C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 919–922

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Differential Geometry

Lie bialgebroids of generalized *CRF*-manifolds

Bi-algébroïdes de Lie des variétés CRF généralisées

Yat Sun Poon [a], Aïssa Wade [b]

[a] *Department of Mathematics, University of California at Riverside, CA 92521, USA*
[b] *Department of Mathematics, Penn State University, University Park, PA 16802, USA*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 22 July 2009
Accepted after revision 6 July 2010

Presented by Charles-Michel Marle

ABSTRACT

The notion of a generalized *CRF*-structure on a smooth manifold was recently introduced and studied by Vaisman (2008) [6]. An important class of generalized *CRF*-structures on an odd dimensional manifold M consists of *CRF*-structures having complementary frames of the form $\xi \pm \eta$, where ξ is a vector field and η is a 1-form on M with $\eta(\xi) = 1$. It turns out that these kinds of *CRF*-structures give rise to a special class of what we called strong generalized contact structures in Poon and Wade [5]. More precisely, we show that to any *CRF*-structures with complementary frames of the form $\xi \pm \eta$, there corresponds a canonical Lie bialgebroid. Finally, we explain the relationship between generalized contact structures and another generalization of the notion of a Cauchy–Riemann structure on a manifold.

RÉSUMÉ

La notion de structure *CRF* généralisée sur une variété lisse a été récemment introduite et étudiée par Vaisman (2008) [6]. Une classe importante de structures *CRF* généralisées sur une variété M de dimension impaire est constituée de structures *CRF* généralisées ayant des repères supplémentaires de la forme $\xi \pm \eta$, où ξ est un champ de vecteurs et η est une 1-forme differentielle sur M avec $\eta(\xi) = 1$. Il s'avère que ces types de structures *CRF* généralisées donnent lieu à une classe spéciale de structures que nous avons appelées des structures de contact généralisées fortes dans Poon et Wade [5]. Plus précisément, nous montrons qu'à toute structure *CRF* généralisée ayant des repères supplémentaires de la forme $\xi \pm \eta$, il correspond un bi-algèbroïde de Lie canonique. Finalement, nous expliquons la relation entre les structures de contact généralisées et une autre généralisation de la notion de structure-CR (Cauchy–Riemann) sur une variété.

Version française abrégée

Soit M une variété lisse. Il est connu que $TM \oplus T^*M$, muni du produit symétrique et du crochet de Courant (voir les formules (1) et (2) ci-dessous), est un algébroïde de Courant ainsi que son complexifié $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$.

Rappelons qu'une *F-structure généralisée* sur M, au sens de Vaisman (voir [6]), est la donnée d'un sous fibré E de rank k du fibré $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ qui est isotrope par rapport au produit symétrique et vérifie $E \cap \overline{E}^{\perp} = \{0\}$, où $\overline{E}^{\perp}$ est le

E-mail addresses: ypoon@math.ucr.edu (Y.S. Poon), wade@math.psu.edu (A. Wade).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.005

conjugué du supplémentaire orthogonal $E^{\perp}$ de E par rapport au produit symétrique (1) ci-dessous. Vaisman a montré que cette définition d'une F-structure généralisée est équivalente à la donnée d'un endomorphisme de fibrés $\Phi : TM \oplus T^*M \to TM \oplus T^*M$ tel que $\Phi + \Phi^* = 0$ et $\Phi^3 + \Phi = 0$ (voir [6]). Si en outre, l'espace des sections de E est stable pour le crochet de Courant, alors E est appelé une *structure CRF généralisée* [6]. Cette notion généralise à la fois les F-structures et les structures de Cauchy–Riemann classiques.

Nous nous intéressons aux F-structures généralisées Φ définies sur une variété lisse M de dimension impaire munie de sections globales $\xi \pm \eta$, où ξ est un champ de vecteurs et η est une 1-forme tels que $\eta(\xi) = 1$ sur M. Le couple $(\Phi, \xi + \eta)$ est appelé une *F-structure généralisée avec supplémentaires orthogonaux* (voir [6]). Deux couples $(\Phi, \xi + \eta)$ et $(\Phi', \xi' + \eta')$ sont dits équivalents s'il existe une fonction f qui ne s'annule en aucun point de M et telle que : $\eta' = f\eta$, $\xi' = \frac{1}{f}\xi$, $\Phi' = \Phi$.

Définition 0.1. *Une* structure presque de contact généralisée *sur M est la donnée d'une classe d'équivalence de tels couples $(\Phi, \xi + \eta)$.*

Toute F-structure généralisée Φ peut être représentée par une matrice dont les quatre blocs carrés sont $\varphi : TM \to TM$, $\pi^{\sharp} : T^*M \to TM$, $\theta^{\flat} : TM \to T^*M$ et $-\varphi^* : T^*M \to T^*M$, où φ est un tenseur de type $(1,1)$, π est un champ de bi-vecteurs et θ est une 2-forme sur M. Donc une structure presque de contact généralisée n'est rien d'autre qu'une classe d'équivalence de tenseurs $(\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$ verifiant des conditions de compatibilité (voir les relations (3), (4) et (5) ci-dessous).

Considérons une structure de contact généralisée sur M représentée par le quintuplet $(\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$ et définissons les fibrés vectoriels complexes :

$$E = \{e - i\Phi(e) \mid e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\} \quad \text{et} \quad \bar{E} = \{e + i\Phi(e) \mid e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\}.$$

Soit L_ξ le complexifié du fibré réel de rang 1 engendré par ξ et $L = L_\xi \oplus E$. Les fibrés vectoriels complexes E, $\bar{E}$, L et $\bar{L}$ sont indépendants du choix du représentant dans une classe d'équivalence fixée.

Toute structure presque de contact généralisée sur M dont le fibré associé L est intégrable (c'est-à-dire, l'espace $\Gamma(L)$ des sections de L est stable pour le crochet de Courant) est simplement appelée une *structure de contact généralisée*. Si L et L^* sont simultanément intégrables alors la structure de contact généralisée est dite *forte*.

A priori, l'intégrabilité de L n'implique pas celle de $E^{(1,0)}$. Cependant, nous montrons que la réciproque est vraie. Par ailleurs, étant donnée une structure de contact généralisée sur M, le couple (L, L^*) de fibrés vectoriels complexes associés détermine toujours un quasi-bialgébroïde de Lie, qui n'est pas nécessairement un bialgébroïde de Lie. Il est tout à fait naturel de se demander la question suivante : l'intégrabilité de E implique-t-elle que (L, L^*) est un bi-algébroïde de Lie ? L'étude de cette question a mené au résultat suivant :

Théorème 0.2. *Étant donnée une structure CRF généralisée Φ avec supplémen-taires orthogonaux $\xi \pm \eta$, le couple (L, L^*) de fibrés associés détermine un bi-algébroïde de Lie au dessus de M.*

En combinant le théorème précédent avec le Théorème 2.7 de [5], nous obtenons le corollaire ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur à [5] pour plus de détails.

Corollaire 0.3. *Pour toute structure CRF généralisée Φ avec supplémentaires orthogonaux $\xi \pm \eta$, $d\eta$ est de type $(1,1)$ par rapport au tenseur Φ défini sur $(\ker\eta \oplus \ker\xi) \otimes \mathbb{C}$.*

Nous montrons aussi que les structures de contact généralisées sont des F-structures au sens de Vaisman [6] et celles qui sont fortes sont des structures *CRF*. Par ailleurs, les structures de contact généralisées fortes donnent des structures de Cauchy–Riemann généralisées au sens de Li-Bland.

1. Generalized *CRF*-structures with complementary frames

Let M be a smooth manifold. The space $\Gamma(TM \oplus T^*M)$ of sections of the vector bundle $TM \oplus T^*M$ is endowed with two natural $\mathbb{R}$-bilinear operations: a symmetric bilinear operation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and the Courant bracket $[\![-,-]\!]$ given by:

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \frac{1}{2}(\iota_X\beta + \iota_Y\alpha), \tag{1}$$

$$[\![X + \alpha, Y + \beta]\!] = [X, Y] + \left(\mathcal{L}_X\beta - \mathcal{L}_Y\alpha - \frac{1}{2}d(\iota_X\beta - \iota_Y\alpha)\right). \tag{2}$$

The vector bundle $TM \oplus T^*M$ together with these two operations and the natural projection $\rho : TM \oplus T^*M \to TM$ form a fundamental example of *Courant algebroid* (see [1,3]) and ρ is called the *anchor map*. We will consider complexified bundles, and linearly extend the above symmetric form and the Courant bracket to obtain a complex Courant algebroid structure on $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$.

Definition 1.1. *(See [6].) A generalized F-structure on a smooth manifold M is given by a complex subbundle E of $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ of rank k, which is isotropic with respect to the symmetric pairing $\langle -, - \rangle$ with $E \cap \overline{E}^{\perp} = \{0\}$, where $\overline{E}^{\perp}$ is the complex conjugate of the orthogonal complement $E^{\perp}$ of E relative to $\langle -, - \rangle$. If, in addition, the space of sections of E is closed under the Courant bracket, then E is called a generalized CRF-structure.*

One has: $E^{\perp} \cap \overline{E}^{\perp} = S \otimes \mathbb{C}$, where S is a real subbundle of $TM \oplus T^*M$ whose rank is $2(\dim M - k)$. Moreover, $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = E \oplus \overline{E} \oplus (S \otimes \mathbb{C}) = \mathcal{E}_c \oplus (S \otimes \mathbb{C})$, where $\mathcal{E}_c = E \oplus \overline{E}$ is the complexification of a real subbundle $\mathcal{E} \subset TM \oplus T^*M$.

CRF-structures generalize both classical F-structures and Cauchy–Riemann structures. The above definition of a generalized F-structure is equivalent to an endomorphism Φ of $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ such that $\Phi + \Phi^*$ and $\Phi^3 + \Phi = 0$. The eigenvalues of Φ are i, $-i$, and 0. Their corresponding eigenbundles are E, $\overline{E}$, and S, respectively.

Definition 1.2. *(See [6].) Let Φ be a generalized F-structure together with global orthogonal cross sections Z_r, Z^s ($r = 1, \ldots, q, s = 1, \ldots, p$) that span the space $\Gamma(S)$ of sections of its zero eigenbundle S with $\langle Z_r, Z_r \rangle = -1$ and $\langle Z^s, Z^s \rangle = 1$. Then Φ is called a generalized F-structure with complementary frames.*

We are now interested in generalized F-structures on a $(2n + 1)$-dimensional manifold M whose corresponding zero-eigenbundle S is spanned by two global sections $\xi \pm \eta$, for some vector field ξ and for some 1-form η. The pair $(\Phi, \xi + \eta)$ is called a *generalized almost contact pair* [4]. Two such pairs $(\Phi, \xi + \eta)$ and $(\Phi', \xi' + \eta')$ are said to be equivalent if there is a function f without zero on M such that $\Phi' = \Phi$, $\eta' = f\eta$, $\xi' = \frac{1}{f}\xi$.

Definition 1.3. *(See [4].) A generalized almost contact structure on M is an equivalent class of pairs $(\Phi, \xi + \eta)$.*

In terms of components, a generalized almost contact structure is given by an equivalent class of tensorial objects: $\mathcal{J} = (\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$, where ξ is a vector field, η is a 1-form, π is a bivector field, θ is a 2-form, and φ is a $(1, 1)$-tensor. Indeed, the bundle map $\Phi : TM \oplus T^*M \to TM \oplus T^*M$ has four components, i.e. $\varphi : TM \to TM$, $\pi^\sharp : T^*M \to TM$, $\theta^\flat : TM \to T^*M$ and $-\varphi^* : T^*M \to T^*M$, where we adopt the notations: $\beta(\pi^\sharp\alpha) = \pi(\alpha, \beta)$, and $(\theta^\flat X)(Y) = \theta(X, Y)$ for any 2-form θ, bivector field π, 1-forms α and β, and vector fields X and Y. These tensors are subjected to the following relations:

$$\theta^\flat\varphi = \varphi^*\theta^\flat, \qquad \varphi\pi^\sharp = \pi^\sharp\varphi^*, \tag{3}$$

$$\varphi^2 + \pi^\sharp\theta^\flat = -\mathbb{I} + \xi \otimes \eta, \qquad \left(\varphi^*\right)^2 + \theta^\flat\pi^\sharp = -\mathbb{I} + \eta \otimes \xi. \tag{4}$$

$$\eta \circ \varphi = \varphi^*\eta = 0, \qquad \eta \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp\eta = 0, \qquad \iota_\xi\varphi = 0, \qquad \iota_\xi\theta = 0, \qquad \iota_\xi\eta = 1. \tag{5}$$

The $\pm i$-eigenbundles of Φ are:

$$E = \left\{e - i\,\Phi(e) \,\middle|\, e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\right\} \quad \text{and} \quad \overline{E} = \left\{e + i\,\Phi(e) \,\middle|\, e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\right\}.$$

Let L_ξ and L_η be the complexifications of the real line bundles generated by ξ and η, respectively. Then $S \otimes \mathbb{C} = L_\xi \oplus L_\eta$ is the 0-eigenbundle of Φ.

Proposition 1.1. *Let E be a CRF-structure with complementary frames $\xi \pm \eta$ on M. Then $L = L_\xi \oplus E$ is integrable, that is, $[\![\Gamma(L), \Gamma(L)]\!] \subset \Gamma(L)$.*

Proof. From Vaisman's result [7], it follows that the integrability of E implies that $[\![\Gamma(E), \Gamma(E')]\!] \subset \Gamma(E')$, where $E' = L_\xi \oplus L_\eta \oplus E$ is the orthogonal complement of E with respect to $\langle -, - \rangle$. Therefore $[\![e - i\Phi(e), \xi]\!]$ is a cross section of $E' = L_\xi \oplus L_\eta \oplus E$ for any $e \in \Gamma(\ker\eta \oplus \ker\xi)$. Moreover, using properties of the Courant bracket [3], one gets:

$$0 = \xi \cdot \left\langle e - i\Phi(e), \xi \right\rangle = \left\langle \left[\!\!\left[\xi, e - i\Phi(e)\right]\!\!\right] + \mathcal{D}\left\langle e - i\Phi(e), \xi \right\rangle, \xi \right\rangle + \left\langle e - i\Phi(e), [\![\xi, \xi]\!] + \mathcal{D}\langle \xi, \xi \rangle \right\rangle,$$

where $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\beta \circ \varrho^* \circ d$, β being the canonical isomorphism of $TM \oplus T^*M$ induced by $\langle -, - \rangle$. This can be rewritten as $\langle [\![\xi, e - i\Phi(e)]\!], \xi \rangle = 0$, which implies that $[\![e - i\Phi(e), \xi]\!]$ is a section of $L_\xi \oplus E$. Hence L is integrable. □

Definition 1.4. *(See [4].) A generalized almost contact structure on M with representative $(\Phi, \xi + \eta)$ is simply called a generalized contact structure if its associated isotropic bundle $L = L_\xi \oplus E$ is integrable. If in addition, (L, L^*) is a Lie bialgebroid, then we call it a strong generalized contact structure.*

Theorem 1.5. *Let E be a CRF-structure with complementary frames $\xi \pm \eta$ on M. Then the pair (L, L^*) determines a strong generalized contact structure on M, where $L = L_\xi \oplus E$ is defined as above.*

Proof. We identify L^* with $L_\eta \oplus \overline{E}$. Then, $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = L \oplus L^*$. Since $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ is a Courant bracket, we can proceed as follows: we first show that L^* is integrable and then use the fact that Lie bialgebroids are in one-to-one correspondence with pairs of transversal Dirac structures.

We have $[\![\eta, e+i\Phi(e)]\!] \in \Gamma(\bar{E}')$ for any $e \in \Gamma(\ker\eta \oplus \ker\xi)$ since $[\![\Gamma(\bar{E}), \Gamma(\bar{E}')]\!] \subset \Gamma(\bar{E}')$.
Furthermore, from the properties of the Courant bracket, one gets

$$0 = \big\langle [\![\eta, e+i\Phi(e)]\!] + \mathcal{D}\langle e+i\Phi(e), \eta\rangle, \eta\big\rangle + \big\langle e+i\Phi(e), [\![\eta,\eta]\!] + \mathcal{D}\langle \eta, \eta\rangle\big\rangle.$$

This gives $\langle [\![\eta, e+i\Phi(e)]\!], \eta\rangle = 0$. It follows that $[\![\eta, e+i\Phi(e)]\!] \in \Gamma(L^*)$ for any $e \in \Gamma(\ker\eta \oplus \ker\xi)$. This shows that L^* is integrable. Hence it is a complex Dirac structure. Using Proposition 1.1, we obtain that L and L^* are two transverse Dirac structures. Consequently, (L, L^*) is a Lie bialgebroid. $\square$

Theorem 1.5 shows that certain strong generalized contact structures on M can be made out of equivalent classes of *CRF*-structure with complementary frames $\xi \pm \eta$ on M. Furthermore, combining Theorem 1.5 and Theorem 2.7 from [5], one immediately gets:

Corollary 1.6. *Let Φ be a CRF-structure with complementary frames $\xi \pm \eta$ on M. Then* $\mathrm{d}\eta$ *is of type* $(1,1)$ *with respect to Φ.*

2. Relationships with other works

Another generalization of Cauchy–Riemann structures was introduced in [2] under the name of *generalized CR-structures*. We will explain their relationship with generalized contact structures. We refer the reader to [2] for more details about AV-Courant algebroids and generalized *CR*-structures.

Given an even-dimensional smooth manifold M equipped with a generalized contact structure having $(\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$ as representative. Let $A = TM$ and $V = M \times \mathbb{R}$ the trivial real line bundle. Then $\mathbb{A} = TM \oplus T^*M$ is an AV-Courant algebroid [2]. It is known that $\mathbb{A}$ is an exact Courant algebroid and we have: $0 \to V \otimes T^*M \xrightarrow{j} \mathbb{A} \xrightarrow{\varrho} TM \to 0$, where $V \otimes T^*M \simeq T^*M$ and $j \equiv \varrho^*$. Take $H := \ker\eta$, identify H^* with $\ker F$, and set $\mathbb{H} = \ker\eta \oplus \ker F$. Then the endomorphism $\mathbb{J} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ whose components are φ, π, θ, and $-\varphi^*$ determines a generalized *CR*-structure in Li-Bland's sense [2] if the following two conditions hold:

(i) $\mathbb{J} + \mathbb{J}^* = 0$ and $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}$;
(ii) The space of sections of the subbundle $K := q^{-1}(\ker(\mathbb{J} - i\mathbb{I}))$ is closed under $[\![-,-]\!]$, where $q : \varrho^{-1}(H) \to \varrho^{-1}(H)/j(V \otimes \mathrm{Ann}(H))$ is the natural projection.

Since $K := q^{-1}(\ker(\mathbb{J} - i\mathbb{I}))$ corresponds to $\bar{L}^* := L_\eta \oplus E^{(1,0)}$, there follows:

Remark. The map $\mathbb{J} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ determines a generalized *CR*-structure on M if the space of sections of $\bar{L}^*$ is closed under the Courant bracket. In other words, only representatives of strong generalized contact structures determine *CR*-structures in Li-Bland's sense.

Acknowledgement

The first author was partially supported by NSF under DMS-0906264.

References

[1] T. Courant, Dirac structures, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990) 631–661.
[2] D. Li-Bland, AV-Courant algebroids and generalized *CR*-structures, preprint arXiv:0811.4470.
[3] Z.J. Liu, A. Weinstein, P. Xu, Manin triples for Lie bialgebroids, J. Differential Geom. (1997) 547–574.
[4] Y.S. Poon, A. Wade, Approaches to generalize contact structures, Pure Appl. Math. Quat. (PAMQ) 6.2 (2010) 603–622.
[5] Y.S. Poon, A. Wade, Generalized contact structures, arXiv:0912.5314, J. London Math. Soc., in press.
[6] I. Vaisman, Generalized *CRF*-structures, Dedicata 133 (2008) 129–154.
[7] I. Vaisman, Isotropic subbundles of $TM \oplus T^*M$, Methods Mod. Phys. 4 (2007) 487–516.