Acta Math., 182 (1999), 143–157

Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{CP}^k$

par

JEAN-YVES BRIEND et JULIEN DUVAL

Université de Provence
Marseille, France

Université Paul Sabatier
Toulouse, France

Introduction

Hubbard et Papadopol (voir [9]) ainsi que Fornæss et Sibony (voir [6]) ont construit, pour tout endomorphisme holomorphe f de degré $d \geqslant 2$ de $\mathbf{CP}^k$, une mesure de probabilité invariante naturelle μ, mélangeante et d'entropie maximale $k \log d$, la mesure d'équilibre de f. En dimension un, cette mesure a été introduite en 1983 par Lyubich ainsi que Freire, Lopes et Mañé (voir [11], [8]), qui montrent qu'elle reflète la distribution des points périodiques de f et qu'elle est l'unique mesure d'entropie maximale. Il en résulte par l'inégalité de Margulis–Ruelle (voir [13]) une minoration par $\frac{1}{2}\log d$ de l'exposant de Liapounoff de f par rapport à μ. Dans le cas des polynômes d'une variable, l'introduction de μ remonte à Brolin en 1965 (voir [4]) qui l'identifie à la mesure d'équilibre de l'ensemble de Julia rempli. Les résultats précédents s'obtiennent alors directement par une méthode potentialiste (voir par exemple l'article de Tortrat [14]).

L'objet de cet article est de répondre à des questions similaires en dimension plus grande. Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit λ le plus petit exposant de Liapounoff de f par rapport à μ. On a alors la minoration*

$$\lambda \geqslant \tfrac{1}{2}\log d.$$

En particulier, tous les exposants sont strictements positifs.

Ainsi, comme en dimension un, la mesure μ peut être qualifiée de «répulseur» non uniformément hyperbolique. La stricte positivité des exposants dans le cas où le support de μ est un compact uniformément hyperbolique est due à Fornæss et Sibony (voir [7]). Notons que la minoration obtenue ici est optimale, comme on peut le voir en relevant un exemple de Lattès. De plus, dès que $k \geqslant 2$ elle ne résulte plus de l'inégalité de Margulis–Ruelle, qui en est en fait un corollaire. La démonstration que nous allons en donner ne fait d'ailleurs pas appel à la notion d'entropie, même si la structure particulière de la mesure — c'est une masse de Monge–Ampère — met sans doute en jeu, de manière cachée, une entropie directionnelle.

Le caractère répulsif de μ entraîne l'existence de beaucoup de branches inverses locales de f^n dont les images ont un diamètre exponentiellement décroissant. Son caractère mélangeant fait que ces images reviennent visiter leur domaine de définition, créant ainsi à chaque fois un point périodique répulsif par le théorème du point fixe. On peut rendre cette analyse quantitative en utilisant le fait que μ est de jacobien constant d^k, et l'on montre le

THÉORÈME 2. — *Les points périodiques répulsifs de f sont équidistribués par rapport à μ. En d'autres termes la suite de mesures*

$$\mu_n = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{x \in \mathcal{PR}_n} \delta_x$$

converge faiblement vers μ, où $\mathcal{PR}_n$ est l'ensemble des points périodiques répulsifs de période exactement n. On obtient en particulier l'existence de tels points répulsifs et leur densité dans le support de μ.

Pour montrer le théorème 1, on remplace f par un relèvement polynomial à $\mathbf{C}^{k+1}$. Il suffit alors de considérer le cas où f est une application polynomiale homogène de $\mathbf{C}^k$, de degré $d \geqslant 2$ et admettant un prolongement holomorphe à $\mathbf{CP}^k$. Soit K l'ensemble de Julia rempli de f, i.e. le compact des points d'orbite bornée, et G la fonction de Green pluricomplexe avec pôle à l'infini de K (voir le livre [10]). Comme en dimension un, G a une interprétation dynamique comme taux d'échappement des orbites vers l'infini. Elle est plurisousharmonique continue et vérifie l'équation fonctionnelle $G \circ f = d.G$ (voir [6]). La mesure d'équilibre de K, i.e. la masse de Monge–Ampère $(\mathrm{dd}^c G)^k$ de G (voir [10]), est une mesure de probabilité invariante portée par le bord de K. Le plus petit exposant de Liapounoff λ de f relativement à μ est défini par la formule

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \int \log \|(D_x f^n)^{-1}\| \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Pour minorer λ, on commence par construire beaucoup (au sens de la mesure μ) de branches inverses locales de f^n. La taille du plus grand disque holomorphe qu'on peut insérer dans leur image est de l'ordre de $\|(D_x f^n)^{-1}\|$. On obtient ainsi des disques holomorphes en grand nombre (i.e. leur union est uniformément chargée par μ), de taille $\exp(-n\lambda^+)$ (où $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$), et sur lesquels G est petite de l'ordre de d^{-n} par l'équation fonctionnelle $G \circ f^n = d^n.G$. En sélectionnant encore ces disques, on peut les supposer presque parallèles à une direction donnée. Pour tout polydisque de plus petit diamètre $\exp(-n\lambda^+)$ dans cette direction, le lemme de pluripotentiel ci-dessous permet d'estimer par d^{-n} la masse pour μ des disques holomorphes s'y inscrivant. Comme on peut recouvrir le support de μ par $\exp(2n\lambda^+)$ tels polydisques, on en déduit que la masse totale de ces disques est de l'ordre de $d^{-n}\exp(2n\lambda^+)$. Cette expression étant uniformément minorée, on obtient bien $\lambda \geqslant \frac{1}{2}\log d$.

Voici maintenant l'énoncé du lemme de pluripotentiel, qui peut être vu comme une version relative de l'inégalité de Chern, Levine et Nirenberg (voir [1], ainsi que [6]).

LEMME 1. — *Soient P un polydisque de $\mathbf{C}^k$ centré en 0 et G une fonction plurisousharmonique positive définie au voisinage du polydisque homothétique $3P$. Si Σ est un compact de $2P$ dont la frontière de Shiloff se trouve dans le bord de $2P$, alors on a l'inégalité*

$$(\mathrm{dd}^c G)^k(\Sigma \cap P) \leqslant C \|G\|_{\infty,3P}^{k-1} \|G\|_{\infty,\Sigma},$$

où C ne dépend que de la dimension.

La frontière de Shiloff de Σ est le plus petit compact $\partial_S\Sigma \subset \Sigma$ satisfaisant le principe du maximum pour les fonctions plurisousharmoniques globales u : $\max_\Sigma u = \max_{\partial_S \Sigma} u$. Ce lemme résulte du principe de comparaison (voir [10]), classique en théorie du pluripotentiel. On l'applique ici à la fonction de Green G et à la réunion Σ des disques holomorphes mentionnés ci-dessus.

Signalons enfin que Bedford, Lyubich et Smillie ont montré un analogue du théorème 2 en 1993 (voir [2]) pour les points périodiques selles des applications de Hénon complexes.

Ce texte s'articule de la manière suivante : dans le premier paragraphe nous justifions la réduction au cas polynomial tandis que dans le deuxième nous montrons la minoration du plus petit exposant. L'équidistribution des points périodiques fait l'objet du troisième paragraphe, un appendice étant enfin consacré à la démonstration du lemme de pluripotentiel.

Remerciements. — Nous tenons à remercier Nessim Sibony qui nous a initiés à la dynamique holomorphe en plusieurs variables et est à l'origine de ce travail. Cet article est une version simplifiée, au niveau des outils, de la thèse du premier auteur (voir [3]) qui utilisait les premiers pas d'une théorie de Pesin pour les endomorphismes. Celle-ci sous-tend toujours certains des arguments présentés ici.

1. Réduction au cas polynomial homogène

Soient $\tilde{f}$ un endomorphisme holomorphe de $\mathbf{CP}^k$ de degré $d \geqslant 2$ et f un de ses relèvements polynomiaux homogènes à $\mathbf{C}^{k+1}$. Nous construisons dans ce paragraphe les mesures d'équilibre μ et $\tilde{\mu}$ de f et $\tilde{f}$ respectivement. Puis nous indiquons brièvement comment comparer leurs plus petits exposants de Liapounoff et leurs distributions de points périodiques. Nous renvoyons au livre de Klimek [10] et à l'article de revue de Fornæss et Sibony [6] pour les aspects de théorie du pluripotentiel dont nous aurons besoin, et à ce dernier article pour les bases de la dynamique des endomorphismes de $\mathbf{CP}^k$.

1.1. Construction des mesures μ et $\tilde{\mu}$

Considérons le taux d'échappement vers l'infini G des orbites de f :

$$G(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^n(x)\|$$

pour $x \in \mathbf{C}^{k+1}$. D'après [6], [9], G est plurisousharmonique continue et positive sur $\mathbf{C}^{k+1}$. Soit K l'ensemble de Julia rempli de f, c'est-à-dire l'ensemble des points d'orbite bornée. C'est un compact qui coïncide avec le niveau zéro de G. Par homogénéité de f, on a, pour tout $x \in \mathbf{C}^{k+1}$ et $t \in \mathbf{C}$ tels que $x, tx \notin K$:

$$G(tx) = \log|t| + G(x).$$

On en déduit que G est à croissance logarithmique à l'infini et harmonique sur les droites radiales en dehors de K. Donc G est maximale parmi les fonctions plurisousharmoniques négatives sur K et à croissance logarithmique à l'infini : c'est la fonction de Green pluricomplexe de K avec pôle à l'infini (voir [10]). On définit alors μ comme étant la mesure d'équilibre de K, c'est-à-dire la masse de Monge–Ampère de G,

$$\mu = dd^c G \wedge \ldots \wedge dd^c G = (dd^c G)^{k+1},$$

et la mesure $\tilde{\mu}$ est l'image de μ par la projection canonique $\pi: \mathbf{C}^{k+1} - \{0\} \to \mathbf{CP}^k$, i.e. $\mu = \pi_* \tilde{\mu}$. Ces deux mesures sont invariantes et mélangeantes (voir [6]). Elles sont de plus de jacobien constant, d^{k+1} pour μ et d^k pour $\tilde{\mu}$. Cela signifie, pour μ par exemple, que si f est injective sur un borélien B alors $\mu(f(B)) = d^{k+1}\mu(B)$. Ceci est une conséquence directe de l'équation fonctionnelle $G \circ f = d.G$ et s'écrit de manière intrinsèque $f^*\mu = d^{k+1}\mu$.

1.2. Comparaison des plus petits exposants de Liapounoff

La suite $\left(\int \log \|(D_x f^n)^{-1}\| \, d\mu\right)_{n \geqslant 1}$ est sous-additive par invariance de μ. Il s'ensuit qu'il existe $\lambda \in [-\infty, +\infty[$ tel que

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \int \log \|(D_x f^n)^{-1}\| \, d\mu = -\inf_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} \int \log \|(D_x f^n)^{-1}\| \, d\mu \right).$$

C'est, par définition, le plus petit exposant de Liapounoff de f relativement à μ. Il traduit le plus petit taux d'accroissement infinitésimal de f le long d'une orbite générique. En appliquant l'inégalité de Chern, Levine et Nirenberg (voir [6]), on constate que l'intégrale

$$\int |\log \|(D_x f^n)^{-1}\| \,| \,\mathrm{d}\mu$$

est finie. Il s'ensuit d'une part que μ ne charge pas le lieu critique de f et d'autre part que $\lambda > -\infty$. On définit de la même manière le plus petit exposant de Liapounoff $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{f}$ relativement à $\tilde{\mu}$ par la formule

$$\tilde{\lambda} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\int \log \|(D_{\tilde{x}}\tilde{f}^n)^{-1}\| \,\mathrm{d}\tilde{\mu}.$$

Ici la métrique $\|\cdot\|$ est a priori celle de Fubini–Study, mais elle peut être remplacée par n'importe quelle autre métrique équivalente. Nous allons user de cette liberté pour comparer λ à $\tilde{\lambda}$ en construisant sur $\mathbf{CP}^k$ une métrique adaptée à notre situation. Soit J la frontière de l'ensemble de Julia rempli de f. Elle contient le support de μ et la restriction de π en fait un fibré en cercles sur $\mathbf{CP}^k$. Considérons dans la restriction à J du fibré tangent de $\mathbf{C}^{k+1}$ le sous-fibré orthogonal (pour la métrique usuelle de $\mathbf{C}^{k+1}$) au fibré tautologique. Sa fibre en un point x de J est $(\mathbf{C}x)^{\perp}$. Munissons ce fibré en hyperplans de la restriction de la métrique $\|\cdot\|$. Comme elle est invariante par rotation, elle se pousse par π en une métrique $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbf{CP}^k$, comparable à $\|\cdot\|$. On a alors par construction

$$\|(D_{\tilde{x}}\tilde{f}^n)^{-1}\|_1 = \|p_x \circ (D_x f^n)^{-1}_{|(\mathbf{C}f^n(x))^{\perp}}\|,$$

où x est dans $\pi^{-1}(\tilde{x})\cap J$ et en dehors du lieu critique de f^n et où p_x désigne la projection orthogonale de $\mathbf{C}^{k+1}$ de noyau $\mathbf{C}x$. On en déduit que $\|(D_{\tilde{x}}\tilde{f}^n)^{-1}\|_1 \leqslant \|(D_x f^n)^{-1}\|$, et donc $\lambda \leqslant \tilde{\lambda}$. Il nous suffit donc de montrer le théorème 1 pour les polynômes homogènes non dégénérés.

1.3. Lien entre les distributions de points périodiques

Par homogénéité de f, on remarque qu'au dessus de chaque point périodique répulsif $\tilde{x}$ de période n de $\tilde{f}$ sont situés exactement d^n points périodiques de même type pour f, répartis sur le cercle fibre $\pi^{-1}(\tilde{x})\cap J$. Si μ_n est la mesure équidistribuée sur les points périodiques répulsifs de période n de f (normalisée par $d^{-(k+1)n}$) et $\tilde{\mu}_n$ l'analogue pour $\tilde{f}$ (normalisée par d^{-kn}), alors on a l'égalité $\pi_*\mu_n = \tilde{\mu}_n$. Le théorème 2 se réduit donc lui aussi au cas polynomial homogène.

2. Minoration du plus petit exposant de Liapounoff

Au vu de ce qui précède, on suppose désormais f polynomiale homogène de degré $d\geqslant 2$ sur $\mathbf{C}^k$ et non dégénérée, i.e. admettant une extension holomorphe à $\mathbf{CP}^k$. Nous allons montrer le théorème 1 dans ce cas.

Afin de mieux traduire l'impact de l'exposant λ à chaque itération, nous travaillerons avec un grand itéré g de f et lui appliquerons la stratégie décrite dans l'introduction : nous contrôlons les branches inverses locales de g, puis de g^n le long d'une orbite négative typique, puis construisons des disques holomorphes maximaux inscrits dans l'image de ces branches inverses, et enfin estimons la masse de ces disques pour μ grâce au lemme de pluripotentiel 1. Pour être plus précis, fixons une fois pour toutes $\varepsilon>0$ assez petit. Soient $g=f^N$ un grand itéré de f et

$$\Lambda = -\int \log \|(D_x g)^{-1}\| \, \mathrm{d}\mu.$$

Par définition de l'exposant λ de f, $N^{-1}\Lambda$ croît vers λ quand N croît vers l'infini. On choisit alors N assez grand pour avoir

$$\lambda-\varepsilon \leqslant \frac{1}{N}\Lambda \leqslant \lambda. \tag{1}$$

Notons également que l'ensemble de Julia rempli de g coïncide avec K, celui de f.

2.1. Branches inverses locales de g

Le lemme classique qui suit permet le contrôle de la branche inverse de g envoyant $g(x)$ sur x en fonction de $\|(D_x g)^{-1}\|$. Notons B_R la boule de centre 0 et de rayon R. On choisit ici R assez grand pour que $g^{-1}(B_R)\subset B_R$ et $K\subset B_{R-1}$. Notons $M=\|g\|_{C^2(B_R)}+1$.

LEMME 2. — *Soit $x\in K$ en dehors du lieu critique de g. Alors g admet sur la boule $B(g(x),r(x))$ une branche inverse holomorphe g^{-1} envoyant $g(x)$ sur x et de constante de Lipschitz vérifiant*

$$\mathrm{Lip}(g^{-1}) \leqslant \|(D_x g)^{-1}\| \mathrm{e}^{\varepsilon/3}$$

si

$$r(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon/3}}{2M\|(D_x g)^{-1}\|^2}.$$

Démonstration. — Supposons, pour simplifier les notations, que $x=g(x)=0$. Notons $\delta=1-\exp\left(-\frac{1}{3}\varepsilon\right)$, avec $\delta<\frac{1}{2}$ si ε est choisi assez petit, $\varrho=\delta.(M\|(D_0 g)^{-1}\|)^{-1}$ et $r=$

$\varrho.(2\|(D_0g)^{-1}\|)^{-1}$. Tout d'abord, remarquons que g est injective sur B_ϱ. En effet, l'inégalité des accroissements finis entraîne, pour $\|y\|\leqslant\varrho$, que

$$\|\operatorname{Id}-(D_0g)^{-1}\circ D_yg\|\leqslant M\varrho\|(D_0g)^{-1}\|\leqslant\delta, \tag{2}$$

ce qui implique en particulier que $\operatorname{Lip}(\operatorname{Id}-(D_0g)^{-1}\circ g)\leqslant\delta<1$, d'où l'injectivité de $(D_0g)^{-1}\circ g$ et donc celle de g sur B_ϱ. De plus, l'image de B_ϱ par g contient B_r. En effet, pour $\|y\|=\varrho$, on a par ce qui précède

$$\|(D_0g)^{-1}\circ g(y)\|\geqslant(1-\delta)\|y\|\geqslant\tfrac{1}{2}\|y\|$$

d'où $\|g(y)\|\geqslant r$. L'image du bord $g(\partial B_\varrho)$ évite donc B_r et le théorème de Jordan permet de conclure. On a enfin, par l'équation (2) et pour $\|y\|\leqslant\varrho$ que $\|(D_0g)^{-1}-(D_yg)^{-1}\|\leqslant\delta\|(D_yg)^{-1}\|$. On en déduit que $\|(D_yg)^{-1}\|\leqslant(1-\delta)^{-1}\|(D_0g)^{-1}\|$, d'où l'estimée sur la constante de Lipschitz.

2.2. Branches inverses locales de g^n

Il s'agit maintenant d'itérer la construction précédente pour estimer le domaine de définition et l'image d'une branche inverse locale de g^n le long d'une orbite négative typique. Le bon cadre pour traiter de ces questions est l'extension naturelle de g (voir [5]). Soient $\mathrm{PC}=\bigcup_{n\geqslant0}f^n(\mathrm{Crit}(f))$ l'ensemble postcritique de f et $X=K-\bigcup_{n\geqslant0}f^{-n}(\mathrm{PC})$. Comme la mesure μ ne charge pas l'ensemble postcritique on obtient de la sorte un borélien X totalement invariant de mesure pleine. On note $\widehat{X}$ l'extension naturelle de (X,g,μ). C'est l'espace $\widehat{X}=\{\hat{x}=(...,x_{-n},...,x_{-1},x_0)\in X^{\mathbf{Z}^-}:g(x_{-n})=x_{-n+1}\}$ des préhistoires des points de X, sur lequel g induit un automorphisme $\hat{g}$ d'inverse le décalage à gauche σ. On munit $\widehat{X}$ de la projection canonique $\pi_0(\hat{x})=x_0$, et alors μ se relève en une unique mesure $\hat{g}$-invariante $\hat{\mu}$ (en particulier $\pi_{0*}\hat{\mu}=\mu$), elle aussi mélangeante. Soit $\hat{x}\in\widehat{X}$ une trajectoire négative de g. D'après le lemme 2, on peut construire des branches inverses locales g_n^{-1} de g sur la boule $B(x_{-n+1},r(x_{-n}))$ satisfaisant $g_n^{-1}(x_{-n+1})=x_{-n}$ et $\operatorname{Lip}(g_n^{-1})\leqslant\|(D_{x_{-n}}g)^{-1}\|\exp\bigl(\frac{1}{3}\varepsilon\bigr)$. Si donc g^{-n} désigne la composée $g_n^{-1}\circ...\circ g_1^{-1}$ là où elle est définie, on aura l'estimée

$$\operatorname{Lip}(g^{-n})\leqslant\|(D_{x_{-n}}g)^{-1}\|...\|(D_{x_{-1}}g)^{-1}\|\mathrm{e}^{n\varepsilon/3}.$$

La remarque fondamentale est que, pour une trajectoire typique, le rayon $r(x_{-n})$ est à *décroissance lente* et que $\operatorname{Lip}(g^{-n})$ est de l'ordre de $\exp(-n\Lambda)$. Plus précisément, il existe des fonctions mesurables r et C sur $\widehat{X}$ avec $0<r\leqslant1$ et $1\leqslant C<+\infty$ telles que, pour $\hat{\mu}$-presque tout $\hat{x}$, on ait

$$r(x_{-n})\geqslant r(\hat{x})\mathrm{e}^{-n\varepsilon/2},$$
$$\operatorname{Lip}(g^{-n})\leqslant C(\hat{x})\mathrm{e}^{n(\varepsilon/2-\Lambda)}.$$

Pour obtenir la deuxième estimation, il suffit d'appliquer le théorème ergodique de Birkhoff à la fonction $\hat{x} \mapsto \log \|(D_{x_0}g)^{-1}\|$, qui est dans $L^1(\widehat{X}, \hat{\mu})$ par l'inégalité de Chern, Levine et Nirenberg. On en déduit de plus que $\lim_{n\to+\infty} n^{-1} \log \|(D_{x_{-n}}g)^{-1}\| = 0$, ce qui implique la première inégalité pour le rayon $r(x_{-n})$ fourni par le lemme 2.

Posons $\eta(\hat{x}) = r(\hat{x})/C(\hat{x})$. On montre par induction, en utilisant ce qui précède, la dichotomie suivante sur le contrôle des branches inverses de g^n pour $\hat{\mu}$-presque tout $\hat{x}$:

AFFIRMATION 1. — *Dans le cas « contractant », c'est-à-dire si $\Lambda \leqslant \varepsilon$, la branche inverse locale g^{-n} le long de $\hat{x}$ (i.e. $g^{-n}(x_0) = x_{-n}$) est définie sur une boule centrée en x_0, de rayon exponentiellement petit $\eta(\hat{x}) \exp(n(\Lambda - \varepsilon))$ et son image est de diamètre uniformément borné par 1. Dans le cas « dilatant » où $\Lambda > \varepsilon$, le contraire se produit et g^{-n} est définie sur une boule de rayon fixe $\eta(\hat{x})$ tandis que son image est de diamètre exponentiellement petit, au plus $\exp(n(\varepsilon - \Lambda))$.*

Nous verrons plus loin que l'on est toujours dans le second cas.

2.3. Construction des disques holomorphes

Nous allons les obtenir comme les « plus grands » disques inscrits dans l'image des branches inverses de g^n. Commençons par donner une définition : nous dirons qu'un disque holomorphe plongé Δ est un *disque de profondeur n centré en x et de rayon ϱ* si d'une part Δ passe par x et est contenu dans $g^{-n}(B_R)$, et si d'autre part il existe une projection orthogonale p sur l'un des axes de coordonnées de $\mathbf{C}^k$ dont la restriction à Δ est un difféomorphisme sur le disque plat $D(p(x), \varrho)$. Autrement dit, Δ est un graphe au-dessus d'un disque de rayon ϱ dans l'un des axes de coordonnées. Nous dirons que l'axe en question *dirige* Δ.

Il s'agit maintenant de construire suffisamment de disques de profondeur n de manière à ce que μ charge uniformément leurs centres tout en contrôlant leur taille par l'exposant λ. À cet effet, soit $\hat{x}$ une trajectoire négative générique pour $\hat{\mu}$. Notons B le domaine de définition de la branche inverse g^{-n} le long de $\hat{x}$ donnée par l'affirmation 1, L une direction complexe dans laquelle $D_{x_0}(g^{-n})$ atteint sa norme et p la projection orthogonale sur l'axe de coordonnées correspondant à la plus grande composante de $D_{x_0}(g^{-n})_{|L}$. En d'autres termes, nous avons l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \|D_{x_0}(g^{-n})\| \leqslant \|p \circ D_{x_0}(g^{-n})_{|L}\|.$$

Posons $\Delta = g^{-n}(D)$, où D est un disque centré en x_0 sur la droite L, de rayon assez petit pour que Δ soit un disque de profondeur n centré en x_{-n}. Nous pouvons contrôler précisément les rayons de D et de Δ en appliquant à $h = p \circ g^{-n} : (x_0 + L) \cap B \to \mathbf{C}$ le lemme élémentaire suivant :

LEMME 3. — *Il existe deux constantes universelles $\alpha,\beta>0$ telles que, pour toute fonction holomorphe $h\colon D(z,t)\to\mathbf{C}$ définie sur le disque de rayon t centré en z, de dérivée non nulle au centre, la restriction de h au disque $D(z,\alpha t^2a/s)$ soit injective et son image contienne le disque $D(h(z),\beta(ta)^2/s)$, avec $a=|h'(z)|$ et $s=\mathrm{diam}(h(D(z,t)))$.*

La démonstration, laissée au lecteur, calque celle du lemme 2, en remarquant que le contrôle du diamètre de l'image de h permet celui de $|h''|$ sur $D\big(z,\frac{1}{2}t\big)$ grâce aux inégalités de Cauchy. Le rayon de Δ est ainsi estimé par le rayon de B, le diamètre de $g^{-n}(B)$ et la norme $\|D_{x_0}(g^{-n})\|$. On peut contrôler les deux premières quantités par l'exposant Λ (et donc λ) d'après l'affirmation 1. Il reste à minorer $\|D_{x_0}(g^{-n})\|=\|(D_{x_{-n}}g^n)^{-1}\|$. Or le théorème ergodique sous-additif de Kingman (voir [12]) appliqué à la famille de fonctions $\hat\mu$-intégrables $\hat x\mapsto\log\|(D_{x_{-n}}g^n)^{-1}\|$ permet d'affirmer que pour $\hat\mu$-presque tout $\hat x$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|(D_{x_{-n}}g^n)^{-1}\|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int\log\|(D_xg^n)^{-1}\|\,\mathrm{d}\mu=-N\lambda.$$

Il s'ensuit qu'il existe une fonction mesurable c sur $\widehat X$ avec $0<c\leqslant1$ telle que, pour $\hat\mu$-presque tout x, on ait

$$\|(D_{x_{-n}}g^n)^{-1}\|\geqslant c(\hat x)\mathrm{e}^{-n(N\lambda+\varepsilon)}. \tag{3}$$

En restreignant l'ensemble des trajectoires admissibles, nous obtenons un contrôle uniforme des fonctions $c(\hat x)$ (équation ci-dessus) et $\eta(\hat x)$ (affirmation 1). En effet, il existe un borélien $\widehat F$ de $\widehat X$ de mesure $\hat\mu(\widehat F)\geqslant\frac{1}{2}$ et des constantes $c_0,\eta_0>0$ telles que, pour tout $\hat x\in\widehat F$, on ait $c(\hat x)\geqslant c_0$ et $\eta(\hat x)\geqslant\eta_0$. Soit alors $F_n=\{x_{-n}:\hat x\in\widehat F\}=\pi_0(\sigma^n\widehat F)$, qui satisfait $\mu(F_n)\geqslant\frac{1}{2}$ puisque $\sigma_*\hat\mu=\hat\mu$ et $\pi_{0*}\hat\mu=\mu$. En traduisant le lemme 3 à la lumière de l'inégalité (3) et de l'affirmation 1 pour les éléments de $\widehat F$, et en rappelant que $\Lambda/N\geqslant\lambda-\varepsilon$, on obtient l'énoncé suivant :

AFFIRMATION 2. — *Il existe une constante $\varrho_0>0$ et, pour tout n, un borélien F_n de B_R de mesure minorée par $\frac{1}{2}$, et constitué de centres de disques de profondeur n de rayon $3\varrho_n$. Dans le cas « contractant » $(\Lambda\leqslant\varepsilon)$, $\varrho_n=\varrho_0\exp(-6nN\varepsilon)$, et dans le cas « dilatant » $(\Lambda>\varepsilon)$, $\varrho_n=\varrho_0\exp(-nN(\lambda+4\varepsilon))$.*

La taille de ces disques est bien de l'ordre de $\exp(-nN\lambda^+)$.

2.4. Application du lemme de pluripotentiel

Nous allons évaluer d'une autre manière la masse pour μ de ces disques de profondeur n en utilisant le lemme 1 dans chaque polydisque d'un recouvrement bien choisi. L'estimation optimale voulue nécessite de se restreindre à des disques « presque parallèles », i.e. dirigés par le même axe de coordonnées. Pour cela, notons que le borélien F_n donné par l'affirmation 2 se partage en k boréliens suivant l'axe dirigeant les disques correspondants. L'un au moins de ces boréliens, noté E_n, est de mesure minorée par $1/2k$. Tous les disques de profondeur n centrés aux points de E_n sont des graphes au-dessus de disques de rayon $3\varrho_n$ situés sur un même axe de coordonnées, par exemple le premier.

Recouvrons maintenant E_n par des polydisques P fins dans la première direction, de la forme $P=D(z,\varrho_n)\times D(0,R)^{k-1}$. Appliquons le lemme 1 à la fonction de Green G, au polydisque P et au compact $\Sigma=\overline{\bigcup(\Delta\cap 2P)}$, la réunion portant sur tous les disques de profondeurs n donnés par l'affirmation 2 centrés en des points de $P\cap E_n$. Ce compact a bien sa frontière de Shiloff située dans le bord de $2P$, d'après le principe du maximum appliqué à chaque composante de $\Delta\cap 2P$. Nous obtenons alors la majoration

$$\mu(E_n\cap P)\leqslant\mu(\Sigma\cap P)\leqslant C\|G\|_{\infty,3P}^{k-1}\|G\|_{\infty,\Sigma}.$$

Cependant, par définition des disques de profondeur n, on a l'inclusion $\Sigma\subset g^{-n}(B_R)$ et donc, d'après l'équation fonctionnelle satisfaite par G, on en déduit que

$$\mu(E_n\cap P)\leqslant\frac{CA^k}{d^{nN}},$$

où $A=\|G\|_{\infty,B_{3\sqrt{k}R}}$. On peut recouvrir E_n par un nombre de l'ordre de ϱ_n^{-2} polydisques P, et en sommant les inégalités précédentes sur chaque polydisque nous obtenons

$$\frac{1}{2k}\leqslant\mu(E_n)\leqslant C_1\varrho_n^{-2}d^{-nN},$$

où C_1 est une constante indépendante de n. En faisant croître n indéfiniment, nous constatons que le cas «contractant» de l'affirmation 2 est impossible, puis que $2(\lambda+4\varepsilon)\geqslant\log d$. Le théorème 1 s'en déduit immédiatement. □

Finissons par une remarque qui nous sera utile pour prouver le théorème 2. Puisqu'a posteriori on peut exclure le cas «contractant», l'affirmation 1 nous permet de définir, pour $\hat{\mu}$-presque toute trajectoire négative $\hat{x}$, la branche inverse g^{-n} le long de $\hat{x}$ sur la boule $B(x_0,\eta(\hat{x}))$, et le diamètre de son image se contracte exponentiellement en τ^n, avec $\tau=\exp(\varepsilon-\Lambda)<1$. Pour établir le théorème 2, il nous faut transférer ces propriétés à f elle-même. Notons pour cela $\widehat{Y}$ l'extension naturelle de X pour f cette fois-ci. L'espace $\widehat{Y}$ porte de la même manière que $\widehat{X}$ une mesure $\hat{f}$-invariante encore notée $\hat{\mu}$. En fait $(\widehat{Y},\hat{\mu})$ est isomorphe à $(\widehat{X},\hat{\mu})$ par l'application d'oubli $\phi:(\dots,y_{-2},y_{-1},y_0)\mapsto(\dots,y_{-2N},y_{-N},y_0)$. En définissant $f_{\hat{y}}^{-n}=f^r\circ g^{-p}$ (avec $n=pN-r$ et $0\leqslant r\leqslant N-1$) la branche inverse de f^n le long de $\hat{y}$ en fonction de celle de g^p le long de $\phi(\hat{y})$, on obtient les mêmes contrôles sur son domaine de définition et le diamètre de son image. Cela produit les boréliens

$$E_\delta=\{\hat{y}:f_{\hat{y}}^{-n}\text{ est définie sur }B(y_0,2\delta)\text{ et }\operatorname{diam}(f_{\hat{y}}^{-n}(B(y_0,2\delta))\leqslant Ct^n\}$$

dont la réunion est de mesure pleine. Ici, C ne dépend que de $\|f\|_{C^1(B_R)},\dots,\|f^{N-1}\|_{C^1(B_R)}$ et $t=\tau^{1/N}<1$.

3. Équidistribution des points périodiques

Commençons par donner le schéma de la démonstration du théorème 2. Soit y_0 un point générique pour la mesure μ; d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent, il possède beaucoup de bonnes orbites négatives le long desquelles les branches inverses $f_{\hat{y}}^{-n}$ sont définies sur une boule fixe B. La réunion de leurs images $f_{\hat{y}}^{-n}(B)$ recouvrant presque complètement $f^{-n}(B)$, nous avons

$$\mu\big(\bigcup f_{\hat{y}}^{-n}(B)\cap B\big) \approx \mu(f^{-n}(B)\cap B), \tag{4}$$

l'union étant prise sur les bonnes préhistoires $\hat{y}$ issues de y_0. Par le caractère mélangeant de μ, on a asymptotiquement $\mu(f^{-n}(B)\cap B)\approx\mu(B)^2$. Comme les branches inverses ont des images de diamètre exponentiellement petit, on change peu le premier terme de l'équation (4) en se restreignant aux trajectoires négatives pour lesquelles $f_{\hat{y}}^{-n}(B)\subset\subset B$, d'où

$$\mu\Big(\bigcup_{f_{\hat{y}}^{-n}(B)\subset\subset B} f_{\hat{y}}^{-n}(B)\Big) \approx (\mu(B))^2. \tag{5}$$

Mais chaque branche inverse intervenant ici possède, par le théorème du point fixe, un point fixe attractif — donc un point périodique répulsif de période divisant n pour f — dans son image $f_{\hat{y}}^{-n}(B)$. En effet, l'inclusion $f_{\hat{y}}^{-n}(B)\subset\subset B$ assure que $f_{\hat{y}}^{-n}$ est une contraction pour la métrique de Kobayashi de B (voir [6] pour des rappels sur la métrique de Kobayashi). De plus, du fait que μ est de jacobien constant d^k, nous avons $\mu(f_{\hat{y}}^{-n}(B))= d^{-kn}\mu(B)$. Comme les images des diverses branches inverses sont disjointes deux à deux, on obtient $\nu_n(B)\gtrsim\mu(B)$, où ν_n est la mesure de décompte des points périodiques répulsifs de période divisant n normalisée par d^{-kn}. C'est le contenu du théorème 2.

La mise en œuvre rigoureuse de ce schéma nécessite un usage intensif de l'extension naturelle $\widehat{Y}$ (voir la fin du paragraphe 2.4). Fixons $\delta>0$ et rappelons que

$$E_\delta = \{\hat{y} : f_{\hat{y}}^{-n} \text{ est définie sur } B(y_0,2\delta) \text{ et } \operatorname{diam}(f_{\hat{y}}^{-n}(B(y_0,2\delta)) \leqslant Ct^n\}.$$

Notons π la projection canonique de $\widehat{Y}$ sur X et $\sigma=\hat{f}^{-1}$ le décalage à gauche de $\widehat{Y}$. Si B est un borélien de $\mathbf{C}^k$ nous noterons, pour simplifier l'écriture, $\widehat{B}=\pi^{-1}(B\cap X)$ et $\widehat{B}_\delta=\widehat{B}\cap E_\delta$, et μ_δ désignera la mesure $\pi_*(\hat{\mu}_{|E_\delta})$. En particulier $\mu_\delta(B)=\hat{\mu}(\widehat{B}_\delta)$. Pour finir nous désignerons par $\mathcal{FR}_n$ l'ensemble des points périodiques répulsifs de période divisant n de f et

$$\nu_n = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{x\in\mathcal{FR}_n} \delta_x$$

la mesure de décompte correspondante. Sa masse est bornée, puisque, d'après [6], le nombre de points fixes de f^n est donné par $(d^{(k+1)n}-1)(d^n-1)^{-1}$. En particulier les valeurs d'adhérence ν de ν_n sont de masse totale au plus 1.

Soient maintenant $x \in X$ et r, ε positifs tels que $r+\varepsilon<\delta$. Nous allons comparer $\nu_n(B(x,r+\varepsilon))$ à $\mu_\delta(B(x,r))$ en considérant des boules fermées et en supposant que $\mu_\delta(B(x,r))>0$. Nous appellerons *bonne composante* de $f^{-n}(B(x,r+\varepsilon))$ une de ses composantes connexes de diamètre inférieur à ε et telle que $f^n\colon B \to B(x,r+\varepsilon)$ soit un difféomorphisme. Ainsi, pour toute trajectoire $\hat{y} \in E_\delta$ issue d'un point y_0 de $B(x,r)$, $f_{\hat{y}}^{-n}(B(x,r+\varepsilon))$ est une bonne composante dès que $n \geqslant n_0$ uniformément en $\hat{y}$. Ces bonnes composantes sont disjointes et sont toutes de mesure $d^{-kn}\mu(B(x,r+\varepsilon))$. Nous obtenons alors la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\mu_\delta(B(x,r))\mu(B(x,r)) &= (1-\varepsilon)\hat{\mu}(\widehat{B}_\delta(x,r))\hat{\mu}(\widehat{B}(x,r))\\ &\leqslant \hat{\mu}(\sigma^n(\widehat{B}_\delta(x,r))\cap \widehat{B}(x,r)),\end{aligned}$$

pour n grand, par le caractère mélangeant de σ,

$$\leqslant \mu(\pi(\sigma^n(\widehat{B}_\delta(x,r)))\cap B(x,r)),$$

car $\pi_*\hat{\mu}=\mu$,

$$\leqslant \mu\Big(\bigcup B\Big), \quad B \text{ bonne composante de } f^{-n}(B(x,r+\varepsilon)) \text{ rencontrant } B(x,r)$$
$$\text{(pour } n \geqslant n_0 \text{ par la remarque ci-dessus)},$$

$$\leqslant \mu\Big(\bigcup B\Big), \quad B \text{ bonne composante de } f^{-n}(B(x,r+\varepsilon)) \text{ contenue dans } B(x,r+\varepsilon),$$

$$\leqslant \frac{1}{d^{kn}}\mu(B(x,r+\varepsilon)).\sharp\{\text{bonnes composantes de } f^{-n}(B(x,r+\varepsilon)) \subset\subset B(x,r+\varepsilon)\}$$

$$\leqslant \nu_n(B(x,r+\varepsilon))\mu(B(x,r+\varepsilon)),$$

par le théorème du point fixe.

Si donc ν désigne une valeur d'adhérence de la suite ν_n, nous avons l'inégalité

$$(1-\varepsilon)\mu_\delta(B(x,r))\mu(B(x,r)) \leqslant \nu(B(x,r+\varepsilon))\mu(B(x,r+\varepsilon)).$$

En faisant varier ε, nous en déduisons que ν domine μ_δ sur toutes les boules fermées de rayon plus petit que δ, et donc que $\nu \geqslant \mu_\delta$, puis que $\nu \geqslant \mu$ en faisant tendre δ vers 0. Comme μ est une mesure de probabilité et que ν est de masse au plus 1, on en conclut à l'égalité de ν et μ. Ainsi ν_n converge faiblement vers μ, et on en déduit qu'il en est de même pour μ_n puisque $\nu_n-\mu_n$ est de masse au plus $2(k+1)d^{kn/2}/d^{kn}$. Cela achève la démonstration du théorème 2. $\square$

Appendice : le lemme de pluripotentiel

Rappelons que nous voulons montrer l'inégalité $(\mathrm{dd}^c G)^k(\Sigma\cap P)\leqslant C\|G\|_{\infty,3P}^{k-1}\|G\|_{\infty,\Sigma}$, pour G plurisousharmonique positive au voisinage du polydisque $3P$ et Σ un compact contenu dans $2P$ dont la frontière de Shiloff $\partial_S\Sigma$ est dans le bord $\partial(2P)$.

Notons tout d'abord que cet énoncé est homogène en G et invariant par homothétie dans chaque axe de coordonnées de $\mathbf{C}^k$. Nous pouvons donc supposer que $\|G\|_{\infty,3P}=1$ et que $P=D^k$, le polydisque unité fermé. Pour estimer la masse de Monge–Ampère de G sur $\Sigma\cap P$, nous allons utiliser le principe de comparaison de Bedford et Taylor entre G et une fonction plurisousharmonique u construite à l'aide de fonctions extrémales relatives.

Rappelons (voir [10]) que si K est un compact dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^k$, la fonction extrémale relative de K dans Ω se définit par

$$\omega_{K,\Omega}(x)=\sup\{u(x): u \text{ plurisousharmonique dans } \Omega,\ u\leqslant 1 \text{ et } u_{|K}\leqslant 0\}.$$

Sa régularisée semi-continue supérieure $\omega^*_{K,\Omega}$ n'en diffère que sur un ensemble pluripolaire (i.e. contenu dans le lieu des pôles d'une fonction plurisousharmonique globale), est plurisousharmonique sur Ω et est maximale hors de la frontière de Shiloff de K. En d'autres termes, sa masse de Monge–Ampère est supportée par $\partial_S K$. On définit de plus la capacité relative de K dans Ω par

$$\mathrm{Cap}(K,\Omega)=\sup\left\{\int_K(\mathrm{dd}^c u)^k : u \text{ plurisousharmonique sur } \Omega,\ 0\leqslant u\leqslant 1\right\}.$$

Elle coïncide avec la masse de Monge–Ampère de $\omega^*_{K,\Omega}$. Notons $\Omega=3\mathring{P}$, $\phi=2\omega_{\Sigma,\Omega}$ et $\omega=2\omega_{P,\Omega}$ explicitée sous la forme

$$\omega=\frac{2}{\log 3}\max(\log^+|z_1|,\dots,\log^+|z_k|).$$

On pose $u=\phi+t\omega$, où $t=\|G\|_{\infty,\Sigma}$, que l'on suppose non nul (sinon, on peut remplacer G par $G+\varepsilon$ dans l'argument qui va suivre et faire tendre ε vers 0). Puisque u domine G au bord de $3P$ ($u=2+2t$ sur $\partial(3P)$), on peut appliquer le principe de comparaison de Bedford et Taylor (voir [10]), qui nous donne :

$$\int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c G)^k\leqslant\int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c u)^k.$$

Le premier terme de cette inégalité majore $(\mathrm{dd}^c G)^k(\Sigma\cap P)$ car u est nulle par construction sur $\Sigma\cap P$ hors d'un pluripolaire qui n'est pas chargé par $(\mathrm{dd}^c G)^k$. Le deuxième terme se développe en

$$\int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c u)^k=\sum_{j=0}^k C_k^j t^j\int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c\phi)^{k-j}\wedge(\mathrm{dd}^c\omega)^j.$$

Or on constate sans peine que $\{u\leqslant G\}$ ne rencontre pas la frontière de Shiloff de Σ (car $u_{|\partial_S\Sigma}\geqslant 2t\log 2/\log 3>t\geqslant G_{|\partial_S\Sigma}$), et n'est donc pas chargé par $(\mathrm{dd}^c\phi)^k$. Il en découle que

$$(\mathrm{dd}^cG)^k(\Sigma\cap P)\leqslant \sum_{j=1}^{k} C_k^j t^j \int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c\phi)^{k-j}\wedge(\mathrm{dd}^c\omega)^j \leqslant t\int_{\{u\leqslant G\}}(\mathrm{dd}^c(\phi+\omega))^k.$$

Remarquons finalement que $\{u\leqslant G\}$ est contenu dans le polydisque $\sqrt{6}\,P$. En effet, comme $\Sigma\subset 2P$, on a l'inégalité $\phi\geqslant 2\omega_{2P,\Omega}$ et donc $\{u\leqslant G\}$ est dans $\{\omega_{2P,\Omega}\leqslant\frac{1}{2}\}$, qui n'est autre que le polydisque de rayon $\sqrt{6}$. On obtient alors

$$(\mathrm{dd}^cG)^k(\Sigma\cap P)\leqslant t\int_{\sqrt{6}\,P}(\mathrm{dd}^c(\phi+\omega))^k\leqslant t4^k\,\mathrm{Cap}(\sqrt{6}\,P,\Omega),$$

ce qui est la conclusion voulue. □

Bibliographie

[1] Alexander, H. J. & Taylor, B. A., Comparison of two capacities in $\mathbf{C}^n$. *Math. Z.*, 186 (1984), 407–417.

[2] Bedford, E., Lyubich, M. Yu. & Smillie, J., Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 114 (1993), 272–288.

[3] Briend, J.-Y., Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbf{CP}^k$. Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, Toulouse, 1997.

[4] Brolin, H., Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6 (1965), 103–144.

[5] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. & Sinai, Ya. G., *Ergodic Theory.* Grundlehren Math. Wiss., 245. Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.

[6] Fornæss, J. E. & Sibony, N., Complex dynamics in higher dimensions, dans *Complex Potential Theory* (Montreal, PQ, 1993), p. 131–186. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[7] — Oka's inequality for currents and applications. *Math. Ann.*, 301 (1995), 399–415.

[8] Freire, A., Lopes, A. & Mañé, R., An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 14 (1983), 45–62.

[9] Hubbard, J. H. & Papadopol, P., Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43 (1994), 321–365.

[10] Klimek, M., *Pluripotential Theory.* London Math. Soc. Monographs (N.S.), 6. Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[11] Lyubich, M. Yu., Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 3 (1983), 351–385.

[12] Pollicott, M., *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds.* London Math. Soc. Lecture Note Ser., 180. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[13] Ruelle, D., An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 9 (1978), 83–87.

[14] Tortrat, P., Aspects potentialistes de l'itération des polynômes, dans *Séminaire de théorie du potentiel, Paris*, n° 8, p. 195–209. Lecture Notes in Math., 1235. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Jean-Yves Briend
Laboratoire Analyse, Topologie, Probabilités
UMR 6632
Centre de Mathématiques et d'Informatique
Université de Provence
39, rue F. Joliot-Curie
FR-13453 Marseille Cedex 13
France
briend@gyptis.univ-mrs.fr

Julien Duval
Laboratoire Émile Picard
UMR 5580
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
FR-31062 Toulouse Cedex 04
France
duval@picard.ups-tlse.fr

Reçu le 10 août 1998