

Une caractérisation kählérienne des surfaces rationnellement convexes

par

JULIEN DUVAL

*Université Paul Sabatier
Toulouse, France*

0. Introduction

On considère des surfaces (de dimension réelle 2) plongées dans \mathbf{C}^n , lisses, compactes et totalement réelles, i.e. nulle part tangentes à une droite complexe. Elles peuvent être à bord, non connexes ou non orientables.

Une surface S est *rationnellement convexe* si son complémentaire est rempli par des hypersurfaces algébriques [16]. Cela permet d'approcher uniformément les fonctions continues sur la surface par les fractions rationnelles à pôles hors de S (généralisation du théorème de Runge due à Oka–Weil [12] puis à Nirenberg–Wells [11] par exemple pour les sous-variétés totalement réelles).

Rappelons qu'une forme de Kähler sur \mathbf{C}^n est une forme fermée de bidegré 1,1 strictement positive. On peut encore l'écrire sous la forme $i\partial\bar{\partial}\phi$ où ϕ est une fonction strictement plurisousharmonique. La surface S est *isotrope* pour une forme de Kähler si elle l'annule. Elle est alors nécessairement totalement réelle par positivité de la forme de Kähler par rapport à la structure complexe.

Voici le lien entre ces deux notions :

THÉORÈME 1. — *Soit S une surface totalement réelle de \mathbf{C}^n . On a l'équivalence entre :*

- (i) *la surface S est rationnellement convexe ;*
- (ii) *il existe une forme de Kähler ω sur \mathbf{C}^n pour laquelle S est isotrope.*

L'implication (i) \Rightarrow (ii) figurait dans [4] tandis que [3] traitait un cas particulier de l'autre implication (pour $n=2$ et la forme standard). La démonstration du cas général reprend les idées de [3] en les simplifiant. En voici le schéma.

Il s'agit de construire assez d'hypersurfaces dans le complémentaire d'une surface S isotrope pour une forme de Kähler ω . Pour cela, on approche ω par une hypersurface

algébrique H au sens des courants par un résultat de Lelong [9], [10] dont l'idée remonte essentiellement à Oka (voir aussi Bremermann [1] et Sibony [14]). L'isotropie de S se traduit par le fait que l'intersection homologique de l'hypersurface avec des petits disques de la surface va être nulle ou presque, i.e. négligeable devant son intersection géométrique. On peut alors déformer un peu H de sorte qu'en toutes ses intersections avec la surface passent deux branches de l'hypersurface de signes d'intersection opposés. On désingularise en chacun de ces points la réunion des deux branches pour obtenir une nouvelle hypersurface proche de H évitant S .

En dualisant le théorème à la manière de la caractérisation des variétés compactes complexes non Kähler par Harvey–Lawson [7] (cf. aussi Sullivan [17]), on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soit S une surface totalement réelle. On a l'équivalence entre :*

- (i) *la surface S n'est pas rationnellement convexe ;*
- (ii) *il existe un courant non trivial T positif, à support compact, de bidimension $1, 1$, qui est somme d'un courant porté par S et d'une $(1, 1)$ -composante d'un bord.*

En fait, si un tel courant T existe, son support sort nécessairement de la surface et est dans l'enveloppe convexe rationnelle de S , i.e. dans l'ensemble des points par lesquels ne passe aucune hypersurface algébrique évitant la surface.

Cette formulation est intéressante dans le sens où elle généralise directement l'obstruction habituelle à la convexité rationnelle qui est la présence d'un disque holomorphe D s'appuyant sur S et dont le bord ∂D borde dans S [15]. Ce disque définit un courant d'intégration satisfaisant les hypothèses du (ii). Ce corollaire est également à rapprocher de deux résultats de nature plus précise car produisant des courbes holomorphes au lieu de courants, mais cette fois dans des enveloppes convexes polynômiales (cf. [16] ou le §4 (c) pour une définition) : le fait qu'une courbe réelle non polynômialement convexe borde une courbe holomorphe (Wermer [18]) ou l'existence d'un disque holomorphe s'appuyant sur un tore lagrangien pour une forme de Kähler de \mathbf{C}^2 (Gromov [6]).

Une voie possible pour approcher une forme de Kähler ω par des hypersurfaces algébriques est de généraliser la formule de Crofton [13] en exprimant ω comme une intégrale de courants d'intégration, puis de discrétiser cette intégrale. Une telle formule intégrale existe, répondant dans le cas des formes de Kähler à une question de Sullivan [17]. Elle peut donner lieu à une démonstration légèrement différente du théorème 1. Voici un énoncé précis :

THÉOREME 2. — *Soit ω une forme de Kähler sur \mathbf{C}^n et B une boule de \mathbf{C}^n . Il existe un plongement polynômial P de \mathbf{C}^n dans un espace projectif \mathbf{CP}^m et une fonction*

f lisse et positive sur l'espace \mathbf{H}^n des hyperplans affines complexes de \mathbf{C}^n tels que l'on ait l'égalité au sens des courants sur B

$$\omega = \int_{\mathbf{H}^n} [H]f(H) dH + \int_{\mathbf{H}^m} [P^{-1}(H)] dH$$

où \mathbf{H}^m est l'espace des hyperplans projectifs de \mathbf{CP}^m et dH une mesure invariante par les isométries dans les deux cas.

La première intégrale est une déformation de la forme standard sur \mathbf{C}^n qui correspond par la formule de Crofton au cas où f est constante, tandis que la deuxième, toujours par la formule de Crofton, est proportionnelle à $P^*\omega_0$ où ω_0 est la forme de Fubini–Study. La démonstration de ce résultat repose sur une amélioration du résultat de Lelong [9] communiquée à l'auteur par J.-P. Demailly (cf. lemme 6, §3) ainsi que sur la formule d'inversion de la transformée de Radon complexe [5].

Voici comment s'organise ce texte : dans le premier paragraphe on montre la convexité rationnelle des surfaces isotropes, le deuxième est consacré à la preuve du corollaire tandis que la formule intégrale pour les formes de Kähler fait l'objet du troisième. Pour finir, on aborde dans la quatrième paragraphe quelques questions ouvertes.

Remerciements. — Je ne saurais trop remercier Daniel Bennequin, à l'origine de toute cette étude, Jean-Pierre Demailly et Nessim Sibony qui m'ont guidé dans les voies de cette preuve ainsi qu'Emmanuel Giroux qui m'a dévoilé les charmes de la formule de Crofton. J'aimerais également témoigner ma reconnaissance à Yasha Eliashberg, Wilhelm Klingenberg et l'Université de Stanford pour leur hospitalité propice à l'éclosion de ce texte. Je remercie enfin le referee de ses précisions bibliographiques.

1. Convexité rationnelle d'une surface isotrope

On se fixe une surface S , une forme de Kähler ω pour laquelle S est isotrope et un point x du complémentaire de S . Il s'agit de construire une hypersurface algébrique passant par x évitant S . Pour cela, il est bon de savoir déformer des hypersurfaces algébriques pour réduire leur intersection avec la surface.

(a) Déformations d'hypersurfaces

Une hypersurface algébrique sera dite *transverse* à S si chacune de ses branches est lisse et transverse à la surface en ses points d'intersection avec S . Si on se donne une orientation locale de la surface près d'un de ces points, on peut associer à chaque branche y passant

un signe d'intersection. Dans toute la suite, les hypersurfaces utilisées seront algébriques et transverses à S , on ne le précisera plus.

Voici un procédé d'élimination d'intersections (cf. [3], proposition 1) :

LEMME 1. — *Soit H une hypersurface qui coupe S en s localement par deux branches de signes opposés. On peut déformer H en une hypersurface évitant s sans changer les intersections orientées avec le reste de la surface. Si H passe par x , on peut faire en sorte que la déformée y passe encore.*

Démonstration. — Notons ($P=0$) l'équation de H , et L un polynôme d'interpolation de Lagrange, nul en x et aux points d'intersection de H avec le reste de la surface. On va fixer sa valeur en s pour que la déformée ($P+\varepsilon L=0$) évite un voisinage de s pour ε petit. Localement près de s , si on choisit des coordonnées complexes commençant par des équations adéquates des deux branches de H , le polynôme P s'écrit $z_1 z_2 f$ et S se projette dans le plan des $z_1 z_2$ sur une surface tangente au plan $z_2 = \bar{z}_1 + a z_1$ avec $|a| < 1$ du fait des signes opposés d'intersection. On en déduit par un développement limité que

$$\operatorname{Re}((z_1 z_2 f(z))/L(z) + \varepsilon) \geq \varepsilon + (1 - |a|)|z_1|^2 - O(|z_1|^3)$$

au voisinage de 0 sur la surface, si on prend $L(s) = f(0)$. Donc la déformée de H évite la surface près de s et, en fixant ε assez petit, on évite l'apparition de nouvelles intersections non voulues. \square

On va maintenant préciser comment déformer des hypersurfaces de façon à faire coïncider des intersections de signes opposés.

Définition. — Considérons une branche d'une hypersurface, s_1, \dots, s_m les intersections de la branche avec la surface et D_1, \dots, D_m les disques de rayon r ($r > 0$) centrés en ces points sur S . La branche sera dite r -souple si ces disques sont disjoints et si, pour tout choix d'un point t_i dans chacun des disques D_i , on peut déformer la branche pour que ses intersections avec S soient exactement les points t_i , les signes d'intersection étant conservés. On dira qu'une hypersurface est r -souple si toutes ses branches le sont. Si, de plus, l'hypersurface passait par x , on demande que ses déformées y passent encore.

Il existe beaucoup d'hypersurfaces souples. En effet, notons \mathbf{H} l'espace des hyperplans affines complexes (on dira simplement hyperplan dans la suite), \mathbf{T} celui des hyperplans non transverses à S et \mathbf{H}_s celui des hyperplans passant par s .

LEMME 2. — (i) \mathbf{T} possède une base de voisinages dans \mathbf{H} dont l'intersection avec \mathbf{H}_s peut être rendue de mesure aussi petite que l'on veut, uniformément en s sur la surface.

(ii) Si on se donne un voisinage de \mathbf{T} , il existe une constante r telle que les hyperplans hors de ce voisinage soient r -souples.

Démonstration. — Pour le (i), on va montrer que l'intersection de \mathbf{T} avec \mathbf{H}_s est de mesure nulle, le passage à la conclusion étant sans difficulté et laissé au lecteur. On remarque d'abord que, pour des raisons de dimension, les $(n-2)$ -plans complexes n'intersectant S qu'en s sont de mesure pleine parmi tous ceux passant par s . Il suffit donc de voir que, si P est un tel plan ne rencontrant S qu'en s , l'intersection de \mathbf{T} avec \mathbf{H}_P est de mesure nulle dans l'espace \mathbf{H}_P des hyperplans contenant P . Or ceci résulte du théorème de Sard, car cette intersection coïncide avec les valeurs critiques de l'application de S privée de s dans \mathbf{H}_P envoyant un point t sur l'hyperplan engendré par t et P , si on oublie le cercle des hyperplans contenant P non transverses à S en s .

Regardons le (ii) (cf. [3], lemme 4). Le fait d'être hors d'un voisinage de \mathbf{T} fournit des bornes a priori sur le nombre des points d'intersection s_i d'un hyperplan avec la surface, ainsi que sur le minimum de leurs distances mutuelles. Si, par exemple, $(z_1=0)$ était l'équation de l'hyperplan, sa déformée passant par les t_i s'écrira $(z_1=L(z_2, \dots, z_n))$ où L est un polynôme de Lagrange. Les bornes a priori donnent un contrôle de la taille de L en fonction du maximum des distances de s_i à t_i , donc de r et permettent d'éviter la création d'intersections non voulues avec S si r est assez petit. \square

Remarques. — (i) Ce lemme reste vrai pour une surface plongée dans un espace projectif en remplaçant les hyperplans affines par les hyperplans projectifs, la notion de souplesse étant définie de manière analogue.

(ii) On déduit du lemme l'existence d'une constante r fixée dans la suite telle qu'en tout point de la surface passent deux hyperplans $2r$ -souples la coupant avec des signes opposés. En effet, si on choisit en tout point de la surface une orientation locale, on peut définir l'espace \mathbf{H}_s^+ (resp. \mathbf{H}_s^-) des hyperplans coupant positivement (resp. négativement) la surface en s . Comme la surface est totalement réelle, on remarque que ces deux espaces sont de mesure non nulle, minorée uniformément en s sur la surface. Par le lemme, on peut donc trouver un voisinage de \mathbf{T} dont le complémentaire rencontre à la fois \mathbf{H}_s^+ et \mathbf{H}_s^- en tout point de S et r n'est autre que la moitié de la constante associée par le lemme à ce voisinage.

(b) Construction d'une hypersurface par x évitant la surface

Fixons une triangulation (τ) de la surface dont les triangles sont de diamètre plus petit que r . On se donne une orientation pour chaque triangle, ainsi que deux hyperplans $2r$ -souples le coupant positivement et négativement. On appelle H_0 l'union de ces hyperplans, on peut toujours supposer que H_0 passe par x et évite les bords des triangles.

Voici quelques notations supplémentaires. Appelons, pour une hypersurface H_j évitant les bords des triangles, $p_j(\tau)$ (resp. $n_j(\tau)$) le nombre de branches de H_j coupant τ positivement (resp. négativement). La différence $i_j = p_j - n_j$ est en fait un cobord de la cohomologie simpliciale $C^2(S, \mathbf{Z})$ car une hypersurface intersecte toute composante fermée orientable de S trivialement en homologie. Comme le cobord $\partial: C^1(S, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Im}(\partial)$ admet une section linéaire, il existe une constante α plus petite que $\frac{1}{4}$ telle qu'étant donné un cobord b on puisse toujours trouver une 1-cochaîne c vérifiant $\partial c = b$ avec un contrôle du type $\|c\| \leq (4\alpha)^{-1} \|b\|$, où $\|c\| = \sup_{\text{arêtes}} |c(a)|$ et $\|b\| = \sup_{\text{triangles}} |b(\tau)|$. Finalement, pour un entier relatif u , on note $u^+ = \sup(0, u)$ et $u^- = \sup(0, -u)$.

Avec ces notations, on a les résultats suivants :

LEMME 3. — *Il existe une hypersurface H_1 et un entier k tels que*

$$\|ki_0^- - p_1\| + \|ki_0^+ - n_1\| < k\alpha.$$

LEMME 4. — *Il existe une hypersurface r -souple H_2 passant par x et vérifiant $n_2 > p_1$, $p_2 > n_1$ et $i_2 = -i_1$ pour tout triangle.*

Admettons provisoirement ces lemmes pour construire l'hypersurface par x évitant S . On peut déformer H_2 — qui est suffisamment souple — dans chacun des triangles de façon à faire coïncider chaque intersection positive (resp. négative) de H_1 avec une négative (resp. positive) de H_2 . On fait coïncider par déformation les intersections restantes de H_2 dans chaque triangle par paire d'une positive et d'une négative. En appliquant le lemme 1 à l'hypersurface réunion de H_1 et de la déformée de H_2 , on élimine toutes ses intersections avec la surface ce qui termine la démonstration car les déformées successives de H_2 passaient toutes par x . \square

Démonstration du lemme 4. — On va obtenir H_2 par déformation de k exemplaires de H_0 . Grâce au lemme 3, la somme $ki_0 + i_1$ peut s'exprimer comme un cobord d'une 1-cochaîne c avec $\|c\| < \frac{1}{4}k$. A cette cochaîne c on peut associer une déformation de kH_0 que l'on va décrire arête par arête. On se fixe une arête intérieure orientée a de la triangulation ainsi qu'une orientation de la surface près de a . Des deux triangles adjacents à a munis de cette orientation τ_1 et τ_2 , l'un, par exemple le premier, induit l'orientation donnée sur l'arête. La déformation consiste à faire passer $c(a)$ intersections orientées de τ_1 vers τ_2 . C'est possible car l'hypersurface kH_0 est suffisamment souple et possède assez d'intersections positives et négatives avec chaque triangle : le nombre maximal par triangle de branches susceptibles d'être déformées est majoré par $\sum_{\partial\tau} |c(a)| \leq 3\|c\| \leq \frac{3}{4}k$ tandis que le nombre minimal par triangle de branches positives comme de branches négatives est k . Pour une arête orientée du bord, on fixe l'orientation de son triangle

adjacent de façon compatible et on fait la déformation du triangle vers l'extérieur de la surface. On vérifie que l'hypersurface H_2 obtenue ainsi convient. \square

Démonstration du lemme 3. — Comme H_0 est assez souple, on peut la déformer pour associer le maximum d'intersections par paires de signe opposés et les éliminer par le lemme 1. On obtient une hypersurface \bar{H}_0 vérifiant $\bar{n}_0 = i_0^-$ et $\bar{p}_0 = i_0^+$. On lisse cette hypersurface en une forme ω_1 au sens où, si $(P=0)$ est l'équation de \bar{H}_0 , on pose $\omega_1 = if(P)dP \wedge d\bar{P}$ avec f positive, de masse 1 et à petit support autour de 0. Pour une constante A assez grande, la différence $A\omega - \omega_1$ est une forme de Kähler $\bar{\omega}$ sur une boule B contenant la surface S , qui induit une forme de signe constant sur chacun des triangles τ d'intégrale $-i_0(\tau)$. On va approcher en trois étapes $\bar{\omega}$ par une hypersurface pour conclure. On se donne ε .

La première étape consiste, en appliquant le lemme 6 (cf. §3), à approcher $\bar{\omega}$ uniformément à ε près sur la boule B par une forme $\omega' = (p/q)P^* \omega_0$ où P est un plongement polynômial de \mathbf{C}^n dans \mathbf{CP}^m , ω_0 la forme de Fubini–Study et p/q un rationnel.

Par la formule de Crofton, on peut exprimer ω' comme une intégrale de courants d'intégration $\int_{\mathbf{H}} [P^{-1}(H)] dH$ (notations du théorème 2) où dH est de masse totale p/q . Evaluée sur un triangle t de la surface, cette formule intégrale se traduit par l'égalité $\int_t \omega' = \int_{\mathbf{H}} i[P^{-1}(H), t] dH$, i étant l'intersection homologique.

La deuxième étape est de négliger dans cette intégrale un voisinage des hyperplans non transverses à $P(S)$ de façon à ne manipuler que des hypersurfaces assez souples. Pour cela, on choisit par le lemme 2 un voisinage \mathbf{V} de \mathbf{T} dont l'intersection avec les \mathbf{H}_s est de mesure plus petite que ε . Toujours par le lemme 2 et puisque P est un plongement, on en déduit l'existence de ρ tel que les hypersurfaces $P^{-1}(H)$ soient ρ -souples pour H hors de \mathbf{V} . On se fixe une triangulation (t) plus fine que la précédente en triangles de diamètre plus petit que ρ . Par le choix de \mathbf{V} , la différence $\int_t \omega' - \int_{\mathbf{H}-\mathbf{V}} i[P^{-1}(H), t] dH$ est petite, de l'ordre de $\varepsilon \text{aire}(t)$.

La troisième étape est la discrétisation simultanée de la formule de Crofton sur chacun des triangles t . Si on se donne un entier u , on considère pu hyperplans régulièrement répartis par rapport à la mesure dH dans \mathbf{H} . On note H_u la réunion des préimages par P de ceux de ces hyperplans qui sont dans $\mathbf{H}-\mathbf{V}$. Par convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale correspondante, on vérifie que l'on peut choisir u assez grand pour que les différences $(qu)^{-1}i_u - \int_t \omega'$ soient de l'ordre de $\varepsilon \text{aire}(t)$ pour tout triangle t . Comme H_u est ρ -souple, on remarque qu'on peut la déformer en une hypersurface H_1 vérifiant $p_1(t) = i_u^+(t)$ et $n_1(t) = i_u^-(t)$ pour tout triangle t . En sommant ces estimées sur les triangles t contenus dans τ , et comme ω est ε -proche d'une forme de signe constant sur τ , on obtient l'inégalité suivante $\|n_1 - ki_0^+\| + \|p_1 - ki_0^-\| < Ck\varepsilon$ où C ne dépend que de la triangulation (τ) et $k = qu$. Ceci conclut si on avait choisi ε assez petit au départ. \square

2. Caractérisation en termes de courants

Commençons par quelques notations. On appellera j le plongement de S dans \mathbf{C}^n . On écrira $C_{1,1}$ pour l'espace des courants réels à supports compacts de bidimension 1, 1 sur \mathbf{C}^n , dual de l'espace $C^{1,1}$ des formes réelles de bidegré 1, 1. De même on aura C_m , $C_m(S)$, C^m et $C^m(S)$ les espaces de courants réels de dimension m et de formes réelles de degré m sur \mathbf{C}^n ou sur la surface. Tous ces espaces sont réflexifs. On notera encore $C_{1,1}(S)$ les courants de $C_{1,1}$ supportés par S , i.e. ceux dans l'image de la composée $C_2(S) \xrightarrow{j^*} C_2 \rightarrow C_{1,1}$, $B_{1,1}$ les (1, 1)-composantes de bords, i.e. ceux dans l'image de la composée $C_3 \xrightarrow{d} C_2 \rightarrow C_{1,1}$ et $P_{1,1}$ les courants positifs de $C_{1,1}$, i.e. ceux qui sont positifs sur les formes positives. Pour finir, I désignera l'espace des formes de $C^{1,1}$ fermées (et donc exactes) pour lesquelles S est isotrope. On constate que la somme $C_{1,1}(S) + B_{1,1}$ est dans l'annulateur de I .

Montrons d'abord le sens (ii) \Rightarrow (i) du corollaire. Tout d'abord le support de T doit sortir de S . En effet, S étant totalement réelle, il existe une forme ϕ_S fermée de bidegré 1, 1 pour laquelle S est isotrope (donc dans I) strictement positive au voisinage de S (prendre $\phi_S = i\partial\bar{\partial}f$ où f coïncide avec le carré de la distance à S près de la surface [8]). De ce fait, si le support de T était contenu dans S , on aurait $T(\phi_S) > 0$ ce qui contredirait l'hypothèse que T est dans $C_{1,1}(S) + B_{1,1}$ donc dans l'annulateur de I . Ensuite le support de T est dans l'enveloppe rationnelle de S . En effet, si x n'est pas dans cette enveloppe, on peut définir une forme ϕ_x de I positive partout et strictement positive près de x ce qui conclut comme précédemment. Voyons la construction de ϕ_x : il existe une hypersurface algébrique ($P=0$) passant par x évitant S que l'on peut supposer lisse en x et tangente à l'hyperplan ($z_1=0$) par un changement de coordonnées. Donc les fonctions $P_1=P$, $P_2=P+\varepsilon z_2$, ..., $P_n=P+\varepsilon z_n$ sont indépendantes près de x et on vérifie que $\phi_x = i\sum_j f(P_j) dP_j \wedge d\bar{P}_j$ convient si ε est assez petit et f est une fonction positive non nulle en 0 et à petit support.

Remarque. — A ce stade, on peut redémontrer le sens (i) \Rightarrow (ii) du théorème 1 (cf. [4]). En effet, si la surface est rationnellement convexe, on construit directement une forme de Kähler pour laquelle S est isotrope en sommant ϕ_S , un nombre fini de ϕ_x qui apportent la positivité dans le reste d'une boule contenant S et un terme du type $i\partial\bar{\partial}f(|z|)$ pour la positivité en dehors de la boule.

Intéressons-nous maintenant au sens (i) \Rightarrow (ii) du corollaire (cf. [7]). L'hypothèse est précisément que $P_{1,1}$ ne rencontre la somme $C_{1,1}(S) + B_{1,1}$ qu'en 0 dans $C_{1,1}$. Considérons ψ une forme de $C^{1,1}$ strictement positive et K l'ensemble des courants positifs valant 1 sur ψ et à support dans une boule B fixée contenant S . On vérifie comme dans [7] que K est faiblement compact. Si on admet provisoirement que $C_{1,1}(S) + B_{1,1}$ est faiblement fermé, par le théorème de Hahn–Banach on récupère une forme ϕ de $C^{1,1}$ nulle sur $C_{1,1}(S) + B_{1,1}$

donc dans I et strictement positive sur K , donc sur la boule B . Par troncature du potentiel de ϕ , on peut supposer que le support de ϕ est compact. En lui ajoutant un terme de la forme $i\partial\bar{\partial}f(|z|)$ nul dans B et suffisamment positif en dehors, on obtient une forme de Kähler pour laquelle S est isotrope, ce qui conclut par le théorème 1.

La somme $C_{1,1}(S)+B_{1,1}$ est fermée car elle coïncide exactement avec l'annulateur de I , comme on le déduit du lemme suivant :

LEMME 5. — *Il existe un prolongement continu \sim des 2-formes exactes sur S vers les formes exactes de $C^{1,1}$.*

Soit alors un courant T dans l'annulateur de I , on construit un courant Σ dans $C_2(S)$ en posant $\Sigma(\phi)=T(\check{\phi})$ pour les 2-formes exactes de S et en prolongeant cette définition par le théorème de Hahn-Banach. Par construction, $B=T-j_*\Sigma$ s'annule sur les formes exactes de $C^{1,1}$ car, si ϕ est exacte, $\phi-\widetilde{j^*\phi}$ est dans I . Donc B est dans $B_{1,1}$ et T est bien dans la somme $C_{1,1}(S)+B_{1,1}$. \square

Démonstration du lemme 5. — Recouvrons un voisinage tubulaire de S d'un nombre fini d'ouverts (U_j) munis chacun d'une projection linéaire complexe $f_j:U_j\rightarrow\mathbf{C}$ dont la restriction à $U_j\cap S$ est un difféomorphisme sur son image. Considérons une partition de l'unité (g_j) associée au recouvrement $(U_j\cap S)$ de S que l'on étend en des fonctions à valeurs complexes, à supports dans les U_j et de sorte que la restriction à S de $\bar{\partial}g_j$ soit nulle, ce qui est possible car S est totalement réelle (cf. Hörmander-Wermer [8]). On considère maintenant une 2-forme ϕ exacte sur S . On peut lui associer une primitive λ dépendant continûment de ϕ . En restriction à l'intersection $U_j\cap S$, λ s'écrit $\text{Re } \bar{\partial}(h_j\circ f_j)$ grâce au lemme du $\bar{\partial}$, avec un contrôle continu de h_j en fonction de λ . On vérifie que ϕ coïncide avec la restriction à S de la forme $\text{Re } \partial\bar{\partial}[\sum_j g_j(h_j\circ f_j)]$, ce qui conclut. En fait, ce lemme est encore vrai par une autre méthode pour les surfaces quelconques. \square

On a bien les deux équivalences du théorème 1 et du corollaire du fait des implications montrées : S est rationnellement convexe \Rightarrow il n'existe pas de courant positif non trivial somme d'un courant porté par S et d'une $(1,1)$ -composante de bord \Rightarrow il existe une forme de Kähler pour laquelle S est isotrope $\Rightarrow S$ est rationnellement convexe.

3. Une formule intégrale pour les formes de Kähler

Rappelons qu'il s'agit de trouver, pour une forme de Kähler ω sur \mathbf{C}^n et une boule B données, une fonction f positive sur l'espace des hyperplans affines \mathbf{H} de \mathbf{C}^n et un plongement polynômial P de \mathbf{C}^n dans \mathbf{CP}^m tels que ω soit la somme d'un multiple de $P^*\omega_0$ et de ω_f sur B . Ici, ω_0 désigne toujours la forme de Fubini-Study sur \mathbf{CP}^m tandis que ω_f est l'intégrale de courants d'intégration $\int_{\mathbf{H}}[H]f(H)dH$.

Pour cela, on va montrer la densité des formes proportionnelles à $P^*\omega_0$ parmi les formes de Kähler et le fait que les formes ω_f y décrivent un ouvert. Plus précisément, ces propriétés vont se voir au niveau des potentiels des formes ω , i.e. des fonctions ϕ satisfaisant $i\partial\bar{\partial}\phi=\omega$:

LEMME 6 ([2]). — Soit ϕ une fonction lisse strictement plurisousharmonique au voisinage de B . Elle est limite, dans la topologie $C^k(B)$, d'expressions de la forme $f_{a,P}=a\text{Log}(\sum_i |P_i|^2)$, a étant un réel et les P_i des polynômes en nombre fini.

Ces expressions sont des potentiels de $aP^*\omega_0$ pour l'application polynômiale P de \mathbf{C}^n dans un espace projectif dont les composantes sont les P_i . On peut, en rajoutant si nécessaire les polynômes εz_i , toujours supposer que P est un plongement.

LEMME 7. — Soit ψ une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de B . Il existe une fonction g définie sur \mathbf{H} telle que $\omega_g=i\partial\bar{\partial}\psi$, avec un contrôle de la forme $\|g\|_\infty \leq \text{Cste} \|\psi\|_{C^{2n}(B)}$.

Si on admet ces deux lemmes, voici comment on conclut. Soit ϕ un potentiel de ω , c'est une fonction lisse strictement plurisousharmonique car ω est Kähler. On peut trouver ε tel que $\phi-\varepsilon|z|^2$ soit encore strictement plurisousharmonique sur la boule B . Par le lemme 6, il existe a et P tels que la différence $\psi=\phi-\varepsilon|z|^2-f_{a,P}$ soit plus petite que ε/Cste en norme $C^{2n}(B)$. Le lemme 7 permet d'obtenir g telle que ψ soit le potentiel de ω_g avec $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$. Autrement dit,

$$\omega_g = i\partial\bar{\partial}\psi = \omega - \omega_\varepsilon - aP^*\omega_0$$

et la forme ω s'écrit bien comme somme de $aP^*\omega_0$ et de $\omega_{(\varepsilon+g)}$ avec $\varepsilon+g$ positive. \square

Démonstration du lemme 6 ([2]). — Par un résultat de Lelong [9], on a la densité L^1_{Loc} des fonctions $f_{a,P}$ parmi les fonctions strictement plurisousharmoniques. On peut toujours supposer ces fonctions lisses, quitte à rajouter une petite composante constante à P . Notons E le cône des fonctions strictement plurisousharmoniques qui sont dans $C^k(B)$ muni de cette topologie. Par convolution, les fonctions de la forme $f_{a,P}*g_\varepsilon$, où g_ε est une suite régularisante, sont denses dans E . Or, comme les $f_{a,P}$ sont lisses, les intégrales de convolution sont approchées dans $C^k(B)$ par des sommes de Riemann de la forme $b\sum_j f_{a,P}(z-z_j)g_\varepsilon(z_j)$ les z_j étant dans le support de g_ε . En approchant les coefficients de cette somme par des rationnels, on en déduit que les fonctions de la forme $q^{-1}\sum_j n_j \text{Log}[\sum_i |P_i(z-z_j)|^2]$ sont denses dans E . Ces fonctions peuvent s'écrire encore $q^{-1}\text{Log}[\prod_j (\sum_i |P_i(z-z_j)|^2)^{n_j}]$ qui sont bien de la forme $f_{c,Q}$ en développant le produit. \square

Démonstration du lemme 7. — Prolongeons ψ au delà de la boule B en une fonction lisse ϕ à support dans la boule $2B$ avec un contrôle de $\|\phi\|_{C^{2n}(\mathbb{C}^n)}$ par $\|\psi\|_{C^{2n}(B)}$. Par la formule d'inversion de la transformée de Radon complexe [5], on a l'égalité suivante : $\phi(z) = \int_{\mathbf{H}^1} f(z+H) dH$ où \mathbf{H}^1 est l'espace projectif des hyperplans complexes linéaires de \mathbb{C}^n , dH la mesure normalisée invariante par l'action de U_n et f est la transformée de Radon de $\Delta^{n-1}\phi$, donc fait correspondre à un hyperplan affine complexe l'intégrale de $\Delta^{n-1}\phi$ sur cet hyperplan. On en déduit par dérivation l'égalité $i\partial\bar{\partial}\phi(z) = \int_{\mathbf{H}^1} i\partial\bar{\partial}f(z+H) dH$. Comme la fonction $f(z+H)$, l'hyperplan H étant fixé, ne dépend que de la coordonnée complexe z_H dans la direction orthogonale à H , on peut réécrire cette égalité comme suit : $i\partial\bar{\partial}\phi(z) = \int_{\mathbf{H}^1} g(z+H)(i dz_H \wedge d\bar{z}_H) dH$ où g est la fonction $\square f$, l'opérateur \square consistant à prendre le laplacien de f dans la direction complexe orthogonale à l'hyperplan où l'on se situe. On vérifie que g coïncide avec la transformée de Radon complexe de $\Delta^n\phi$ et que la dernière égalité traduit bien le fait que ϕ est un potentiel de ω_g . Ceci conclut car, par construction, $\|g\|_\infty$ est contrôlée par $\|\Delta^n\phi\|_\infty$ qui l'est par $\|\psi\|_{C^{2n}(B)}$. \square

4. Quelques questions ouvertes

(a) D'après [4], toute sous-variété totalement réelle rationnellement convexe est isotrope pour une forme de Kähler. Inversement, les sous-variétés isotropes de dimension supérieure — par exemple les sous-variétés lagrangiennes (de dimension 3) dans \mathbb{C}^3 — sont-elles rationnellement convexes ? Les intersections entre une hypersurface algébrique et une telle sous-variété deviennent alors importantes — au moins des courbes réelles — donc plus difficiles à éliminer. Cependant il n'existe, à ma connaissance, pas encore de contre-exemple.

(b) Peut-on avoir des renseignements plus précis sur l'enveloppe convexe rationnelle d'une surface non convexe ? Peut-on, par exemple, assurer l'existence d'une courbe holomorphe s'appuyant sur la surface avec un bord homologue à zéro, quitte à rajouter des hypothèses sur la surface ?

(c) Une surface est dite *polynômialement convexe* si son complémentaire est rempli d'hypersurfaces algébriques que l'on peut déformer continûment jusqu'à l'infini. On peut voir, pour une telle surface S , qu'il n'existe pas de courant positif à support compact non trivial dont le bord est porté par S . Du point de vue dual des formes, cela se traduit par le fait qu'il existe une forme de Kähler pour laquelle S est isotrope exacte — i.e. cette forme admet une primitive globale exacte sur S .

Cependant l'exemple d'un disque lagrangien de \mathbb{C}^2 non polynômialement convexe [3] montre que cette propriété n'est pas suffisante pour assurer la convexité polynômiale.

Est-il possible de caractériser géométriquement les surfaces polynômialement convexes ?

(d) Restreignons-nous aux tores T totalement réels rationnellement convexes dans le plan complexe \mathbf{C}^2 . On peut préciser un peu le théorème d'approximation des fonctions continues sur T par des fractions rationnelles en localisant a priori tous les pôles des fractions approchantes sur une courbe algébrique A évitant T , appelée la courbe d'approximation. Il n'y a pas unicité de A , mais l'étude de la géométrie de la paire (T, A) semble intéressante.

Remarquons tout d'abord que T ne peut pas border dans le complémentaire de A , car il existe une 2-forme complexe fermée sur le complémentaire de A d'intégrale non nulle sur T . Pour cela, il suffit de constater qu'on peut, T étant totalement réel, exprimer une aire sur T sous la forme $f(z, w) dz \wedge dw$, puis approcher suffisamment f par une fraction rationnelle complexe à pôles sur A .

En fait, il existe même sur le tore un cycle enlaçant A . C'est le bord du disque holomorphe D donné par le théorème de Gromov [6]. En effet, A doit rencontrer D sans quoi on approcherait uniformément toute fonction continue sur le bord de D par des fonctions holomorphes à l'intérieur de D . L'intersection homologique de A et de D est donc non nulle car chaque intersection géométrique y contribue positivement (A et D sont holomorphes).

Il serait intéressant d'avoir une preuve directe de la présence de ce cycle enlaçant A reposant sur l'approximation par les fractions rationnelles. Car, en retour, cela impliquerait par exemple la non-exactitude des tores lagrangiens plongés que Gromov déduisait de l'existence du disque D . Remarquons pour finir que la propriété d'enlacement de l'hypersurface d'approximation n'est plus vraie en dimension supérieure, comme le montrent les exemples des surfaces isotropes exactes de \mathbf{C}^3 .

Bibliographie

- [1] BREMERMAN, M. F., Die Charakterisierung Runge'scher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen. *Math. Ann.*, 136 (1958), 173–186.
- [2] DEMAILLY, J. P., Communication orale.
- [3] DUVAL, J., Convexité rationnelle des surfaces lagrangiennes. *Invent. Math.*, 104 (1991), 581–599.
- [4] — Une contrainte géométrique pour certaines sous-variétés rationnellement convexes. *Math. Ann.*, 289 (1991), 627–629.
- [5] GELFAND, I. M., GRAEV, M. I. & VILENKIN, N. J., *Les distributions*, tome 5. Dunod, Paris, 1970.
- [6] GROMOV, M., Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82 (1985), 307–347.
- [7] HARVEY, R. & LAWSON, H. B., An intrinsic characterization of Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 74 (1983), 169–198.

- [8] HÖRMANDER, L. & WERMER, J., Uniform approximation on compact sets in \mathbf{C}^n . *Math. Scand.*, 23 (1968), 5–21.
- [9] LELONG, P., La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. *J. Math. Pures Appl.*, 31 (1952), 191–219.
- [10] — Eléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés, dans *Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1971–1972*. Lecture Notes in Math., 332. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [11] NIRENBERG, R. & WELLS, R. O., Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142 (1969), 15–35.
- [12] OKA, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*. Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.
- [13] SHIFFMAN, B., Applications of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps, in *Value-Distribution Theory* (R. O. Kujala and A. L. Vitter III, eds.), Part A, pp. 63–95. Marcel Dekker Inc., New York, 1974.
- [14] SIBONY, N., Prolongement des fonctions holomorphes bornées et métrique de Carathéodory. *Invent. Math.*, 29 (1975), 205–230.
- [15] STOLZENBERG, G., An example concerning rational convexity. *Math. Ann.*, 147 (1962), 275–276.
- [16] — Polynomially and rationally convex sets. *Acta Math.*, 109 (1963), 259–289.
- [17] SULLIVAN, D., Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36 (1976), 225–255.
- [18] WERMER, J., The hull of a curve in \mathbf{C}^n . *Ann. of Math.*, 68 (1958), 550–561.

JULIEN DUVAL
Laboratoire d'Analyse
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
F-31062 Toulouse Cedex
France
duval@cict.fr

Reçu le 27 novembre 1991