Mitgeteilt am 28. April 1954 durch T. NAGELL

Über gewisse Axiomensysteme, die abstrakte Gruppen bestimmen

Von BENGT STOLT

§ 1. Einleitung

In meiner Dissertation[1] habe ich nebst vollständigen und unvollständigen Axiomensystemen auch einige unentschiedene Systeme aufgestellt. In zwei späteren Abhandlungen[2] habe ich bewiesen, dass vier von diesen Systemen vollständig und zwei unvollständig sind. Die Vollständigkeit eines dieser vier Systeme wurde schon von CARLESON gezeigt; siehe [2]. Unabhängig davon hat CROISOT[3] die Vollständigkeit von zwei derselben Systeme bewiesen. Er hat auch gezeigt, dass ein System unvollständig ist.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Vollständigkeit von vier weiteren Systemen zeigen. Von den unentschiedenen Systemen in [1] bleiben dann nur zwei Systeme übrig.

Betreffs der Bezeichnungen wird auf [1] verwiesen.

§ 2. Die unentschiedenen Systeme

In [1] werden die folgenden unbestimmten Systeme aufgestellt.

1) $A, E, U, lU, rE.i, l\varepsilon.i, rv.i, I(U)$

2) $A, E, U, lE.I, lU.I, r\varepsilon.I, rv.I, li(U), rI(U)$

3) $A, E, lE, U, lv.i, r\varepsilon.i, rv.i$

4) $A, E, lE, lU.I, r\varepsilon.I, rv.I, li(U), ri(U)$

5) $A, E, lE, lU.rI, r\varepsilon.rI, rv.rI, li(U), rI(U)$

6) $A, E, lE.li, rU, r\varepsilon.li$

7) $A, E, lE, lU.ri, rU.ri, li(U), I(U)$

8) $A, E, lE, rE, lU.ri, li(U), I(U)$

[1] Siehe [1]. Mit [ ] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit hingewiesen.
[2] Siehe [2] und [3].
[3] Siehe [4].

Zunächst werden wir 2, 4, 6 und 7 in folgenden Systemen zerlegen.

2 a) A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$
2 b) A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $r\varepsilon.I$, $li\,(U)$, $rI\,(U)$
2 c) A, E, U, $lE.I$, $lU.I$, $rv.I$, $li\,(U)$, $rI\,(U)$
4 a) A, E, $lE.ri$, $lU.ri$, $ri\,(U)$
4 b) A, E, $lE.li$, $lU.li$, $ri\,(U)$
6 a) A, E, $lE.li$, $rU.li$, $r\varepsilon.li$, $ri\,(U)$
7 a) A, E, $lE.ri$, $lU.ri$, $li\,(U)$, $I\,(U)$
7 b) A, E, $lE.ri$, $rU.ri$, $li\,(U)$, $I\,(U)$
7 c) A, E, $lE.ri$, $rU.ri$, $lv.ri$, $li\,(U)$
7 d) A, E, lE, $rU.ri$, $li\,(U)$

Die Unvollständigkeit von 1 ist von CROISOT gezeigt. Er zeigt auch, dass 2 a und 3 vollständig sind, was unabhängig von STOLT bzw. CARLESON gezeigt ist. Ferner habe ich gezeigt, dass die Systeme 2 b und 2 c unvollständig und die Systeme 4 a und 4 b vollständig sind. In folgendem Abschnitt werden wir die Vollständigkeit von 6 a, 7 a, 7 b und 7 c zeigen. Daraus folgt, dass auch 8 vollständig ist. Von den unentschiedenen Systemen bleiben folglich 5 und 7 d übrig. Wahrscheinlich ist 5 sogar für eine zugrundeliegende endliche Menge unvollständig, aber es ist nicht leicht, ein Beispiel dafür zu finden.

Wenn man ein System bildet, das weniger umfassend als 2, 6, 7 oder 8 aber nicht umfassender als 2 a–2 c, 6 a oder 7 a–7 d ist, ist es immer unvollständig.

§ 3. Vollständige Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir die Vollständigkeit von 6 a, 7 a, 7 b und 7 c zeigen. Es empfiehlt sich, mit 7 a zu beginnen.

Vollständigkeitsbeweis von 7 a:

Der Annahme zufolge gibt es ein e mit $lE.ri$ und $lU.ri$. Ferner gibt es ein c, das $c\,e \supset c$ erfüllt, und ein c', das $c'\,c \supset e$ erfüllt. Aus

$$\underbrace{c' \qquad \underbrace{c \qquad e}_{c}}_{e}$$

folgen wegen E und A $c'\,c \supset e_\alpha$ und $e_\alpha\, e \supset e$. Wegen Hilfssatz 2 in [1], S. 35, gilt auch $e_\alpha\, e_\alpha \supset e_\alpha$.

Wegen $lE.ri$ und $lU.ri$ gilt $e'_\alpha\, e_\alpha \supset e$. Aus

$$\underbrace{e'_\alpha \qquad \underbrace{c' \qquad c}_{e_\alpha}}_{e} \quad \text{und} \quad \underbrace{e_\alpha \qquad \underbrace{c' \qquad c}_{e}}_{e}$$

folgt $e'_\alpha c' \supset c'$ bzw. $e_\alpha c' \supset c'$. Wegen $li(U)$ gilt dann $e'_\alpha = e_\alpha$, woraus $e_\alpha e_\alpha \supset e$ folgt.

Wegen E gilt $e e_\alpha \supset e_\beta$, und aus $lE.ri$ und $lU.ri$ folgt $e'_\beta e_\beta \supset e$. Aus

$$\underbrace{\overbrace{e'_\beta \quad e}\!\underbrace{\quad e_\alpha}_{e_\beta}}_{e}$$

folgt wegen $lU.ri$ $e'_\beta e \supset e_\alpha$, und aus

$$\underbrace{\overbrace{e'_\beta \quad e_\alpha}\!\underbrace{\quad e_\alpha}_{e}}_{e_\alpha}$$

folgt wegen $li(U)$ $e'_\beta e_\alpha \supset e_\alpha$. Dann gilt $e'_\beta = e_\alpha$, woraus $e_\alpha e_\beta \supset e$ und $e_\alpha e \supset e_\alpha$ folgen.

Aus

$$\underbrace{\overbrace{e \quad e_\alpha}\!\underbrace{\quad e}_{e_\alpha}}_{e_\beta}$$

folgt $e e_\alpha \supset e_\gamma$ und $e_\gamma e \supset e_\beta$, und aus

$$\underbrace{\overbrace{e_\alpha \quad e_\gamma}\!\underbrace{\quad e}_{e_\beta}}_{e}$$

folgt $e_\alpha e_\gamma \supset e_\alpha$. Schliesslich bilden wir

$$\underbrace{\overbrace{e \quad e_\alpha}\!\underbrace{\quad e_\gamma}_{e_\alpha}}_{e_\gamma},$$

woraus $e e_\alpha \supset e_\varepsilon$ und $e_\varepsilon e_\gamma \supset e_\gamma$ folgen. Wegen Hilfssatz 2 in [1], S. 35, gilt $e_\varepsilon e_\varepsilon \supset e_\varepsilon$. Aus $I(U)$ folgt dann $e_\varepsilon = e_\alpha$. Daraus erhalten wir $e e_\alpha \supset e_\alpha$, und wegen $li(U)$ gilt auch $e_\alpha = e$. Folglich ist das System auf das vollständige System 4 in [1], S. 43, zurückgeführt.

Vollständigkeitsbeweis von 6 a:

Wenn e ein Element mit $lE.li$, $rU.li$ und $r\varepsilon.li$ ist, bestehen $e c \supset c$ und $c c' \supset e$. Aus

$$\overbrace{\overbrace{e \quad c}^{c}\!\underbrace{\quad c'}}^{e}$$

folgen $c c' \supset e_\alpha$ und $e e_\alpha \supset e$, und wegen Hilfssatz 2 in [1], S. 35, gilt $e_\alpha e_\alpha \supset e_\alpha$.

Wenn a beliebig ist, gilt $a_1' a \supset e$. Aus

$$\overbrace{\overbrace{a_1' \quad a}^{e} \quad e_\alpha}^{e}$$

folgt $a e_\alpha \supset a$, d.h. e_α hat die Eigenschaft $rI(E)$.
Wegen $lE.li$ gilt $e_1 e \supset e$. Aus

$$\overbrace{\overbrace{e_1 \quad e_\alpha}^{e_1} \quad e}^{e}$$

folgt wegen $rU.li$ $e_\alpha e \supset e$, und aus

$$\overbrace{\overbrace{c \quad c'}^{e_\alpha} \quad e}^{e}$$

folgt wegen $rU.li$ $c' e \supset c'$. Wegen Hilfssatz 2 in [1], S. 35, gilt dann $e e \supset e$, womit das System auf das vollständige System 12 in [1], S. 47, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 7 b:

Wenn e ein Element mit $lE.ri$ und $rU.ri$ ist, bestehen $c e \supset c$ und $c_1' c \supset e$. Dann bilden wir

$$\underbrace{c_1' \quad \underbrace{c \quad e}_{c}}_{e} \quad \text{und} \quad \underbrace{c \quad \underbrace{c_1' \quad c}_{e}}_{c},$$

woraus $c_1' c \supset e_\alpha$ und $e_\alpha e \supset e$ bzw. $c c_1' \supset e_c$ und $e_c c \supset c$ folgen. Wegen Hilfssatz 2 in [1], S. 35, bestehen ferner $e_\alpha e_\alpha \supset e_\alpha$ und $e_c e_c \supset e_c$, und aus $I(U)$ folgt $e_c = e_\alpha$.
Aus

$$\overbrace{\overbrace{c \quad c_1'}^{e_\alpha} \quad e}^{e}$$

folgen $c_1' e \supset c_\alpha'$ und $c c_\alpha' \supset e$. Schliesslich bilden wir

$$\overbrace{\overbrace{c \quad e}^{c} \quad c_\alpha'}^{e},$$

woraus nach $rU.ri$ $e c_\alpha' \supset c_\alpha'$ folgt. Wegen $li(U)$ gilt $e e \supset e$, womit das System auf das vollständige System 10 in [1], S. 46, zurückgeführt ist.

Vollständigkeitsbeweis von 7 c:

Wenn e ein Element mit $lE.ri$, $rU.ri$ und $lv.li$ ist, bestehen $c\,e \supset c$ und $c'\,c \supset e$. Aus

$$\underbrace{\overbrace{c' \quad c}\,\underbrace{\quad e}_{c}}_{e}$$

folgen $c'\,c \supset e_\alpha$ und $e_\alpha\,e \supset e$, und aus Hilfssatz 2 in [1], S. 35, folgt $e_\alpha\,e_\alpha \supset e_\alpha$. Wegen $lE.ri$ gilt $e_1\,e_\alpha \supset e$, und nach

$$\underbrace{\overbrace{e_\alpha \quad c'}\,\underbrace{\quad c}_{e}}_{e} \quad \text{und} \quad \underbrace{\overbrace{e_1 \quad c'}\,\underbrace{\quad c}_{e_\alpha}}_{e}$$

bestehen wegen $lv.li$ $e_\alpha\,c' \supset c'$ und $e_1\,c' \supset c'$. Aus $li\,(U)$ folgt $e_1 = e_\alpha$, und dann gilt $e_\alpha\,e_\alpha \supset e$. Schliesslich bilden wir

$$\overbrace{\overbrace{e_\alpha \quad e_\alpha}^{e_\alpha}\,\underbrace{\quad e}}^{e},$$

woraus $e_\alpha\,e \supset e_\alpha$ folgt, und

$$\overbrace{\overbrace{e_\alpha \quad e}^{e_\alpha}\,\underbrace{\quad e_\alpha}}^{e},$$

woraus $e\,e_\alpha \supset e_\alpha$ folgt. Wegen $li\,(U)$ gilt dann $e_\alpha = e$, womit das System auf das vollständige System 10 in [1], S. 46, zurückgeführt ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1]. B. Stolt, Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala 1953.

[2]. —— Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik. Arkiv för matematik Bd 3 Nr 5 (1954), S. 89–101.

[3]. —— Zur Axiomatik endlicher Gruppen. Arkiv för matematik Bd 3.

[4]. R. Croisot, Demi-groupes et axiomatique des groupes. C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), p. 778–780.

Tryckt den 6 oktober 1954

Uppsala 1954. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB