Problème de Dirichlet pour le système $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} = 0$

Jacqueline Detraz

Nous étudions dans **C**, les fonctions f vérifiant l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} = 0$, en particulier, le problème de Dirichlet pour cet opérateur; nous étudions le problème analogue dans $\mathbf{C}^n$.

On considère l'équation $(*)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} = 0$ dans un ouvert Ω de **C**. Les solutions de $(*)$ sont les fonctions de la forme $f = \bar{z}h + k$ où h, k sont holomorphes dans Ω.

L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}}$ est elliptique, non fortement elliptique; il ne vérifie pas le principe du maximum: la fonction $f(z) = \bar{z}z - 1$ vérifie $(*)$, est nulle sur le cercle unité T, non identiquement nulle sur le disque unité D.

Il n'y a donc pas d'unicité du problème de Dirichlet pour cet opérateur. Nous montrons (théorème 1) que les ouverts d'unicité sont les ouverts dont la frontière n'est pas rationnelle.

Dans $\mathbf{C}^n$, nous étudions le système correspondant (S): $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} = 0$ $(i \leqq n, j \leqq n)$ et nous montrons que les seuls ouverts biholomorphes à la boule pour lesquels il n'y a pas unicité du problème de Dirichlet pour (S) sont les ouverts homographiquement équivalents à la boule (théorème 3).

Nous caractérisons aussi les valeurs au bord des fonctions régulières vérifiant $(*)$ si $n=1$ (propositions 3 et 4) et (S) si $n>1$ (propositions 5 et 6).

Il existe une littérature russe abondante sur les fonctions vérifiant $(*)$ ou plus généralement polyanalytiques $\left(\text{qui vérifient } \frac{\partial^n f}{\partial^n \bar{z}} = 0\right)$; l'article de Balk et Zuev [1] présente l'ensemble de ces résultats.

D'autre part, des théorèmes d'approximation ont été établis dans [2] et [6]. Il serait intéressant d'étudier le problème de Dirichlet analogue pour des systèmes elliptiques plus généraux.

$E(\Omega)$ désignera l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, vérifiant $(*)$ dans Ω.

Remarquons que, si une fonction $f=\bar{z}h+k$ est dans $E(\Omega)$, h et k ne sont pas en général continues: par exemple la fonction $f=\bar{z}\log(1-z)-\log(1-z)$ est dans $E(D)$, où D est le disque unité.

Par contre, h et k ont une croissance contrôlée comme le montre la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit $f=\bar{z}h+k$ une fonction de $E(\Omega)$. Alors $h(z)=o\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\right)$ et $k=o\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\right)$.*

h est holomorphe et $h=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$, en utilisant la formule de la moyenne et la formule de Stokes, et en posant $d(z)=\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$, on a

$$|h(z)|\leqq\frac{1}{\pi d^2(z)}\left|\iint_{|z-y|<d(z)}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}(y)dy\wedge d\bar{y}\right|=\frac{C}{d^2(z)}\left|\int_{|z-y|=d(z)}f(y)dy\right|$$

$$=\frac{C}{d^2(z)}\left|\int_{|z-y|=d(z)}(f(y)-f(z))\,dy\right|\leqq\frac{C}{d(z)}\times\text{oscillation }(f,d(z))=o\left(\frac{1}{d(z)}\right).$$

Corollaire 1. *$E(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $C(\bar{\Omega})$,* [2].

En effet $|h(z)|\leqq\frac{\|f\|_\infty}{d(z)}$; la convergence d'une suite f_n dans $C(\bar{\Omega})$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact de Ω, de la suite h_n correspondante vers une fonction h holomorphe.

Proposition 2. *Soit f vérifiant $(*)$ dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}$ alors*

$$f(a)=-\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)\,dz}{z-a}+\frac{2}{\pi r^2}\iint_{|z-a|<r}f(z)\,dm(z).$$

Soit $f=\bar{z}h+k$ où h, k sont holomorphes; en utilisant la formule de Stokes on a:

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi r^2}\left[\bar{a}\iint_{|z-a|\leqq r}h(z)\,d\bar{z}\wedge dz+\iint_{|z-a|\leqq r}k(z)\,d\bar{z}\wedge dz\right]$$

$$=\frac{1}{2i\pi r^2}\left[\iint_{|z-a|\leqq r}h(z)(\bar{a}-\bar{z})\,d\bar{z}\wedge dz+\iint_{|z-a|\leqq r}f(z)\,d\bar{z}\wedge dz\right]$$

$$=\frac{1}{2i\pi r^2}\left[\iint_{|z-a|\leqq r}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}[f(z)(\bar{a}-\bar{z})]\,d\bar{z}\wedge dz+2\iint_{|z-a|\leqq r}f(z)\,d\bar{z}\wedge z\right]$$

$$=\frac{1}{2i\pi r^2}\int_{|z-a|\leqq r}f(z)(\bar{a}-\bar{z})\,dz+\frac{2}{\pi r^2}\iint_{|z-a|\leqq r}f(z)\,dm.$$

D'où le résultat. On en déduit:

Corollaire 2. *Si f vérifie $(*)$ dans un ouvert de* $\mathbf{C}$ *on a*

$$|f(z)| \leqq \frac{C}{r^2}\iint_{|z-y|\leqq r}|f(y)|\,dm.$$

On note $E^p(\Omega)=\left\{f\in L^p(\Omega),\ \frac{\partial^2 f}{\partial\bar{z}\partial\bar{z}}=0 \text{ dans } \Omega\right\},\ p\geqq 1.$

$E^p(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $L^p(\Omega)$ car la convergence vers f dans L^p d'une suite de fonctions de E^p entraîne la convergence uniforme sur tout compact, et donc f est dans E^p, d'après le corollaire 1. En particulier, pour $p=2$, il existe un noyau de Bergman reproduisant.

Soit $\Omega\subset\mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe; on note Γ la frontière $\partial\Omega$ de Ω. On note φ la représentation conforme du disque unité D sur Ω.

Définition. Ω sera dit *d'unicité* pour le problème de Dirichlet pour $(*)$ si toute fonction f de $E(\Omega)$ nulle sur Γ est identiquement nulle.

Théorème 1. *Si Γ est une courbe analytique, Ω est d'unicité si et seulement si la représentation conforme φ de D dans Ω n'est pas une fraction rationnelle.*

Soit

$$Z=\varphi(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\sum_0^n a_p z^p}{\sum_0^n b_p z^p},$$

on a

$$\bar{\varphi}(z)|_T=\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\Big|_T=\frac{\sum_0^n \bar{a}_p z^{n-p}}{\sum_0^n \bar{b}^p z^{n-p}}=\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(z)}.$$

$f(z)=\bar{\varphi}(z)\tilde{Q}(z)-\tilde{P}(z)$ est continue sur $\bar{D}$, nulle sur $T=\partial D$; alors la fonction $F(Z)=f(\varphi^{-1}(Z))=\bar{Z}\tilde{Q}(\varphi^{-1}(Z))-\tilde{P}(\varphi^{-1}(Z))$ est dans $E(\Omega)$, nulle sur Γ, non identiquement nulle. Ω n'est pas d'unicité.

Supposons que Γ soit une courbe analytique non d'unicité; la représentation conforme φ est analytique dans un voisinage V de $\bar{D}$, $V=\{z,|z|<R\}$ avec $R>1$; et il existe une fonction de $E(\Omega)$, $F(Z)=\bar{Z}H(Z)+K(Z)$ non identiquement nulle, nulle sur Γ. Il existe donc des fonctions holomorphes dans D, $h=H\circ\varphi$ et $k=K\circ\varphi$ telles que $\bar{\varphi}(z)h(z)+k(z)$ soit continue sur $\bar{D}$, nulle sur T. On considère la fonction g holomorphe dans la couronne $C_R=\left\{\frac{1}{R}<|z|<1\right\}$,

$$g(z)=\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)h(z)+k(z)=\left(\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)-\bar{\varphi}(z)\right)h(z)+\bar{\varphi}(z)h(z)+k(z).$$

Si $|z|\to 1$, $\bar{\varphi}(z)h(z)+k(z)\to 0$. D'autre part φ étant régulière et injective sur $\bar{D}$, $\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)-\bar{\varphi}(z)=O(1-|z|)$ et dist $(\varphi(z),\Gamma)$ est équivalent à $1-|z|$; d'après la proposition 1, $h(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ et $k(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$. On en déduit que $g(z)$ tend uniformément vers zéro lorsque $|z|$ tend vers 1. Donc la fonction $g(z)$ est identiquement nulle dans C_R. Et la fonction $\psi(z)=\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ holomorphe pour $|z|>\frac{1}{R}$ se prolonge par la fonction $-\frac{k(z)}{h(z)}$ en une fonction méromorphe dans la sphére de Riemann. ψ donc φ est rationnelle.

Remarques: 1) Les fonctions φ holomorphes dans D telles que $\bar{\varphi}=-\frac{k}{h}$ sur T ont été étudiées dans [3], en liaison avec l'étude du back-shift opérateur dans l'espace de Hardy $H^2(T)$.

2) On suppose que φ est non rationnelle. Soit A un ensemble de longueur positive sur Γ; alors toute fonction f de $E(\Omega)$, nulle sur A est identiquement nulle.

En effet, la même démonstration montre que la fonction g tend vers zéro sur l'ensemble $\varphi^{-1}(A)$ qui est de mesure positive sur T. g est donc identiquement nulle sur C_R et on conclut de même que si f n'est pas identiquement nulle φ doit être rationnelle.

3) Si φ est analytique pour $|z|<R$, les coefficients de Fourier de φ vérifient $|\hat{\varphi}(n)|<\frac{K}{R^n}$.

On peut remarquer qu'il n'existe pas de condition de croissance moins forte qui assure encore que Γ est d'unicité: en effet, si $(p_n)_n$ est une suite de nombres positifs tendant vers zéro, on peut trouver une suite (C_m) de nombres positifs tels que ([3], p. 45 et [5]) si on pose

$$\psi(z)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m\left(z-\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\right)^{-1}=\sum_0^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n=O(e^{-np_n})$$

et $\sum C_m m^4<\infty$, ψ est dans $C^1(\bar{D})$ et holomorphe si $z\neq 1+\frac{1}{m^2}$, $\forall m$.

Posons

$$B(z)=\Pi_m\frac{\frac{m^2}{1+m^2}-z}{1-\frac{m^2}{1+m^2}z} \quad \text{et} \quad g(z)=\psi\left(\frac{1}{z}\right)B(z).$$

Alors

$$g(z) = \sum C_m \Pi_{p\neq m} \frac{\dfrac{p^2}{1+p^2}-z}{1-\dfrac{p^2}{1+p^2}z} \times \left[\frac{z}{\dfrac{m^2}{m^2+1}-z}\right].$$

$g(z)$ est holomorphe bornée dans D et $(z-1)\left(\overline{\tilde{\psi}(z)}-\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right)B(z)$ tend vers 0 uniformément si $|z|\to 1$, où $\tilde{\psi}(z)=\sum_0^\infty \bar{a}_n z^n$.

Si ε est assez petit, $Z=\varphi(z)=z+\varepsilon\tilde{\psi}(z)$ est injective et holomorphe sur D. On pose

$$\Omega = \varphi(D), \quad H(Z) = (\varphi^{-1}(Z)-1)\varphi^{-1}(Z)B(\varphi^{-1}(Z)),$$
$$K(z) = (\varphi^{-1}(Z)-1)[\varphi^{-1}(Z)\varepsilon g(\varphi^{-1}(Z))+B(\varphi^{-1}(Z))],$$
$$\bar{Z}H(Z)-K(Z) = (z-1)\left((|z|^2-1)B(z)+\varepsilon z\left(\overline{\tilde{\psi}(z)}-\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right)B(z)\right)\to 0, \quad |z|\to 1.$$

Donc Ω n'est pas d'unicité. On peut choisir (p_n) pour que ψ soit dans C^∞. En particulier, il existe des ouverts à frontière C^∞ non rationnelle, et non d'unicité.

Etude de $E(\Omega)|\partial\Omega$

On suppose toujours Ω simplement connexe à frontière $\partial\Omega$ analytique et φ est la représentation conforme de D sur Ω.

Proposition 3. *Si φ est non rationnelle, l'espace $E(\Omega)|_{\partial\Omega}$ est dense dans $C(\partial\Omega)$, et différent de $C(\partial\Omega)$.*

a) Il suffit de montrer la densité dans $C(T)$ de l'espace $\tilde{E}$ des fonctions de la forme $\bar{\varphi}(z)P(z)+Q(z)$ où P et Q sont des polynômes trigonométriques.

Si $\tilde{E}$ n'est pas dense, il existe μ orthogonale à $\tilde{E}$, donc à $e^{in\sigma}$ pour $n\in\mathbf{N}$; μ s'écrit alors $\mu=G\,d\sigma$ où G est une fonction de l'espace de Hardy $H_0^1(D)$ et on a $\int_T G(e^{i\sigma})\bar{\varphi}(e^{i\sigma})e^{in\sigma}\,d\sigma=0$ $\forall n\in\mathbf{N}$; donc $G\bar{\varphi}$ est valeur au bord d'une fonction $H(z)$ de $H^1(D)$. On en déduit comme dans le Théorème 1 et [3] que $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\left(|z|>\frac{1}{R}\right)$ se prolonge par $\dfrac{H(z)}{G(z)}$ pour $|z|<1$ et φ est une fonction rationnelle.

b) Soit f une fonction de l'algèbre du disque telle que $f(0)\neq 0$. On pose $g(Z)=\bar{\varphi}^{-1}(Z)\times f(\varphi^{-1}(Z))$, $Z\in\Omega$. Si $g\in E(\Omega)|_{\partial\Omega}$ il existe h et k holomorphes dans D tels que $h(z)$ et $k(z)$ soient $O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ et $\bar{z}f(z)-\bar{\varphi}(z)h(z)-k(z)\to 0$, $|z|\to 1$, et donc $F(z)=\bar\varphi(z)zh(z)+zk(z)-f(z)$ tend vers 0 uniformément si $|z|\to 1$. $F(\varphi^{-1}(Z))$ est une fonction de $E(\Omega)$ nulle sur $\partial\Omega$; φ étant non rationnelle, $\partial\Omega$ est d'unicité d'après le théorème 1. Donc $h(z)=0$ et $zk(z)-f(z)\equiv 0$, ce qui est impossible car $f(0)\neq 0$. Donc $g\notin E(\Omega)|_{\partial\Omega}$.

Proposition 4. *Si* $\varphi=\dfrac{P}{Q}$ *est rationnelle,* $E(\Omega)|_{\partial\Omega}$ *est le sous-espace fermé formé des fonctions de la forme* $F=\left(\psi+\dfrac{\bar R}{\bar Q}\right)\circ\varphi^{-1}$ *où* $\psi\in A(D)$ *et* R *est un polynôme de degré* $\leqq \sup(\deg P, \deg Q)$.

$$P(z)=\sum_0^p a_k z^k \quad \text{et} \quad Q(z)=\sum_0^q b_k z^k, \quad a_p\neq 0,\ b_q\neq 0.$$

Soit $F=f\circ\varphi^{-1}\in E(\Omega)|_{\partial\Omega}$; il existe donc h et k holomorphes dans D telles que

$$\lim_{r\to 1}\left(f(e^{i\theta})-h(re^{i\theta})\right)\left(\sum_0^q \bar b_k r^k e^{i(q-k)\theta}\right)-k(re^{i\theta})\,e^{i(q-p)\theta}\times\sum_0^p \bar a_k r^k e^{i(p-k)\theta}=0.$$

Posons $\tilde Q(e^{i\theta})=\sum_0^q \bar b_k e^{i(q-k)\theta}$ et $\tilde P(e^{i\theta})=\sum_0^p \bar a_k e^{i(p-k)\theta}$. On en déduit que si $q\geqq p$ (resp. $q<p$) les coefficients de Fourier strictement négatifs de la fonction $f\cdot\tilde Q$ (resp. $f\cdot\tilde Q\cdot e^{i(p-q)\theta}$) sont nuls. Soit $g\in L^2(T)$ telle que $\hat g(n)=\hat f(n)$, $n<0$, et $\hat g(n)=0$, $n\geqq 0$; la condition précédente est équivalente au fait que si $q\geqq p$ (resp. $q<p$) $\widehat{g\bar Q}(n)=0$ si $n\notin[-q,0]$ (resp. $n\notin[-p,0]$). Donc $g\bar Q$ est un polynôme $\bar R$ et $f-\dfrac{\bar R}{\bar Q}$ est dans $A(D)$.

Réciproquement, soit $f=\psi+\dfrac{\bar R}{\bar Q}$ avec $\psi\in A(D)$, alors on a vu que si $q\geqq p$, la fonction $f\cdot\tilde Q$ a une extension holomorphe G dans le disque. Or $\tilde Q(z)$ et $z^{q-p}\tilde P(z)$ sont sans zéro commun dans $\bar D$, il existe donc h et k dans $A(D)$ telles que

$$G(z)=h(z)\tilde Q(z)+k(z)z^{q-p}\tilde P(z) \quad \text{si} \quad z\in\bar D$$

et donc

$$f(e^{i\theta})=h(e^{i\theta})+k(e^{i\theta})\bar\varphi(e^{i\theta}).$$

Le cas $q<p$ est analogue.

Le cas $n>1$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; on considère les fonctions f de $C^2(\Omega)$ vérifiant le système (S)

$$(S)\ \frac{\partial^2 f}{\partial\bar z_i\partial\bar z_j}=0,\quad \forall i\leqq n,\ \forall j\leqq n.$$

Ce sont les fonctions qui s'écrivent

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i h_i(z)+k(z) \quad \text{où} \quad h_i(i\leqq n)$$

et k sont des fonctions holomorphes dans Ω.

On définit, comme pour $n=1$, les ensembles d'unicité pour le problème de Dirichlet pour (S).

Pour les ouverts localement biholomorphes à la boule unité, on utilisera le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $\sum$ l'hypersurface de $\mathbf{C}^n$, définie par l'équation*

$$z_n+\bar{z}_n=\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2.$$

Soient $(P_i)_{i\leqq n}$, n fonctions holomorphes au voisinage de zéro dans $\mathbf{C}^n$, de jacobien non identiquement nul.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *$(P_i)_{i\leqq n}$ sont des fonctions homographiques de la forme*

$$P_i(z)=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_j+c_i}{\sum_{j=1}^{n}b_jz_j+1} \quad \textit{où} \quad a_{ij},\ c_i,\ b_j \quad \textit{sont dans} \quad \mathbf{C}.$$

(ii) *Il existe des fonctions $(f_i)_{i\leqq n}$ et h, non toutes nulles au voisinage de zéro, holomorphes telles que,*

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_i(z)}f_i(z)=h(z)$$

si z appartient à $\sum$ dans un voisinage de zéro.

1) *Remarque.* Si on prend p fonctions P_i de rang p avec $p<n$, (ii) ne peut être vérifié: en effet sinon par changement de coordonnées $Z_i=P_i(z)$, il existerait une fonction $\psi(z,\bar{z})=\sum_{i=1}^{p}\bar{z}_iF_i(z_1,\dots,z_n)-H(z_1,\dots,z_n)$ holomorphe en $z_{p+1},\dots,z_n$ pour $z_1,\dots,z_p$ fixés, nulle sur un ouvert de la frontière d'un strictement pseudo-convexe, donc nulle dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On en déduirait que $F_i\equiv H\equiv 0$ et donc $f_i\equiv h\equiv 0$, $i\leqq p$.

2) (i)$\Rightarrow$(ii). Soient n fonctions (P_i) vérifiant (i). Posons $Z=(Z_i)_{i\leqq n}=(P_i(z))_{i\leqq n}=P(z)$; c'est un système linéaire en coordonnées homogènes, donc on a inversement

$$z_i=Q_i(Z)=\frac{R_i(Z)}{R(Z)} \quad (i\leqq n) \text{ où } R_i \text{ et } R$$

sont des fonctions affines. Si

$$Z\in\tilde{\Sigma}=P(\Sigma) \quad \text{on a} \quad \sum_{1}^{n-1}\frac{\bar{R}_i(Z)}{\bar{R}(Z)}\frac{R_i(Z)}{R(Z)}-\left(\frac{\bar{R}_n(Z)}{\bar{R}(Z)}+\frac{R_n(Z)}{R(Z)}\right)=0.$$

Il existe donc des fonctions holomorphes $(F_i)_{i\leqq n}$ et H tel que

$$\sum_{i=1}^n \bar{Z}_i F_i(Z) - H(Z) = 0 \quad \text{si} \quad Z \in \tilde{\Sigma}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_i(z)}\, F_i(P(z)) = H(P(z)).$$

3) Soient n fonctions $(P_i)_{i\leqq n}$ vérifiant (ii); tout système de n fonctions $(\tilde{P}_i)_{i\leqq n}$ de la forme

$$\tilde{P}_i(z) = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_j(z) + \beta_i}{\sum_{j=1}^n \gamma_j P_j(z) + 1} \quad (\text{où } \alpha_{ij}, \beta_i, \gamma_j \in \mathbf{C})$$

vérifie aussi (ii).

Puisque le jacobien de (P_i) est non identiquement nul, on peut supposer par « translation » sur $\sum$ que le jacobien de (P_i) est non nul en zéro.

Par transformation linéaire sur les P_i on peut supposer que $P_i(z) = z_i + \sum_{j,l} \gamma_{i,j,l} z_j z_l +$ termes d'ordre $\geqq 3$. En utilisant la transformation homographique $P_i \to P_i/(1 + \sum_{j=1}^n \gamma_{n,n,j} P_j)$ on peut supposer que $P_n(z) = z_n + \sum_{j\leqq l<n} a_{jl} z_j z_l +$ termes d'ordre $\geqq 3$. *Nous allons montrer alors que* $P_n(z) = z_n$.

4) On note $z = (z', z_n)$ un point de $\mathbf{C}^n$; les fonctions P_i vérifiant (ii) on a: $\sum_{i=1}^n \overline{P_i(z', |z'|^2 - \bar{z}_n)} f_i(z) - h(z) = 0$ si z appartient à $\sum$ dans un voisinage de zéro.

z' étant fixé, la fonction $\psi(z)$ définie par le terme de gauche de l'égalité ci-dessus, est une fonction holomorphe de z_n, nulle au voisinage de zéro sur la droite $2\,\mathrm{Re}\, z_n = |z'|^2$, donc identiquement nulle. ψ est donc nulle dans un voisinage de zéro dans $\mathbf{C}^n$ et:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial z_n}(z) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial z_n}(z', |z'|^2 - \bar{z}_n) f_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{P_i(\ )} \frac{\partial f_i}{\partial z_n}(z) - \frac{\partial h}{\partial z_n}(z) = 0;$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(z) = \bar{z}_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial z_j}(\ ) f_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{P_i(\ )} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) - \frac{\partial h}{\partial z_j}(z), \quad \forall j \leqq n-1.$$

On obtient donc le système suivant:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \overline{P_i(z', |z'|^2 - \bar{z}_n)} \left(\bar{z}_j \dfrac{\partial f_i}{\partial z_n}(z) + \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) \right) = \bar{z}_j \dfrac{\partial h}{\partial z_n}(z) + \dfrac{\partial h}{\partial z_j}(z), & \text{pour } j \leqq n-1 \\ \sum_{i=1}^n \overline{P_i(z', |z'|^2 - \bar{z}_n)} f_i(z) = h(z). \end{cases}$$

On vérifie que, par exemple, le déterminant $\Delta(\bar{z}', z)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_j \dfrac{\partial f_i}{\partial z_n} + \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} \\ f_i \end{pmatrix}_{\substack{i\leqq n \\ j\leqq n-1}}$$

est fonction linéaire de $\bar z_j$ $(j \leqq n-1)$. On en déduit que les fonctions $\overline{P_i(z', |z'|^2-\bar z_n)}$ $(i \leqq n)$ sont fonctions homographiques de $\bar z_j$ $(j \leqq n-1)$ de même dénominateur $D(z)$.

Si $D(z)=\tilde\Delta(0, z)$ était identiquement nul sur $\sum$, dans un voisinage de zéro, une des fonctions f_i serait combinaison linéaire des autres dans un voisinage de zero, par exemple $f_1(z)=\sum_{i=2}^n \gamma_i f_i(z)$ et donc $\sum_{i=2}^n (\gamma_i \overline{P_1(z)}+\overline{P_i(z)}) f_i(z)=h(z)$ si z est dans $\sum$. Comme dans la remarque de 1) on pourrait en conclure que $f_i \equiv 0$ $(i \geqq 2)$.

Quitte à faire une « translation » sur $\sum$ on peut supposer que $D(z)$ ne s'annule pas dans un voisinage de zéro et par division par $D(z)$ on obtient que

$$\overline{P_i(z', |z'|^2-\bar z_n)} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}(z)\bar z_j + B_i(z)}{\sum_{j=1}^{n} C_j(z)\bar z_j + 1}$$

où les fonctions A_{ij}, B_i, C_j sont holomorphes au voisinage de zéro.

5) Considérons $\bar z$, z comme variables indépendantes. $\overline{P_n(0, -\bar z_n)}=B_n(z)$ est fonction de la seule variable z_n que l'on note encore $B_n(z_n)$. Soit j fixe, si $\bar z_k=0$, $k \neq j$, $k \leqq n-1$, alors $\dfrac{A_{nj}(z)\,\bar z_j + B_n(z_n)}{C_j(z)\bar z_j + 1}$ est égal à la fonction $P_n(z_j, |z_j|^2-\bar z_n)$ qui ne dépend pas de z_k, $k \neq j$, $k \leqq n-1$. En annulant les dérivées partielles en z_k on obtient

$$(1) \qquad \bar z_j^2 \left[C_j(z)\frac{\partial A_{nj}}{\partial z_k}(z) - A_{nj}(z)\frac{\partial C_j}{\partial z_k}(z)\right] + \bar z_j \left[\frac{\partial A_{nj}}{\partial z_k}(z) - B_n(z_n)\frac{\partial C_j}{\partial z_k}(z)\right] = 0.$$

Or $A_{nj}(z)-C_j(z)B_n(z_n)$ n'est pas identiquement nulle sinon

$$B_n(z_n) = \overline{P_n(z_j, |z_j|^2-\bar z_n)} = z_j \bar z_j - z_n + \dots .$$

Donc, si on identifie les termes en $\bar z_j^2$, et $\bar z_j$ dans (1), on conclut que $\dfrac{\partial A_{nj}}{\partial z_k}=0=\dfrac{\partial C_j}{\partial z_k}$, $k \neq j$, $k \leqq n-1$, $j \leqq n-1$. A_{nj} et C_j sont fonctions des seules variables z_n et z_j.

6) Posons $z_j=w \in \mathbf{C}$, $z_n=y \in \mathbf{C}$ $A_{nj}=A$, $B_n=B$, $C_j=C$.

$$\overline{P_n(z_j, |z_j|^2-\bar z_n)} = P(\bar w, w\bar w - y) = F(\bar w, w, y) = \frac{A(w, y)\bar w + B(y)}{C(w, y)\bar w + 1}.$$

Avec la réduction faite en 3), on a:

$$P(\bar w, w\bar w - y) = w\bar w - y + \alpha \bar w^2 + \text{termes d'ordre} \geqq 3 \quad \text{en} \quad \bar w, w\bar w - y.$$

Donc

$$(2) \qquad \begin{cases} B(0)=0;\ B'(0)=-1; \\ A(0)=C(0)=0;\ A_w(0)=1;\ C_w(0)=0. \end{cases}$$

En écrivant que $\dfrac{\partial F}{\partial w}+\bar{w}\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ on a

$$A_w\bar{w}(C\bar{w}+1)-(A\bar{w}+B)C_w\bar{w}+\bar{w}(A_y\bar{w}+B')(C\bar{w}+1)-\bar{w}(A\bar{w}+B)C_y\bar{w}=0.$$

En identifiant à zéro le coefficient en $\bar{w}$, on a

$$A_w-B(y)C_w+B'(y)=0.$$

En tenant compte de (2): $A_w(w,0)=1$; $A(w,0)=w$. D'où $\dfrac{w\bar{w}}{C(w,0)\bar{w}+1}=P(\bar{w},w\bar{w})=\sum_{p\leqq q}a_{qp}\bar{w}^q w^p$. On déduit que $C(w,0)$ est un monôme du premier degré et en fait d'après (2), est identiquement nul. Donc $P(\bar{w},w\bar{w})=w\bar{w}$ et donc

$$P_n(z)=z_n.$$

En échangeant le rôle de P_i et P_n $(i\neq n)$ on a, modulo une transformation homographique, $P_i(z)=z_n$. Donc les fonctions P_i vérifient (ii). $\sum$ étant biholomorphe à la sphère de $\mathbf{C}^n$, on obtient comme corollaire le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ tel qu'un ouvert de $\partial\Omega$ soit l'image d'un ouvert de la sphère de $\mathbf{C}^n$ par une application biholomorphe φ. Alors Ω est d'unicité pour le problème de Dirichlet pour (S) si et seulement si φ n'est pas une transformation homographique.*

Etude dans $\mathbf{C}^n$ des restrictions à ∂B des fonctions vérifiant le système (S)

1) Soit B la boule unité de $\mathbf{C}^n$, ∂B la sphère unité. On note encore $E(B)$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{B}$, satisfaisant (S) dans B.

Proposition 5. *Soit $f\in E(B)|_{\partial B}$; il existe une seule fonction de la forme $F(z)=\sum_{i=1}^n \bar{z}_i h_i$ (h_i holomorphe) prolongeant f à B, on a*

$$\|F\|_B=\|f\|_{\partial B} \text{ et l'espace } E(B)|_{\partial B} \text{ est fermé dans } C(\partial B).$$

Soit $f\in E(B)|_{\partial B}$; il existe $\tilde{h}_i$ et k holomorphes dans B telles que, si $|a|=1$, $f(a)$ est limite uniforme de $G(z)=\sum \bar{z}_i\tilde{h}_i(z)+k(z)$ si $z\to a$, $|z|<1$. En appliquant la proposition 1 à la fonction:

$$\lambda\in D\subset\mathbf{C}\to G(\lambda a) \text{ où } a\in\partial B, \text{ on a } \sum(z_i\bar{z}_i-1)k(z)\to 0,\ |z|\to 1.$$

f est alors valeur au bord de la fonction

$$F=\sum\bar{z}_i(\tilde{h}_i+z_i k)=\sum\bar{z}_i h_i$$

et

$$\|F\|_B=\sup_{a\in\partial B}\sup_{|\lambda|\leqq 1}|\lambda|\left|\sum\bar{a}_i h_i(\lambda a)\right|=\sup_{a\in\partial B}\sup_{|\lambda|=1}|F(\lambda a)|=\|f\|_{\partial B}.$$

On en déduit l'unicité pour l'extension de la forme $\sum_{i=1}^n \bar{z}_i h_i$. De plus, si $f_p\in E(B)|_{\partial B}$ converge vers f dans $C(\partial B)$, la suite F_p correspondante converge dans $C(B)$ vers une fonction qui vérifie aussi (S).

2) On note $\bar{L}_{ij}$ les opérateurs tangents à la sphère

$$\bar{L}_{ij} = z_i\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j} - z_j\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i} \quad i, j \leqq n.$$

Proposition 6. *Soit $f\in C^1(\partial B)$, f se prolonge en une fonction de $C^1(B)$ satisfaisant (S) si et seulement si*

$$\bar{L}_{ij}\bar{L}_{kl}f(z) = 0, \qquad \forall i, j, k, l \leqq n, \quad z\in\partial B.$$

Soit $F\in C^1(B)$ telle que $F(z)=\sum \bar{z}_i h_i(z)+k(z)$ où h_i, k sont holomorphes dans B et continues dans $\bar{B}$; alors

$$\bar{L}_{ij}\bar{L}_{kl}(F)(z) = \bar{L}_{ij}(z_k h_l - z_l h_k) = 0 \quad \text{si} \quad z\in\partial B.$$

Réciproquement, soit $f\in C^1(\partial B)$ telle que $\bar{L}_{ij}\bar{L}_{kl}f=0$; la fonction $\bar{L}_{kl}f=z_k\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}_l}-z_l\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}$ s'étend en une fonction G_{kl} de l'algèbre $A(B)$ des fonctions holomorphes dans B continues dans $\bar{B}$. Pour $n>2$, G_{kl} est nulle sur $\partial B\cap\{z_k=z_l=0\}$ donc sur $B\cap\{z_k=z_l=0\}$ et pour $n=2$, $G_{12}(0)=\int_{\partial B}\bar{L}_{12}f\,d\gamma=\int_B d(\bar{\partial}f\wedge dz_1\wedge dz_2)=0$; il existe donc [4] des fonctions f_{kl} et h_{kl} dans $A(B)$ telle que $G_{kl}=z_k f_{kl}-z_l h_{kl}$. Posons $f_1=h_{12}$, $f_2=f_{12}$ on a

$$z_1\left(z_l\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_2}-z_2\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_l}\right) = z_l\bar{L}_{12}f-z_2\bar{L}_{1l}f = z_1(z_l f_2-z_2 f_{1l})+z_2 z_l(h_{1l}-f_1)$$

il existe donc une fonction h_l de $A(B)$ telle que $h_{1l}-f_1=z_1 h_l$. Posons $f_l=f_{1l}-z_l h_l$ alors $G_{1l}=z_1 f_l-z_l f_1$.

Supposons alors par récurrence sur i que pour tout $j<i$ et $l>j$ on a encore $\bar{L}_{jl}f=z_j f_l-z_l f_j$.

Alors $z_{i-1}\bar{L}_{il}f=z_i\bar{L}_{i-1,l}f-z_l\bar{L}_{i-1,i}f=z_{i-1}(z_i f_l-z_l f_i)$.

Donc $\forall i<n$ on a $\bar{L}_{il}f=z_i f_l-z_l f_i$.

Posons $H=\sum_{j=1}^n\bar{z}_j f_j$, $\bar{L}_{il}H=\bar{L}_{il}f$ et $H-f$ se prolonge en une fonction de $A(B)$, donc $f\in E(B)|\partial B$.

Bibliographie

1. Balk, M. B. et Zuev, M. F., Polyanalytic functions, *Uspekhi Mat. Nauk* **25:5** (1970), 203—226.
2. Carmona, J., Mergelyan's approximation theorem for rational modules, *J. Approx. Theory* **44** (1985), 116—126.
3. Douglas, R., Shapiro, H., Shields, A., Cyclic vectors and invariant subspaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **20:1** (1970), 40—75.
4. Rudin, W., *Function theory in the unit ball of* C^n, Springer-Verlag, 1980.
5. Shapiro, H., Smoothness of the boundary function of a holomorphic function of bounded type, *Ark. Mat.* **7** (1968), 443—447.
6. Verdera, J., Approximation by rational modules in Sobolev and Lipschitz norms, *J. Funct. Anal.* **58** (1984), 267—290.

Received July 28, 1986, in revised form Feb. 23, 1987

UER de Mathématiques — CNRS UA 225
Université de Provence
3, Place Victor Hugo
13331 Marseille Cedex 3
France