Remarquons que le support de $dd^c[f_n T]$ est inclus dans $\Omega_n=\{z\in\Omega; f(z)\geq 1/n\}$. Dans Ω_n, le courant $dd^c[f_n T]+T\wedge dd^c u_2$ est positif. Alors $dd^c[f_n T]+\chi_{\Omega\setminus A}T dd^c u_2$ est positif pour tout n où $\chi_{\Omega\setminus A}$ est la fonction caractéristique de $\Omega\setminus A$. Or $(f_n T)$ converge pour la topologie de la masse vers fT. Il en résulte que $dd^c[f_n T]$ converge faiblement vers $dd^c[fT]$. Comme $dd^c[f_n T]+\chi_{\Omega\setminus A}T\wedge dd^c u_2$ est positif, on en déduit que $dd^c[fT]$ est un courant d'ordre nul.

Remarque. On a montré plus précisément qu'il existe un courant $T'=\chi_{\Omega\setminus A}T\wedge dd^c u_2$ de masse finie au voisinage de A, car u_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ et $T\wedge dd^c f+T'$ est un courant positif. Ce qui nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME I.10. *Soit $f=u_1-u_2$ une fonction continue positive dans un ouvert Ω telle que u_1 soit une fonction plurisousharmonique continue et u_2* de classe *$\mathscr{C}^2$ dans Ω. Posons $A=\{z\in\Omega; f(z)=0\}$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de masse localement finie au voisinage de A, de dimension p.*

Alors pour tout entier k, $1\leq k\leq p$, il existe un courant T_k positif dans Ω avec les propriétés suivantes :

(1) *$T\wedge(dd^c f)^k$ est un courant fermé d'ordre nul;*
(2) *$T\wedge(dd^c f)^k+T_k$ est un courant positif dans Ω.*

Démonstration. Pour $k=1$ on a d'après le théorème I.9 et sa démonstration

(1) $T\wedge dd^c f$ est un courant fermé d'ordre nul,
(2) $T\wedge dd^c f+\chi_{\Omega\setminus A}T\wedge dd^c u_2$ est positif.

Comme $\chi_{\Omega\setminus A}T\wedge dd^c u_2$ est un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de masse localement finie au voisinage de A. Il en résulte en appliquant le théorème I.9 k fois :

(1) le courant $T\wedge(dd^c f)^k$ est fermé d'ordre nul,
(2) il existe un courant T_k positif tel que $T\wedge(dd^c f)^k+T_k$ est positif.

II. Prolongement d'un courant positif fermé a travers un sous-ensemble fermé pluripolaire complet

Le présent paragraphe a pour objet essentiel de démontrer que l'extension triviale $\tilde{T}$ d'un courant positif fermé T par zéro au-dessus d'un ensemble A fermé pluripolaire complet est un courant positif fermé.

Rappelons qu'un sous-ensemble A de Ω est dit pluripolaire complet dans Ω s'il existe une fonction plurisousharmonique u dans Ω telle qu'on ait : $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$. On prend tout l'ensemble des $-\infty$ et cette propriété n'est pas héréditaire. L'extension triviale $\tilde{T}$ d'un courant positif T par zéro au-dessus d'un sous-ensemble fermé A est toujours définie si T est de masse finie au voisinage de A. Le courant $\tilde{T}$ est la limite ($r\to 0$) pour la topologie de la masse d'une suite $(\chi_r T)$ où χ_r est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ positive majorée par 1, nulle au voisinage de A et telle que pour chaque compact K de $\Omega\setminus A$, la fonction χ_r est égale à 1 sur K pour $r\leq r_0(K)$. Puisque T est d'ordre nul il suffit de choisir χ_r continue à support dans $\Omega\setminus A$. Le courant $\tilde{T}$ ne dépend pas de la suite χ_r ainsi choisie.

THÉORÈME II.1. *Soit A un sous-ensemble fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de masse localement finie au voisinage de A.*

Alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T par zéro au-dessus de A est un courant positif fermé dans Ω.

Démonstration. La démonstration de ce théorème comporte quatre étapes. Dans une première étape on démontrera le théorème II.1 dans le cas où T est de bidimension $(1,1)$ et $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$ où u est une fonction plurisousharmonique telle que e^u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\Omega\setminus A$. Dans une deuxième étape et grâce au lemme I.1 on s'affranchira de l'hypothèse faite sur la bidimension. On passera dans la troisième étape au cas où e^u est continue dans Ω. Puis dans la quatrième étape on montrera que tout sous-ensemble A, fermé pluripolaire complet peut être localement défini à partir d'une fonction u plurisousharmonique telle que e^u soit continue.

1$^{\text{re}}$ *étape*. On suppose que T est de bidimension $(1,1)$ et $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$ où u est une fonction plurisousharmonique telle que e^u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\Omega\setminus A$.

La fonction e^u est alors continue sur Ω car u et donc aussi e^u sont continues sur $\Omega\setminus A$; aux points $x\in A$ la continuité de e^u résulte de la semi-continuité supérieure de u et de $u(x)=-\infty$.

Considérons une fonction $\chi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, positive, $\mathscr{C}^\infty$, vérifiant :

$$\chi(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{si } t < e^{-1} \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{Bmatrix}$$

Posons $\chi_r(t) = \chi(t/r)$.

Considérons la famille (T_r) formée des tronquées du courant T plus précisément $T_r = \chi_r(e^u)T$. Le support de T_r est inclus dans $\Omega_r = \{z \in \Omega; u(z) \geqslant -1 + \log r\}$. De plus on a :

$$\tilde{T} = \lim_{r \to 0} T_r$$

le courant $\tilde{T}$ est donc positif dans Ω.

Pour montrer que $\tilde{T}$ est fermé on va extraire une suite qu'on note encore (T_r) telle que $d(T_r) = d\chi_r \wedge T$ converge vers zéro pour la topologie de la masse. En effet soit $\varphi \in \mathscr{D}_{0,1}(\Omega)$ on a alors

$$\langle d(\chi_r T), \varphi \rangle = -\langle \chi_r T, d\varphi \rangle = -\langle T, \chi_r d\varphi \rangle = -\langle T, d(\chi_r \wedge \varphi) \rangle + \langle T, d\chi_r \wedge \varphi \rangle .$$

Comme $d(\chi_r \varphi)$ est une forme différentielle fermée à support dans $\Omega \setminus A$, on obtient $\langle T, d(\chi_r \varphi) \rangle = 0$. On a donc :

$$|\langle d(\chi_r T), \varphi \rangle| = |\langle T,\ d\chi_r \wedge \varphi \rangle| = \left| \int T \wedge \chi' \left(\frac{e^u}{r} \right) \frac{e^u}{r} du \wedge \varphi \right| .$$

Or on a

$$T \wedge \chi' \left(\frac{e^u}{r} \right) \frac{e^u}{r} du \wedge \varphi = T \wedge \chi' \left(\frac{e^u}{r} \right) \frac{e^u}{r} \partial u \wedge \varphi,$$

car T est de bidegré $(n-1, n-1)$ et φ est une $(0, 1)$-forme.

Soit g une fonction continue positive a support compact K égale à 1 au voisinage de support de φ. D'après le lemme I.2, pour tout ε_r positif on a :

$$|\langle d(\chi_r T), \varphi \rangle| \leqslant \varepsilon_r \left\langle T, g \left| \chi' \left(\frac{e^u}{r} \right) \frac{e^u}{r} \right| i\, \partial u \wedge \bar{\partial} u \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon_r} \left\langle T, \left| \chi' \left(\frac{e^u}{r} \right) \frac{e^u}{r} \right| i\bar{\varphi} \wedge \varphi \right\rangle .$$

Posons $C = \|g\|_\infty \sup \{|t\chi'(t)|; t \in \mathbf{R}\}$. Le nombre C est fini car $\chi'(t)$ est à support compact dans $\mathbf{R}$. On considère les « couronnes » $K(r)$ définies par $K(r) = \{z \in \Omega; e^{-1} \leqslant r^{-1} e^u \leqslant 1\} \cap (\text{support } \varphi)$, on aura

$$|\langle d(\chi_r T), \varphi \rangle| \leqslant \varepsilon_r \int_{K(r)} C T \wedge i\, \partial u \wedge \bar{\partial} u + \frac{C}{\varepsilon(r)} \int_{K(r)} T \wedge i \bar{\varphi} \wedge \varphi .$$

Or d'après le théorème I.8 appliqué pour $\alpha=1/2$, on a

$$\int_{K\setminus A} T\wedge \frac{du\wedge d^c u}{u^2(\log(-u))^{3/2}}<+\infty.$$

De plus $\int_{K\setminus A} T\wedge Ci\bar{\varphi}\wedge\varphi<\infty$ car T est de masse finie au voisinage de A.

Il en résulte qu'il existe une suite d'entiers p_n telle que si on pose $r_n=e^{-p_n}$ on ait

$$\int_{K(r_n)} T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi+Ti\ \frac{\partial u\wedge\bar{\partial}u}{u^2[\log(-u)]^{3/2}}\leqslant\frac{1}{p_n\log p_n}.$$

En effet sinon il existerait un entier L tel qu'on ait :

$$2\int_{K\setminus A} T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi+T\wedge\ \frac{du\wedge d^c u}{u^2(\log(-u))^{3/2}}>\sum_{p>L}\frac{1}{p\log p}=+\infty.$$

Ce qui est absurde à cause du théorème I.8 et de l'hypothèse de finitude de la masse de T.

Comme les deux termes sous l'intégrale sont positifs on a donc :

$$\int_{K(r_n)} T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi\ \leqslant\frac{1}{p_n\log p_n}$$

$$\int_{K(r_n)} T\wedge\frac{du\wedge d^c u}{u^2(\log(-u))^{3/2}}\leqslant\frac{1}{p_n(\log p_n)}\ \Rightarrow\int_{K(r_n)} T\wedge i\ \partial u\wedge\bar{\partial}u\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{(p_n+1)^2(\log p_n+1)^{3/2}}{p_n\log p_n}$$

Posons

$$\varepsilon_{r_n}=\frac{1}{p_n(\log(p_n))^{3/4}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}|\langle d(\chi_{r_n}T),\varphi\rangle| &\leqslant C\varepsilon_{r_n}\int_{K(r_n)} T\wedge i\ \partial u\wedge\bar{\partial}u+\frac{C}{\varepsilon_{r_n}}\int_{K(r_n)} T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi\\ &\leqslant C\,\frac{(p_n+1)^2(\log(p_n))^{3/2}}{p_n^2(\log p_n)^{3/4+1}}+C\,\frac{p_n(\log p_n)^{3/4}}{(p_n)\log(p_n)}\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty}|\langle d(\chi_{r_n}\tilde{T}),\varphi\rangle|=0$ et l'on a $\langle d\tilde{T},\varphi\rangle=0$. Une démonstration identique permet de prouver que $\langle d\tilde{T},\varphi\rangle=0$ si $\varphi\in\mathcal{D}_{1,0}(\Omega)$. Finalement on a $d\tilde{T}=0$. La démonstration du premier cas se trouve ainsi achevée. Dans l'étape suivante on va s'affranchir de l'hypothèse portant sur la bidimension de T.

2^e *étape*. T est de bidimension (k, k) et $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$ où e^u est de classe $\mathscr{C}^2$ dans $\Omega\setminus A$.

Soit $\varphi\in\mathscr{D}_{k-1,k}(\Omega)$, d'après le lemme I.1 on peut écrire φ sous la forme $\varphi=\Sigma_{j=1}^N w_j\wedge g_j$ où $g_j\in\mathscr{D}_{0,1}(\Omega)$ et w_j est une forme positive du type $w_j=i^{k-1}\times \alpha_1\wedge\bar{\alpha}_1\wedge\ldots\wedge\alpha_{k-1}\wedge\bar{\alpha}_{k-1}$ où les α_j sont des $(1,0)$ formes à coefficients constants.

On a donc $\langle\tilde{T}, d\varphi\rangle=\Sigma_j\langle\tilde{T}, d(w_j\wedge g_j)\rangle=\Sigma_j\langle\tilde{T}\wedge w_j, dg_j\rangle$ mais $T\wedge w_j$ est un courant positif fermé du type $(n-1, n-1)$ dans $\Omega\setminus A$ car w_j est une forme fortement positive à coefficients constants. Les mesures coefficients de $T\wedge w_j$ sont des combinaisons linéaires de ceux de T donc $T\wedge w_j$ est de masse finie au voisinage de A. De plus on a :

$$\tilde{T}\wedge w_j=(T\wedge w_j)^{\sim}.$$

Donc d'après les résultats de la première étape appliqués au courant $T\wedge w_j$, on a $\Sigma_j\langle\tilde{T}\wedge w_j, dg_j\rangle=0$, il en résulte $\langle\tilde{T}, d\varphi\rangle=0$ et donc T est positif fermé. Le cas $\varphi\in\mathscr{D}_{k,k-1}(\Omega)$ se traite de même.

3^e *Étape*. T est de bidimension (k, k) et $A=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}$ où u est continue sur $\Omega\setminus A$.

D'après la 2^e étape on peut supposer $k=1$. Soit $\varphi\in\mathscr{D}_{0,1}(\Omega)$ et u_j une suite de fonctions plurisousharmoniques de classe $\mathscr{C}^\infty$ décroissante tendant vers u. On a en remarquant que $\chi(e^{u_j}/r)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$:

$$\langle d\tilde{T}, \varphi\rangle=\langle\tilde{T}, -d\varphi\rangle=\lim_{r\to 0}-\left\langle\chi\left(\frac{e^u}{r}\right)T, d\varphi\right\rangle=\lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty}\left\langle\chi\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)T, d\varphi\right\rangle.$$

En effet $\chi(e^{u_j}/r)$ converge uniformément vers $\chi(e^u/r)$. De plus $\varphi\chi(e^{u_j}/r)$ est à support compact dans $\Omega\setminus A$ pour j assez grand, donc on a :

$$\lim_{j\to\infty}\left\langle\chi\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)T, d\varphi\right\rangle=\lim_{j\to\infty}\left\langle T, d\left(\chi\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)\right)\wedge\varphi\right\rangle=\lim_{j\to\infty}\left\langle T, \chi'\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)\frac{e^{u_j}}{r}du_j\wedge\varphi\right\rangle$$

Soit g une fonction continue positive à support compact dans $\Omega\setminus A$ qui vaut 1 au voisinage de support $\chi'(e^u/r)\varphi$, d'après le lemme I.2 on a donc pour tout $\varepsilon_r>0$

$$\lim_{j\to\infty}\left|\left\langle\chi\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)T, d\varphi\right\rangle\right|\le\varepsilon_r\lim_{j\to\infty}\left\langle T, g\left|\chi'\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)\frac{e^{u_j}}{r}\right|du_j\wedge d^c u_j\right\rangle$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_r}\lim_{j\to\infty}\left\langle T, g\left|\chi'\left(\frac{e^{u_j}}{r}\right)\right|\frac{e^{u_j}}{r}\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi\right\rangle.$$

Il en résulte qu'on a :

$$|\langle d\tilde{T}, \varphi\rangle| \leqslant \varlimsup_{r\to 0}\lim_{j\to\infty}\left[\varepsilon_r C\langle T, g\ \ du_j\wedge d^c u_j\rangle + \frac{C}{\varepsilon_r}\langle T, gi\bar{\varphi}\wedge\varphi\rangle\ \ \right].$$

D'après le théorème I.4 et en choisissant g à support dans $\Omega\setminus A$ on a :

$$|\langle dT, \varphi\rangle| \leqslant \lim_{r\to 0}\left[\varepsilon_r C\langle T, g\, du\wedge\ \ d^c u\rangle + \frac{C}{\varepsilon_r}\langle T, gi\bar{\varphi}\wedge\varphi\rangle\ \ \right].$$

Quand g tend vers la fonction caractéristique du support de $\chi'(e^u/r)\varphi$ on obtient en posant $K(r)=\{z\in\Omega; e^{-1}\leqslant e^{u(z)}/r\leqslant 1\}\cap(\text{support }\varphi)$:

$$|\langle d\tilde{T}, \varphi\rangle| \leqslant \lim_{r\to 0} C\left[\varepsilon_r\int_{K(r)} T\wedge du\wedge\ d^c u + \frac{1}{\varepsilon_r}\int_{K(r)} T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi\ \right]$$

(En fait $T\wedge du\wedge d^c u$ et $T\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi$ sont des mesures positives. Donc quand g tend vers la fonction caractéristique du support de $\chi'(e^u/r)\varphi$ les limites de $gT\wedge du\wedge d^c u$ et de $gT\wedge i\bar{\varphi}\wedge\varphi$ existent.)

On choisit donc deux suites (r_n) et (ε_n) comme dans la première étape ce qui permet d'affirmer que $\langle d\tilde{T}, \varphi\rangle=0$.

Il nous reste à montrer la quatrième étape, c'est-à-dire que tout sous-ensemble A fermé pluripolaire complet peut être défini à partir d'une fonction plurisousharmonique continue sur $\Omega\setminus A$. Puisque le problème de prolongement des courants est local, la proposition suivante permet d'achever la démonstration du théorème II.1.

PROPOSITION II.2. *Soit A un sous-ensemble fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit $\Omega'\subset\subset\Omega$ un ouvert strictement pseudoconvexe à frontière $\mathscr{C}^2$.*

Alors il existe une fonction plurisousharmonique et continue dans $\Omega'\setminus A$ telle qu'on a :

$$\Omega'\cap A = \{z\in\Omega'; u(z) = -\infty\}.$$

Démonstration. Rappelons le théorème suivant du à J. B. Walsh [cf. 30]. Soit $\Omega'\subset\subset\mathbf{C}^n$ un ouvert strictement pseudo-convexe à frontière de classe $\mathscr{C}^2$ et $f\in\mathscr{C}(\bar{\Omega}')$, on pose $\varphi_{\Omega'}(f)=\sup\{u;\ u$ plurisousharmonique et $u\leqslant f\}$. Alors $\varphi_{\Omega'}(f)$ est plurisousharmonique continue dans Ω'.

En effet, pour toute fonction g posons $g^*(z)=\overline{\lim}_{z'\to z} g(z')$. On a

$$\varphi_{\Omega'}(f)\leqslant f^* = f.$$

Puisque $\varphi_{\Omega'}(f)$ est un sup de fonctions plurisousharmoniques localement majorées [cf. 18] on en déduit que $\varphi^*_{\Omega'}(f)$ est plurisousharmonique, donc $\varphi^*_{\Omega'}(f)=\varphi_{\Omega'}(f)$, ce qui prouve que $\varphi_{\Omega'}(f)$ est semi-continue supérieurement. On va montrer qu'elle est une sup de fonctions continues. Soit $\mathbf{C}^n \supset\supset \Omega \supset\supset \Omega'$ et $\varrho \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ une fonction strictement plurisousharmonique, telle que $\Omega'=\{z\in\Omega;\varrho(z)<0\}$ et soit $F\in\mathscr{C}^2(\Omega)$ a support compact dans Ω telle que :

$$f-2\varepsilon<F<f-\varepsilon \quad \text{sur } \Omega'.$$

Pour N assez grand $F+N\varrho$ est plurisousharmonique dans Ω. Fixons $z\in\Omega$ et $\varepsilon<0$: par définition de $\varphi_\Omega(f)$ il existe une fonction v plurisousharmonique dans Ω vérifiant $v<f$ et $v>\varphi_{\Omega'}(f)-\varepsilon$ au point z. On définit v' par $v'=\sup(v-2\varepsilon, F+N\varrho)$ sur Ω', et par $v'=F+N\varrho$ sur $\Omega\setminus\Omega'$, cette définition est cohérente puisqu'on a $v-2\varepsilon<f-2\varepsilon$ sur Ω' alors qu'on a $F+N\varrho>f-2\varepsilon$ au voisinage de $\partial\Omega'$. La fonction v' vérifie alors $v'<f-\varepsilon$ sur Ω et $v'(z)>\varphi_\Omega(f)(z)-3\varepsilon$, pour $\eta>0$ assez petit la fonction $w=v'*\delta_\eta$ est plurisousharmonique continue; elle vérifie $w\leqslant f$ ainsi que $w(z)\geqslant\varphi_{\Omega'}(f)(z)-3\varepsilon$. On rappelle que (δ_η) est une famille régularisante.

Montrons maintenant comment on construit la fonction u de la proposition II.2. Soit χ_n une suite de fonctions continues $(0\leqslant\chi_n\leqslant 1)$ décroissante vers χ_A. On suppose que le support de χ_n est inclus dans $\{z\in\Omega; v(z)<-n\}$ où v est une fonction plurisousharmonique quelconque qui définit A par

$$A=\{z\in\Omega; v(z)=-\infty\}.$$

La suite $\varphi_{\Omega'}(-\chi_\nu)$ est donc croissante et vérifie $-1\leqslant\varphi_{\Omega'}(-\chi_\nu)\leqslant 0$ sur Ω' et $\varphi_{\Omega'}(-\chi_\nu)=-1$ sur $A\cap\Omega'$. De plus on a $v/\nu\leqslant-\chi_\nu$ donc aussi $v/\nu\leqslant\varphi_{\Omega'}(-\chi_\nu)$. La suite $\varphi_{\Omega'}(-\chi_\nu)$ converge donc vers zéro en tout point de $\Omega'\setminus A$. Puisque c'est une suite de fonctions continues la convergence est uniforme sur tout compact de $\Omega'\setminus A$. Soit K_j une suite exhaustive de compacts de $\Omega'\setminus A$ et ν_j des entiers tels que l'on ait $\varphi_{\Omega'}(-\chi_{\nu_j})\geqslant -1/j^2$ sur K_j. La série

$$u=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{\Omega'}(-\chi_{\nu_j})$$

est une fonction continue dans $\Omega'\setminus A$ et elle est plurisousharmonique dans Ω' et vaut $-\infty$ sur A. Ce qui répond aux conditions de la proposition II.2.

Remarque. Signalons par ailleurs qu'un théorème de Richberg [cf. 13] entraîne alors que tout sous-ensemble fermé pluripolaire complet A puisse être localement défini à partir d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de A.

Donnons quelques applications simples du théorème (II.1).

THÉORÈME II.3. *Soit Y un sous-ensemble analytique d'une variété analytique X. Soit T un courant positif fermé sur $X \setminus Y$ de masse localement finie au voisinage de Y.*

Alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T par zéro au-dessus de Y est un courant positif fermé dans X.

Démonstration. Puisque les propriétés du courant T (fermeture, positivité et prolongement) sont locales, le théorème II.1 est valable dans le cadre des variétés. Or tout sous-ensemble analytique Y de X est localement fermé pluripolaire complet. En effet dans un ouvert U de X, Y est l'ensemble des zéros communs aux fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_k$. Alors $u(z) = \log(\Sigma_{j=1}^k |f_j(z)|^2)$ est plurisousharmonique dans U et vérifie $A \cap U = \{z \in U; u(z) = -\infty\}$. D'après le théorème II.1 l'extension triviale $\tilde{T}$ de T est un courant positif fermé. C.Q.F.D.

Le théorème II.3 avait été établi par H. Skoda [cf. 28].

THÉORÈME II.4. *Soit A un sous-ensemble fermé pluripolaire complet d'une variété analytique Ω. Soit X un sous-ensemble analytique de $\Omega \setminus A$ de volume localement fini au voisinage de A.*

Alors $\bar{X}$ est un sous-ensemble analytique de Ω.

Démonstration. Le courant d'intégration sur l'ensemble des points réguliers de X définit un courant $[X]$ positif, fermé dont la masse coïncide avec le volume de X [cf. 17]. D'après le théorème II.1, $[\tilde{X}]$ est donc un courant positif fermé dans Ω. Comme il suffit de prouver que X est un sous-ensemble analytique aux voisinages des points de A, à l'aide d'une carte locale on peut se ramener à un ouvert Ω' de $\mathbf{C}^n$. D'après un théorème de Siu [cf. 25] $X' = \{z \in \Omega, \nu([\tilde{X}], z) \geq 1\}$ est un sous-ensemble analytique de Ω' donc fermé dans Ω', où

$$\nu(T, z) = \lim_{r \to 0} \frac{\sigma_T(z, r)}{\tau_{2p} r^{2p}}$$

Or $\nu([X], z) \geq 1$ pour tout $z \in X$ ainsi $X \subset X' \subset \bar{X}$ car support de $[\tilde{X}] \subset \bar{X}$ et $[\tilde{X}]$ est l'extension du courant $[X]$, donc $X' = \bar{X}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME II.5. *Soit A un sous-ensemble fermé localement pluripolaire complet* *d'une variété analytique complexe Ω et T un courant positif fermé de bidimension (p,p) défini dans Ω.*

Alors $1_A T$ est un courant positif fermé dans Ω de bidimension (p,p).

Remarque. Le Cas particulier où A est un sous-ensemble analytique complexe a été établi par H. Skoda [cf. 28].

Démonstration. Posons $T'=1_{\Omega\setminus A}T$ où $1_{\Omega\setminus A}$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega\setminus A$. On a $T-T'=1_A T$; d'après le théorème II.1, T' est un courant positif fermé dans Ω, il en résulte que $1_A T$ l'est aussi. C.Q.F.D.

Le contre-exemple suivant montre qu'on ne peut pas généraliser le théorème II.1 à un sous-ensemble pluripolaire non localement complet. Posons $\Omega=\mathbf{C}^n$ et $A=\{z\in\mathbf{C}^n; z_2=\ldots=z_n=0 \text{ et } 1/2\leqslant|z_1|\leqslant 1\}$.

Le sous-ensemble fermé A est pluripolaire non localement complet, en effet toute fonction plurisousharmonique qui vaut $-\infty$ sur A vaut $-\infty$ sur $\{z\in\mathbf{C}^n; z_2=\ldots=z_n=0\}$.

Soit T le courant d'intégration sur $\{z\in\mathbf{C}^n; z_2=\ldots=z_n=0, |z_1|>1\}$. Le courant T est positif fermé dans $\mathbf{C}^n\setminus A$ de masse localement finie. Si T' est un prolongement de T à $\mathbf{C}^n$, alors $\{z\in\Omega; \nu(T',z)\geqslant 1\}$ est un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^n$ qui contient A donc il contient $\{z\in\mathbf{C}^n; z_2=\ldots=z_n=0\}$. Ainsi $\nu(T',0)\geqslant 1$. Or $T'=T$ au voisinage de l'origine et T est nul au voisinage de l'origine, d'où $\nu(T',0)=0$. On a donc une contradiction. Il n'y a donc ancun prolongement possible même si on envisage d'autres procédés que l'extension simple.

Si on choisit un courant T défini dans $\mathbf{C}^n\setminus A$ et qui ne charge pas $\{z\in\mathbf{C}^n\setminus A; z_2=\ldots=z_n=0\}$ alors T se prolonge de façon unique à travers A. Cette propriété sera démontrée de manière plus générale dans le paragraphe IV.

III. Prolongements des courants positifs fermés a travers des sous-variétés réelles d'une variété complexe

L'objet de ce paragraphe est de donner des résultats permettant de prolonger un courant positif et fermé T de $\Omega\setminus M$ à Ω où M est une sous-variété réelle plongée dans une variété analytique complexe Ω. Les résultats qu'on obtient ne font plus appel à l'hypothèse de finitude de la masse de T. Puisque ce problème est local on supposera que Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Dans le cas où M est un espace réel ou une variété totalement réelle, on montre que M est l'ensemble des zéros d'une fonction plurisousharmonique convenablement choisie. Puis on généralise cette méthode à l'aide du théorème I.10. Rappelons d'abord quelques définitions :

Soit M une sous-variété $\mathscr{C}^2$, réelle de dimension m, plongée dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit $T_z(M)$ l'espace tangent à M au point z. Soit $H_z(M)=T_z(M)\cap iT_z(M)$ le plus grand sous-espace complexe contenu dans $T_z(M)$. Lorsque la dimension de $H_z(M)$ est constante, on dit que M est une variété C.R. (Cauchy-Riemann). La dimension complexe de $H_z(M)$ ($\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)$) est la C.R. dimension de M. Une sous-variété telle que $\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)=0$ est dite totalement réelle. Une sous-variété M de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension réelle n est totalement réelle si et seulement s'il existe une fonction u strictement plurisousharmonique dans un voisinage U de M telle qu'on ait :

$$M\cap U=\{z\in U; u(z)=0\} \quad \text{[cf. 14]}.$$

Soit A un sous-ensemble fermé d'une sous-variété réelle M plongée dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans $\Omega\setminus A$. Supposons $\dim_{\mathbf{C}} H_z(M)<p-1$ pour tout $z\in M$. Alors T se prolongera d'une manière unique en un courant positif, fermé dans Ω. On établit d'abord le théorème suivant qui résout les cas particuliers où M est une variété totalement réelle ou bien un $\mathbf{R}$-espace plongé dans $\mathbf{C}^n$.

THÉORÈME III.1 *Soit u une fonction plurisousharmonique, $\mathscr{C}^1$, et positive dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Posons $A=\{z\in\Omega; u(z)=0\}$. Supposons qu'il existe un voisinage U de A, un nombre $\eta>2/3$ et $n-k$ indices $j_1,\dots,j_{n-k}$ tels qu'on ait dans U et au sens des courants l'inégalité suivante :*

$$dd^c u \geqslant \sum_{l=1}^{n-k} i\,\frac{dz_{j_l}\wedge d\bar z_{j_l}}{u^\eta}.$$

Alors, si $p>k+1$, tout courant T positif, fermé de bidimension (p,p) dans $\Omega\setminus A$ se prolonge de façon unique en un courant $\tilde T$ positif fermé dans Ω.

Les cas intéressants sont donc $p\geqslant 2$ et $n\geqslant 3$ et $k\leqslant n-2$.

Remarque. Le nombre η peut être ramené à $\eta>1/2$ (cf. théorème III.14 [10]).

Démonstration. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées on peut supposer

$$dd^c u \geqslant \sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar z_l}{u^\eta}.$$

1^{re} *étape :* On suppose que T est de masse localement finie au voisinage des points de A.

Soit $\tilde{T}$ l'extension triviale de T par zéro au-dessus de A. $\tilde{T}$ est un courant positif dans Ω. Pour montrer qu'il est fermé on a besoin du lemme suivant :

LEMME III.2 *Soit u une fonction plurisousharmonique continue positive dans un ouvert U. Posons $A=\{z\in U; u(z)=0\}$. Supposons que*

$$dd^c u \geqslant \sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta}$$

où η et un nombre réel et l'inégalité a lieu au sens des courants. Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans $U\setminus A$, de masse localement finie au voisinage des points de A. Alors pour tout compact K de U on a :

$$\int_K T\wedge \beta^{p-1}\wedge \sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta}<\infty \qquad \text{(III.2 a)}$$

$$\int_K T\wedge \beta^{p-2}\wedge\left(\sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta}\right)\wedge\left(\sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta}\right)<\infty. \qquad \text{(III.2 b)}$$

Rappelons que l'inégalité entre courants $T\geqslant T'$ signifie que $T-T'$ est un courant positif.

Démonstration. D'après le théorème I.6 $T\wedge dd^c u$ et $T\wedge dd^c u\wedge dd^c u$ sont positifs et fermés dans Ω. Soit K un compact de U, on a les trois inégalités suivantes :

$$\|T\wedge dd^c u\|_K<\infty\ ;\quad \|T\wedge dd^c u\wedge dd^c u\|_K<\infty\ ;\quad T\wedge dd^c u\geqslant T\wedge \sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta}.$$

Ce qui établit (III.2 a) et (III.2 b).

Soit $\varphi\in\mathscr{D}_{p,p-1}(\Omega)$ une forme monôme, c'est-à-dire $\varphi=\varphi_0\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J$, où $\varphi_0\in\mathscr{D}_{0,0}(\Omega)$ et $I=(i_1,\ldots,i_p)$, $J=(j_1,\ldots,j_{p-1})$. Puisque $p>k+1$ il existe deux entiers qui appartiennent à I et qui sont plus grands que k. On suppose que i_1 et i_2 sont de tels indices. De même on peut supposer que j_1 est plus grand que k.

D'après le lemme I.1, on peut écrire φ sous la forme

$$\varphi=\sum_\alpha w_\alpha\,\varphi_\alpha\wedge dz_{i_1}\wedge dz_{i_2}\wedge d\bar{z}_{j_1}$$

où les w_α sont des $(p-2,p-2)$ formes fortement positives constantes et $\varphi_\alpha\in\mathscr{D}_{0,0}(\Omega)$.

Soit χ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ réelle croissante vérifiant $\chi(x)=0$ pour $x\leq 1$ et $\chi(x)=1$ pour $x\geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}|\langle \tilde{T}, d\varphi\rangle| &= \lim_{r\to 0}\left|\left\langle T, \chi\left(\frac{u(z)}{r}\right) d\varphi\right\rangle\right| = \lim_{r\to 0}\left|\left\langle T, -d\left[\chi\left(\frac{u(z)}{r}\right)\right]\wedge\varphi\right\rangle\right| \\ &= \lim_{r\to 0}\left|\left\langle T, \frac{1}{r}\,\bar{\partial} u\wedge\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right)\wedge\varphi\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

Donc pour montrer que $|\langle \tilde{T}, d\varphi\rangle|=0$ il suffit de prouver que

$$\lim_{r\to 0}\left|\left\langle T, \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_\beta}\, d\bar{z}_\beta\wedge\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right)\, w_\alpha\, \varphi_\alpha\, dz_{i_1}\wedge dz_{i_2}\wedge d\bar{z}_{j_1}\right\rangle\right| = 0 \quad \text{pour tous } \beta, \alpha.$$

Le lemme I.2 qui est valable pour les courants m-positifs ne s'applique pas ici car lorsqu'on multiplie un courant positif (faiblement) par une forme m-positive on n'obtient pas en général un courant positif. Pour résoudre cette difficulté montrons le lemme suivant qui permet une majoration.

LEMME III.3. *Soit T' un courant positif de bidimension* $(2,2)$ *dans un ouvert* Ω *de* $\mathbf{C}^n$. *Soit f et $g\in\mathscr{C}_c(\Omega)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned}|\langle T', fg\, d\bar{z}_a\wedge dz_b\wedge dz_c\wedge d\bar{z}_d\rangle| \leq\ & 2\langle T', if\bar{f}\, dz_c\wedge d\bar{z}_c\wedge i\,dz_a\wedge d\bar{z}_a\rangle \\ & +2\langle T', if\bar{f}\, dz_d\wedge d\bar{z}_d\wedge i\,dz_a\wedge d\bar{z}_a\rangle \\ & +2\langle T', ig\bar{g}\, dz_c\wedge d\bar{z}_c\wedge i\,dz_b\wedge d\bar{z}_b\rangle \\ & +2\langle T', ig\bar{g}\, dz_d\wedge d\bar{z}_d\wedge i\,dz_b\wedge d\bar{z}_b\rangle.\end{aligned}$$

Démonstration du lemme III.3. On a :

$$dz_c\wedge d\bar{z}_d = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} i^\nu (dz_c+i^\nu dz_d)\wedge\overline{(dz_c+i^\nu dz_d)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}&|\langle T', fg\, d\bar{z}_a\wedge dz_b\wedge dz_c\wedge d\bar{z}_d\rangle| \\ &\quad = \left|\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu-1}\langle T'\wedge i(dz_c+i^\nu dz_d)\wedge\overline{(dz_c+i^\nu dz_d)}, fg\, d\bar{z}_a\wedge dz_d\rangle\right|.\end{aligned}$$

Or $T'\wedge i(dz_c+i^\nu z_d)\wedge\overline{(dz_c+i^\nu z_d)}$ est un courant positif de bidimension $(1,1)$ il est donc fortement positif. On peut appliquer le lemme I.2.

$$|\langle T', fg\ d\bar z_a\wedge dz_b\wedge dz_c\wedge dz_d\rangle| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}|\langle T'\wedge i(dz_c+i^\nu\, dz_d)\wedge\overline{(dz_c+i^\nu\, dz_d)}, f\bar f\ dz_a\wedge d\bar z_a\rangle$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3}|\langle T'\wedge i(dz_c+i^\nu\, dz_d)\wedge\overline{(dz_c+i^\nu\, dz_d)}, ig\bar g\ dz_b\wedge d\bar z_b\rangle$$

Or au sens des formes et courants, on a :

$$\overline{i(dz_c+i^\nu\, dz_d)\wedge(dz_c+i^\nu\, dz_d)} \leqslant 2i\ dz_c\wedge d\bar z_c+2i\ dz_d\wedge d\bar z_d$$

donc en définitive on a :

$$|\langle T', fg\ d\bar z_a\wedge dz_b\wedge dz_c\wedge d\bar z_d\rangle| \leqslant 2\langle T', if\bar f\ dz_c\wedge d\bar z_c\wedge i\ dz_a\wedge d\bar z_a\rangle$$
$$+2\langle T', if\bar f\ dz_d\wedge d\bar z_d\wedge i\ dz_a\wedge d\bar z_a\rangle$$
$$+2\langle T', ig\bar g\ dz_c\wedge d\bar z_c\wedge i\ dz_b\wedge d\bar z_b\rangle$$
$$+2\langle T', ig\bar g\ dz_d\wedge d\bar z_d\wedge i\ dz_b\wedge d\bar z_b\rangle$$

La démonstration du lemme est terminée. Poursuivons la démonstration du théorème III.1. Posons

$$A(r)=\left\langle T\wedge\omega_\alpha\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right), \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\bar z_\beta}\varphi_\alpha\ d\bar z_\beta\wedge dz_{i_1}\wedge dz_{i_2}\wedge d\bar z_{j_1}\right\rangle$$
$$B(r)=\left\langle T\wedge\omega_\alpha\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right), \frac{1}{r^{2/3}}i\varphi_\alpha\bar\varphi_\alpha\ dz_{i_2}\wedge d\bar z_{i_2}\wedge i\ dz_\beta\wedge d\bar z_\beta\right\rangle$$
$$C(r)=\left\langle T\wedge\omega_\alpha\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right), \frac{1}{r^{2/3}}i\varphi_\alpha\bar\varphi_\alpha\ dz_{j_1}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge i\ dz_\beta\wedge d\bar z_\beta\right\rangle$$
$$D(r)=\left\langle T\wedge\omega_\alpha\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right), \frac{1}{r^{4/3}}ih_r^2\left|\frac{\partial u}{\partial z_\beta}\right|^2 dz_{i_2}\wedge d\bar z_{i_2}\wedge i\ dz_{i_1}\wedge d\bar z_{i_1}\right\rangle$$
$$E(r)=\left\langle T\wedge\omega_\alpha\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right), \frac{1}{r^{4/3}}ih_r^2\left|\frac{\partial u}{\partial z_\beta}\right|^2 dz_{j_1}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge i\ dz_{i_1}\wedge d\bar z_{i_1}\right\rangle.$$

La fonction h_r est continue positive à support compact et vaut 1 au voisinage de $(\text{support}\,\varphi)\cap(\text{support}\,\chi'(u(z)/r))$ (en fait h_r va tendre vers la fonction caractéristique de $(\text{support}\,\varphi)\cap(\text{support}\,\chi'(u(z)/r))$). En appliquant le lemme III.3 avec $a=\beta$, $b=i_1$, $c=i_2$, $d=d_1$, $f=1/(r^{1/3})\varphi_\alpha$, $g=h_r(1/r^{2/3})(\partial u/\partial z_\beta)$ et $T'=T\wedge\omega_\alpha\chi'(u(z)/r)$. On obtient

$$\lim_{r\to 0}|A_r| \leqslant \lim_{r\to 0}B(r)+\lim_{r\to 0}C(r)+\lim_{r\to 0}D(r)+\lim_{r\to 0}E(r).$$

D'après le lemme III.2 première inégalité on a :

$$\lim_{r\to 0}\int_K T\wedge\, \omega_\alpha \chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right) \frac{i\,dz_{i_2}\wedge d\bar z_{i_2}\wedge i\,dz_\beta\wedge\, d\bar z_\beta}{u^\eta}=0.$$

Pour $\eta>2/3$ on a donc :

$$\lim_{r\to 0} B(r)=\lim_{r\to 0} C(r)=0.$$

La deuxième inégalité du lemme III.2 donne

$$\lim_{r\to 0}\int_K T\wedge\, \omega_\alpha \chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right) \frac{i\,dz_{i_1}\wedge d\bar z_{i_1}\wedge i\,dz_{i_2}\wedge\, d\bar z_{i_2}}{(u)^{2\eta}}=0$$

ce qui prouve

$$\lim_{r\to 0} D(r)=\lim_{r\to 0} E(r)=0.$$

On a donc en définitive $\lim_{r\to 0}|A(r)|\leq \lim_{r\to 0}[B(r)+C(r)+D(r)+E(r)]=0$. Il en résulte $\langle \tilde T, d\varphi\rangle=0$ pour tout $\varphi\in\mathscr{D}_{p,p-1}(\Omega)$. Un raisonnement identique permet d'établir $\langle \tilde T, d\varphi\rangle=0$ si $\varphi\in\mathscr{D}_{p-1,p}(\Omega)$. On en déduit que $\tilde T$ est positif fermé si T est de masse finie au voisinage de A.

2$^{\mathrm{e}}$ *étape*. Montrons que T est de masse finie au voisinage des points de A.

Soit $z_0\in A$ et r assez petit tels que $B(z_0,r)\subset\{z\in\Omega; u(z)<1/2\}$. Soit χ' une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ négative dans Ω telle que

$$\chi'(z)=\begin{cases} 0 & \text{si } \|z-z_0\|<\dfrac{r}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{2}{3}r\leq \|z-z_0\|\leq r \end{cases}.$$

Pour ε assez petit on a dans $B(z_0,r)$, en posant $\chi=\varepsilon\chi'$

$$dd^c(u+\chi)\geq -\sum_{j=1}^{k} i\,d\,z_j\wedge\, d\bar z_j+\sum_{j=k+1}^{n} i\,\, dz_j\wedge\, d\bar z_j$$

car

$$dd^c u\geq 2^\eta \sum_{j=k+1}^{n} i\,\, dz_j\wedge\, d\bar z_j \quad \text{dans } B(z_0,r).$$

Soit

$$\beta(k,N) = N\left(\sum_{j=1}^{k} i\, dz_j \wedge d\bar{z}_j\right) + \sum_{j=k+1}^{n} i\, dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

un calcul simple montre que pour N assez grand on a dans $B(z_0, r)$

$$dd^c(u+\chi) \wedge [\beta(k,N)]^k \geqslant \beta^{k+1}$$

fixons N assez grand et posant $\alpha = \beta(k,N)$ et $u_s = \sup(u+\chi-1/s, 0)$. Soit f_ν une suite de fonction convexe croissante de classe $\mathscr{C}^2$ nulle au voisinage de l'origine qui converge uniformément sur tout compact vers $\sup(t-1/s, 0)$. On a :

$$\begin{aligned} dd^c(u_s \cdot \alpha^k) &= \lim_{\nu\to\infty} dd^c(f_\nu \circ (u+\chi) \wedge \alpha^k) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} f'_\nu(u+\chi)\, dd^c(u+\chi) \wedge \alpha^k + f''_\nu(u+\chi) \wedge d(u+\chi) \wedge d^c(u+\chi) \wedge \alpha^k \end{aligned}$$

donc $dd^c(u_s \cdot \alpha^k)$ est un courant positif vérifiant

$$dd^c(u_s \cdot \alpha^k) \geqslant \beta^k \quad \text{sur } \{z \in B(z_0, r);\ u_s(z) > 0\}.$$

Remarquons qu'il existe $\delta > 0$ indépendant de s tel que $\|z-\xi\| > \delta$ pour tout z vérifiant : $u_s(z) > 0$ et $\|z - z_0\| = r$, et pour tout $\xi \in A$. De sorte qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ telle que g est nulle au voisinage de A et $g(z) = 1$ si $\|z-z_0\| = r$ et $(u+\chi)(z) \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r/2)\setminus A} T \wedge \beta^p &\leqslant \lim_{s\to\infty} \int_{B(0,r)} dd^c(u_s T \wedge \alpha^{p-1}) \\ &= \lim_{s\to\infty} \int_{\|z-z_0\|=r} g \cdot d^c(T u_s \wedge \alpha^{p-1}) \\ &= \lim_{s\to\infty} \int_{B(z_0,r)} g \cdot T \wedge dd^c u_s \wedge \alpha^{p-1} + \int_{B(z_0,r)} T \wedge dg \wedge d^c u_s \wedge \alpha^{p-1} \\ &= \int_{B(z_0,r)} g \cdot T \wedge dd^c(u+\chi) \wedge \alpha^{p-1} + \int_{B(z_0,r)} T \wedge dg \wedge d^c(u+\chi) \wedge \alpha^{p-1} \end{aligned}$$

On a la première inégalité car $dd^c u_s T \wedge \alpha^{p-1}$ est positif de plus sur $\{z; u_s(z) > 0\}$, $dd^c u_s T \wedge \alpha^{p-1} \geqslant T \wedge \beta^p$ car $p \geqslant k+1$. La deuxième et troisième égalités font appel au théorème de Stokes dont l'usage est justifié par un procédé classique de régularisation et passage à la limite (cf. Proposition IV.1). Les deux derniers termes sont des quantités finies car g est nulle au voisinage de A.

Remarque 1. Pour montrer que le courant T de dimension p est de masse finie au voisinage de A ou $A=\{z\in\Omega,\ u(z)=0\}$ on a utilisé seulement le fait que $dd^c u$ est supérieur au sens des distributions à une (1, 1) forme continue qui admet en tout point $n-p+1$ valeurs propres strictement positives. On applique donc cette méthode dans la démonstration du théorème III.7 ci-dessous pour prouver que T est de masse localement finie. Dans le cas particulier où A est compact on dispose d'une autre démonstration plus directe qui sera élaborée dans le démonstration du théorème III.7. (Donc dans cette démonstration M' sera supposé compact dans V_ε).

Je remercie M. N. Sibony qui m'a fait remarquer que la démonstration originale de cette deuxième étape était incomplète.

3[e] *étape. Unicité du prolongement positif et fermé de T.* Soit T' un deuxième prolongement de T; pour prouver que $T'=\tilde{T}$, il suffit de prouver $1_A T'=0$ où 1_A est la fonction caractéristique de A. Or d'après ce qui précède $(T'-1_A T')^{\sim}$ est fermé; T' l'étant, le courant $1_A T'$ est fermé, il est donc positif fermé. Il suffit donc de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION III.4. *Soit u une fonction positive continue et plurisousharmonique dans un ouvert* Ω *de* $\mathbf{C}^n$. *Posons* $A=\{z\in\Omega; u(z)=0\}$. *Supposons qu'il existe* $\eta>0$ *tel que après un changement de coordonnées on ait au sens des courants :*

$$dd^c u \geqslant \sum_{l=k+1}^{n} i\,\frac{dz_l\wedge d\bar{z}_l}{u^\eta} \quad \text{dans un voisinage de } A.$$

Soit T' *un courant positif fermé dans* Ω *de bidimension* (p,p) *où* $p\geqslant k+1$. *Alors on a* $1_A T'=0$.

Démonstration de la proposition. D'après le théorème I.5, $T'\wedge dd^c u$ est un courant positif fermé dans Ω. Or au sens des courants on a :

$$1_A T'\wedge dd^c u \leqslant T'\wedge dd^c u.$$

De plus pour tout $n>0$ et tout $\varphi\in\mathscr{D}_{p-1,p-1}(\Omega)$ fortement positive on a :

$$\langle 1_A T'\wedge dd^c u, \varphi\rangle \geqslant \left\langle 1_A T'\wedge\left(n\sum_{l=k+1}^{n} i\,dz_l\wedge d\bar{z}_l\right), \varphi\right\rangle$$

car il existe un voisinage de A où l'on a

$$dd^c u \geqslant n \sum_{l=k+1} i\,dz_l\wedge d\bar{z}_l.$$

Comme $p\geqslant k+1$, il en résulte que $1_A T'=0$.

Remarque. En fait, on a montré qu'avec les hypothèses de la proposition III.4 la mesure trace du courant T' ne charge pas A.

La démonstration du théorème III.1 est ainsi achevée. La proposition III.4 et le théorème III.1 permettent de montrer que ce type de prolongement est héréditaire, en effet on a le résultat suivant :

THÉORÈME III.5. *Soit u une fonction vérifiant les hypothèses du théorème* III.1. *Soit F un fermé, $F \subset A = \{z \in \Omega; u(z)=0\}$ et $p>k+1$.*

Alors tout courant positif fermé T de bidimension (p,p) dans $\Omega \setminus F$ se prolonge de façon unique en un courant positif fermé dans Ω.

Remarque. Les cas intéressants sont $p \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

Démonstration. Soit $T' = 1_{\Omega \setminus A} T$. D'après la proposition III.4 appliquée à T dans l'ouvert $\Omega \setminus A$, on a $T'=T$ dans $\Omega \setminus F$. Le théorème III.1 prouve que T' se prolonge de façon unique en un courant $\tilde{T}$ positif fermé dans Ω. On en déduit que $\tilde{T}$ est l'unique prolongement positif et fermé de T.

Le résultat suivant est un corollaire du théorème III.1 et porte sur les R-espaces vectoriels plongés dans $\mathbf{C}^n$.

THÉORÈME III.6. *Soit E un sous-espace réel de $\mathbf{C}^n$, supposons que la dimension complexe de $E \cap iE = \dim_{\mathbf{C}} H_z(E) = k$. Soit $p>k+1$ et F un sous-ensemble fermé de E. Alors tout courant positif fermé dans $\Omega \setminus F$ (ou Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$) se prolonge de façon unique en un courant positif fermé dans Ω. Il est donc localement de masse finie au voisinage des points de A. Le prolongement obtenu est l'extension triviale de T par zéro au-dessus de A (pourvu que* $\dim T = p$*).*

Démonstration. Après un changement linéaire de coordonnées $z=(z_1,\dots,z_n)$ où $z_j = x_j + iy_j$ on peut supposer que E est défini par $E = \{z \in \Omega; y_{k+1} = \dots = y_n = 0$ et $x_{k+s} = \dots = x_n = 0\}$. Soit $u = \sum_{j=k+1}^{n} |y_j|^{1+\varepsilon}$, u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ plurisousharmonique positive, de plus on a $F \subset \{z \in \Omega; u(z)=0\}$ et

$$dd^c u \geqslant \varepsilon(1+\varepsilon) \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{2} i \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{|y_j|^{1-\varepsilon}}$$

donc pour ε vérifiant $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon) > 2/3$, la fonction u vérifie les hypothèses du théorème III.1; en l'appliquant on obtient le théorème III.6.

THÉORÈME III.7. *Soit M une sous-variété réelle de dimension m et de classe $\mathscr{C}^2$, plongée dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soient A un sous-ensemble fermé de M et T un* *courant positif, fermé dans* $\Omega \setminus A$ *de bidimension* (p,p). *Supposons* $p > \dim_{\mathbf{C}} H_z(M)+1$ *pour tout* $z \in M$.

Alors T est de masse finie au voisinage de chaque point de A. De plus l'extension triviale $\tilde{T}$ *de T par zéro au-dessus de A est l'unique courant positif fermé de dimension p dans* Ω *qui coïncide avec T sur* $\Omega \setminus A$.

Démonstration. On représente M sous la forme $\{u=0\}$ où $u+\|z\|^2$ est plurisousharmonique.

Le problème est local, donc il suffit de montrer le théorème au voisinage de chaque point de A.

Soit $z_0 \in A$, après un choix convenable de coordonnées locales on peut supposer que $z_0=0$ et $T_{z_0}(M)=\{z \in \mathbf{C}^n; z_j=x_j+iy_j; y_{k+1}=\ldots=y_n=x_{k+s+1}=\ldots,x_n=0\}$ où $k=\dim_{\mathbf{C}} H_{z_0}(M)$ et $s=m-2k$. Il existe des fonctions réelles $h_{k+1},\ldots,h_n$ et $g_{k+s+1},\ldots,g_n$ des variables $(z_1,\ldots,z_k,\ x_{k+1},\ldots,x_{k+s})$, définies dans un voisinage U de zéro telles qu'on ait :

(1) $g_j(0)=h_l(0)=0$ pour tout $k+1 \leqslant l \leqslant n$ et $k+s+1 \leqslant j \leqslant n$ et $Dg_j(0)=Dh_l(0)=0$ où D est la différentielle sur $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}^s$.

(2) L'ensemble $M \cap U$ est défini par :

$$M \cap U = \left\{ z \in U\, ; \sum_{l=k+1}^{n} [y_l - h_l(z_1,\ldots,z_k,\ x_{k+1},\ldots,x_{k+s})]^2 + \sum_{j=k+s+1}^{n} (x_j-g_j)^2 = 0 \right\}.$$

Posons $u_\varepsilon(z)=(\Sigma_{l=k+1}^n [y_l-h_l(z_1,\ldots,z_k,\ x_{k+1},\ldots,x_{k+s})]^2)^{1-\varepsilon}$ où ε vérifie $0 \leqslant \varepsilon < 1$; et $u_0=u$.

Soit $M'=\{z \in U; u(z)=0\}$.

Le lemme suivant montre que u_ε est presque plurisousharmonique dans un voisinage de l'origine pourvu que ε soit assez petit.

LEMME III.8. *Pour tout* $0 \leqslant \varepsilon < 1/2$ *la fonction* $\|z\|^2+u_\varepsilon$ *est plurisousharmonique de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans un voisinage* V_ε *de l'origine contenant* $M' \cap U$.

Démonstration du lemme. La fonction u_ε est positive de classe $\mathscr{C}^2$ aux points de U qui n'appartiennent pas à M'.

Dans $U'=U \setminus (M' \cap U)$, on a :

$$dd^c u_\varepsilon = (1-\varepsilon)u^{-\varepsilon} \sum_{l=k+1}^{n} 2[dd^c(y_l-h_l)](y_l-h_l) + (1-\varepsilon)u^{-\varepsilon} \sum_{l=k+1}^{n} 2\,d(y_l-h_l) \wedge d^c(y_l-h_l)$$
$$+(1-\varepsilon)(-\varepsilon)(u)^{-1-\varepsilon} d\left(\sum_{l=k+1}^{n}(y_l-h_l)^2\right) \wedge d^c\left(\sum_{l=k+1}^{n}(y_l-h_l)^2\right).$$

Or pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ on a $df \wedge d^c f = 2i\,\partial f \wedge \bar\partial f$. Donc

$$(-\varepsilon)(1-\varepsilon)u^{-1-\varepsilon} d\left[\sum_{l=k+1}^{n} (y_l-h_l)^2\right] \wedge d^c\left[\sum_{l=k+1}^{n} (y_l-h_l)^2\right]$$

$$=(1-\varepsilon)(-\varepsilon)\,8iu^{-1-\varepsilon} \sum_{j,l=k+1}^{n} (y_l-h_l)(y_j-h_j)\,\partial(y_l-h_l) \wedge \bar\partial(y_j-h_j)$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)(-\varepsilon)\,8iu^{-1-\varepsilon} \left(\sum_{j=k+1}^{n} (y_j-h_j)^2\right)\left(\sum_{l=k+1}^{n} \partial(y_l-h_l) \wedge \bar\partial(y_l-h_l)\right).$$

Cette dernière inégalité (qui signifie que la différence des deux membres est une forme positive) est obtenue en remarquant que la forme suivante est positive

$$i[(y_j-h_j)\,\partial(y_l-h_l)-(y_l-h_l)\,\partial(y_j-h_j)] \wedge [(y_j-h_j)\,\bar\partial(y_l-h_l)-(y_l-h_l)\,\bar\partial(y_j-h_j)].$$

Il en résulte que dans $U \setminus M'$ en a au sens des courants

$$dd^c u_\varepsilon \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{l=k+1}^{n} 2(u)^{-\varepsilon}(y_l-h_l)\,dd^c(y_l-h_l)+(1-\varepsilon)(4-8\varepsilon)u^{-\varepsilon} \sum_{l=k+1} i\,\partial(y_l-h_l) \wedge \bar\partial(y_l-h_l).$$

Choisissons $0 \leqslant \varepsilon < 1/2$; alors le premier terme du second membre tend vers zéro quand z tend vers un point de M' (car y_l-h_l tend vers zéro) et le deuxième terme est positif. Il en résulte qu'il existe un voisinage V_ε tel que $dd^c(u_\varepsilon+\|z\|^2)$ est positif dans $V_\varepsilon \setminus M'$.

Donc la fonction $u_\varepsilon+\|z\|^2$, définie sur V_ε, plurisousharmonique sur $V_\varepsilon \setminus M'$, est encore plurisousharmonique dans V_ε. On a en effet pour $z \in M'$

$$u_\varepsilon(x)+\|z\|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(z+r\xi\, e^{i\theta})+\|z+r\xi\, e^{i\theta}\|^2]\, d\theta$$

pour tout $\xi \in \mathbf{C}^n$ et tout r assez petit. Donc $u+\|z\|^2$ est plurisousharmonique dans un voisinage de $M' \cap U$.

De plus on a l'inégalité fondamentale suivante :

$$dd^c u_\varepsilon + dd^c\|z\|^2 \geqslant (1-\varepsilon)(4-8\varepsilon)u^{-\varepsilon} \sum_{l=k+1}^{n} i\,\partial(y_l-h_l) \wedge \bar\partial(y_l-h_l) = \omega_\varepsilon$$

qui nous permet de montrer que la masse de T est localement finie au voisinage des points de M' (cf. remarque 1).

Montrons le lemme suivant qui permettra d'estimer la mesure trace de T.

LEMME III.10. *Il existe un voisinage V de l'origine, une constante C positive telle qu'on ait :*

$$\beta^p \leqslant C\beta^{p-2} \wedge \left(\sum_{j=k+1}^{n} i\,\partial(y_j-h_j) \wedge \bar{\partial}(y_j-h_j) \right)^2 .$$

Démonstration du lemme III.10. Considérons l'application :

$$\psi \colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$$

$$(x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n) \mapsto (\psi'_1+i\psi_1, \ldots, \psi'_n+i\psi_n).$$

où $\psi'_i=x_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $\psi_j=y_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et $\psi_j=y_j-h_j$ pour $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Puisque $dh_j(0)=0$, l'application tangente $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ à l'origine est l'identité donc dans un voisinage V' de l'origine on a $\partial\psi \wedge \ldots \wedge \partial\psi_n \neq 0$. Ainsi $\partial\psi_1, \ldots, \partial\psi_n$ engendrent les $(1,0)$-formes continues dans V'. Dans cette base on a

$$\beta^p = \sum_{|I|=|J|=p} f_{IJ}\, \partial\psi_I \wedge \partial\bar{\psi}_J$$

comme $|I|=|J|=p$ et $p>k+1$, il existe deux indices $i_1, i_2 \in I$ et $j_1, j_2 \in J$ qui sont strictement plus grands que k. Or d'après le lemme I.1 on a :

$$f_{IJ}\, \partial\psi_{I \smallsetminus \{i_1,i_2\}} \wedge \partial\bar{\psi}_{J \smallsetminus \{j_1,j_2\}} = \sum_{l}^{N} g_l\, w_l$$

où g_l est une fonction continue et w_l est une forme positive; d'où

$$\partial\psi_{i_1} \wedge \partial\psi_{i_2} \wedge \bar{\partial}\bar{\psi}_{j_1} \wedge \bar{\partial}\bar{\psi}_{j_2} \leqslant \left(\sum_{j=k+1}^{n} i\,\partial(y_j-h_j) \wedge \bar{\partial}(y_j-h_j \right)^2$$

$$f_{IJ}\, \psi_I \wedge \partial\bar{\psi}_J \leqslant \left(\sum_{l}^{N} |g_l|\, w_l \right) \wedge \left[\sum_{j=k+1}^{n} i\,\partial(h_j-h_j) \wedge \bar{\partial}(y_j-h_j) \right]^2 .$$

Soit V un ouvert relativement compact dans V', contenant l'origine; il existe une constane C' telle que l'on ait $|g_l|\, w_l \leqslant C'\beta^{p-2}$ et finalement, une constante C donnant lieu à l'inégalité du lemme III.10.

Pour montrer que T est de masse localement finie au voisinage des points de M', il suffit de prouver que la mesure trace $T \wedge \beta^p$ l'est.

Soit Ω' un ouvert relativement compact dans V inclus dans $\{z \in V; u(z) < 1/2\}$. On choisit $\varepsilon < 1/2$.

Posons

$$\Omega'_n = \left\{ z \in \Omega' ; u_\varepsilon(z) > \frac{1}{n} \right\}$$

$$A_n = \|T \wedge \beta^{p-2}\|_{\Omega'_n}$$

$$a_n = \|T \wedge \beta^{p-2}\|_{\Omega'_n \setminus \Omega'_{n-1}}$$

On a $A_n = \Sigma_{k=1}^n a_k$. Conformément à la remarque 1 on suppose $M' \subset\subset \Omega'$.

Soit $u_{\varepsilon,n} = \sup\{u_\varepsilon - 1/n, 0\}$. La fonction $u_{\varepsilon,n} + \|z\|^2$ est plurisousharmonique. En effet si en z_0 on a $u_{\varepsilon,n}(z_0) > 1/n$ alors dans un voisinage de z_0 on a $u_{\varepsilon,n}(z) + \|z\|^2 = u_\varepsilon(z) + \|z\|^2$, fonction qui est plurisousharmonique d'après le lemme III.8. Si on a $u_{\varepsilon,n}(z_0) \leqslant 1/n$ l'inégalité de la moyenne pour $u_{\varepsilon,n}(z) + \|z\|^2$ est trivialement vérifiée.

Le courant $dd^c[(u_{\varepsilon,n} + \|z\|^2)T] \wedge \beta^{p-2}$ est un courant positif d'après le théorème I.5 dans $\Omega \setminus M'$. Or $u_{\varepsilon,n} T \wedge \beta^{p-2}/A_n \log n$ est une suite de courants qui convergent vers zéro dans Ω'. Donc $(A_n \log n)^{-1} dd^c[u_{\varepsilon,n} T \wedge \beta^{p-2}]$ converge vers zéro. En répétant le raisonnement deux fois il en résulte que

$$1_{\Omega'_n} \frac{[dd^c(u_{\varepsilon,n} + \|z\|^2)]^2}{A_n \log n} \wedge T \wedge \beta^{p-2}$$

est une suite de courants positifs qui convergent vers zéro car M' est compact.

Il en résulte d'après l'inégalité (III.9)

$$1 \geqslant \int_{\Omega'_n} \frac{1}{A_n \log n} T \wedge \beta^{p-2} \wedge \left[\sum_{j=k+1}^{n} i\, \partial(y_j - h_j) \wedge \bar\partial(y_j - h_j) \right]^2 u^{-2\varepsilon}$$

pour n assez grand et $\varepsilon < 1/2$.

D'après le lemme III.10 il existe une constante C telle que

$$\left\| \frac{T \wedge \beta^p}{A_n \log n} u^{-2\varepsilon} \right\|_{\Omega'_n} \leqslant C \quad \text{pour } \varepsilon < \tfrac{1}{2} \text{ et } n \text{ assez grand.}$$

Prenons $\varepsilon = 3/7$. D'après l'inégalité précédente on a :

$$\|T \wedge \beta^p\|_{\Omega'_n \setminus \Omega'_{n-1}} \leqslant C n^{-6/4} A_n \log n$$

Or $A_n \leqslant C' \|T \wedge \beta^p\|_{\Omega'_n}$, donc finalement il existe une constante qu'on notera toujours C telle qu'on ait

$$a_n = \|T \wedge \beta^p\|_{\Omega'_n \setminus \Omega'_{n-1}} \leqslant C \frac{\log n}{n^{6/4}} \|T \wedge \beta^p\|_{\Omega'_n}$$

Or $\Sigma_{l=1}^{n} a_l = \|T\wedge\beta^p\|_{\Omega'_n} = A_n$. Puisque $A_{n+1}=A_n+a_{n+1}$, on écrira

$$A_{n+1} \leqslant A_n + C\,\frac{\log n}{n^{6/4}}\,A_{n+1}$$

et par récurrence on a

$$A_{n+p}\left(\prod_{j=1}^{p}\left(1-C\,\frac{\log(n+j)}{(n+j)^{6/4}}\right)\right) \leqslant A_n.$$

Puisque le produit

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left[1-C\,\frac{\log(n+j)}{(n+j)^{6/4}}\right]$$

converge, la suite A_n est bornée. Ainsi on a montré que la masse de T est localement finie au voisinage de M'. On pourra donc considérer $\tilde{T}$ extension triviale de T de $\Omega\setminus A$ à Ω.

Remarque. Puisque T est de masse localement finie au voisinage de M', en appliquant le théorème I.10 au courant T et à la fonction u, on obtient pour tout compact K : (III.11)

$$\int_K T\wedge\, iu^{-2\varepsilon}\left[\sum_{j=k+1}^{n}\partial(y_j-h_j)\wedge\bar\partial(y_j-h_j)\right]^2\wedge\beta^{p-2}<\infty.$$

Montrons que $\tilde{T}$ est fermé. Soit χ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ croissante de la variable réelle t, vérifiant $\chi(t)=0$ pour $t<1$ et $\chi(t)=1$ pour $t>2$. Soit $\varphi\in\mathscr{D}_{p-1,p}(V)$, on a :

$$\begin{aligned}|\langle\tilde{T},d\varphi\rangle| &= \lim_{r\to0}\left|\left\langle T,\chi\left(\frac{u(z)}{r}\right)d\varphi\right\rangle\right|\\ &= \lim_{r\to0}\left|\left\langle T,\frac{1}{r}\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right)\sum_{j=k+1}^{n}\partial(y_j-h_j)^2\wedge\varphi\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

D'après $\partial(y_j-h_j)^2=2(y_j-h_j)\,\partial(y_j-h_j)$, il existe une constante C telle qu'on ait :

$$|\langle\tilde{T},d\varphi\rangle| \leqslant C\lim_{r\to\infty}\left\langle T,\frac{u^{1/2}}{r}\chi'\left(\frac{u(z)}{r}\right)\beta^p\right\rangle.$$

D'après le lemme III.10 on a :

$$|\langle\tilde{T},d\varphi\rangle| \leqslant C\lim_{r\to0}\left\langle T,\frac{\beta^{p-2}u^{1/2}}{r}\chi'\left(\frac{u}{r}\right)\left(\sum_{j=k+1}^{n} i\,\partial(y_j-h_j)\wedge\bar\partial(y_j-h_j)\right)^2\right\rangle$$

ce qui d'après (III.11) tend vers zéro pourvu que $\varepsilon>1/4$.

Ainsi l'extension T_1 de $T|_{V\setminus M'}$ à V par zéro au-dessus de M' est un courant positif fermé dans V. Afin de montrer que l'extension triviale de T par zéro au-dessus de A est un courant positif fermé dans V, posons :

$$T_2 = 1_{V\setminus A} T.$$

Le courant $T_3 = T_2 - T_1$ est positif fermé dans $V\setminus A$, à support dans M'. D'après le théorème I.10, en développant $dd^c u_\varepsilon$ il vient

$$\infty > \int_K T_3 \wedge \sum_{j=k+1}^{n} i\, \frac{\partial(y_j - h_j) \wedge \bar\partial(y_j - h_j)}{u^\varepsilon} \wedge \beta^{p-1}.$$

Comme u vaut zéro sur M' on a $T_3 = 0$, d'où $1_{V\setminus A} T = 1_{V\setminus M'} T$, et le courant $1_{V\setminus M'} T$ est postif fermé dans V. Ainsi la démonstration du théorème III.7 est achevée.

Ce dernier élément de la démonstration permet d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME III.12. *Soit T un courant positif fermé dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et M une sous-variété réelle plongée dans Ω, vérifiant*

$$\dim_{\mathbf{C}} H_z(M) \leqslant \dim T - 1 \quad \textit{pour tout } z \in M.$$

Alors les mesures coefficients de T ne chargent pas M.

L'exemple suivant montre que dans le théorème III.7 on ne peut pas prendre $p = \dim_{\mathbf{C}} H_z(M) + 1$, (l'inégalité stricte $p > 1 + \dim_{\mathbf{C}} H_z(M)$ est nécessaire).

Dans $\mathbf{C}^2$ considérons $M = \{z \in \mathbf{C}^n, z_2 = 0 \text{ et } |z_1| = 1\}$ et T le courant d'intégration sur $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2;\ z_2 = 0 \text{ et } |z_1| > 1\}$. T est un courant positif fermé dans $\mathbf{C}^2 \setminus M$ car il représente le courant d'intégration sur un ensemble analytique. Si T' est un prolongement de T à $\mathbf{C}^2$ positif fermé, on aura $\nu(T', (0,0)) \geqslant 1$. Or $\nu(T, (0,0)) = 0$ et T' doit coïncider avec T au voisinage de zéro ce qui constitue une contradiction.

Donc T n'admet aucun prolongement en tant que courant positif et fermé à $\mathbf{C}^2$. De plus on vérifie que

$$\dim_{\mathbf{C}} H_z(M) = 0$$

pour tout $z \in M$ et T est de bidimension $(1, 1)$.

Comme conséquence du théorème III.7 on obtient :

COROLLAIRE II.13. *Soit M une sous-variété totalement réelle de classe $\mathscr{C}^2$ dans* *un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Alors tout courant T de bidimension $\geqslant 2$ positif fermé dans $\Omega\setminus M$ se prolonge de façon unique en un courant positif fermé dans $\mathbf{C}^n$.*

Le théorème suivant est une généralisation du théorème III.7 et admet une démonstration analogue :

THÉORÈME III.14. *Soit $u_1, \ldots, u_n$ une base $\mathscr{C}_{1,0}(\Omega)$ considérée comme module sur $\mathscr{C}(\Omega)$, soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ positive dans Ω. Posons $M=\{z\in\Omega; f(z)=0\}$. Soit A un sous-ensemble fermé de M. Supposons qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^2$, un nombre $\eta>1/2$ et un entier k tels que*

$$dd^c(f+g) \geqslant \sum_{j=k+1}^{n} i\,\frac{u_j\wedge \bar{u}_j}{f^\eta}.$$

Alors tout courant positif fermé dans $\Omega\setminus A$ de dimension $p>k+1$ se prolonge de façon unique en un courant positif fermé dans Ω. Il est donc de masse localement finie au voisinage de A et ce prolongement est l'extension triviale par zéro au-dessus de A.

Démonstration. (1) La restriction T' du courant T à $\Omega\setminus M$ est un courant de masse localement finie dans Ω.

Soit Ω' un ouvert relativement compact dans Ω posons $\Omega_n'=\{z\in\Omega; f(z)>1/(n+1)\}$. En procédant comme dans la deuxième étape de la démonstration du théorème III.1 on établit

$$\int_{\Omega_n'\setminus A} T\wedge\beta^p \leqslant \int_{\Omega_n'\setminus A} T\wedge\alpha^{p-1}\wedge[g\,dd^c(u+\chi)+dg\wedge d^c(u+\chi)]$$

pour n assez grand ce qui pouve que T' est de masse finie dans Ω', dès que $\eta>1/2$.

(2) L'extension triviale $\tilde{T}'$ est fermée dans Ω'. Soit $\varphi\in\mathscr{D}_{p,p-1}(\Omega')$ et χ une fonction, $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $\chi(t)=0$ pour $t>1/2$ et $\chi(t)=1$ pour $t>1$. On a

$$\langle \tilde{T}', d\varphi\rangle = \lim_{r\to 0}\left\langle T, \frac{1}{r}\chi'\left(\frac{f}{r}\right)\bar{\partial}f\wedge\varphi\right\rangle.$$

Puisque $p>k+1$, on peut écrire $\bar{\partial}f\wedge\varphi$ sous la forme

$$\bar{\partial}f\wedge\varphi = \sum \varphi_I\, du_{i_1}\wedge du_{i_2}\wedge d\bar{u}_{j_1}\wedge d\bar{u}_{j_2}$$

où les φ_I sont des $(p-2, p-2)$ formes continues à supports compacts et i_1, i_2, j_1, j_2 sont des indices supérieurs à k. On privilégie ces indices de sorte qu'on ait :

$$|\langle \tilde{T}', d\varphi\rangle| \leqslant C \lim_{r\to 0} \left\langle T' \wedge [dd^c(f+g)]^2 f^{2\eta}, \frac{1}{r}\chi'\left(\frac{f(z)}{r}\right) \wedge \beta^{p-2}\right\rangle$$

où C est une constante indépendante de r.

Or le courant $T' \wedge [dd^c(f+g)]^2$ est de masse finie dans Ω' d'après le théorème I.9 d'où $\langle \tilde{T}', d\varphi\rangle = 0$ dès que $\eta > 1/2$ donc $\tilde{T}'$ est positif fermé dans $\Omega \setminus M$.

(3) L'analogue de la proposition III.4 montre que le courant T ne charge pas M Donc $\tilde{T}'$ est l'unique courant positif fermé dans Ω' qui coïncide avec T dans $\Omega' \setminus A$.

Les résultats de Schiffmann [24], Funahashi [12] et Cirka [7] énoncés dans l'introduction s'obtiennent en appliquant le théorème III.14 au courant d'intégration sur l'ensemble analytique X.

IV. Compléments

Le but de ce paragraphe est de donner certaines versions fines du théorème II.1. On démontre en particulier que si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et $\Omega' \subset\subset \Omega$ un ouvert strictement pseudo-convexe alors tout courant positif fermé de dimension >0 dans $\Omega \setminus \bar{\Omega}'$ se prolonge en un courant positif dans Ω (Proposition IV.1.) Il s'ensuit qu'un courant T positif fermé non nul dans un ouvert Ω strictement pseudo-convexe de dimension >0 ne peut avoir un support compact dans Ω. Mais cette propriété est déjà connue (cf. Lelong [19] et Skoda [28]). Le théorème IV.2 est une généralisation du théorème II.1 au cas où l'obstacle est un compact contenu dans un ensemble pluripolaire complet. Le corollaire IV.3 montre que tout courant T positif fermé défini dans un voisinage d'un ensemble compact K pluripolaire complet se prolonge à travers A. Puis à l'aide de l'exemple A_1 ci-dessous on construit des exemples d'ensembles compacts pluripolaires complets « assez grands ».

PROPOSITION IV.1. *Soit φ une fonction continue, exhaustive et strictement plurisousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit* $c \in \mathbf{R}$, *posons* $\Omega_c\{z \in \Omega; \varphi(z) \leqslant c\}$. *Soit T un courant positif fermé défini dans $\Omega \setminus \Omega_c$ de dimension* >0.

Alors T est de masse finie au voisinage de Ω_c.

Démonstration. Soit M un ouvert qui contient Ω_c tel que $\bar{M}$ soit une variété à bord contenue dans Ω dont le bord (∂M) est orienté par la normale extérieure. Soit (α_ε) un noyau positif de régularisation classique défini dans $\mathbf{C}^n$ et η une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans M identiquement égale à -1 dans un voisinage de Ω_c. Quitte à remplacer φ par $\sup\{\varphi * \alpha_{\varepsilon^2} + \varepsilon\eta, \varphi\}$ pour ε assez petit, on peut suposer que φ est continue strictement plurisousharmonique dans un voisinage de $\bar{M}$ et $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de ∂M qui est relativement compact dans Ω et qui ne rencontre pas Ω_c.

Posons $\varphi_n=\sup\{\varphi-c-1/n, 0\}$. Puisque φ est strictement plurisousharmonique il en résulte qu'il existe un nombre $a>0$ indépendant de n tel que $dd^c\varphi_n(z)\geq a\, dd^c\|z\|^2$ pour tout $z\in\bar{M}\setminus\Omega_{c+1/n}$.

Pour ε_n assez petit $f_n=\varphi_n*\alpha_{\varepsilon_n}$ est une fonction plurisousharmonique, nulle au voisinage de Ω_c telle que

$$dd^c f_n(z)\geq\frac{a}{2}dd^c\|z\|^2 \quad \text{pour } z\in\bar{M}\setminus\Omega_{c+2/n}.$$

De plus on peut choisir ε_n assez petit de sorte que (f_n) converge uniformément pour la topologie $\mathscr{C}^2$ vers $\varphi-c$ dans V.

Soit p la dimension de T. Pour n fixé et ε' assez petit la forme $\psi_{n,\varepsilon'}=f_n(T*\alpha_{\varepsilon'})\wedge\beta^{p-1}$ est définie dans un voisinage de $\bar{M}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si ε' est assez petit $T*\alpha_{\varepsilon'}$ serait fermé dans un voisinage de $\bar{M}\cap(\text{Support } f_n)$ il en résulte que $dd^c\psi_{n,\varepsilon'}=T*\alpha_{\varepsilon'}\wedge\beta^{p-1}\wedge dd^c f_n$ est une forme $\mathscr{C}^\infty$ positive au voisinage de M. On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_M dd^c(\psi_{n,\varepsilon'}) &= \lim_{\varepsilon'\to 0}\int T*\alpha_{\varepsilon'}\wedge\beta^{p-1}\wedge dd^c f_n\\ &\geq\frac{a}{2}\int_{M\setminus\Omega_{c+2/n}} T\wedge\beta^p.\end{aligned}$$

D'autre part soit χ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ valant 1 au voisinage de ∂M et à support inclus dans V. D'aprés la formule de Stokes on a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_M dd^c\psi_{n,\varepsilon'} &= \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\partial M} d^c\psi_{n,\varepsilon'}\\ &=\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\partial M} d^c(\chi\psi_{n,\varepsilon'})\\ &=\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_M T*\alpha_{\varepsilon'}\wedge\beta^{p-1}\wedge dd^c(f_n X).\end{aligned}$$

Puisque $f_n\chi$ converge pour la topologie $\mathscr{C}^2$ vers $(\varphi-c)\chi$ et $T*\alpha_{\varepsilon'}$ converge faiblement vers T, il en résulte l'existence d'une constante $0<c'<+\infty$ indépendante de ε' et de n telle qu'on ait

$$\int_M T*\alpha_{\varepsilon'}\wedge\beta^{p-1}\wedge dd^c(f_n\chi)\leq c'\|T\|_{(\text{support}\chi)}.$$

D'où en définitive on a pour tout n assez grand

$$\frac{a}{2}\int_{M\setminus\Omega_{c+2/n}} T\wedge\beta^p \leqslant c'\|T\|_{(\text{support}\,\chi)}. \tag{I}$$

Ce qui prouve que T est de masse finie au voisinage de Ω_c.

Remarque. (2) La finitude de la masse suffit pour dire que T se prolonge en un courant positif sur Ω.

(2) L'inégalité (I) montre si T est défini dans Ω et support de T est compact alors $T=0$. Cette propriété découle aussi de la formule du type Lelong-Jensen démontré récemment par Henri Skoda [28].

(3) Si on remplace Ω_c par un compact K quelconque de Ω alors T n'est pas en général de masse finie comme le montre l'exemple simple suivant.

Dans $\mathbf{C}^2$ considérons $K=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2;\ z_2=0$ et $|z_1|=0$ ou $|z_1|=1/n,\ n\in\mathbf{N}^+\}$. Posons T_n=le courant d'intégration sur l'ensemble analytique de $\mathbf{C}^2\setminus K$ défini par $\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2,\ z_2=0$ et $1/(n+1)<|z_1|<1/n\}$. Le courant $T=\Sigma_n n^2T_n$ est positif fermé dans $\mathbf{C}^2\setminus K$ de masse non bornée au voisinage de K.

THÉORÈME IV.2. *Soit A un ensemble fermé pluripolaire complet dans un ouvert strictement pseudo convexe Ω de $\mathbf{C}^n$ et K un compact inclus dans A. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus K$ tel que $T|_{A\setminus K}=0$. Alors T se prolonge en un courant positif fermé dans Ω.*

Démonstration. 1$^{\text{re}}$ *étape*. Montrons que T est de masse finie au voisinage de K. Soit u' une fonction plurisousharmonique dans Ω telle que $A=\{z\in\Omega; u'(z)=-\infty\}$. Quitte à se restreindre à un ouvert $\Omega'\subset\subset\Omega$ strictement pseudo convexe contenant K on peut supposer qu'il existe une fonction u plurisousharmonique dans Ω' vérifiant

(1) $A\cap\Omega'=\{z\in\Omega'; u(z)=-\infty\}$

(2) e^{-u} est continue dans Ω' et $u\leqslant 0$ dans Ω'.

Pour la construction de u (cf. Proposition II.2).

Soit φ une fonction strictement plurisousharmonique continue et exhaustive dans Ω' et c un nombre réel vérifiant $c=\sup\{\varphi(z), z\in K\}$.

Considérons

$$u_n=\sup\left(\varphi-c-\frac{1}{n},\ e^{(1/n)u+\|z\|^2}-\frac{1}{n},\ 0\right).$$

Puisque φ est exhaustive il en résulte qu'il existe $\Omega''\subset\subset\Omega'$ tel que $u_n=\varphi-c-1/n$ sur $\Omega'\setminus\Omega''$ pour tout n. Considérons $K_n=\{z\in\Omega'; u_n(z)=0\}$. D'après la démonstration de la proposition IV.1, il existe une constante C indépendante de n telle que $\|T\|_{\Omega'\setminus K_n}<C$. Ce qui montre que $\|T\|_{\Omega'\setminus A\cap\{z\in\Omega;\varphi(z)\leq c\}}$ est fini. Or on a $\|T\|_{A\setminus K}=0$. En définitive on a $\|T\|_{\Omega'\setminus K}$ est fini.

2[e] *étape*. Construction du prolongement. Soit $T'=T|_{\Omega\setminus A}$. D'après la première étape T' est de masse localement finie au voisinage de chaque point de A. D'après le théorème II.1 l'extension triviale $\tilde{T}'$, de T' par zéro au dessus de A est un courant positif fermé dans Ω. Puisque $T|_{A\setminus K}=0$ il en résulte que $\tilde{T}'$ coïncide avec l'extension triviale $\tilde{T}$ (qui existe d'après le première étape) de T par zéro au-dessus de A, donc $\tilde{T}$ est un courant positif fermé dans Ω qui coïncide avec T sur $\Omega\setminus K$.

COROLLAIRE IV.3. *Soit K un compact pluripolaire complet dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Soit T un courant positif fermé dans $\Omega\setminus K$.*

Alors T se prolonge en un courant positif fermé dans Ω.

Démonstration. En vertu du théorème IV.2 ci-dessus il suffit de montrer qu'il existe un ouvert Ω' strictement pseudo-convexe tel qu'on ait : $K\subset\subset\Omega'\subset\subset\Omega$. Soit u une fonction plurisousharmonique dans Ω telle qu'on ait :

$$K=\{z\in\Omega; u(z)=-\infty\}.$$

Soit Ω'' un ouvert relativement compact dans $\{z\in\Omega; u(z)<0\}$ tel que $K\subset\Omega''$. Pour tout $\xi\in\partial\Omega''$ (bord de Ω'') il existe un entier n tel que $(1/n)\,u(\xi)>-1$. Pour ε assez petit $((1/n)\,u)*\alpha_\varepsilon=u_\xi$ est une fonction continue et vérifie $u_\xi<-2$ sur K alors que $u_\xi>-1$ dans un voisinage V_ξ de ξ. Puisque $\partial\Omega''$ est compact il existe donc un entier N tel que

$$\varphi=\sup\{u_{\xi_i};\ i=1,\dots,N\}+1$$

est plurisousharmonique dans Ω'', positive au voisinage de $\partial\Omega''$ et $\varphi(z)<-1$ pour tout $z\in K$. Pour $a>0$ assez petit, $\{z\in\Omega''; \varphi(z)+a\|z\|^2<-1/2\}$ est un ouvert pseudo-convexe contenant K.

Ce corollaire et le théorème sont d'autant plus importants qu'on sait aujourd'hui construire plusieurs exemples d'ensembles pluripolaires complets et compacts. En exploitant une idée de A. Sadullaev [cf. 23] on va construire un ensemble A pluripolaire complet compact dans C^2 tel que sa mesure de Hausdorff de dimension 2 est infinie. En effet soit K un compact polynomialement convexe contenu dans le disque Δ de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{C}$. Soit K_n une suite de compacts polynomialement convexes contenus dans Δ tel que $\mathring{K}_n \supset K_{n+1}$ et $K=\bigcap_n K_n$ et pour tout n il existe un polynôme P_n d'une variable tel que

$$|P_n(z)| \leq e^{-2} \quad \text{pour } z \in K_n$$

et

$$|P_n(z)| \geq e^2 \quad \text{pour } z \notin K_{n-1}.$$

Soit c_n une suite d'entiers qui croît rapidement vers $+\infty$ dans un sens qui va être précisé dans la suite. Posons

$$f(z) = \sum P_n^{c_n}(z) \quad \text{et} \quad A_1 = \{(z, \omega) \in \mathbf{C}^2;\ z \in K \text{ et } \omega = f(z)\}.$$

Pour un choix convenable de la suite (c_n), le compact A_1 sera pluripolaire complet. En effet posons $c_1=1$, et par récurrence supposons qu'on ait choisi $c_1, \ldots, c_n$, considérons alors :

$$f_n(z, \omega) = \sum_{i=1}^{n} P_i^{c_i} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sup\{\log|f_n(z)-\omega|;\ (z, \omega) \in \Delta\times\Delta\}.$$

On choisit c_{n+1} un entier tel que $c_{n+1} \geq 2^{n+1}\sup(c_1, \ldots, c_n, \alpha_n)$. La suite c_n étant ainsi déterminée, posons :

$$\varrho_n(z, \omega) = \sup\left\{\frac{1}{2^n\alpha_n}(\log|f_n(z)-\omega|-\alpha_n), -1\right\}.$$

Les fonctions ϱ_n sont plurisousharmoniques négatives dans $\Delta\times\Delta$. Si $(z, \omega) \in A_1$ on a $|f_n(z)-\omega| = |f_n(z)-f(z)| \leq \Sigma_{k>n}\, e^{-2c_k}$. Puisque $c_{k+1} \geq 2^{k+1}c_k$ et $c_{n+1} \geq 2^{n+1}\alpha_n$, il en résulte que

$$|f_n(z)-\omega| \leq e^{-2^{n+1}\alpha_n}$$

donc $\varrho_n(z, \omega) = -1$ pour tout n. Ainsi la fonction $\varrho(z, \omega) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\varrho_n(z, \omega)$ vaut $-\infty$ sur A_1.

Si $z \notin K$ et $\omega \in \Delta$ alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $z \notin K_{n-1}$ pour $n \geq N$ on a donc

$$|f_n(z, \omega)| \geq |P_n(z)|^{c_n} - |f_{n-1}(z)-\omega| \geq e^{2^n\alpha_{n-1}} - e^{\alpha_{n-1}} \geq 1$$

d'où $\varrho_n(z, \omega) \geq -1/2^n$ ce qui implique que $\varrho(z, \omega) > -\infty$.

Si $z\in K$ et $\omega \neq f(z)$ et en remarquant que f_n converge vers f uniformément sur K on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N\in\mathbf{N}$ tels qu'on ait $|f_n(z)-\omega|>\varepsilon$ pour $n>N$ et donc $\varrho(z,\omega)>-\infty$.

En définitive $\varrho(z,\omega)$ est plurisousharmonique et vérifie

$$A_1=\{(z,\omega)\in\Delta\times\Delta;\ \varrho(z,\omega)=-\infty\}.$$

Remarques. (1) A_1 étant pluripolaire complet et compact dans $\Delta\times\Delta$ il en résulte que A_1 est pluripolaire complet dans tout ouvert le contenant.

(2) Si le disque $\Delta(1/2)$ de centre l'origine et de rayon 1/2 est contenu dans K alors f est holomorphe sur $\Delta(1/2)$ et par conséquent $A_1\cap\Delta(1/2)\times\Delta$ est une variété analytique complexe.

(3) Dans les conditions de (2) ci-dessus A_1 ne peut pas être contenu dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques X_n de $\Delta\times\Delta$. En effet si pour un sous-ensemble B de $\mathbf{C}^n$ et $\lambda>0$ on pose $H_\lambda(B)$ la mesure de Hausdorff λ-dimensionnel de B (cf. 16); on aurait d'après la 2^e remarque $H_2(A_1)>0$. Si $A\subset\bigcup_n X_n$ il existe un indice n_0 tel que $H_2(A\cap X_{n_0})>0$ et donc $\varrho=-\infty$ sur X_{n_0} d'où X_{n_0} est compact dans $\Delta\times\Delta$, il est donc de codimension 2 ce qui contredit $H_2(A\cap X_{n_0})>0$.

(4) Soit A_1 comme la deuxième remarque et v un vecteur de $\mathbf{C}^2$ (transverse à $A_1\cap\Delta(1/2)\times\Delta$) tel que $|v|<\operatorname{dis}(K, \complement_{\mathbf{C}^2}\Delta\times\Delta)$. Alors modulo la proposition IV.4 ci-dessous $A=A_1\bigcup_{n=1}^{\infty}\{A_1+v/n\}$ est compact pluripolaire complet vérifiant $H_2(A)=\infty$.

PROPOSIITON IV.4. *Soit A_n une suite de sous-ensembles fermés pluripolaire complets dans un ouvert Ω telle que $A=\bigcup_n A_n$ est fermé dans Ω. Quitte à se restreindre à un ouvert $\Omega'\subset\subset\Omega$ alors A est pluripolaire complet dans Ω'.*

Démonstration. D'après la démonstration de la proposition II.2 pour tout n il existe une fonction v_n plurisousharmonique négative dans Ω' telle qu'on ait

(1) e^{v_n} est continue dans Ω'

(2) $A_n\cap\Omega=\{z\in\Omega';\, v_n(z)=-\infty\}$.

Soit K_n une suite de compacts $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$ et $\Omega\setminus A=\bigcup_n A_n$. Soit $a_n=\sup\{|v_n(z)|;\ z\in K_n\}$. Posons

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n a_n}\,v_n(z).$$

La fonction v est plurisousharmonique dans Ω' continue dans $\Omega'\setminus A$ et on a $\Omega'\cap A=\{z\in\Omega';\ v(z)=-\infty\}$.

Nous terminons ce travail par un exemple simple qui montre qu'un sous-ensemble fermé localement pluripolaire complet dans un ouvert Ω n'est pas en général globalement pluripolaire complet. Soit $B=\{z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2;\ |z_1|=1$ et $z_2=0\}$ et $\Omega=\mathbf{C}^2 \setminus B$. Considérons $A=\{(z_1, z_2) \in M;\ |z_1|>1$ et $z_2=0\}$. C'est un sous-ensemble analytique de Ω mais toute fonction v pluriosusharmonique dans Ω, valant $-\infty$ sur A vérifie $v(0)=-\infty$ car elle se prolonge en une fonction plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^2$.

Bibliographie

[1] BECKER, J., Continuing analytic sets across $\mathbf{R}^n$. *Math. Ann.*, 195 (1972), 103–106.
[2] BEDFORD, E., Extremal plurisubharmonic functions and pluripolar sets. *Math. Ann.*, 249 (1980), 205–223.
[3] — The operator $(dd^c)^n$ on complex space. *Lecture notes in Mathematics*. 919. *Séminaire P. Lelong et H. Skoda* (1981), p. 294–323.
[4] BEDFORD, E. & TAYLOR, A., The Dirichlet problem for complex Monge Amère equation. *Invent. Math.*, 37 (1976), 1–44.
[5] BISHOP, E., Condition for analyticity of certain sets. *Michigan Math. J.*, 11 (1964), 289–304.
[6] CHERN, S. S., LEVINE, H. I. & NIRENBERG, L., Intrinsic norms on a complex manifold, in *Global analysis, papers in honor of K. Kodaïra*. Princeton, U.P. (1969), p. 119–139.
[7] CIRKA, E.-M., On removable singularities of analytic sets. *Soviet Math. Dokl.*, 20 (1979), 965–968.
[8] DEMAILLY, J.-P., Formule de Jensen en plusieurs variables et applications artihmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 110 (1982), 75–102.
[9] EL MIR, H., Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires. *Séminarie P. Lelong et H. Skoda. Springer Lecture Notes*, 822 (1980), p. 61–76.
[10] — Sur le prolongement des courants positifs fermés à travers des sous-variétés réelles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 295 (1982), 419–422.
[11] — Sur le prolongement des courants positifs fermés de masse finie. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 294 (1982), 181–184.
[12] FUNAHASHI, K., On the extension of analytic sets. *Proc. Japan Acad. Ser. A* (1978), 24–26.
[13] GREEN, R. E. & WU, H., $\mathscr{C}^\infty$ approximations of convex subharmonic and plurisubharmonic functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 12 (1979), 47–84.
[14] HARVEY, R. & WELLS, R. O. JR, Zero sets of non negative strictly plurisubharmonic functions. *Math. Ann.*, 201 (1973), 165–170.
[15] HARVEY, R., Removable singularities for positives currents. *Amer. J. Math.*, 96 (1974), 67–78.
[16] HARVEY, R. & POLKING, J., Extending analytic objets. *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 701–727.
[17] LELONG, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 239–262.
[18] — Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). *Séminaire de Mathématiques supérieures*, eté 1967, n° 28. Montréal, les presses de l'Université de Montréal (1968).
[19] — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*. Paris, Londres, New York, Gordon and Breach, Dunod (1968).
[20] — Un théorème de support pour certains courants. *Séminaire P. Lelong (analyse)*, 1972–73, *Lecture Notes in Mathematics*, 470. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1974), p. 97–106.

[21] — Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques réelles. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 11 (1961), 263–303.

[22] REMMERT, R., STEIN, K., Über die wesentlichen singularitäten analytischer Mengen. *Math. Ann.*, 126 (1953), 263–306.

[23] SADULEV, A., *P*-regularity of sets in $\mathbf{C}^n$, in *Analytic functions* 1979. *Springer Lecture Notes,* 798 (1980), p. 402–408.

[24] SCHIFFMAN, B., On the continuation of analytics sets. *Math. Ann.*, 185 (1970), 1–12.

[25] SIU, Y. T., Analytic of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, 27 (1974), 53–156.

[26] — Extension of meromorphic map into Kähler manifolds. *Ann. of Math.*, 102 (1975), 421–462.

[27] SKODA, H., Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. *Bull. Soc. Math. France,* 104 (1976), 225–299.

[28] — Prolongement des courants positifs fermés de masse finie. *Invent. Math.* 66 (1982), 361–376.

[29] THULLEN, P., Über die wesentlichen singularitäten analytischer Funktionen und Flachen im Raume von n komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 111 (1935), 137–157.

[30] WALSH, J. B., Continuity of envelops of plurisubharmonic functions. *J. Math. Mechanics,* 18 (1968), 143–148.

Reçu le 18 mars 1983