Ark. Mat., **41** (2003), 375–379

Über Banachverbandsalgebren vom Typ 1

Egon Scheffold

Eine endlichdimensionale Banachverbandsalgebra, bei welcher jedes positive Element regulär ist, ist isomorph zu $\mathbf{R}$. Ob dies auch im unendlichdimensionalen Fall gilt, ist eine offene Frage. In dieser Note möchte ich zeigen, daß die Aussage auch für Banachverbandsalgebren vom Typ 1 richtig ist.

Eine *reelle Banachverbandsalgebra* A ist ein reeller Banachverband, welcher gleichzeitig eine reelle (lineare assoziative) Algebra mit den beiden folgenden Eigenschaften ist: $xy \geq 0$ und $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ für alle positiven Elemente x und y von A. Besitzt die Algebra A ein Einselement e, so wird stets gefordert, daß $e \geq 0$ und $\|e\| = 1$ ist. Den positiven Kegel von A bezeichnen wir mit A_+.

Für $x \in A$ bezeichne $r(x)$ den Spektralradius, $\sigma(x)$ das Spektrum, $\varrho(x)$ die Resolventenmenge und $R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}$ die Resolventenabbildung von x, wobei bekanntlich x als Element der komplexen Banachverbandsalgebra $A_{\mathbf{C}}$, der Komplexifizierung von A, betrachtet wird. Ferner sei $\mathbf{R}_+ = \{\alpha \in \mathbf{R} : \alpha > 0\}$ und $\mathbf{R}_- = -\mathbf{R}_+$.

Nach [1] nennen wir eine unitale Banachverbandsalgebra vom *Typ* 1, falls gilt

$$a \geq 0 \quad \text{impliziert} \quad a(e+a)^{-1} \geq 0.$$

Die Funktionen-Banachverbandsalgebren $C(K)$ sind trivialerweise vom Typ 1, wenn K ein kompakter Hausdorffraum ist. Nicht triviale Beispiele anzugeben, ist nicht einfach, da man zunächst die inversen Elemente $(e+a)^{-1}$ kennen muß.

Die reellen 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

versehen mit der Zeilensummennorm und der kanonischen Ordnung, bilden eine Banachverbandsalgebra vom Typ 1. Sei nämlich

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \geq 0.$$

Dann gilt

$$(I+A)^{-1}=\frac{1}{(1+a)(1+c)}\begin{pmatrix}1+c & -b\\ 0 & 1+a\end{pmatrix}$$

und

$$A(I+A)^{-1}=\frac{1}{(1+a)(1+c)}\begin{pmatrix}a(1+c) & b\\ 0 & c(1+a)\end{pmatrix}\geq 0.$$

Durch Bildung von m-Produkten erhält man dann auch unendlichdimensionale Banachverbandsalgebren vom Typ 1.

Zunächst beweisen wir die Isomorphie einer Banachverbandsalgebra zu $\mathbf{R}$ unter der Voraussetzung einer Normbedingung.

Satz 1. *Es sei A eine reelle Banachverbandsalgebra mit Einselement e. Ferner existiere eine Konstante $M>0$ mit der Eigenschaft: $x\in A_+$, x invertierbar und $\|x\|=1$ impliziert $\|x^{-1}\|\leq M$. Dann ist A norm- und verbandsisomorph zu $\mathbf{R}$.*

Beweis. Sei $x\in A_+$ und $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbf{R}_+$ mit $\lambda_n>r(x)$ und $r(x)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n$. Dann gilt für alle $n\in\mathbf{N}$:

$$x_n:=\frac{R(\lambda_n,x)}{\|R(\lambda_n,x)\|}\geq 0,\quad x_n^{-1}=\|R(\lambda_n,x)\|(\lambda_n e-x),\quad \|R(\lambda_n,x)\|\,\|\lambda_n e-x\|\leq M.$$

Aus $\lim_{n\to\infty}\|R(\lambda_n,x)\|=\infty$ ergibt sich dann $\lim_{n\to\infty}\|\lambda_n e-x\|=0$. Es ist also $r(x)e-x=0$ und somit $x=r(x)e$. Die Algebra A besteht also nur aus den Vielfachen des Einselements e, woraus die Behauptung des Satzes folgt. □

Folgerung 2. *Es sei A eine endlichdimensionale, unitale reelle Banachverbandsalgebra, in welcher jedes positive Element invertierbar ist. Dann ist A isomorph zu $\mathbf{R}$.*

Beweis. Sei $S:=\{x\in A_+:\|x\|=1\}$. Dann ist S kompakt, und die Abbildung $x\mapsto\|x^{-1}\|$ ist stetig auf S, also beschränkt. Die Aussage folgt dann sofort aus Satz 1. □

Die Aussage des folgenden Satzes ist aus [5], Theorem 2.6, ableitbar. Der anschließende Beweis ist aber verschieden vom Beweis in [5] und wesentlich kürzer.

Satz 3. *Es sei A eine reelle Banachverbandsalgebra mit Einselement e. Es sei $x\in A_+$, $\mathbf{R}_-\subseteq\varrho(x)$ und $\inf(x^n,e)=0$ für alle $n\in\mathbf{N}$. Dann ist x singulär.*

Beweis. In der komplexen Banachalgebra $A_{\mathbf{C}}$ sei $B(x)$ die von e und x erzeugte abgeschlossene Subalgebra. Es ist also $B(x)$ die abgeschlossene, lineare Hülle der

Menge $\{e, x^n : n\in\mathbf{N}\}$. Angenommen, es existiere x^{-1} in A. Dann liegt die Zahl 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\varrho(x)$. Bekanntlich gilt dann $x^{-1}\in B(x)$. Wir erhalten also

$$x^{-1} = \lim_{n\to\infty} p_n \quad \text{mit } p_n = \sum_{\nu=0}^{m_n} \alpha_\nu^{(n)} x^\nu \ \ (\alpha_\nu^{(n)} \in \mathbf{C}).$$

Hieraus folgt $e=\lim_{n\to\infty} p_n x$. Für jedes $n\in\mathbf{N}$ liegt $p_n x$ in dem abgeschlossenen, orthogonalen Komplement $(A_\mathbf{C})_e^\perp$ des von e in $A_\mathbf{C}$ erzeugten Hauptideals $(A_\mathbf{C})_e$ (siehe [4], S. 525 oben). Es ist somit $e\in(A_\mathbf{C})_e^\perp$. Dies ist ein Widerspruch. Es ist also x singulär. □

Satz 4. *Es sei A eine reelle Banachverbandsalgebra vom Typ* 1 *mit Einselement e. Es sei $u\in A_+$ und $u\perp e$. Dann ist u singulär.*

Beweis. Sei $\alpha>0$. Dann existiert $(e+\alpha u)^{-1}$ und es ist

$$(e+\alpha u)^{-1} = -\frac{1}{\alpha} R\left(-\frac{1}{\alpha}, u\right).$$

Dies bedeutet $\mathbf{R}_- \subseteq \varrho(u)$. Ferner ergibt sich aus der Typ 1-Bedingung:

$$-uR\left(-\frac{1}{\alpha}, u\right) = \alpha u(e+\alpha u)^{-1} \geq 0$$

für alle $\alpha>0$.

Da $\lim_{\lambda\to-\infty} \|R(\lambda, u)\|=0$ ist, gibt es ein $\beta>0$ mit

$$s := \beta u(e+\beta u)^{-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad \|s\| < 1.$$

Hieraus folgt

$$e-s = e-\beta u(e+\beta u)^{-1} = (e+\beta u)^{-1}((e+\beta u)-\beta u) = (e+\beta u)^{-1}.$$

Es ist daher $e+\beta u=(e-s)^{-1}=\sum_{\nu=0}^\infty s^\nu$ und somit $s^n\leq\beta u$, also $s^n\perp e$ für alle $n\in\mathbf{N}$.

Nach dem spektralen Abbildungssatz gilt

$$\sigma(s) = \left\{ \frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda} : \lambda \in \sigma(u) \right\}.$$

Da $\mathbf{R}_- \subseteq \varrho(u)$ ist, folgt über eine Routinerechnung auch $\mathbf{R}_- \subseteq \varrho(s)$.

Nach Satz 3 ist also s singulär. Da $u=s(e+\beta u)/\beta$ ist, ist somit auch u singulär. □

In reellen Banachverbandsalgebren mit Einselement e ist das von e erzeugte Hauptideal A_e bekanntlich norm-, verbands- und algebraisch isomorph zu einer Banachverbandsalgebra $C(K)$, wobei K ein kompakter Hausdorffraum ist.

Lemma 5. *Es sei A eine reelle Banachverbandsalgebra mit Einselement e, in welcher jedes positive Element invertierbar ist. Dann gilt:*

(i) $\dim A_e = 1$;

(ii) $\sigma(x) \subseteq \mathbf{R}_+$ *für alle* $0 < x \in A$.

Beweis. (i) Dies folgt aus der erwähnten Isomorphie von A_e zu $C(K)$, da in einer Banachverbandsalgebra $C(K)$ nur dann alle nichttrivialen nichtnegativen Funktionen invertierbar sind, wenn K aus einem Punkt besteht.

(ii) Dies folgt aus Bonsall–Duncan [1], Chapter VII, Proposition 12 und Bemerkung auf S. 259. □

Theorem 6. *Die Algebra $\mathbf{R}$ ist die einzige reelle Banachverbandsalgebra vom Typ 1, in welcher jedes positive Element invertierbar ist.*

Beweis. Sei A eine reelle Banachverbandsalgebra vom Typ 1 mit Einselement e. Nach [4], Theorem 3, ist dann A ordnungsdirekte Summe der beiden abgeschlossenen Bänder A_e und $(A_e)^\perp$. Aus Satz 4 folgt $(A_e)^\perp = \{0\}$. Es ist also $A = A_e$, und nach Lemma 5(i), besteht A aus den Vielfachen des Einselements e, was bedeutet, daß man A mit $\mathbf{R}$ identifizieren kann. □

Zum Abschluß beweisen wir für invertierbare Endomorphismen einen Satz vom Banach–Steinhaus-Typ, welcher im Hinblick auf Satz 1 interessant ist.

Satz 7. *Es sei E ein endlichdimensionaler Banachraum und $(T_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge beschränkter invertierbarer Endomorphismen mit $\|T_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und der folgenden punktweisen Beschränktheitseigenschaft von unten: Zu jedem $0 \neq x \in E$ gibt es eine Konstante $c_x > 0$ mit $\|T_n x\| \ge c_x$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Dann gibt es eine Konstante K mit $\|T_n^{-1}\| \le K$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Beweis. Nach dem Satz von Banach–Steinhaus genügt es zu zeigen: Die Folge $(T_n^{-1})_{n=0}^\infty$ ist punktweise beschränkt. Angenommen, $(T_n^{-1})_{n=0}^\infty$ sei nicht punktweise beschränkt. Dann gibt es ein $0 \neq y \in E$ mit

$$\sup\{\|T_n^{-1} y\| : n \in \mathbf{N}\} = \infty.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden: $\|T_n^{-1} y\| \ge n$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Wir setzen nun $z_n := T_n^{-1} y$ und $u_n := z_n / \|z_n\|$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann erhalten wir $\|u_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} T_n u_n = \lim_{n\to\infty} y/\|z_n\| = 0$. Die Folge $(u_n)_{n=0}^\infty$ enthält eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k=0}^\infty$ mit $u_0 := \lim_{k\to\infty} u_{n_k}$. Dann gilt $\|u_0\| = 1$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbf{N}$ mit $\|u_0 - u_{n_k}\| \le \varepsilon$ für $k \ge k_0$. Dann gilt

$$\|T_{n_k} u_0 - T_{n_k} u_{n_k}\| = \|T_{n_k}(u_0 - u_{n_k})\| \le C\varepsilon \quad \text{für } k \ge k_0$$

und

$$\lim_{k\to\infty} T_{n_k} u_{n_k} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\|T_{n_k} u_0\| \geq c_{u_0}$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Es ist also $(T_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ punktweise beschränkt. $\square$

Der Satz 7 gilt in unendlichdimensionalen Banachräumen im allgemeinen nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Literatur

1. BONSALL, F. F. und DUNCAN, J.,, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
2. SCHAEFER, H. H., *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
3. SCHEFFOLD, E., Über komplexe Banachverbandsalgebren, *J. Funct. Anal.* **37** (1980), 382–400.
4. SCHEFFOLD, E., Banachverbandsalgebren mit einer natürlichen Wedderburn-Zerlegung, *Math. Z.* **185** (1984), 521–531.
5. ZHANG, X.-D., On spectral properties of positive operators, *Indag. Math.* **4** (1993), 111–127.

Eingegangen am 13. Mai 2002

Egon Scheffold
Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstraße 7
DE-64289 Darmstadt
Deutschland
email: scheffold@mathematik.tu-darmstadt.de