Ark. Mat., **44** (2006), 327–333
DOI: 10.1007/s11512-006-0027-4

Germes d'ensembles analytiques dans une hypersurface algébrique

Emmanuel Mazzilli

Résumé. Dans ce papier, nous nous intéressons au problème suivant : soit a_N une suite de points d'une hypersurface algèbrique convergeant vers $a \in H$; supposons que pour tout N, il existe un germe de disque holomorphe en a_N, γ_N, contenu dans H. Alors, d'après des résultats classiques (voir [5] et [6]) le point a n'est pas un point de 1-type fini et donc, il existe un germe de disque holomorphe en a vivant dans H (voir [5]). Dans ce qui suit, nous proposons une méthode effective pour reconstruire, à partir de la suite a_N et des γ_N, un germe d'ensemble analytique en a contenu dans H.

0. Introduction et principaux résultats

Soit $a \in H$ une hypersurface analytique (pas forcément lisse) définie sur une boule de centre a et de rayon r (notée par la suite $B(a,r)$) par $H:=\{z \in B(a,r) | \rho(\bar{z}, z)=0\}$ avec ρ réelle analytique. L'un des invariants les plus importants, quand on étudie les fonctions holomorphes définies dans un domaine à frontière lisse, est l'ordre de contact maximal de la frontière et des germes de disques analytiques passant par l'un de ses points. Peut être l'un des résultats les plus frappants de cette théorie est le suivant ([7] et [9]) : Soit $a \in H$ une hypersurface réelle analytique pseudoconvexe ; si H ne contient pas de germe de disque holomorphe passant par a alors nous avons des estimations sous-elliptiques pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann en ce qui concerne les $(0,1)$-formes définies au voisinage de a. Dans cette note, nous considèrons la situation suivante : soit $a \in H$ une hypersurface réelle analytique au voisinage de a et (a_N) une suite de points de H qui tend vers a avec la propriété, pour tout N, il existe un germe de disque holomorphe passant par a_N avec $\gamma_N \subset H$; alors d'après un résultat de D'angelo (voir théorème 4.11 de [6]) le point a n'est pas de 1-type fini (au moins dans le cas d'une hypersurface lisse en a). L'hypersurface étant réelle analytique, on peut en déduire (en utilisant l'inégalité de Lojasiewicz ou voir [5]) qu'il existe un germe de courbe analytique en a ; sans l'hypothèse d' analycité sur H, ce résultat est en général faux comme le montre un exemple de [3]. Les techniques de ([5] et [6]) ne sont pas effectives et ne permettent pas de reconstruire le germe en a à partir des germes en a_N ; de plus, il n'est pas du tout clair qu'il soit possible de le faire à partir d'une suite quelconque de points de type infini.

Il semble naturel d'obtenir le germe d'ensemble analytique en a par "passage à la limite" mais il faut prendre quelques précautions : quitte à re-paramétrer ces disques, on peut supposer qu'ils sont définis sur le disque unité de $\mathbf{C}$ et ainsi le théorème de Montel affirme que γ_N tend vers γ sur $D(0,1)$. Nous avons alors deux possibilités :

(1) si γ n'est pas un disque constant alors H contient un germe de disque analytique en a non trivial.

(2) si γ est trivial, il faut procéder différemment afin d'obtenir un germe non trivial d'ensemble analytique dans l'hypersurface en a.

Néanmoins, même dans le second cas de figure, il est possible d'obtenir le germe en a par passage à la limite, au moins dans le cas d'un germe d'hypersurface algèbrique en a :

Théorème. *Soit H une hypersurface algébrique contenant a ; supposons qu'il existe une suite de point a_N convergeant vers a, avec γ_N des germes de disques holomorphes en a_N inclus dans H. Alors, il existe une suite d'ensembles analytiques, $Y_N \subset H$, définis au voisinage de a de dimension pure k, une suite de points b_N avec $b_N \in Y_N$ et b_N tendant vers a, tels que : $Vol_{2k}(Y_N)$ est uniformément borné au voisinage de a.*

Remarques. Le résultat reste vrai si $H := \{z \,|\, \rho_1(z) = \rho_2(z) = \ldots = \rho_l(z) = 0\}$ est algèbrique de codimension supèrieure à 1 ; il suffit d'appliquer le résultat précédent aux hypersurfaces $\{z \,|\, \rho_i(z) = 0\}$ (nous rédigeons la note dans le cas d'une hypersurface afin d'éviter des notations plus lourdes rendant la lecture difficile).

Dans le cas réel analytique, nous avons également l'existence des ensembles analytiques Y_N inclus dans H. Néanmoins si H n'est pas algèbrique, nous n'avons pas réussi à montrer que les volumes des Y_N sont uniformément bornés au voisinage de a (voir questions ouvertes à la fin de la note). A ce sujet, nous pouvons ajouter l'affirmation suivante : si les ensembles Y_N étaient des intersections complètes (soit, définis exactement par k équations analytiques avec k la dimension de Y_N) alors, en appliquant un résultat de Diederich–Pinchuk (voir [8]), nous pouvons en déduire que les Y_N sont de volume uniformément borné et convergent (modulo une sous-suite) vers Y un ensemble analytique qui est lui-même une intersection complète de dimension k. Dans notre situation, il n'y a aucune chance que les Y_N soient des intersections complètes (pour s'en convaincre, voir le lemme 1.1 et la proposition 1.3 qui assurent la construction des Y_N).

Du théorème précédent, on déduit immédiatement le corollaire suivant à l'aide du théorème de Bishop :

Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe un ensemble analytique $a \in Y$ de dimension k contenu dans H, et obtenu comme limite d'une suite-extraite des Y_N.*

1. Prolongement des germes de disques analytiques

Lemme 1.1. *Soient B_r une boule de centre* 0 *et de rayon r, $\rho: B_r \times B_r \to \mathbf{C}$ une application holomorphe. On suppose qu'il existe γ un germe de disque holomorphe en* 0 *avec $\gamma(0)=a$ tel que $\gamma \subset \{z \mid \rho(\bar{z}, z)=0\}$; alors $\gamma \subset \{z \mid \rho(0, z)=0\}$.*

Remarque 1.2. $\{z \mid \rho(0,z)=0\}$ peut être interprété comme la variété de Segre en 0, au détail suivant près : $\{z \mid \rho(\bar{z}, z)=0\}$ est un ensemble réel analytique avec singularités et donc $\{z \mid \rho(0,z)=0\}$ n'est pas en général une hypersurface complexe.

Preuve du lemme 1.1. Appliquons la formule de Taylor à la fonction : $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, $(\zeta, z) \mapsto \rho(\bar{\zeta}, z)$; il vient

$$\rho(\bar{z}(t), z(t)) - \rho(0, z(t)) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \partial_{\zeta}^{\alpha} \rho(0, z(t)) \bar{z}^{\alpha}(t).$$

Par conséquent, toutes les composantes contenant du $\bar{t}$ à droite de l'égalité sont nulles, car $t \mapsto \rho(0, z(t))$ est holomorphe en t, et donc $\rho(0, z(t))=0$, pour tout t dans un voisinage de zéro. $\square$

Proposition 1.3. *Soit $\gamma \subset \{z \mid \rho(\bar{z}, z)=0\}$ au voisinage de* 0. *Alors, il existe B_r (avec r ne dépendant que de ρ) et X un ensemble analytique défini sur B_r tel que $\gamma \subset X$ au voisinage de* 0 *et $X \subset \{z \mid \rho(\bar{z}, z)=0\}$ sur B_r.*

Remarque 1.4. En fait X est obtenu comme l'intersection de certaines variétés de Segre construites à partir du germe de courbe analytique donné.

Preuve de la proposition 1.3. Nous allons suivre une preuve de Diederich–Fornaess (voir [7]) ; d'après le lemme 1.1, nous avons : $\gamma \subset \bigcap_t \{z \mid \rho(\bar{\gamma}(t), z)=0\} = V_1$, posons $X = \bigcap_{z_0 \in V_1} \{z \mid \rho(\bar{z}_0, z)=0\}$;

Affirmation 1 : $\gamma\subset X$. Nous avons $\rho(\overline{\gamma}(t), z)=0$ pour tout t et pour tout $z\in V_1$ ce qui entraîne $\overline{\rho(\overline{\gamma}(t), z)}=\rho(\bar{z}, \gamma(t))=0$ pour tout t et pour tout $z\in V_1$ et donc $\gamma\subset X$ au voisinage de zéro.

Affirmation 2 : $X\subset\{z|\rho(\bar{z}, z)\}=0$ *sur* B_r. Si $z\in X$ alors $\rho(\bar{z}_0, z)=0$ pour tout $z_0\in V_1$, mais $\gamma\subset V_1$ ce qui implique $X\subset V_1$ et par conséquent $\rho(\bar{z}, z)=0$ ce qui démontre l'affirmation. $\square$

Remarque 1.5. En général la dimension de X est strictement infèrieure à la dimension de V_1 et de plus V_1 n'est pas contenu dans $\{z|\rho(z)=0\}$.

Soit X^{γ_N} la suite d'ensembles analytiques passant par a_N donnée par la proposition 1.3, nous allons réduire la situation de la manière suivante :

(1) Quitte à extraire une sous-suite de X^{γ_N} et à réduire la boule $B(a, r)$ (pour ne pas alourdir les notations, nous continuons à noter la suite extraite X^{γ_N} et la boule réduite $B(a, r)$), on peut supposer qu'il existe une suite de points b_N qui tend vers a vérifiant $\dim_{B(a,r)}(X^{\gamma_N})=\dim_{b_N}(X^{\gamma_N}):=k_N$.

(2) Considèrons l'ensemble analytique $Y_N:=\{z\in X^{\gamma_N}/\dim_z(X^{\gamma_N})=k_N\}$; ceci est un ensemble analytique sans passer à l'adhérence car c'est "la strate" de dimension maximale et par construction de dimension pure ; on note également $b_N\in Y_N$.

(3) Enfin, nous allons extraire une sous-suite de Y_N (que nous notons encore Y_N), afin que $dim Y_N=k$ un entier indépendant de N.

Nous sommes donc face à la situation suivante : nous avons une suite d'ensembles analytiques de dimension pure k définis sur une boule $B(a, r)$ contenant une suite de points b_N qui converge vers a. Clairement, nous désirons appliquer le théorème de Bishop dont nous donnons ci-dessous une version figurant dans [4] :

Théorème de Bishop. *Soit A_N une suite d'ensemble analytique de dimension pure p définie sur une variété complexe ω vérifiant* :

$$\mathrm{Vol}_{2p}(A_N\cap K)\leq M_k, \quad \textit{pour tout } K \textit{ compact de } \ \omega \ ;$$

alors on peut extraire de A_N une sous-suite A_{N_i} qui tend vers l'ensemble vide ou vers un ensemble analytique de dimension pure p.

2. Majoration du volume de Y_N

Quitte à faire des transformations unitaires, on peut projeter Y_N localement proprement sur tous les k-plans de coordonnées ; d'après le théorème de Wirtinger, pour majorer le volume de Y_N, il suffit de majorer le nombre (pour toutes les projections sur les k-plans de coordonnées) :

$$\sum_{a\in\pi^{-1}((z_{i_1},\ldots,z_{i_k}))\cap Y_N} \nu_a(Y_N, \pi_{i_1,\ldots,i_k}),$$

où $\nu(a,\pi_{(\ldots)})$ désigne la multiplicité de Y_N en a par rapport à $\pi_{(\ldots)}$. Considèrons par exemple la projection, π sur $Z^{'}:=(z_1,...,z_k)$ et faisons $Z^{'}=0$; clairement,

$$\sum_{a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N} \nu_a(Y_N,\pi) \le \sum_{a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N} \nu_a(X^{\gamma_N},\pi),$$

car Y_N et X^{γ_N} ont la même dimension en a.

Maintenant choisissons $z^1,...,z^{l_N}$ tels que $X^{\gamma_N}=\{z|\rho(\bar z^1,z)=...=\rho(\bar z^{l_N},z)=0\}$ (voir preuve de la proposition 1.3) avec $l_N\ge n-k$, alors :

$$\sum_{a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N} \nu_a(Y_N,\pi) \le \sum_{a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N} \nu_a(\rho(\bar z^1,z),...,\rho(\bar z^{l_N},z),\pi)$$

où $\nu_a(...)$ est la multiplicité en a de l'application $z\mapsto(\rho(\bar z^1,z),...,\rho(\bar z^{l_N},z),\pi)$. Maintenant, il existe des combinaisons linéaires : $\sum_{j=1}^{l_N} a_i^j\rho(\bar z^j,z)$ avec $i\in\{1,...,n-k\}$, telles que l'application $z\mapsto(\sum_{j=1}^{l_N} a_1^j\rho(\bar z^j,z),...,\sum_{j=1}^{l_N} a_{n-k}^j\rho(\bar z^j,z),\pi)$ admet des zéros isolés en $a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N$ et bien sûr la multiplicité en a de cette dernière application qui elle va de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ majore la multiplicité de la première et ainsi $\nu_a(Y_N,\pi)$. Pour conclure, nous utilisons le résultat suivant dont une preuve claire figure dans [2] :

Théorème 2.1. *Soit $P\colon z\in\mathbf{C}^n\mapsto(P_1(z),...,P_n(z))$ une application algèbrique dont les zéros communs définissent une variété discrète (donc un nombre fini) dans $\mathbf{C}^n$, alors le nombre de zéros comptés avec leurs multiplicités est majoré par le produit des degrés des P_i.*

Considèrons l'application :

$$z\longmapsto\left(\sum_{j=1}^{l_N} a_1^j\rho(\bar z^j,z),...,\sum_{j=1}^{l_N} a_{n-k}^j\rho(\bar z^j,z),\pi\right):=(P_1,...,P_n)\ ;$$

pour un choix générique de ε, $(P_1-\varepsilon_1,...,P_n-\varepsilon_n)$ n'a que des zéros simples et donc définissent une variété de dimension 0 sur $\mathbf{C}^n$, d'après le théorème 2.1 :

$$\sum_{a\in\pi^{-1}(0)\cap Y_N} \nu_a(\rho(\bar z^1,z),...,\rho(\bar z^{l_N},z),\pi) \le \mathrm{Deg}(\rho)^{n-k},$$

ce qui entraîne $\mathrm{Vol}_{2k}(Y_N)\lesssim\mathrm{Deg}(\rho)^{n-k}$.

Enfin pour terminer cette note, nous voudrions poser les questions ouvertes suivantes :

3. Questions ouvertes

(1) Nous pensons que le volume des ensembles analytiques Y_N est également borné dans le cas d'une hypersurface réelle analytique et donc qu'il est possible d'obtenir un germe d'ensemble analytique passant par a et vivant dans H comme limite des Y_N.

(2) Le problème a un sens dans le cadre presque-complexe : plus précisément, considérons une hypersurface réelle analytique H dans $\mathbf{R}^{2n}$ muni d'une structure presque-complexe, J, analytique (pour les définitions précises, voir par exemple [1]) ; s'il existe des germes de courbes J-holomorphes en $a_N \in H$, et si a_N tend vers a dans H, existe-t-il un germe de courbe J-holomorphe en a dans H ? A ce stade, on peut ajouter la remarque suivante : la difficulté majeure dans ce cadre, nous semble-t'-il, est de prolonger les germes de courbes J-holomorphes en courbes fermées ; ceci n'est pas du tout clair, car dans le cadre presque-complexe, les variétés de Segree n'existent pas si J est quelconque ! Ceci nécessite donc des techniques différentes, même dans le premier cas intéressant : $\mathbf{R}^4$.

(3) Les résultats de cette note permettent de reconstruire, à partir d'une suite quelconque de germes de courbes analytiques dans H, un objet analytique dans H en a ; mais à priori, rien n'assure que Y ainsi obtenu est l'ensemble analytique de dimension maximale inclu dans H, passant par a. Une question intéressante, à notre avis, est de savoir si c'est le cas et sinon peut-on obtenir cet ensemble analytique de dimension maximale en a à partir des γ_N ? Une manière de s'y prendre est la suivante : si Y n'est pas l'ensemble analytique de dimension maximale inclu dans H en a ; de la même manière que dans la proposition 1.3, on peut montrer que Y_N est inclu dans l'intersection de certaines variétés de Segree, qui est elle même incluse dans H. On peut extraire de ces ensembles analytiques les strates de dimension maximale et leur appliquer le théorème de Bishop afin d'obtenir – par passage à la limite – Z un ensemble analytique en a dans H. Ceci fait, il faut s'assurer que si Y n'est pas de dimension maximale alors la dimension de Z est strictement supèrieure à celle de Y.

Bibliographie

1. Barraud, J. F. et Mazzilli, E., Regular type of real hyper-surfaces in (almost) complex manifolds, *Math. Z.* **248** (2004), 757–772.
2. Berenstein, C., Gay, R., Vidras, A. et Yger, A., *Residue Currents and Bezout Identities*, vol. 114, Birkhäuser, Basel, 1993.

3. Bloom, T. et Graham, I., A geometric characterization of points of type m on real submanifold of $\mathbf{C}^n$, *J. Differential Geom.* **12** (1977), 171–182.
4. Chirka, E., *Complex Analytic Sets*, Nauka, Moscou, 1985 (en russe). Traduction anglaise: Kluwer, Dordrecht, 1989.
5. D'Angelo, J., Orders of contact of real and complex subvarieties, *Illinois J. Math.* **1** (1982), 41–51.
6. D'Angelo, J., Real hypersurfaces, orders of contacts, and applications, *Ann. of Math.* **115** (1982), 615–637.
7. Diederich, K. et Fornaess, J. E., Pseudoconvex domains with real analytic boundary, *Ann. of Math.* **107** (1978), 371–384.
8. Diederich, K. et Pinchuk, S., Regularity of continuous CR maps in arbitrary dimension, *Michigan Math. J.* **51** (2003), 111–140.
9. Kohn, J., Subellipticity of the Neumann problem on weakly pseudoconvex domains: sufficient conditions, *Acta Math.* **142** (1979), 79–122.

Emmanuel Mazzilli
C.N.R.S. U.M.R. 8524
U.F.R. de Mathématiques
Université Lille I
FR-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

Reçu le 9 juillet 2005
Révisé le 6 juillet 2006
published online November 24, 2006