Ark. Mat., **36** (1998), 73–85

Valeurs transcendantes des fonctions de Bessel–Carlitz

Laurent Denis

1. Position du problème

Désignons par $\mathbf{F}_q[T]=A$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans le corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, par $k=\mathbf{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $k_\infty=\mathbf{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$-adique v, que l'on prolonge à une clôture algébrique $\bar{k}$ (resp. $\bar{k}_\infty$) de k (resp. k_∞) et au complété C de $\bar{k}_\infty$. Pour α dans C posons encore $|\alpha|=q^{d(\alpha)}=q^{-v(\alpha)}$ avec la convention $d(0)=-\infty$.

Notre but est de tenter de prouver des énoncés convenables de transcendance sur k pour les valeurs des fonctions de Bessel–Carlitz qui sont des séries entières à coefficients dans k.

Pour rappeler la définition de ces fonctions, commençons par présenter les polynômes factoriels de Carlitz D_n. Ils sont définis par récurrence par $D_0=1$ et $D_n=(T^{q^n}-T)(D_{n-1})^q$. Ils fournissent un analogue convenable aux coefficients $n!$ (ou $q^n!$) qui apparaîssent dans la fonction exponentielle usuelle. Dans le même ordre d'idée, Carlitz a défini des fonctions de Bessel.

Pour tout entier naturel m, la fonction de Bessel d'ordre m telle qu'elle est définie par Carlitz [C2], associe à tout z dans C la somme de la série

$$J_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{q^{m+k}}}{D_{m+k}D_k^{q^m}}.$$

L'analogie entre $J_0(z)$ et la fonction de Bessel en caractéristique nulle donnée par $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}/k!^2$ respecte ainsi l'analogie avec les factorielles. Les dérivations et équations différentielles satisfaites par les fonctions de Bessel seront ici traduites grâce à un opérateur différence Δ défini pour toute fonction $f(z)$ par $\Delta f(z)=f(Tz)-Tf(z)$ et par son premier itéré Δ^2.

Rappelons les égalités suivantes

$$\Delta J_m(z) = J_m(Tz) - TJ_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{q^{m+k}}}{D_{m+k-1}^{q} D_k^{q^m}} \; ;$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 J_m(z) &= J_m(T^2 z) - 2TJ_m(Tz) + T^2 J_m(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (T^{q^{m+k}} - T^{q^m} + T^{q^m} - T) z^{q^{m+k}}}{D_{m+k-1}^{q} D_k^{q^m}} \; ;\end{aligned}$$

qui permettent d'aboutir à l'équation aux différences

$$\Delta^2 J_m(z) = (T^{q^m} - T)\Delta J_m(z) - [J_m(z)]^q,$$

ou encore

$$\Delta J_m(Tz) = T^{q^m} \Delta J_m(z) - [J_m(z)]^q.$$

Continuant de respecter l'analogie entre k et le corps des nombres rationnels et entre J_m et les fonctions de Bessel usuelles, il est raisonnable d'attendre un énoncé d'indépendance algébrique correspondant au théorème de C. L. Siegel (voir par exemple [B]). Les équations des fonctions J_m montrent que les hypothèses d'indépendance linéaire dans la conjecture suivante sont nécessaires.

Conjecture. *Etant donnés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$, algébriques sur k et linéairement indépendants sur k, alors pour tout entier naturel m les $2n$ éléments*

$$J_m(\alpha_1), \Delta J_m(\alpha_1), \ldots, J_m(\alpha_n), \Delta J_m(\alpha_n),$$

sont algébriquement indépendants sur k.

Les résultats connus dans cette direction sont assez partiels. Un premier énoncé affirmant la transcendance d'un nombre parmi plusieurs valeurs des fonctions J_m et ΔJ_m se trouve dans la thèse de Geijsel [G, corollaire 12.7], un autre est dans [D5] où nous avons montré comment un avatar à la méthode de Wade pouvait servir à prouver que $J_m(\varrho)$ (et aussi $\Delta J_m(\varrho)$) est transcendant quand ϱ est un élément non nul de k.

La difficulté d'une éventuelle adaptation de la méthode de Siegel–Shidlovsky est la non k-linéarité de l'équation aux différences satisfaite par $J_m(z)$ (voir par exemple [L] ou [S] pour cette méthode). Nous verrons comment l'équation fonctionnelle que vérifie $J_m(z)$ conduit à l'introduction d'un T-module auquel on appliquera la procédure classique pour prouver de la transcendance ou de l'indépendance algébrique sur un groupe algébrique.

Par T-module de dimension N et de rang d, on entend la donnée d'un couple $E=(\mathbf{G}_a^N,\Phi)$ où $\mathbf{G}_a^N$ désigne le groupe additif de dimension N et Φ un homomorphisme injectif d'anneau de $\mathbf{F}_q[T]$ dans l'anneau $M_{N\times N}(C)\{F\}$ des endomorphismes de $\mathbf{G}_a^N$ vérifiant

$$\Phi(T)=a_0F^0+\ldots+a_dF^d,$$

où les a_i $(0\leq i\leq d)$ sont des matrices $N\times N$ à coefficients dans C avec $a_d\neq 0$, et F est l'endomorphisme de Frobenius sur $\mathbf{G}_a^N$ relatif à q. Notons que cette définition différe de celle des T-modules abéliens de [A]. Pour $d=0$ et $\Phi(T)=F^0$, on parlera du module trivial noté simplement $\mathbf{G}_a^N$ et quand le contexte sera clair, E sera simplement désigné par Φ. Un sous-T-module H de E sera un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}_a^N$ vérifiant $\Phi(T)H\subset H$.

Les équations fonctionnelles satisfaites par nos fonctions prouvent que pour tout z dans C

$$\begin{pmatrix} J_m(Tz) \\ \Delta J_m(Tz)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & 1 \\ 0 & T^{q^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_m(z) \\ \Delta J_m(z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_m(z) \\ \Delta J_m(z)\end{pmatrix}^q.$$

Pour démontrer nos résultats nous utiliserons le T-module Φ_m de dimension 2 défini par $\Phi_m(T)(X_1,X_2)=(TX_1+X_2,-X_1^q+T^{q^m}X_2)$ (notons que pour $m=0$, ce module est, à une normalisation de signe près, la puissance tensorielle seconde du module de Carlitz, voir [AT]).

Des estimations arithmétiques précises liées à Φ_m nous serons nécessaires à l'obtention de notre théorème principal.

Théorème 1. *Etant donné $\alpha\in C$, algébrique sur k et non nul alors pour tout entier naturel m les éléments $J_m(\alpha)$ et $\Delta J_m(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur k.*

Le paragraphe 2 contient les lemmes préliminaires d'indépendance algébrique de $J_m(z)$ et $\Delta J_m(z)$. Dans ce même paragraphe sont démontrés les lemmes de contrôle de la taille analytique et arithmétique des fonctions utilisées dans la preuve de transcendance. Le paragraphe 3 contient lui la preuve du théorème 1.

2. Estimations préliminaires

Commençons par un résultat d'indépendance algébrique fonctionnel.

Lemme 1. *Les fonctions z, $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$ sont algébriquement indépendantes sur C.*

Preuve. Ces fonctions étant $\mathbf{F}_q$-linéaires, un argument classique portant sur la minimalité du degré d'un polynôme annulateur, montre qu'il suffit de considérer une éventuelle relation qui soit aussi $\mathbf{F}_q$-linéaire. Rappelons rapidement qu'on considère un éventuel polynôme P en trois variables non identiquement nul, de degré total minimal s'annulant sur z, $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$. Un coup d'oeil jeté à $P(X+Y)-P(X)-P(Y)$ nous apprend que P est additif, la linéarité de P provient de celle des fonctions.

On est donc amené au cas d'une éventuelle relation

$$(R,z):=P_0(z)+P_1(J_m(z))+P_2(\Delta J_m(z))=0,$$

chaque P_i étant $\mathbf{F}_q$-linéaire en une variable.

Si P_2 est nul alors $J_m(z)$ est algébrique. Comme $J_m(z)$ est analytique sur C, d'après l'analogue du lemme de factorisation de Weierstraß (voir [G]), elle possède une infinité de zéros distincts. Ceci est contraire au fait que $P_0(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros.

L'ensemble $\mathbf{I}$ de polynômes $P\in C\{F\}$ vérifiant $P(\Delta J_m(z))=Q(J_m(z))+R(z)$ pour quelques polynômes $Q,R\in C\{F\}$ est alors un idéal à gauche de l'anneau non commutatif $C\{F\}$ des polynômes en F. L'anneau $C\{F\}$ étant Euclidien est donc principal à gauche. D'après les discussions précédentes, cet idéal n'est pas réduit à zéro, il est donc engendré par un polynôme $P\neq 0$. De même l'idéal à gauche $\mathbf{J}$ de polynômes $Q\in C\{F\}$ vérifiant $Q(J_m(z))=P(\Delta J_m(z))+R(z)$ pour quelques polynômes $P,R\in C\{F\}$ est engendré par un polynôme non nul Q.

On dispose donc de deux relations

$$P_3(z)+P_4(J_m(z))+P(\Delta J_m(z))=0\ ;$$
$$P_5(z)+Q(J_m(z))+P_6(\Delta J_m(z))=0.$$

Mais P doit diviser P_6 et Q doit diviser P_4, il s'en suit l'existence de deux polynômes R et S tels que $R\circ P=P_6$ et $S\circ Q=P_4$. Appliquant R à la première de ces relations et enlevant la seconde, la transcendance de la fonctions $J_m(z)$ implique alors $R\circ P_4=Q$. Comme Q est de degré minimal R est une contante multipliée par X, le polynôme P_4 engendre $\mathbf{J}$.

Nous arrivons donc à une relation

$$(R,z)=P_0(z)+P_1(J_m(z))+P_2(\Delta J_m(z))=0,$$

où P_1 et P_2 sont indépendamment de degré minimal parmi toutes les relations de ce type possibles. On peut donc supposer que $[\Delta J_m(z)]^{q^r}$ est le terme de degré maximum en $\Delta J_m(z)$ intervenant dans la relation (R,z) et pour la même raison que $c[J_m(z)]^{q^s}$ (pour un c dans C) est le terme de degré maximum en $J_m(z)$.

Changeant z en Tz dans la relation ci-dessus et utilisant les équations fonctionnelles des fonctions $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$, il vient

$$(R,Tz)=P_0(Tz)+P_1(\Delta J_m(z)+TJ_m(z))+P_2(T^{q^m}\Delta J_m(z)-[J_m(z)]^q)=0.$$

$$(R,Tz)=P_0(Tz)+P_1(TJ_m(z)-P_2[J_m(z)]^q)+P_1(\Delta J_m(z))+P_2(T^{q^m}\Delta J_m(z))=0.$$

Si $r\geq s$, $(R,Tz){=}0$, est une relation non nulle entre z, $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$ comme le montre l'examen du terme en $J_m(z)$. Comme P_2 engendre $\mathbf{J}$, il existe une constante $c\neq 0$, telle que $cP_2(X)=P_1(X)+P_2(T^{q^m}X)$. La relation $c(R,z)-(R,Tz)=0$ amène alors à une contradiction avec la transcendance de $J_m(z)$.

Donc r est strictement inférieur à s.

Mais alors $(R,Tz)=0$ est une relation non nulle comme le montre l'examen du terme en $\Delta J_m(z)$. Il existe cette fois une constante $c\neq 0$, telle que $cP_1(X)=P_1(TX)-P_2(X^q)$. La relation $c(R,z)-(R,Tz)=0$ et la transcendance de $\Delta J_m(z)$ donne $cP_2(X)=P_1(X)+P_2(T^{q^m}X)$ ce qui est encore impossible.

Pour les estimations analytiques, nous utiliserons le lemme suivant qui affirme le fait analogue à ce qui se passe dans le cas classique : les fonctions de Bessel sont d'ordre un demi.

Lemme 2. *Pour tout z dans C, on a les estimations*

$$d(J_m(z))\leq \frac{2q^{m/2}q^{d(z)/2}}{e\log q}\ ;\quad d(\Delta J_m(z))\leq \frac{2q^{(m+1)/2}q^{d(z)/2}}{e\log q}.$$

Preuve. Il suit de l'expression,

$$J_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{q^{m+k}}}{D_{m+k}D_k^{q^m}},$$

que le degré de $J_m(z)$ est plus petit que le maximum de la fonction à variable réelle $f(h)=q^{m+h}d(z)-2hq^{m+h}-mq^{m+h}$.

Comme f' ne s'annule qu'en $h_0=[d(z)-m]/2-1/\log q$ la première estimation est prouvée. La seconde se démontre de la même façon.

Lemme 3. *Soit z, W deux éléments de C et B un sous-anneau de C contenant T. On suppose que $WJ_m(z)$ et $W\Delta J_m(z)$ sont dans B alors pour tout polynôme a de degré $\leq 2n$, $W^{q^n}J_m(az)$ et $W^{q^n}\Delta J_m(az)$ sont dans B.*

Preuve. Prouvons par récurrence sur n que $W^{q^n}J_m(T^{2n}z)$ et $W^{q^n}J_m(T^{2n+1}z)$ sont dans B. Comme l'équation aux différences du paragraphe 1 entraîne $\Delta J_m(z)=J_m(Tz)-TJ_m(z)$, l'hypothèse de récurrence est vérifiée au cran $n{=}0$.

La relation de récurrence

$$J_m(T^2z)=(T^{q^m}+T)[J_m(Tz)]-TJ_m(z)T^{q^m}-[J_m(z)]^q,$$

appliquée en $T^{2n}z$ donne

$$J_m(T^{2(n+1)}z)=(T^{q^m}+T)[J_m(T^{2n+1}z)]-J_m(T^{2n}z)T^{q^m+1}-[J_m(T^{2n}z)]^q$$

et entraîne sous l'hypothèse de récurrence que $W^{q^{n+1}}J_m(T^{2(n+1)}z)$ est dans B et aussi que $W^{q^{n+1}}[J_m(T^{2n+1}z)]^q$ est dans B. Appliquant la relation fonctionnelle en $T^{2n+1}z$, il vient

$$J_m(T^{2(n+1)+1}z)=(T^{q^m}+T)[J_m(T^{2n+2}z)]-J_m(T^{2n+1}z)T^{q^m+1}-[J_m(T^{2n+1}z)]^q$$

ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

Terminons les lemmes d'estimations, par un énoncé permettant de contrôler la hauteur de valeurs algébriques des fonctions $J_m(z)$. Désignons par $h(x)$ la hauteur de Weil absolue et logarithmique d'un élément x de $\bar{k}$.

Lemme 4. *Supposons donné $\alpha\in C$ tel que $J_m(\alpha)$ et $\Delta J_m(\alpha)$ appartiennent à $\bar{k}$. Dans ces conditions, pour tout e positif, il existe un réel $c_{(e,m)}$ tel que si $a\in\mathbf{F}_q[T]$ est de degré $\leq s$ alors*

$$\max\{h(J_m(a\alpha)),\ h(\Delta J_m(a\alpha))\}\leq c_{(e,m)}q^{s(1+e)/2}(h(J_m(\alpha))+1).$$

Preuve. Comme remarqué dans l'introduction, les relations fonctionnelles conduisent à $(J_m(a\alpha),\Delta J_m(a\alpha))=\Phi_m(a)(J_m(\alpha),\Delta J_m(\alpha))$.

Les estimations du lemme 4 découlent alors de la proposition 2 de [D2] (avec $n=2$ et $d=1$) dès que l'on a vu que le terme de degré maximal dans $\Phi_m(T^2)$ est a_1F avec a_1 inversible.

Lemme 5. *La suite d'éléments de A, $(D_{h+m}D_h^{q^m})_{h\in\mathbf{N}}$ est une suite de dénominateurs des fonctions $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$, c'est-à-dire si on écrit une de ces deux fonctions sous la forme $f(z)=\sum_{h=0}^{\infty}a_hz^{q^{m+h}}$ alors*

(i) *$D_{h+m}D_h^{q^m}a_i\in A$ pour tout $i\leq m+h$,*

(ii) *si $q^{h_1}+\ldots+q^{h_r}\leq q^n$*

alors $D_{h_1+m}D_{h_1}^{q^m}\ldots D_{h_r+m}D_{h_r}^{q^m}$ divise $D_{n+m}D_n^{q^m}$ dans A.

Preuve. Le (i) est clair au vu du développement des fonctions en séries. Le (ii) provient du fait que les D_h constituent une suite de dénominateurs pour la fonction exponentielle de Carlitz (voir par exemple [T2] pour ce résultat de Carlitz écrit avec nos notations).

Les lemmes précédents impliquent déjà un premier corollaire.

Corollaire 1. *Soit α appartenant à C et différent de zéro. Au moins un des trois nombres*

$$\alpha,\ J_m(\alpha),\ \Delta J_m(\alpha),$$

est transcendant sur k.

Preuve. Il suffit d'appliquer l'analogue du critère de Schneider démontré par J. Yu (Théorème 4.1 de [Y1]) avec les choix de points $S_N=\{a\alpha\colon d(a)\leq N\}$; $1\leq j\leq m$; les trois fonctions z, $J_m(z)$, $\Delta J_m(z)$; d'utiliser les majorants de leur ordre de croissance respectif fourni par le lemme 4 : $\varrho_1=0{,}01$, $\varrho_2=0{,}51$, $\varrho_3=0{,}51$ et d'utiliser le résultat du lemme 1.

3. La preuve de transcendance

Etablissons ou rappelons quelques lemmes qui sont plus classiques dans les preuves de transcendance et d'indépendance algébrique sur les T-modules.

Définissons le T-module $\Psi=G_a\times\Phi_m$ comme étant le produit du T-module trivial de dimension 1 par Φ_m.

Lemme 6. *Les seuls sous-T-modules de Ψ sont 0, $0\times\Phi_m$, $G_a\times 0^2$ et $(G_a)^3$ chacun muni de la restriction naturelle de Ψ.*

Preuve. Un sous-T-module H est défini par une équation additive. En se servant du fait que $\Psi(T)H\subset H$ et en éliminant les équations on aboutit au résultat. Le lecteur scrupuleux pourra consulter [D1] ou [D3] pour les détails d'une preuve similaire ou encore procéder comme dans la preuve du lemme 1 en remplaçant l'équation de dépendance algébrique par une équation de H.

Lemme 7. *La fonction analytique $\Phi(z)=(z,J_m(z),\Delta J_m(z))$ est un homomorphisme à un paramètre de Ψ c'est-à-dire $\Phi(Tz)=\Psi(T)[\Phi(z)]$.*

Preuve. Immédiate grâce aux équations fonctionnelles.

Rappelons, qu'on a posé pour tout $\alpha\in C$, $|\alpha|=q^{d(\alpha)}$. Enonçons le lemme de Schwarz–Jensen (cf. J. Yu [Y1]).

Lemme 8. *Soit $R>r>0$ deux réels et f une fonction entière possédant ν_r zéros dans le disque $d(z)\leq r$, alors*

$$M_r(f)\leq M_R(f)-\nu_r(R-r).$$

Pour la commodité du lecteur, donnons à nouveau le lemme de Siegel démontré dans [D6, lemme 1] et qui distingue hauteur (degré en T dans notre situation) et degré de la solution du système linéaire. Soit $B=A[\theta_1,\dots,\theta_\delta]$ un anneau de degré de transcendence δ sur A et $\theta_{\delta+1}$ algébrique séparable de degré D sur B.

Tout élément x du corps des fractions de $B[\theta_{\delta+1}]$ s'écrit alors d'une manière essentiellement unique sous la forme

$$x=\frac{\sum_{i=0}^{D-1} P_i(T,\theta_1,\dots,\theta_\delta)\theta_{\delta+1}^i}{P_D(T,\theta_1,\dots,\theta_\delta)},$$

où les $P_i\in\mathbf{F}_q[T,\theta_1,\dots,\theta_\delta]$ sont des polynômes premiers entre eux dans leur ensemble. Dans le lemme qui suit $d_T(x)$ désigne le maximum des degrés en T des polynômes P_i et $d_\theta(x)$ est le degré total en $\theta_1,\dots,\theta_\delta$ de x.

Lemme 9. *Soient n, m, D trois entiers naturels, X, Y des réels positifs. On suppose que $n>Dm$ et on se donne des $(a_{i,j})$ $(1\le i\le n,\ 1\le j\le m)$, des éléments de $B[\theta_{\delta+1}]$ tels que $d_T(a_{i,j})\le\mathcal{X}$, $d_\theta(a_{i,j})\le\mathcal{Y}$. Il existe des éléments x_i $(1\le i\le n)$ de B non tous nuls tels que*

(i)
$$d_T(x_i)\le\left[\frac{(Dm)^{1/(\delta+1)}\mathcal{X}}{(n)^{1/(\delta+1)}-(Dm)^{1/(\delta+1)}}\right]+1\ ;$$

(ii)
$$d_\theta(x_i)\le\left[\frac{(Dm)^{1/(\delta+1)}\mathcal{Y}}{(n)^{1/(\delta+1)}-(Dm)^{1/(\delta+1)}}\right]+1\ ;$$

(iii)
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i=0.$$

Et enfin l'analogue du critère de Gelfond obtenu par A. Thiery [T1].

Lemme 10. *Soit $\psi\in\bar{k}_\infty$ et $P_n\in A[X]$, on note $\delta_n=d_X(P_n)$; $h_n=h(P_n)$; $s_n=v(P_n(\psi))$ et on suppose que pour tout $n\ge n_0$,*

$$s_n>\max(h_n\delta_n+h_n\delta_{n+1}+h_{n+1}\delta_n,\ h_n\delta_n+h_n\delta_{n-1}+h_{n-1}\delta_n)$$

et

$$\lim_{n\to\infty}(s_n/\delta_n-h_n)=+\infty\ ;$$

alors pour $n\ge n_0$, $P_n(\psi)=0$.

On se place sous les hypothèses du théorème 1. D'après le corollaire 1, le corps $L=k(\alpha,J_m(\alpha),\Delta J_m(\alpha))$ est de degré de transcendance supérieur ou égal à 1 sur k. Nous supposerons que ce degré est 1 et aboutirons à une contradiction. On désigne par θ_1 une base de transcendance de L sur k et par L^s la sous extension séparable maximale de $k(\theta_1)$ contenue dans L. D'après le théorème de Noether, il existe alors θ_2 entier algébrique séparable de degré D sur $A[\theta_1]$ tel que $L^s = k(\theta_1, \theta_2)$. Il existe alors un entier naturel r tel que $(\alpha)^{p^r}$, $(J_m(\alpha))^{p^r}$, $(\Delta J_m(\alpha))^{p^r}$ appartiennent à L^s. D'après les équations fonctionnelles satisfaites par nos fonctions, il en est alors de même de $(a\alpha)^{p^r}$, $(J_m(a\alpha))^{p^r}$, $(\Delta J_m(a\alpha))^{p^r}$ pour tout $a \in A$. Choisissons alors $U \in A[\theta_1]$ un dénominateur commun à $(J_m(\alpha))^{p^r}$, $(\Delta J_m(\alpha))^{p^r}$ et V un dénominateur de $(\alpha)^{p^r}$. D'après le lemme 3, $U^{q^{[d(a)/2]+1}}$ est un dénominateur commun à $(J_m(a\alpha))^{p^r}$, $(\Delta J_m(a\alpha))^{p^r}$.

Soient c_i $(1 \leq i \leq 14)$ des réels strictement positifs qui ne dépendront que de α, m et D. Construisons d'abord la fonction auxiliaire.

Lemme 11. *Il existe un polynôme P en trois variables à coefficients dans $A[\theta_1]$ de multidegré $\leq (J, K, K)$ et non identiquement nul, tel que si*

$$DMq^S < (J+1)(K+1)^2,$$

la fonction

$$F(z) = P((z^{p^r}, J_m(z)^{p^r}, \Delta J_m(z))^{p^r})$$

s'annule à un ordre $\geq 3M$ aux points $a\alpha$ avec $d(a) \leq S$.

De plus il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\deg_{\theta_1} P \leq c_1 \frac{(DMq^S)^{1/2}}{(JK^2)^{1/2} - (DMq^S)^{1/2}} (q^{S/2} K),$$

$$h(P) \leq c_1 \frac{(DMq^S)^{1/2}}{(JK^2)^{1/2} - (DMq^S)^{1/2}} (M \log_q M + SJ + q^{S/2} K).$$

Preuve. La première partie de ce lemme vient du lemme de Siegel avec $n = (J+1)(K+1)^2$, $m = Mq^S$. Il reste à estimer la taille des coefficients du système linéaire pour conclure grâce au lemme 9. Ce système linéaire est obtenu en annulant les coefficients $\Delta_j(a)$ pour tout $a \in A$, $d(a) \leq S$ et $0 \leq j \leq 3M$ des expressions

$$P((\Phi(a\alpha) + \Phi(z))^{p^r}) = \sum_{j \geq 0} \Delta_j(a) z^{q^j}.$$

Ces relations sont à coefficients dans $A[\theta_1, \theta_2]$ dès qu'on les a multipliées par le dénominateur $d_M = D_{h+m}(D_h)^{q^m} V^J (U^{q^{[d(a)/2]+1}})^{2K}$ où l'entier h est le plus petit $\geq \log_q 3M + 1$ (cf. lemme 5). Reste alors à estimer les degrés en T et en θ_1 d'expressions de la forme

$$d_M (a\alpha)^i J_m(a\alpha)^{j_1} \Delta J_m(a\alpha)^{j_2} \quad \text{où } 0 \leq i \leq J,\ 0 \leq j_i \leq K \text{ et } d(a) \leq S.$$

Il est facile de voir que

$$d_T(d_M)\le 2q^m d(D_{h+m})+Jd_T(V)+2Kq^{S/2+1}d_T(U)\le M\log_q M+c_2(q^{S/2}K+J).$$

Puis, de la même manière que nous le fîmes au lemme 3, on prouve par récurrence sur $d(a)$ que le degré en X de $J_m(a\alpha)$ et $\Delta J_m(a\alpha)$ se majore par $c_3(q^{d(a)/2})$ fois le degré en X de $J_m(\alpha)$ ajouté à celui de $\Delta J_m(\alpha)$. Appliquant ceci à $X=T$ et $X=\theta_1$ nous obtenons

$$d_T(d_M(a\alpha)^i J_m(a\alpha)^{j_1}\Delta J_m(a\alpha)^{j_2})\le c_4(M\log_q M+SJ+q^{S/2}K)\ ;$$

et que l'hypothèse α algébrique implique

$$\begin{aligned}d_{\theta_1}(d_M(a\alpha)^i J_m(a\alpha)^{j_1}\Delta J_m(a\alpha)^{j_2} &= d_{\theta_1}((U^{q^{[d(a)/2]+1}})^{2K}J_m(a\alpha)^{j_1}\Delta J_m(a\alpha)^{j_2})\\ &\le c_5 q^{S/2}K.\end{aligned}$$

Une utilisation d'une adaptation du théorème des zéros de J. Yu ([Y4, Theorem 2.3], [D4]) va montrer qu'il existe $c_6>0$ tel que. le plus petit entier S', tel que la fonction $F(z)$, ne s'annule pas à un ordre $\ge M$ aux points de $\Gamma(S')$ le long de Φ vérifie $S'\le S+c_6$. Indiquons dans notre situation l'énoncé principal de [D4].

Lemme 12. *Soit P un polynôme non identiquement nul sur $(G_a)^3$ de multidegré $\le(J,K,K)$. On suppose que P s'annule à un ordre $\ge 3M+1$ aux points de $\Gamma(S)$, le long du T-module à un paramètre $\Phi(z)$. Il existe alors un réel c_7 et un sous-T-module H de Ψ différent de Ψ tel que*

$$M^{r(\Phi,H)}\,\mathrm{card}(\Gamma(S-3)+H/H)\mathcal{H}(H;J,K,K)\le c_7 JK^2$$

où $r(\Phi,H)$ est la codimension analytique de $\Phi^{-1}(H)$ et $\mathcal{H}$ désigne la fonction de Hilbert de H.

Soit donc $S'+1$ le plus grand entier tel que $F(z)$ s'annule à un ordre $\ge M$ aux points considérés. Le lemme 6 précise les sous-T-modules possibles de Ψ. Examinons donc ces différentes possibilités.

Si $H=0$, l'inégalité devient

$$Mq^{S'}\le cJK^2\ ;$$

si la projection de H sur la première coordonnée est 0, on a encore $r(\Phi,H)=1$ et $\mathrm{card}(\Gamma(S-3)+H/H)\ge q^{S'-3}$. L'estimation obtenue est plus forte que dans le cas $H=0$.

Enfin, si $H{=}G_a0^2$, on a $\Phi(z){\in}H{\cap}\Gamma(S)$ implique $J_m(a\alpha){=}0$ et $\Delta J_m(a\alpha){=}0$, ce qui est absurde car un de ces deux nombres est transcendant donc non nul.

Soient $R{>}r{>}S'$, le lemme 8 montre que pour tout $z{\in}C$ de degré $<r$ on a

$$d(F(z))\leq c_8(JR+Kq^{R/2}+h(P)+d_{\theta_1}(P))-Mq^{S'}(R-r).$$

Pour rendre ce terme petit, imposons la condition

$$Mq^S(R-r)>c_9(JR+Kq^{R/2}+h(P)+d_{\theta_1}(P)),$$

où $c_9{\geq}2c_8$.

Définissons $P_a(\theta_1){:=}$ la norme sur $k(\theta_1)$ du M-ième coefficient du développement limité de P le long de Φ en $\Phi(a\alpha)$ multiplié par le dénominateur donné par $\Delta^J(\Delta^{q^{[d(a)]+1/2}})^{2K}$ et estimons son degré en θ_1. Par hypothèse $P_a(\theta_1)$ doit être différent de zéro.

Grâce au lemme 11, nous obtenons

$$d_{\theta_1}[P_a(\theta_1)]\leq c_9(Kq^{S'/2}).$$

Enfin la hauteur de P_a est majorée par $c_{10}h(P)$.

Par le critère de Gelfond (lemme 10), et si la dernière condition suivante est remplie on a bien une contradiction

$$Mq^{S'}(R-r)[Kq^{S'/2})]^{-1}>c_{11}h(P).$$

Reste à choisir des paramètres J, K, S, r, R de manière satisfaisante pour faire fonctionner le schèma de preuve précédent. Prenons pour M un entier quelconque, $q^{1000q^{1000}}$ fois plus grand que tous les réels c_i.

Etant données les parties entières suivantes

$$\begin{aligned}J&=[M\log\log(M)],\\K&=[\log(M)(\log\log(M))^{-1/2}],\\S&=[\log_q(\log(M)/\log\log(M)^{1/8})^2],\end{aligned}$$

avec ces choix notre polynôme P a une hauteur inférieure à

$$M\log(M)/(\log\log M)^{1/16}$$

et un degré en θ_1 inférieur à

$$(\log M)^2/(\log\log M)^{1/2+1/8}.$$

Le lemme de zéro nous apprend que $q^{S'} \leq c_{12}(\log M)^2$. On choisit alors $R = 2[\log_q M]$ et $r = [\log_q M]$, avec ces choix le lemme de Schwarz entraîne

$$d(F(z)) \leq -c_{13} M (\log(M)^3 / (\log\log M)^{1/4}$$

d'où il suit que $d(P_a(\theta_1)) \leq -c_{14} M (\log(M)^3 (\log\log M)^{1/4}$. La condition du lemme de Gelfond se vérifie alors grâce au fait que $Mq^S(R-r)[K \log Mh(P)]^{-1}$ tend vers plus l'infini avec M.

Remerciements. L'auteur remercie le juge pour lui avoir permis de simplifier la preuve du lemme 1.

Bibliographie

[A] ANDERSON, G., t-motives, *Duke Math. J.* **53** (1986), 457–502.

[AT] ANDERSON, G. et THAKUR, D., Tensor powers of the Carlitz module and zeta values, *Ann. of Math.* **132** (1990), 159–191.

[B] BEUKERS, F., Some new results on algebraic independence of E-functions, dans *New Advances in Transcendence Theory* (A. Baker, éd.), p. 56–67, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1988.

[C] CARLITZ, L., Some special functions over $GF(q, x)$, *Duke Math. J.* **27** (1960), 139–158.

[D1] DENIS, L., Transcendance et dérivées de l'exponentielle de Carlitz, dans *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–1992* (David, S., éd.), p. 1–21, Birkhäuser, Boston, Mass., 1993.

[D2] DENIS, L., Problèmes diophantiens sur les t-modules, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **7** (1995), 97–110.

[D3] DENIS, L., Indépendance algébrique et exponentielle de Carlitz, *Acta Arith.* **69** (1995), 75–89.

[D4] DENIS, L., Lemmes de multiplicités et T-modules, *Michigan Math. J.* **43** (1996), 67–79.

[D5] DENIS, L., Un critère de transcendance en caractéristique finie, *J. Algebra* **182** (1996), 522–533.

[D6] DENIS, L., Indépendance algébrique en caractéristique deux, *J. Number Theory* **66** (1997), 183–200.

[G] GEIJSEL, J. M., Transcendence properties of the Carlitz–Bessel functions, Math. Centre Report ZW **17/73**, Amsterdam, 1971, et voir aussi : Math. Centre Tracts **91**, Amsterdam, 1979.

[L] LANG, S., *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison Wesley, Reading–London–Don Mills, 1966.

[S] SHIDLOVSKII, A. B., *Transcendental Numbers*, Nauka, Moscou, 1987 (en russe). Traduction anglaise: Studies in Mathematics **12**, de Gruyter, Berlin–New York, 1989.

[T1] THIERY, A., Indépendance algébrique de périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld, dans *The Arithmetic of Function Fields* (Goss, D., Hayes, D. et Rosen, M., éds.), p. 265–284, de Gruyter, Berlin, 1992.
[T2] THIERY, A., Théorème de Lindemann–Weierstraß pour les modules de Drinfeld, *Compositio Math.* **95** (1995), 1–42.
[Y1] YU, J., A six exponentials theorem in finite characteristic, *Math. Ann.* (1985), 91–98.
[Y2] YU, J., Transcendence and Drinfeld modules: several variables, *Duke Math. J.* **58** (1989), 559–575.
[Y3] YU, J., Transcendence in finite characteristic, dans *The Arithmetic of Function Fields* (Goss, D., Hayes, D. R. et Rosen, M. I., éds.), p. 254–264, de Gruyter, Berlin, 1992.
[Y4] YU, J., Analytic homomorphisms into Drinfeld modules, *Ann. of Math.* **145** (1997), 215–233.

Reçu le 8 février 1996

Laurent Denis
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques
F-59655 Villeneuve d'Ascq
France
email: ladenis@ccr.jussieu.fr