ZUR THEORIE DER DISCRIMINANTEN

VON

EUGEN NETTO

in BERLIN.

Die nachstehende Arbeit knüpft an Untersuchungen an, welche ich früher unter gleichem Titel im »Journal für reine und angewandte Mathematik» B. XC, 164—186 veröffentlicht habe. Der Grund, welcher mich bewog, auf diese Untersuchungen zurückzukommen, ist in einigen Bemerkungen, vorzüglich aber in den neuen, grundlegenden Anschauungen zu suchen, die sich in der bedeutenden Abhandlung des Herrn KRONECKER: »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen» finden. Zu jenen Bemerkungen zähle ich die (S. 22) gemachte Angabe einer Gleichung, für die es Wurzelgattungen ohne Gattungsdiscriminanten giebt; sie rief die Untersuchungen in § 5 und § 6 der nachfolgenden Arbeit hervor; — ferner den Satz auf S. 42 (§ 13) über Functionen einer Gattung, deren conjugirte sämmtlich von einander verschieden sind; sie veranlasste die Ableitungen in § 2.

Besonders aber waren es die im zweiten Teile der KRONECKER'schen Abhandlung auseinandergesetzten Principien über Divisorensysteme, welche mich bewogen, den einfachen Fall der Discriminanten algebraischer Gleichungen in dem neuen, überraschenden Lichte dieser tiefliegenden und doch ihrem Wesen nach so einfachen Grundanschauungen von neuem zu behandeln. Die algebraische und die substitutionentheoretische Methode der Untersuchung weisen sich hierbei, als in wichtigen Punkten einander ergänzend aus, so dass es nicht angethan schien, die eine zu Gunsten der anderen zu unterdrücken.

§ 1.

Es ist für unsere Untersuchungen ein Punkt von besonderer Wichtigkeit, dass auf die Natur der Discriminante

$$D_\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)^2(\varphi_1 - \varphi_3)^2 \cdots (\varphi_{\rho-1} - \varphi_\rho)^2$$

einer gegebenen ρ-wertigen Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der n von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur solche algebraischen Beziehungen von wesentlichem Einfluss sind, welche in der Gleichsetzung zweier oder mehrerer der Elemente x bestehen.

Um den Kern dieser Verhältnisse klarzulegen, müssen wir einige elementare und fundamentale Theoreme vorausschicken, deren Bedeutung darin liegt, dass zwischen vorher willkürlichen Grössen bestimmte algebraische Relationen eingeführt werden; dass also sogenannte »allgemeine» Sätze bei tatsächlich gegebenen Verhältnissen Anwendung finden sollen.

Wir verstehen unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ willkürliche Constanten, unter $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorläufig unbestimmte Grössen und betrachten die lineare Verbindung der x

$$\psi_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{1}$$

Bei allen möglichen Vertauschungen der x untereinander erhält ψ_1 eine Reihe von Werten, die ihre Formen nach von einander verschieden sind. Die Operationen der Vertauschungen bezeichnen wir als Substitutionen; es giebt deren $n!$, falls man diejenige Substitution mitzählt, welche keins der x von seiner Stelle rückt. Es mögen $s_1, s_2, \ldots s_{n!}$ diese Substitutionen sein, und s_1 soll die letzt erwähnte identische Substitution bedeuten. Wir verstehen ferner unter ψ_α denjenigen Wert von ψ_1, der durch die Anwendung von s_α aus ψ_1 hervorgeht. (Setzen wir etwa

$$\chi_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

so sei auch hier χ_α der Wert von χ welcher durch s_α aus χ_1 hervorgerufen wird.) Der Index des Ausdruckes wird also durch die Substitution bestimmt.

Falls man für die x besondere Werte einsetzt, brauchen die $n!$ Ausdrücke ψ_α ihren Werten nach nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein. Sind einige der x untereinander gleich, so ist eine derartige Verschiedenheit nicht einmal mehr möglich. Über die hierbei eintretenden Umstände war bisher, meines Wissens, nur der folgende Satz bekannt: *Es können beliebige Beziehungen algebraischer Art zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestehen; so bald durch dieselben nur nicht die Gleichheit einiger der Elemente x festgesetzt wird, ist es stets möglich, beliebig viele Systeme $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ der Constanten α zu liefern, für welche alle $n!$ Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n!}$ ihren numerischen Werten nach von einander verschieden sind.* [1]

Diesen Satz wollen wir erweitern und die neue Fassung beweisen. Die Erweiterung bezieht sich auf Folgendes: Wenn für Gleichsetzungen der x gewisse Gruppen von Werten der ψ bei jeder Wahl der α einander gleich werden, dann kann der hierdurch bestimmte Charakter dadurch nicht geändert werden, dass man neue Beziehungen unter den $x_1, \ldots x_n$ festlegt, welche keine neuen Gleichsetzungen der x zur Folge haben.

Wir setzen voraus, es wäre etwa

$$\text{(A)} \qquad x_{a_1} = x_{a_2} = \cdots = x_{a_\mu}; \qquad x_{b_1} = x_{b_2} = \cdots = x_{b_\nu}.$$

Dann werden ersichtlich von den $n!$ Ausdrücken $\psi_1, \ldots \psi_{n!}$ genau $\frac{n!}{\mu!\nu!} = \sigma$ Gruppen von je $\mu!\nu!$ Ausdrücken je einen und denselben Wert annehmen, so dass für ψ höchstens σ verschiedene Werte bestehen können. Einem beliebigen ψ_α werden nämlich alle diejenigen ψ gleich, welche aus ihm durch Substitutionen hervorgehen, in denen nur $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots x_{a_\mu}$ und ebenso $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots x_{b_\nu}$ unter sich vertauscht werden. Wir wollen diese Substitutionen, deren Anzahl $\mu!\nu!$ ist, zum Unterschiede von den übrigen mit $t_1, t_2, t_3, \ldots$ bezeichnen; wir behalten aus jeder der σ Gruppen einen Repräsentanten zurück, $\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_\sigma$. Jetzt nehmen wir weiter an, es träten neue Beziehungen unter den x auf, welche durch die irreductiblen Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad F_1(x_1, \cdots x_n) = 0, \cdots, F_k(x_1, \cdots x_n) = 0$$

dargestellt werden, und über deren Natur lediglich das Eine festgesetzt sei, dass durch sie *keine weiteren Gleichsetzungen* unter den x hervorgerufen werden. Dann lassen sich, wie die F_k auch sonst beschaffen sind,

[1] Vgl. meine »Substitutionentheorie» § 32.

unendlich viele Systeme der $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ derart bestimmen, dass nach wie vor $\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_\sigma$ von einander verschieden bleiben, dass es demnach σ numerisch von einander verschiedene Werte des ψ giebt.

Um den Beweis zu führen, setzen wir

$$\psi'_k - \psi'_\lambda = \alpha_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + \alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n}).$$

Hier werden μ der x_k und ebensoviele der x_λ gleich x_{a_1}; ν der x_k und ebensoviele der x_λ gleich x_{b_1}. Unseren Festsetzungen gemäss können die Coefficienten der α nicht sämmtlich verschwinden; denn dies träte nur dann ein, wenn ψ'_λ aus ψ'_k durch eine Substitution t ableitbar wäre, was ja aber ausgeschlossen ist. Wir betrachten das über alle Combinationen von je zwei ψ' ausgedehnte Product

$$\Pi(\psi'_k - \psi'_\lambda) = \Pi[\alpha_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + \alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})].$$

Unsere Behauptung kann jetzt die Form annehmen: das aufgestellte Product verschwindet nicht für alle Wertsysteme der α. Wir sortiren die Factoren des Products der rechten Seite; zuerst betrachten wir die, bei denen der Coefficient von α_1 nicht Null ist; dann die, bei denen er Null ist, während der von α_2 nicht verschwindet; dann die, bei denen die beiden ersten Coefficienten Null sind, der dritte jedoch nicht; u. s. f. Bei der ersten Klasse können wir es durch passende Wahl von α_1, ohne Beschränkung von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ dahin bringen, dass die zugehörigen Factoren nicht Null werden. Dazu ist nur nötig, dass α_1 keinen der Werte

$$-\frac{\alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \cdots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})}{x_{k_1} - x_{\lambda_1}}$$

erhält, deren Zahl endlich ist und deren Wert wegen des nicht verschwindenden Nenners angebbar sein wird. Bei der zweiten Klasse können wir dasselbe durch passende Wahl von α_2 ohne Beschränkung von $\alpha_3, \alpha_4 \ldots$ erlangen u. s. f. Wählt man demgemäss α_n in den Factoren der letzten Klasse (für welche die Coefficienten von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ verschwinden) ganz beliebig, bestimmt α_{n-1} durch das Nichtverschwinden der Factoren der vorletzten Klasse u. s. f., dann erhält man Systeme von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für die kein ψ'_k einen ψ'_λ gleich wird. Eine Einwirkung der $F_1, F_2, \ldots F_k$

ist also überhaupt nicht zu bemerken. Hieraus folgt: *Auf die Gleichheit der verschiedenen Werte von linearen Ausdrücken der Form*

$$\psi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

haben nur diejenigen Beziehungen unter den x bestimmenden, d. h. von der Wahl der α unabhängig bestehenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner x selbst begründet sind.

§ 2.

Wir setzen zunächst für den ersten Teil dieses Paragrafen die x wieder als völlig unbestimmte Grössen voraus.

Einer jeden unter den $x_1, x_2, \ldots x_n$ möglichen *Functionengattung* (1) entspricht eine charakteristische *Substitutionengruppe*, welche »die Permutationen der Gattung» enthält. Dies heisst: die Gruppe G der Gattung $\mathfrak{G}$ umfasst alle und auch nur diejenigen Substitutionen, welche die Form der sämmtlichen zur Gattung $\mathfrak{G}$ gehörigen Functionen $y, y', y'', \ldots$ nicht verändern. Wenn diese Substitutionen

$$s_1 = 1,\ s_2,\ s_3, \cdots s_r$$

sind, so deuten wir die Gruppe G wohl auch kurz durch

$$G = [s_1,\ s_2,\ s_3, \cdots s_r]$$

an. Die Zahl r, die *Ordnung der Gruppe*, zeigt demnach, für wie viele Substitutionen die Functionen $y, y', y'', \ldots$ der Gattung $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben; hieraus folgt, dass diese Functionen je $\frac{n!}{r} = \rho$ verschiedene Werte besitzen. Die zu $y^{(\alpha)}$ gehörigen mögen $y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \ldots y_\rho^{(\alpha)}$ sein, derart, dass wir $y^{(\alpha)}$ auch $= y_1^{(\alpha)}$ setzen; alle diese Werte heissen die »*conjugirten Werte*» von $y^{(\alpha)}$; sie bestimmen »*conjugirte Gattungen*» $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\rho$, wo wir auch $\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{G}_1$ annehmen; zu ihnen gehören »*conjugirte Gruppen*» $G_1, G_2, \ldots G_\rho$, wo endlich auch G mit G_1 identisch sein soll. Die ρ conjugirten Werte

(1) Über die hier benutzte Terminologie, welche sich der von Herrn KRONECKER gebrauchten genau anschliesst vgl. L. KRONECKER: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen; S. 6 ff.

einer Function y sind die Wurzeln einer Gleichung ρ^{ten} Grades, deren Coefficienten dem aus den elementaren symmetrischen Functionen

$$(1)\quad \mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\quad \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \cdots\quad \mathfrak{f}_n = x_1x_2\cdots x_n$$

gebildeten Rationalitätsbereiche angehören.

Da conjugirte Werte aus einander durch Anwendung gewisser Substitutionen hervorgehen, so besitzen sie sämmtlich denselben Typus. Wir wollen eine der Substitutionen, welche y_1 in y_k umwandelt mit σ_k bezeichnen; dann erhält man sämmtliche Substitutionen derselben Eigenschaft durch $s_\lambda \sigma_k$ $(\lambda = 1,\ 2, \ldots r)$ oder kurz durch $G_1 \,.\, \sigma_k$. Ist $y^{(a)}$ eine andere Function derselben Gattung, so bezeichnen wir mit $y_k^{(a)}$ denjenigen ihrer conjugirten Werte, welcher aus $y_1^{(a)}$ durch $G_1 \,.\, \sigma_k$ abgeleitet werden kann.

Sämmtliche $n!$ Substitutionen lassen sich in die folgende Tabelle einordnen

$$(C)\qquad \begin{array}{llll} s_1 = 1, & s_2, & \cdots\ s_r; & \mathfrak{G}_1 \\ s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, & \cdots\ s_r\sigma_2; & \mathfrak{G}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1\sigma_\rho, & s_2\sigma_\rho, & \cdots\ s_r\sigma_\rho; & \mathfrak{G}_\rho \end{array}$$

bei welcher die i^{te} Zeile alle diejenigen und nur die Substitutionen enthält, welche $y_1^{(a)}$ in $y_i^{(a)}$ umwandeln.

Wir gehen nach der Recapitulation dieser bekannten Begriffe und Bezeichnungen dazu über, Functionen $y^{(a)}$ mit Hülfe der im ersten Paragrafen aufgestellten φ zu bilden.

Wenden wir G_1 auf φ_1 an, so entstehen dadurch r Ausdrücke

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3, \cdots,\ \varphi_r,$$

welche ihrer Form nach von einander verschieden sind. Jede symmetrische Function derselben bleibt für G_1 ungeändert und gehört also zur Gattung $\mathfrak{G}_1$ oder zu einer unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattung. Richtet man jedoch die symmetrische Function so ein, dass sie nur dann ungeändert bleibt, wenn die φ mit einander vertauscht werden, dann gehört sie wirklich zur Gattung $\mathfrak{G}_1$. Bei

$$(2)\qquad y = \varphi_1^e + \varphi_2^e + \varphi_3^e + \cdots + \varphi_r^e$$

kann der erstere Fall für $e = 1$ eintreten; denn hier bleibt möglicherweise ψ_1 auch ungeändert für Substitutionen, welche nicht zu G_1 gehören. Für ein unbestimmtes e geht dies aber nicht mehr an.

Aus der Tabelle (C) erkennt man, dass alle $n!$ Ausdrücke von ψ in die ρ conjugirten $y_1, y_2, \dots y_\rho$ als Summanden eingehen; jeder Wert von ψ kommt überhaupt nur einmal vor; es ist also schon durch das Auftreten eines ψ_μ das zugehörige y_α unzweideutig bestimmt: es ist dasjenige, in dessen Zeile der Tabelle (C) die Substitution s_μ auftritt, welche ψ_1 in ψ_μ umändert. Dieselbe Substitution s_μ führt demnach auch y_1 in y_α über. Allgemeiner: *enthält y_k den Summanden ψ_k^e, y_λ den Summanden ψ_λ^e und geht ψ_k in ψ_λ durch die Substitution τ über, so geht auch y_k in y_λ durch dieselbe Substitution über.*

Wir haben bisher in diesem Paragrafen die x als unbestimmte Grössen angenommen; von jetzt ab wollen wir die Voraussetzungen (A) und (B) des ersten Paragrafen gelten lassen. Wir wählen die α derart, dass

$$\psi'_1, \psi'_2, \dots \psi'_\sigma \qquad \left(\sigma = \frac{n!}{\mu!\nu!}\right)$$

von einander verschieden sind. Dann erkennt man ohne jede Schwierigkeit, dass die Willkür, die bei der Wahl von α_0 herrscht, dazu benutzt werden kann, auch die Moduln der ψ' von einander verschieden zu machen. Hierbei sei

$$\text{mod. } \psi'_1 > \text{mod. } \psi'_2 > \dots > \text{mod. } \psi'_\sigma.$$

Endlich kann man den ganzzahligen, sonst aber beliebigen Exponenten e so gross annehmen, dass man erhält

$$\begin{aligned} \psi'^e_1 &> \rho(\psi'^e_2 + \psi'^e_3 + \dots + \psi'^e_\sigma) \\ \psi'^e_2 &> \rho(\psi'^e_3 + \psi'^e_4 + \dots + \psi'^e_\sigma) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi'^e_{\sigma-1} &> \rho \cdot \psi'^e_\sigma; \end{aligned}$$

der Kürze halber sind die ψ' statt ihrer Moduln hingeschrieben. Aus unseren Festsetzungen ergiebt sich, dass eine Gleichung

$$(3) \qquad m_1\psi'^e_1 + m_2\psi'^e_2 + \dots + m_\sigma\psi'^e_\sigma = \mu_1\psi'^e_1 + \mu_2\psi'^e_2 + \dots + \mu_\sigma\psi'^e_\sigma \qquad (m, \mu \leqq \rho)$$

nur dann bestehen kann, wenn alle entsprechenden m, μ einander gleich sind.

Unter den jetzt geltenden Annahmen (A), (B) geht die oben gebildete Function y_i aus ihrer allgemeinen Gestalt

$$y_i = \psi_{i_1}^e + \psi_{i_2}^e + \cdots + \psi_{i_r}^e \tag{2'}$$

in die besondere Form

$$y_i = m_{i_1}\psi'^e_{i_1} + m_{i_2}\psi'^e_{i_2} + \cdots + m_{i_t}\psi'^e_{i_t}$$

über, da gewisse Werte ψ_{i_1}, $\psi_{i_2}, \ldots$ gleich ψ'_{i_1} u. s. w. werden können. Sollte nun durch (A), (B) eine Gleichheit zweier conjugirter Werte hervorgerufen werden, etwa

$$y_i = y_k\,,$$

so folgt wegen (3) dass y_i, y_k dieselben Summanden ψ'^e_a enthalten. Dies erlaubt den Rückschluss, dass vor dem Gelten von (A), (B) beide conjugirte Werte y_i, y_k nur Summanden derjenigen Gruppe enthielten, als deren Repräsentanten wir ψ'_a zurückbehalten haben. Zwei derartige Summanden können durch Substitutionen t in einander verwandelt werden, in denen nur die x_{a_1}, $x_{a_2}, \ldots x_{a_\mu}$ und die x_{b_1}, $x_{b_2}, \ldots x_{b_\nu}$ sich untereinander umstellen. Nach unseren obigen Ausführungen leitet dann t den ganzen Summandencomplex der Function y_i in den von y_k über.

Dass umgekehrt alle diejenigen Functionen, welche durch Substitutionen t aus einander hervorgehen, durch (A), (B) einander gleich werden, ist selbstverständlich; es geht aber aus unserer Beweisführung auch hervor, dass dieser a priori ersichtliche Fall auch der einzige ist, in welchem conjugirte Werte $y_i^{(a)}$, $y_k^{(a)}$ einer jeden Function $y^{(a)}$ der Gattung einander gleich werden; und es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass nur die Bedingungen (A) nicht aber die Festsetzungen (B) einen Einfluss dabei haben.

Herr Kronecker hat gezeigt, (¹) »*dass sich für irgend welche gegebenen Werte* $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ *von* (1) *— vorausgesetzt nur, dass nicht zwei der* x *einander gleich werden — stets unendlich viele specielle Functionen jeder Gattung* $\mathfrak{G}$ *bestimmen lassen, deren sämmtliche conjugirte unter einander ver-*

(¹) Grundzüge einer arithmetischen Theorie u. s. w., S. 42.

schieden sind.» Diesem Satze können wir jetzt folgende Erweiterung zur Seite stellen: *Auf die Gleichheit conjugirter Werte aller Functionen einer Gattung haben nur diejenigen Beziehungen unter den x einen bestimmenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner x bestehen.*

Beachtenswert ist ferner noch der Umstand, dass wir Functionen y construirt haben, bei denen aus $y_i = y_k$ auf die Existenz der Substitution t geschlossen werden kann, welche y_i in y_k verwandelt. Denn weil die Substitution von der Wahl der Function y unabhängig ist, so folgt, dass für jedes beliebige $y^{(a)}$ stets $y_i^{(a)} = y_k^{(a)}$ sein wird. Das Gleichwerden conjugirter Werte findet also seinen genauen Ausdruck in Gruppeneigenschaften. Somit ist auch ersichtlich: *Verschwindet die Discriminante D_y jeder beliebigen Function y der Gattung $\mathfrak{G}$ für gewisse Beziehungen (A), (B) unter den x, so ist dieses Verschwinden nicht nur für D_y, sondern auch für gewisse Differenzen $y_i - y_k$ invariant.*

§ 3.

Der zuletzt aufgestellte Satz erlaubt uns, statt des Verschwindens der Discriminante selbst, dasjenige der Differenzen $y_i - y_k$ zu untersuchen.

Herr KRONECKER hat für Functionen mit mehreren Veränderlichen eine Erweiterung des Begriffes der Division gegeben. (1) Verschwindet eine ganze Function $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sobald gewisse Beziehungen platzgreifen, welche durch die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad F_1(x_1, \cdots x_n) = 0, \cdots; \; F_k(x_1, \cdots x_n) = 0$$

dargestellt werden, dann ist g als ganze lineare Function von $F_1, \ldots, F_k$ darstellbar, mit Coefficienten, welche rationale ganze Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind:

$$\text{(1)} \qquad g(x_1, \cdots x_n) = P_1(x_1, \cdots x_n) F_1(x_1, \cdots x_n) + \cdots + P_k(x_1, \cdots x_n) F_k(x_1, \cdots x_n).$$

Wir schreiben dies den Einführungen des Herrn KRONECKER entsprechend

$$\text{(1')} \qquad g(x_1, \cdots x_n) \equiv 0, \qquad (\text{modd. } F_1, F_2, \cdots, F_k)$$

nennen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ein »*Modul- oder Divisoren-System k^{ter} Stufe*» von g, und sagen, dass g dieses Divisorensystem *enthält*.

(1) a. a. O. S. 72 ff.

Hiernach können wir die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen folgendermassen aussprechen:

1) *Jedes Modulsystem der Discriminanten D_y der Gattung $\mathfrak{G}$ ist gleichzeitig Modulsystem einer bestimmten und durch die Gruppe G der Gattung bestimmbaren Differenz $y_i - y_k$, unabhängig von der Wahl von y.*

2) *Alle Modulsysteme der Discriminanten D_y bez. der Differenzen $y_i - y_k$ bestehen aus Functionen der Form*

$$F_{\alpha,\beta} = x_\alpha - x_\beta.$$

3) *Die Modulsysteme von $y_i - y_k$ werden sämmtlich durch diejenigen Substitutionen bestimmt, welche y_i in y_k umwandeln.* Hierzu ist es nur nötig, dass alle diejenigen Elemente x, welche je einen Cyklus einer solchen Substitution bilden, einander gleich gesetzt werden.

Es fragt sich nun umgekehrt, ob aus jeder Substitution, welche y_i in y_k umwandelt, ein Modulsystem gebildet werden kann. Dies ist nach dem, am Schlusse des vorigen Paragrafen Besprochenen zwar an und für sich klar; jedoch müssen einige hierbei auftretende Punkte noch weiter untersucht werden. Dieselben beziehen sich auf die Zusammensetzung von Modulsystemen. Wir wollen zunächst an einem einfachen Beispiele die Frage klarstellen.

Es sei in dem Bereiche der vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 eine Functionengattung $\mathfrak{G}$ durch

$$G_1 = [1,\ (x_1x_2x_3),\ (x_1x_3x_2)]$$

bestimmt. Eine der zur Gattung gehörigen Functionen ist

$$y_1 = x_1^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_1^\beta.$$

Der conjugirte Wert

$$y_2 = x_4^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_4^\beta$$

von y_1 ist durch die Substitutionen

$$G_1 s_2 = \{(x_1x_4),\ (x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_3x_2x_4)\}$$

aus dem ersteren Werte entstanden. Wir erhalten demnach drei in $y_1 - y_2$ enthaltene Divisorensysteme, bemerken aber zugleich, dass verschiedene Substitutionen gleiche Modulsysteme hervorrufen können, sowie dass einige

Modulsysteme erfüllt sein können, falls bereits andere einfachere befriedigt sind. Die hier auftretenden sind

$$\text{I)}\quad x_1 - x_4;\qquad \text{II)}\quad x_1 - x_4;\quad x_1 - x_2;\quad x_1 - x_3;$$

Dass jedes derselben wirklich in

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1^\alpha - x_4^\alpha)x_2^\beta + (x_1^\beta - x_4^\beta)x_3^\alpha \\ &= (x_1 - x_4)\left\{\left[x_1^{\alpha-1} + x_1^{\alpha-2}x_4 + \cdots\right]x_2^\beta + \left[x_1^{\beta-1} + x_1^{\beta-2}x_4 + \cdots\right]x_3^\alpha\right\} \end{aligned}$$

enthalten ist, leuchtet ein; dass ferner ein aus I), II) componirtes System (¹) nicht vorkommt, ist gleichfalls daraus ersichtlich, dass der zweite Factor überhaupt für keine Gleichsetzungen der x mehr zu Null wird.

Wir werden daher, um die Divisoren von $y_k - y_i$ zu ermitteln, aus den Substitutionen des Complexes $G_i s_\mu$ nur diejenigen zur Bildung von Modulsystemen verwenden, bei denen die Elemente der einzelnen Cykel nicht gänzlich in den Elementen der einzelnen Cykel anderer Substitutionen auftreten. (Die früher von mir benutzte Benennung des »Enthaltenseins», durch welche ich diese Beziehung von Substitutionen zu einander andeutete, gebe ich auf, da sie mit der bei Modulsystemen gebräuchlichen Verwendung dieses Wortes nicht übereinstimmt.)

Ein zweites Bespiel mag auf eine weitere hier auftretende Eigentümlichkeit aufmerksam machen. Es sei, wieder in dem Bereiche von vier Variabeln

$$\begin{aligned} G_1 &= [1,\ (x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4x_3x_2)] \\ y_1 &= x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x\,x_1^2 \\ y_2 &= x_1x_4^2 + x_4x_3^2 + x_3x_2^2 + x_2x_1^2, \end{aligned}$$

dann wird

$$\begin{aligned} G_1s_2 &= [(x_1x_3),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3)] \\ y_1 - y_2 &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)\,[x_2 + x_4 - x_1 - x_3]. \end{aligned}$$

Das Auftreten von (x_1x_3) und von (x_2x_4) in dem Complexe G_1s_2 äussert sich durch das Vorhandensein der beiden Factoren $(x_1 - x_3)$ und

---

(¹) Vgl. Kronecker, a. a. O. S. 77 ff. — sowie auch die weiteren Ausführungen dieses Paragrafen.

$(x_2 - x_4)$; dasjenige von $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, $(x_1 x_4)(x_2 x_3)$ durch das Verschwinden des letzten Factors

$$\psi = (x_2 + x_4) - (x_1 + x_3)$$

für die beiden Gleichungssysteme

$$\text{I)}\quad x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0;, \qquad \text{II)}\quad x_1 - x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0,$$

welche den Modulsystemen

$$\text{I}')\quad x_1 - x_2,\ x_3 - x_4; \qquad \text{II}')\quad x_1 - x_4,\ x_2 - x_3$$

entsprechen. Dass ψ aber auch das aus I'), II') componirte Modulsystem in sich schliesst, ist nicht unmittelbar ersichtlich noch auch richtig.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Klärung dieser Verhältnisse; dazu müssen wir, wie dies ja bei dem vorliegenden Thema natürlich ist, auf die grundlegenden Untersuchungen des Herrn KRONECKER unser Augenmerk richten. Wir entnehmen denselben folgende begrifflichen Festsetzungen: (1)

I. Es ist für zwei Functionen M, M' von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$M \equiv M' \quad (\text{modd. } M_1,\ M_2,\ M_3, \cdots),$$

wenn die Differenz $M - M'$ das Modulsystem $(M_1, M_2, M_3, \ldots)$ enthält.

II. Ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$ enthält ein anderes $(M'_1, M'_2, \ldots)$ wenn jedes Element des ersteren das Modulsystem $(M'_1, M'_2, \ldots)$ enthält. Wenn jedes der beiden Modulsysteme das andere enthält, so sind sie einander *aequivalent*, und dies wird durch: $(M_1, M_2, \ldots) \sim (M'_1, M'_2, \ldots)$ bezeichnet.

III. Ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$, dessen einzelnen Elemente durch die verschiedenen Producte von je zwei Elementen $M'_h M''_k$ zweier Modulsysteme $(M'_1, M'_2, \ldots)$, $(M''_1, M''_2, \ldots)$ gebildet werden, heisst *aus diesen beiden Systemen zusammengesetzt oder componirt*, und diese beiden Systeme sollen, wegen der Analogie der Composition mit der Multiplication, auch als *Factoren* bezeichnet werden.

---

(1) a. a. O. S. 77—78; 84; 85. Hier findet man die unter Nr. I bis IX gegebenen Sätze; X ist auf S. 85 VII, sowie auf persönliche Mitteilungen seitens des Herrn KRONECKER gegründet.

Der Ausdruck »Composition» soll ohne Weiteres auf aequivalente Systeme übertragen und demnach auch jedes, dem System $(M'_h M''_k)$ aequivalente System als aus den beiden Systemen (M'), (M'') componirt bezeichnet werden, so dass die Elemente des componirten Systems als bilineare Functionen der beiderseitigen Elemente M', M'' mit ganzen, dem Bereiche angehörigen Coefficienten zu charakterisiren sind.

IV. Ein Modulsystem heisst *irreductibel,* wenn es nicht aus zwei anderen zusammengesetzt ist, deren jedes ein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

V. Eine algebraische Form soll als eine andere Form »enthaltend» bezeichnet werden, wenn das Coefficientensystem der letzteren in dem der ersteren (nach der in II enthaltenen Bestimmung) enthalten ist.

VI. Ist die Form F in F_0, aber auch umgekehrt F_0 in F enthalten, so sind die beiden Formen einander »*absolut aequivalent*» (Vgl. II).

VII. Eine Form, welche durch wirkliche Multiplication von zwei anderen Formen entsteht, und jede einem solchen Product aequivalente Form soll eine aus den beiden ersten *zusammengesetzte oder componirte Form* genannt werden.

VIII. Eine *eigentlich primitive Form* ist dadurch charakterisirt, dass ihre Coefficienten keinen Divisor irgend einer Stufe mit einander gemein haben. Jede eigentlich primitive Form ist absolut aequivalent Eins.

IX. Eine Form wird als »*nicht zerlegbar*», »*irreductibel*» oder als »*Primform*» bezeichnet, wenn sie keinem Producte von zwei nicht primitiven Formen des festgesetzten Bereiches aequivalent ist.

X. Die Aequivalenz wie die Primitivität lässt Abstufungen zu: Eine Form ist *uneigentlich primitiv zur* k^{ten} *Stufe,* wenn ihre Coefficienten keine Divisoren von k^{ter} oder niedrigerer Stufe gemeinsam haben. Zwei Formen sind *uneigentlich aequivalent zur* k^{ten} *Stufe,* wenn sie in allen Divisoren von der ersten bis zur k^{ten} Stufe übereinstimmen.

Auf diese letzte Definition können wir uns stützen, um die Modulsysteme in einer unserer Differenzen $y_i - y_k$, wenigstens so weit es für unsere Zwecke erforderlich ist, zu componiren. Wir benutzen dazu den Begriff der uneigentlichen Aequivalenz der k^{ten} Stufe; dann dürfen wir einer Form als Factor eine Form, die uneigentlich primitiv von höherer als der k^{ten} Stufe ist, hinzufügen, weil dadurch der Charakter der Divisoren-Systeme, soweit diese in Frage kommen, nicht geändert wird.

Beschränkt man sich bei unserem zweiten Beispiele, bei welchem die Notwendigkeit einer allgemeineren Auffassung handgreiflich wurde, auf Aequivalenzen, welche die zweite Stufe nicht überschreiten, so sind für die unbestimmten Grössen u_1, u_2, u_3, u_4 die Formen

$$\psi, \quad \psi \cdot [u_1(x_1 - x_2) + u_2(x_3 - x_4) + u_3(x_1 - x_4) + u_4(x_2 - x_3)]$$

einander aequivalent. Das letztere Product ist als homogene, lineare Function der vier Producte

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_4),\ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3),\ (x_1 - x_4)(x_3 - x_4),\ (x_2 - x_3)(x_3 - x_4)$$

darstellbar, so dass hier möglich ist, zu schreiben, was bei absoluter Aequivalenz nicht anging

$$\psi \equiv 0 \qquad \text{modd.}\ [(x_1 - x_2,\ x_3 - x_4) \cdot (x_1 - x_4,\ x_2 - x_3)].$$

Dieses Vorgehen lässt sich verallgemeinern.

Die Form F möge zwei Divisoren-Systeme besitzen, von denen keins von höherer als der k^{ten} Stufe sein mag, und auch keins in dem andern enthalten sein soll: $(F_1, F_2, \ldots . F_k)$, $(F'_1, F'_2, \ldots . F'_k)$. Durch diese Voraussetzungen wird bewirkt, dass $k < n$, und dass zweitens

$$(F_1, F_2, \cdots . F_k, F'_1, F'_2, \cdots . F'_k)$$

von höherer Stufe ist, als jedes der beiden ersteren Systeme. Aus unseren Annahmen folgen die Gleichungen

$$F = F_1 \cdot P_1 + F_2 \cdot P_2 + \cdots . + F_k \cdot P_k \tag{2}$$

$$F = F'_1 \cdot P'_1 + F'_2 \cdot P'_2 + \cdots . + F'_k \cdot P'_k . \tag{3}$$

Fügt man der Function F den Factor

$$\Phi = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \cdots . + u_k F_k + u'_1 F'_1 + u'_2 F'_2 + \cdots . + u'_k F'_k \tag{4}$$

hinzu, so ändert dieser, da er primitiv von k^{ter} Stufe ist, die jetzt allein wesentlichen Divisoren-Systeme von F nicht. Nun ist

$$F \cdot \Phi = \sum_{h=1}^{k} F'_h \cdot P'_h \cdot [u_1 F_1 + \cdots . + u_k F_k] + \sum_{h=1}^{k} F_h \cdot P_h\, [u'_1 F'_1 + \cdots . + u'_k F'_k]$$

$$F \cdot \Phi = \sum_{\lambda, \mu} Q_{\lambda\mu} \cdot F_\lambda \cdot F'_\mu , \tag{5}$$

und daraus erhellt, dass $F.\Phi$ das aus (F_λ), (F'_λ) componirte Divisorensystem $(F_\lambda F'_\mu)$ besitzt. Aus (5) folgt demnach

$$(6) \qquad F \equiv 0 \qquad \text{modd. } [(F_\lambda)\cdot(F'_\lambda)].$$

Diese Methode kann angewendet und fortgesetzt werden, so lange Divisorensysteme, die von höherer als der k^{ten} Stufe sind, für unwesentlich erklärt werden dürfen; es ist dagegen von einer weiteren Composition mit Systemen, die von gleicher Stufe sind wie Φ, abzusehen.

Für $y_i - y_k$ ersehen wir die Möglichkeit der Composition aller mit einander nicht identischer Systeme von gleichem Typus, falls wir uns auf uneigentliche Primitivität der betreffenden Stufe beschränken. Bei identischen Systemen ist eine Composition nicht möglich. Sei etwa, um ein Beispiel hierfür zu geben

$$G_1 = [1,\ (x_1x_3)(x_2x_4)]$$

$$\sigma_2 = (x_1x_2x_3x_4)$$

$$G_2\sigma_2 = \{(x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_4x_3x_2)\}$$

dann gehört zu jedem $y_1 - y_2$ das Modulsystem $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$. Wählen wir

$$y_1 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 + x_1x_3 + x_2x_4$$

so erhellt, dass $y_1 - y_2$ nur jenes Modulsystem, nicht das Quadrat desselben enthält, weil $y_1 - y_2$ lediglich Glieder erster Dimension umfasst.

§ 4.

Unsere früheren Untersuchungen zeigten, dass man sämmtliche Divisorensysteme einer Differenz $y_i - y_k$, soweit dieselben für die Gattung invariant und also von der Bildung besonderer Functionen y unabhängig sind, aus den Betrachtungen der zugehörigen Gruppe ableiten kann. Diese gewährt hier, wie an vielen anderen Stellen, dieselben Vorteile, welche die KRONECKER'sche »Fundamentalgleichung der Gattung» bietet.

Ferner sahen wir soeben, wie und in wie weit die Divisorensysteme desselben Typus von $y_i - y_k$ eine Composition zulassen. Da endlich eine

Zusammensetzung von Divisorensystemen verschiedener Differenzen $y_i - y_k$, $y_l - y_m, \ldots$ gar keine Schwierigkeiten macht, so sind wir in den Stand gesetzt, alle Divisorensysteme eines bestimmten Typus, welche in D_y eingehen, zu vereinigen und die Potenz anzugeben, in welcher das componirte System als Modulsystem von D_y erscheint.

Es treten hierbei Divisorensysteme von D_y auf, deren Elemente rationale ganze Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ sind. Bezeichnen wir ein Divisorensystem von $y_i - y_k$ mit $(u_1, v_1, w_1, \ldots)$ und die verschiedenen Werte, welche dasselbe bei den Vertauschungen der $x_1, x_2, \ldots x_n$ untereinander annehmen kann, mit $(u_2, v_2, w_2, \ldots)$, $(u_3, v_3, w_3, \ldots), \ldots, (u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, \ldots), \ldots$, so werden alle diese als Divisorensysteme von D_y auftreten und, da sie von einander verschieden sein sollen, auch ihr Product. Dies ist jedoch nicht so beschaffen, dass alle seine Elemente symmetrisch in den $x_1, x_2, \ldots x_n$ würden. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, welche bei den hierhergehörigen Fragen auftreten und deren directe Behandlung sehr eingehende Untersuchungen zu erfordern scheint, schlagen wir einen anderen Weg ein. Wir bilden Functionensysteme der $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$, deren Gesammtheit nur dann verschwindet, wenn vorgeschriebene Gleichheiten unter den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ eintreten, also z. B. nur dann, wenn zwei Paare von Wurzeln oder dann wenn drei Wurzeln einander gleich werden. Wenn nun

$$\Phi_1(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n), \qquad \Phi_2(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n), \cdots \qquad \Phi_K(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n)$$

ein solches System ist, so liefert es das gesuchte Divisorensystem von D_y, welches den betreffenden Wurzelgleichheiten angehört, entweder in möglichster Einfachheit oder auch mehrfach. Jedenfalls ist dann, wenn nicht D_y selber, so eine Potenz von D_y als lineare homogene Function der Φ mit Coefficienten darstellbar, welche ganz und rational in den $\mathfrak{f}$ sind. Bilden wir mit Beibehaltung der obigen Bezeichungen das symmetrische Product mit den unbestimmten Grössen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$

$$\Pi(u_\alpha + \lambda v_\alpha + \mu w_\alpha + \cdots)$$

und entwickeln dasselbe nach $\lambda, \mu, \ldots$, so geben die Coefficienten eine Reihe von Functionen Φ mit den gewünschten Eigenschaften, also ein Divisorensystem einer Potenz von D_y. Schon die bedeutende Anzahl der hierbei auftretenden Functionen zeigt, dass das System im Allgemeinen stark reducirt werden kann; die Anzahl der notwendigen Functionen wird höchstens gleich $n+1$ werden. (¹) Zu bemerken ist, dass an die Stelle des Factors $u_\alpha + \lambda v_\alpha + \mu w_\alpha + \ldots.$ jeder andere gesetzt werden kann, dessen Verschwinden dasjenige von u_α, v_α, w_α, ... nach sich zieht; es ist möglich, durch passende Wahl der Elemente von $u'_\alpha + \lambda v'_\alpha + \mu w'_\alpha + \ldots.$ die Anzahl der Factoren zu verringern und damit die Ausführung der Berechnung zu erleichtern. So wird es sich im Allgemeinen empfehlen, nicht die Differenzen $x_k - x_\lambda$ selbst, sondern ihre Quadrate für u_α, v_α, ... zu benutzen.

Für die Modulsysteme $(x_k - x_\lambda)$, welche die einzigen Divisoren erster Stufe sind, ergiebt sich das bekannte Resultat, *dass D_y die Discriminante Δ der Grundgleichung*

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \equiv x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

als Factor enthält, falls $\mathfrak{S}$ nicht symmetrisch ist.

Für die Modulsysteme zweiter Stufe giebt es zwei verschiedene Typen: einmal kann ein solches durch zwei Paare gleicher Wurzeln, ferner auch durch ein Tripel gleicher Wurzeln hervorgerufen werden.

Im ersten Falle wäre das Product

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \Pi[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_3 - x_4)^2]$$

im zweiten Falle das Product

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \Pi[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_1 - x_3)^2]$$

zu entwickeln. Weil nun aber in diesen Producten je zwei Factoren einander entsprechen: $(u_\alpha + \lambda v_\alpha)$ und $(v_\alpha + \lambda u_\alpha)$, und die Multiplication derselben

$$(\mathrm{Q}_1) \qquad (u_\alpha v_\alpha + \lambda[u_\alpha^2 + v_\alpha^2] + \lambda^2 u_\alpha v_\alpha)$$

ergiebt, so kann, da hier wie bei allen Formen nur die Coefficienten von Wichtigkeit sind, das Glied mit λ^2 weggelassen und der Coefficient von λ durch $u_\alpha + v_\alpha$ ersetzt werden; denn

$$(\mathrm{Q}_2) \qquad u_\alpha v_\alpha + \lambda[u_\alpha + v_\alpha]$$

(¹) Kronecker, a. a. O. S. 37.

giebt durch sein Verschwinden genau dasselbe, was (Q_1) ergiebt, dass nämlich u_α und v_α gleichzeitig Null sein müssen. Wir erhalten somit

$$(P'_1) \qquad \Pi\Big[(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2+\lambda\big\{(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2\big\}\Big]$$

$$(P'_2) \qquad \Pi\Big[(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2+\lambda\big\{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2\big\}\Big].$$

Noch einfacher wird die Form durch die Wahl anderer u_α, v_α, z. B.

$$(P''_1) \qquad \Pi\,[(x_1+x_2-x_3-x_4)^2+\lambda(x_1+x_3-x_2-x_4)^2]$$

$$(P''_2) \qquad \Pi\,[(2x_1-x_2-x_3)^2+\lambda(2x_2-x_3-x_1)^2].$$

Aus dem ersteren kann man für $n=4$ das System ableiten

$$\Phi_1=(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1+x_3-x_2-x_4)(x_1+x_4-x_2-x_3)$$

$$\Phi_2=(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1+x_3-x_2-x_4)+(x_1+x_3-x_2-x_4)(x_1+x_4-x_2-x_3)+$$
$$+(x_1+x_4-x_2-x_3)(x_1+x_2-x_3-x_4);$$

aus dem zweiten für $n=3$ das System

$$\Psi_1=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_3-x_1)(2x_3-x_1-x_2)$$

$$\Psi_2=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_3-x_1)+(2x_2-x_3-x_1)(2x_3-x_1-x_2)+$$
$$+(2x_3-x_1-x_2)(2x_1-x_2-x_3);$$

beide können dann für die folgenden Bildungen bei $n>4$ oder $n>3$ benutzt werden:

$$(P'''_1) \qquad \Pi\,[\Phi_1+\lambda\Phi_2]$$

$$(P'''_2) \qquad \Pi\,[\Psi_1+\lambda\Psi_2].$$

Auf weitere in diese Untersuchung gehörige Verhältnisse werde ich an einer anderen Stelle genauer eingehen, so dass ich hier davon abbrechen darf. Nur einen Punkt will ich noch hervorheben.

Bilden wir die Galois'sche Resolventengleichung, welche auch kurz (entgegen der von Serret und Jordan benutzten Nomenclatur) als eine *Galois'sche Gleichung* bezeichnet werden mag, so ist die Gruppe derselben gleich Eins. Die Discriminante D_y enthält deswegen alle überhaupt nur möglichen Divisorensysteme und dabei ein jedes in der höchst möglichen Potenz. Wählen wir für die $n!$-wertige Function y_1 eine der von mir[1] angegebenen Bildungen mit unbestimmten Exponenten

$$y_1 = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \cdots x_n^\varepsilon,$$

dann zeichnen sich die Resultate durch besondere Einfachheit und Übersichtlichkeit aus. Die Differenzen $y_i - y_k$ enthalten je zwei Glieder, deren gemeinsame Factoren weggeworfen werden können. Somit treten unter den Differenzen, welche zu Substitutionen eines bestimmten Typus gehören, verschiedene einfache, charakteristische Bildungen auf, in welche nur die bei den Wurzelgleichheiten (A; § 1) erscheinenden x eingehen. So erhält man in den beiden von uns besprochenen Fällen der Divisorensysteme zweiter Stufe

$$(\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{IV}}) \qquad \Pi\left(x_1^m x_2^n - x_3^m x_4^n\right),$$

$$(\mathrm{P}_2{}^{\mathrm{IV}}) \qquad \Pi\left(x_1^{m+n} - x_2^m x_3^n\right);$$

man erkennt, dass durch das Verschwinden von n solchen Producten Beziehungen von der Form $x_a^a = x_{a'}^a$ constituirt werden, und dass demnach eine passend gewählte $(n+1)^{te}$ Function desselben Typus hieraus den Schluss $x_a = x_{a'}$ u. s. w. ermöglicht.

Die Potenz, in welcher ein Divisorensystem, falls es das darzustellende Gebilde einfach liefert, als Factor von D_y auftritt, ist aus der Betrachtung der Gruppe leicht zu bestimmen, sobald man die gesammte Tabelle (C) als vorliegend ansieht; dagegen wird die Feststellung der Anzahl schwieriger, wenn nur die erste Zeile von (C) nämlich G_1 als bekannt gilt. Für den einfachsten Fall, für den Factor Δ, ergiebt sich jedoch auch hier sofort als Exponent

$$\rho[\tfrac{1}{2}\, n(n-1) - q];$$

für den Fall von drei einander gleichen Wurzeln habe ich die Frage gleichfalls erledigt;[2] es lohnt sich jedoch nicht auf weitere Untersuchungen derselben einzugehen.

---

[1] Substitutionentheorie. § 31.

[2] Journal f. reine u. angewandte Mathematik. B. XC; S. 164, ff.

§ 5.

Wären wir statt von einer allgemeinen von einer speciellen Gleichung n^{ten} Grades ausgegangen, so hätte es sich ereignen können, dass einige oder auch wohl alle Gattungen ganzer Functionen der Wurzeln einen gemeinsamen Teiler, der vorher bei allgemeinen Gleichungen constatirt wurde, nicht mehr besitzen. Diesen Fall wollen wir eingehender untersuchen. Um von der allgemeinen Gleichung

$$(1) \qquad x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n \equiv (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$$

zu einer beliebigen speciellen zu kommen, ist *die Adjungirung* einer einzigen Gattung $\mathfrak{G}_1$ ihrer Wurzeln notwendig und hinreichend. Die so modificirte Gleichung wollen wir mit (1′) bezeichnen. Genau genommen kommen wir dabei aber nicht zu einer einzigen, sondern zu einer ganzen *Classe von Gleichungen*, und von einer solchen gelten die nachstehenden Untersuchungen. Substitutionentheoretisch hat die Adjungirung den Effect, dass bei allen weiteren an (1′) geknüpften Betrachtungen nur diejenigen Substitutionen angewendet werden dürfen, welche zu der Gruppe G_1 von $\mathfrak{G}_1$ gehören, da jede zu $\mathfrak{G}_1$ gehörige Function y_1 ungeändert bleiben muss. Wählt man als zu behandelnde Gattung der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von (1′) die Gattung Γ'_1, so gehören zu dieser in dem Bereiche $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ nur diejenigen Substitutionen der Gruppe von Γ'_1, welche gleichzeitig in $\mathfrak{G}_1$ vorkommen. Wir können daher in diesem Falle Γ'_1 durch $\mathfrak{G}'_1 = \Gamma'_1 + u\mathfrak{G}_1$ ersetzen und bewirken hierdurch, dass die Gruppe G'_1 von $\mathfrak{G}'_1$ eine Untergruppe von G_1 wird. Der Quotient der Ordnungen von G_1 und G'_1 sei ρ; dann besitzt jede Function y'_1 der Gattung $\mathfrak{G}'_1$ innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ gerade ρ conjugirte Werte $y'_1, y'_2, \ldots y'_\rho$, und der im zweiten Paragrafen aufgestellten Tabelle (C) entspricht hier eine Tabelle (C′), welche in ρ Zeilen alle Substitutionen von G_1 und zwar in der ersten derselben alle Substitutionen von G'_1 enthält.

Die Untersuchungen des ersten Abschnittes zeigen, dass die Discriminanten $D_{y'}$ aller Functionen y' der Gattung $\mathfrak{G}'$ nur dann einen gemeinsamen Teiler, eine »Gattungsdiscriminante» besitzen,[1] wenn es Transposi-

[1] Von gemeinsamen Zahlenfactoren ist abgesehen. Alle Kreisteilungsgattungen besitzen durch p teilbare Discriminanten; diese gelten nicht als Gattungsdiscriminanten im eigentlichen Sinne.

tionen giebt, welche in G_1 aber nicht in G'_1 vorkommen, also in (C') ausserhalb der ersten Zeile.

Haben wir uns demnach die Aufgabe zur Lösung vorgelegt: *Es sollen alle Gattungen* $\mathfrak{G}_1$ *gefunden werden, für welche es Gattungen ohne Gattungsdiscriminante giebt,* — so lässt sich diese jetzt auch folgendermassen formuliren: *Es sollen alle Gruppen* G_1 *gefunden werden, bei denen gewisse Untergruppen* G'_1 *genau dieselben Transpositionen umfassen wie* G_1.

Wir teilen hier die Untersuchung, um einen ersichtlichen Fall sofort zu erledigen. G_1 *möge überhaupt keine Transpositionen umfassen. Dann enthält keine Gattung der Wurzeln einer hierdurch bestimmten Gleichung eine Gattungsdiscriminante.* Und umgekehrt: *Wenn keine Gattung der Wurzeln einer zu* $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ *gehörigen Gleichung eine Gattungsdiscriminante besitzt, dann kommen in* G_1 *keine Transpositionen vor.* Der einfachste Fall dieser Art ist der, in welchem $\mathfrak{G}_1$ die alternirende oder eine unter ihr enthaltene Gattung darstellt; dasselbe ereignet sich bei der cyklischen, der metacyklischen, der halbmetacyklischen Gattung; ferner bei jeder primitiven Gruppe, deren Ordnung $< n!$ ist, u. s. f.

Zweitens betrachten wir den Fall, *dass* G_1 *Transpositionen besitzt.* Kommen diese nicht sämmtlich in G'_1 vor, so treten in die Discriminante $D_{y'}$ als Factor einer oder mehrere der in $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots)$ irreductiblen Teiler, in welche Δ bei der Adjungirung irgend einer nicht symmetrischen Gruppe G_1 zerlegt wird. Wäre nämlich Δ nach der Adjungirung irreductibel geblieben, so gäbe es in G_1 eine Substitution, welche $(x_\alpha - x_\beta)^2$ in $(x_\gamma - x_\delta)^2$ umwandelt, wobei α, β; γ, δ beliebige Indices der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind; diese Substitution sei $t = \ldots\, x_\alpha x_\gamma \ldots\, x_\beta x_\delta \ldots$ Ist jetzt $\sigma = (x_\alpha x_\beta)$ eine von den der Voraussetzung gemäss vorhandenen Transpositionen von G_1, so enthält diese Gruppe auch $t^{-1}\sigma t = (x_\gamma x_\delta)$, d. h. alle Transpositionen, und sie wäre sonach gegen die Annahme mit der symmetrischen Gruppe identisch. Potenzen solcher Factoren von Δ übernehmen hier also die Rolle der Gattungsdiscriminante.

Wir fragen weiter, unter welchen Bedingungen, in dem Falle dass G_1 Transpositionen besitzt, genau dieselben auch in G'_1 vorkommen, wann also für $\mathfrak{G}'_1$ keine Gattungsdiscriminante besteht. Wir wollen bei der Untersuchung hierüber annehmen, *dass* (1') *irreductibel* sei; wir beschränken uns also, nach der KRONECKER'schen Terminologie, auf die Adjungirung »eigentlicher Gattungen»; nach der CAUCHY'schen auf die »transitiver Gruppen».

Dann lässt sich sofort constatiren, *dass G_1 eine imprimitive Gruppe ist.* Denn eine primitive Gruppe, welche Transpositionen besitzt, wie dies bei G_1 zutrifft, muss symmetrisch sein. (Vgl. Substitutionentheorie § 74).

Aus diesem ersten Resultate folgt weiter (ibid. § 222), *dass* (1') *das Resultat der Elimination einer Grösse x'' aus zwei algebraischen Gleichungen ist:*

$$g_1(x;\ x'';\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n) = 0, \qquad g''(x'';\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_n) = 0.$$

Sollte $g_1(x, x'') = 0$ im Gebiete $(x'';\ \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots)$ noch imprimitiv sein, so kann man diese Gleichung als Eliminationsresultat von x' aus den beiden Gleichungen

$$g(x;\ x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g'(x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0$$

auffassen. Wir wollen, um den Abschluss, der sich ja einstellen muss, sofort herbeizuführen, g als primitiv ansehen. Dann erscheint (1') als Resultat der Elimination von x', x'' aus

$$(3) \qquad g(x;\ x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g'(x';\ x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0, \qquad g''(x'';\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0$$

in der Form

$$(4) \qquad \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{\beta=1}^{\lambda} g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_{\alpha};\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0.$$

Hierbei bedeuten $x''_1, x''_2, \ldots x''_k$ sämmtliche Wurzeln von $g''(x'') = 0$; ferner $x'_{\alpha 1}, x'_{\alpha 2}, \ldots x'_{\alpha\lambda}$ sämmtliche Wurzeln von $g'(x';\ x''_\alpha) = 0$. Endlich wollen wir mit $x_{\alpha\beta 1}, x_{\alpha\beta 2}, \ldots x_{\alpha\beta\mu}$ die Wurzeln von $g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_\alpha) = 0$ bezeichnen.

Die zu (1') resp. (4) gehörigen Substitutionen ordnen wir nunmehr in eine Tabelle ein, deren erste Zeile alle diejenigen enthalten soll, durch welche die beiden ersten Indices nicht berührt werden; die einzelnen Cyklen sind bei ihnen von der Form $(x_{\alpha\beta h} x_{\alpha\beta k} \ldots x_{\alpha\beta m})$. Diese Substitutionen werden erlangt, wenn man die $k.\lambda$ einander ähnlichen Gruppen aufstellt, welche zu den Gleichungen

$$g(x;\ x'_{\alpha\beta};\ x''_\alpha;\ \mathfrak{f}_1, \cdots) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots k;\ \beta = 1, 2, \cdots \lambda)$$

gehören; diese seien $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{\alpha\beta}, \ldots$ Die erste Zeile unserer Tabelle enthält dann die Gruppe $(\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots \Gamma_{\alpha\beta}, \ldots) = H.$

Um die zweite Zeile zu bilden multipliciren wir H mit irgend einer nicht der ersten Zeile enthaltenen Substitution. In Folge der Imprimitivität vertauscht diese Substitution Systeme von Wurzeln, welche durch die beiden ersten Indices charakterisirt werden; dieselbe Vertauschung der Systeme findet dann für die ganze Zeile statt. Hieraus ist zu ersehen, dass nur die erste Zeile der Tabelle Transpositionen der Wurzeln x enthalten kann. Die einander ähnlichen Gruppen $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{\mu\nu}$ müssen somit Transpositionen besitzen; sie sind primitiv, folglich sind sie auch symmetrisch: *demnach ist* $g(x) = 0$ *eine allgemeine Gleichung.*

Nach dieser Zurechtlegung der imprimitiven Gruppe G_1 kehren wir zu den obigen Untersuchungen zurück und ersehen jetzt ohne Schwierigkeit das Schlussresultat. G'_1 muss alle Transpositionen der ersten Zeile, d. h. die gesammte erste Zeile selbst umfassen; enthält G'_1 ferner eine Substitution irgend einer Zeile der Tabelle, so umschliesst G'_1 die ganze Zeile; G'_1 soll eine Untergruppe von G_1 sein und darf demnach nicht alle Zeilen der Tabelle enthalten. Das heisst:

Um sämmtliche Gruppen G_1 aufzustellen, welche mit gewissen Untergruppen G' alle Transpositionen gemeinsam haben, bildet man eine Reihe von irreductiblen Gleichungen

$$g(x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0, \qquad g'(x', x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0,$$

$$g''(x'', \ldots, x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0, \ldots \qquad g^{(\nu)}(x^{(\nu)}; \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = 0,$$

deren erste eine allgemeine Gleichung in x mit den willkürlichen Parametern $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ ist, eliminirt aus ihnen diese Parameter und bildet G_1 als Gruppe der resultirenden Gleichung; G'_1 erhält man, wenn man den Gleichungen $g' = 0,\ g'' = 0, \ldots, g^{(\nu)} = 0$ beliebige Gattungen ihrer Wurzeln adjungirt.

Der § 73 meiner Substitutionentheorie zeigt, wie man auf rein substitutionentheoretischem Wege die fraglichen Gruppen construiren kann. Das einfachste Beispiel bietet sich bei den Gleichungen vierten Grades dar. Nimmt man g und g' vom zweiten Grade, so findet sich das Resultat: *Jede durch Quadratwurzeln lösbare Gleichung vierten Grades besitzt eine Gattung vierwertiger Functionen der Wurzeln, für welche keine Gattungsdiscriminante besteht.* Es ist dieser Ausspruch eine Übersetzung des Satzes, dass alle Transpositionen der Gruppe

$$G_1 = [1,\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3),\ (x_1x_3x_2x_4),\ (x_1x_4x_2x_3)]$$

auch in der Untergruppe

$$G'_1 = [1,\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4)]$$

auftreten. Weitere Beispiele lassen sich leicht bilden.

§ 6.

Alle die Auseinandersetzungen des vorigen Paragrafen, welche sich auf Transpositionen bezogen und in ihren Resultaten Eigenschaften der Gattungsdiscriminanten nachwiesen, können ohne besondere Modificationen auf den Fall erweitert werden, dass wir Substitutionen von bestimmten anderen Typen betrachten. So sieht man z. B.: *Enthält G_1 überhaupt keine Substitutionen des Typus*

$$(x_1x_2x_3) \quad oder \quad (x_1x_2)(x_3x_4),$$

so besitzt keine Gattung $\mathfrak{G}'_1$ von Wurzeln einer zur Classe $(\mathfrak{G}_1;\, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ gehörigen Gleichung Divisorensysteme zweiter Stufe, welche den Discriminanten $D_{y'_1}$ aller Functionen y'_1 der Gattung gemeinsam wären.

Kommen alle Substitutionen eines bestimmten Typus, welche in G_1 enthalten sind, auch in der Untergruppe G'_1 vor, so besitzen die Discriminanten von Functionen der Gattung $\mathfrak{G}'_1$ kein Divisorensystem gemeinsam, welches aus den Substitutionen jenes Typus entspringt.

Ein allgemeines hierher gehöriges Theorem leiten wir auf folgende Art ab: Wir verstehen unter γ eine zur GALOIS'schen Gattung gehörige Function bei einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades, so dass für γ die Maximalzahl von Werten $n! = N$ besteht. Auf die Reihe

$$(\Gamma) \qquad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_N$$

dieser Werte wird die Gruppe sämmtlicher Substitutionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ angewendet, und jede der hierdurch hervorgerufenen Gruppirungen der γ als eine Permutation der Elemente γ gegenüber der Anordnung (Γ) betrachtet. Die so entstehenden Substitutionen bilden eine Gruppe Σ der Ordnung $N = n!$, welche der Gruppe S aller Substitutionen unter den x einstufig isomorf ist. Jede Substitution von Σ setzt alle Elemente γ um; ferner ist eine jede regulär (Vgl. Substitutionentheorie § 89). Die Substitutionen, welche Divisorensysteme von möglichst niedriger Stufe hervorrufen, haben demnach die Form $(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)\ldots(\gamma_{N-1}\gamma_N)$ und die Divisorensysteme sind somit von der Stufe $\frac{1}{2}N = \frac{1}{2}n!$.

Es giebt Classen von Gleichungen der Grade $n!$, deren Gattungen als Divisorensysteme der Discriminanten nur solche der Stufe $\frac{1}{2}n!$ oder solche von höherer Stufe besitzen.

Als Beispiel wählen wir den Fall $n = 3$. Dann wird Σ die Substitutionen

$$1,\ (\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)(\gamma_5\gamma_6),\ (\gamma_1\gamma_4)(\gamma_2\gamma_5)(\gamma_3\gamma_6),\ (\gamma_1\gamma_6)(\gamma_2\gamma_3)(\gamma_4\gamma_5)$$
$$(\gamma_1\gamma_3\gamma_5)(\gamma_2\gamma_6\gamma_4),\ (\gamma_1\gamma_5\gamma_3)(\gamma_2\gamma_4\gamma_6)$$

enthalten; setzt man $\gamma = x_1 x_2^2$ und nimmt man

$$x^3 + c_2 x - c_3 = 0$$

als diejenige Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, so wird die Gleichung sechsten Grades für γ die folgende sein:

$$\gamma^6 + 3c_3\gamma^5 + (6c_3^2 + c_2^3)\gamma^4 + (7c_3^3 + 2c_2^3c_3)\gamma^3 + c_3^2(6c_3^2 + c_2^3)\gamma^2 + 3c_3^5\gamma + c_3^6 = 0.$$

Sie hat also die Eigenschaft, dass die Discriminante jeder beliebigen Function ihrer Wurzeln von Divisorensystemen erster und zweiter Stufe frei ist.

Die nachstehende zweite Methode führt zu ähnlichen Resultaten. Wir nehmen y_1 als eine beliebige Function ρ^{ter} Ordnung, welche zu der beliebigen Gruppe G_1 gehören möge. Die ρ Werte von y_1 sollen

$$\text{(Y)} \qquad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_\rho$$

sein. Wir setzen voraus, dass $\rho > 2$ angenommen werde. Auf die Reihe (Y) wenden wir alle Substitutionen der alternirenden Gruppe $\mathfrak{A}$ von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an. Ist G_1 eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so liefert die Anwendung von $\mathfrak{A}$ auf y_1 nur die Hälfte aller Werte dieser Function

$$\text{(Y')} \qquad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{\frac{\rho}{2}};$$

ist G_1 dagegen nicht in der alternirenden Gruppe enthalten, so bekommen wir aus y_1 alle ρ Werte (Y). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle eintritt, erhalten wir durch die Anwendung von $\mathfrak{A}$

auf (Y′) resp. (Y) eine transitive Gruppe A von $\frac{\rho}{2}$ oder von ρ Elementen. Es ist A von der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ und einstufig isomorf zu $\mathfrak{A}$; denn zwei von einander verschiedene Substitutionen von $\mathfrak{A}$ müssen verschiedene Substitutionen von A hervorrufen. Weil ferner $\mathfrak{A}$ einfach ist, so kann auch A nicht zusammengesetzt sein. (Substitutionentheorie § 88.)

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, ob A primitiv oder imprimitiv ist. Im ersteren darf, falls ρ eine gewisse von p abhängige Grenze überschreitet, A keine cyklische Substitution einer Primzahlordnung enthalten, welche kleiner oder gleich p ist: denn sonst ginge (a. a. O. § 74 ff.) A in die alternirende oder die symmetrische Gruppe der $\frac{\rho}{2}$ resp. ρ Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ über, was wegen der bekannten Sätze über die Grösse von ρ in Beziehung auf n nicht möglich ist.

Hinsichtlich des Falles einer imprimitiven Gruppe A erinnern wir uns an einen Satz (a. a. O. § 84, Zusatz II), welcher in der correcten Fassung folgendermassen lautet: Jede imprimitive Gruppe ist zusammengesetzt, falls sie von der Einheit verschiedene Substitutionen besitzt, welche die einzelnen Systeme der Imprimitivität ungeändert lassen. Nun ist A einfach, und somit darf diese Gruppe keine Substitutionen enthalten, welche lediglich die Elemente der einzelnen Systeme unter einander umsetzen. Es dürfen demnach in A überhaupt keine cyklischen Substitutionen von Primzahlordnung vorkommen, weil diese gar nicht Elemente verschiedener Systeme enthalten können. Hieraus erhellt: *Die Classe der durch A charakterisirten Gleichungen des Grades $\frac{1}{2}\rho$ oder ρ und der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ enthält nur solche Gattungen von Wurzeln, deren Discriminanten keine Divisorensysteme besitzen, welche aus einer cyklischen Substitution der Primzahlordnung $q < p$ entspringen; p ist dabei eine von ρ abhängige Zahl, die mindestens den Wert 3 hat.*

Dass wir bei der Durchführung ähnlicher Untersuchungen zu ähnlichen Resultaten gelangen können, mag folgendes Beispiel zeigen.

Die Wurzeln von

$$x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0$$

seien x_1, x_2, x_3, x_4. Wir setzen

$$y_1 = x_1x_2,\ y_2 = x_1x_3,\ y_3 = x_1x_4,\ y_4 = x_2x_3,\ y_5 = x_2x_4,\ y_6 = x_3x_4$$

und wenden auf die x die symmetrische Gruppe dieser vier Elemente an. Dadurch werden 24 Substitutionen unter den $y_1, y_2, \ldots, y_6$ hervorgerufen, welche eine zur symmetrischen Gruppe S von $x_1, \ldots, x_4$ einstufig isomorfe Gruppe Σ bilden. Diese umfasst die folgenden Substitutionen

$$\begin{gathered}
1, \quad (y_1y_2)(y_5y_6),\ (y_1y_3)(y_4y_6);\ (y_1y_4)(y_3y_6),\ (y_1y_5)(y_2y_6),\\
(y_1y_6)(y_2y_5),\ (y_1y_6)(y_3y_4),\ (y_2y_3)(y_4y_5),\ (y_2y_4)(y_3y_5),\ (y_2y_5)(y_3y_4),\\
(y_1y_2y_3)(y_4y_5y_6),\ (y_1y_3y_2)(y_4y_6y_5),\ (y_1y_2y_4)(y_3y_6y_5),\ (y_1y_4y_2)(y_3y_5y_6),\\
(y_1y_3y_5)(y_2y_6y_4),\ (y_1y_5y_3)(y_2y_4y_6),\ (y_1y_4y_5)(y_2y_6y_3),\ (y_1y_5y_4)(y_2y_3y_6),\\
(y_1y_2y_6y_5)(y_3y_4),\ (y_1y_5y_6y_2)(y_3y_4),\ (y_1y_3y_6y_4)(y_2y_5),\\
(y_1y_4y_6y_3)(y_2y_5),\ (y_2y_3y_5y_4)(y_1y_6),\ (y_1y_4y_6y_3)(y_2y_5).
\end{gathered}$$

Die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_6$ sind, lautet

$$\begin{gathered}
y^6 - 3c_1y^5 + (2c_2 + 3c_1{}^2)y^4 + (4c_1c_2 + c_1{}^3)y^3 + (-4c_4 + c_3c_1 + c_2{}^2 + 2c_2c_1{}^2)y^2\\
-(30c_5 + 4c_4c_1 - c_3c_1{}^2)y + (32c_6 - 7c_5c_1 - c_3{}^2 - c_4c_1{}^2 + c_3c_2c_1) = 0;
\end{gathered}$$

die Gruppe derselben ist Σ. Aus der Beschaffenheit ihrer Substitutionen geht hervor, dass keine Gattung der Wurzeln y existirt, für welche die Discriminanten der zugehörigen Functionen einen Teiler oder auch ein Divisorensystem dritter oder fünfter Stufe gemeinsam hätten.

§ 7.

Für die nun folgenden allgemeineren Entwickelungen sind einige teils bekannte, teils leicht zu beweisende Hülfssätze nötig, welche hier zusammengestellt werden sollen:

I. Gehören zu einer Gruppe G alle Substitutionen eines bestimmten beliebigen Typus, so ist G entweder die alternirende oder die symmetrische Gruppe.

II. Jede Gruppe, welche nicht unter der alternirenden steht, ist zusammengesetzt; diejenigen ihrer Substitutionen, welche in der alternirenden Gruppe vorkommen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe mit 2 als Factor der Zusammensetzung.

III. Wendet man auf eine beliebige Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Substitutionen der x an, so entsteht unter den ρ Werten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ eine transitive Gruppe.

IV. Entsprechende Substitutionen isomorfer Gruppen besitzen gleiche Ordnung.

V. Ist eine Gruppe einfach oder zusammengesetzt, so ist jede ihr isomorfe Gruppe gleichfalls entsprechend einfach oder zusammengesetzt.

VI. Jede isomorfe transitive Gruppe Γ von G entspricht einer Untergruppe H von G derart, dass der Grad von Γ gleich dem Quotienten aus den Ordnungen von G und H ist. Ist also z. B. G die alternirende Gruppe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so ist Γ von einem der Grade $1, n, n(n-1), \ldots$

Wir bezeichnen nun durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ die alternirende und die symmetrische Gruppe der n Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ die ρ Werte einer rationalen ganzen Function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Wenden wir alle Substitutionen von $\mathfrak{A}$ oder von $\mathfrak{S}$ auf die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ an, dann kann man die hervorgerufenen Umstellungen als Substitutionen unter den φ deuten; die so entstehenden Gruppen seien entsprechend A oder Σ; Σ ist transitiv in den ρ Werten φ (Hülfss. III). Käme in Σ eine Transposition $\tau = (\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ vor und diese entspräche (Hülfss. IV) der Substitution zweiter Ordnung $t = (x_a x_b)(x_c x_d) \ldots$ in $\mathfrak{S}$, dann würden allen Substitutionen $t, t', t'', \ldots$ in S, welche von demselben Typus sind wie t, in Σ Transpositionen $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ entsprechen, da die Operationen $s^{-1}ts$ und $\sigma^{-1}\tau\sigma$ einander entsprechen. Ebenso würden ferner die Gruppen $G = \{t, t', t'', \ldots\}$ und $\Gamma = \{\tau, \tau', \tau'', \ldots\}$ einander isomorf sein. Gemäss Hülfss. I ist G alternirend oder symmetrisch, also Γ entweder gleich A oder gleich Σ; da Γ die Transposition $(\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ enthält, ist sie zusammengesetzt (Hülfss. II); demnach gilt dasselbe von G (Hülfss. V); also ist $G = S$ und $\Gamma = \Sigma$. Sobald eine transitive Gruppe Γ eine Transposition enthält, ist sie symmetrisch, und sonach von der Ordnung $\rho!$. Wir haben also $\rho! = n!$, da Σ, S einstufig isomorf sind; folglich ist $\rho = n$, d. h. *sobald $\rho > n$ wird, giebt es keine Substitution unter den x, welche $\rho - 2$ Werte der ρ-wertigen Function φ gleichzeitig ungeändert liessen.*

Es gilt ferner die bemerkenswerte Erweiterung dieses Satzes: *sobald $\rho > n$ ist, enthält Σ keine cyklischen Substitutionen, deren Ordnung eine Primzahl ist.* Dies beweisen wir folgendermassen: Wenn Σ eine Substitution τ der φ einer Primzahlordnung enthielte, und wenn unter t die entsprechende Substitution unter den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstanden wird, dann muss t mindestens einen Cyklus besitzen, welcher dieselbe Ordnung hat, wie τ. Diese Ordnung sei q; ferner sei $t = (x_1 x_2 \ldots x_q)(x_{q+1} \ldots) \ldots$ In $\mathfrak{S}$ giebt es die Substitution $t_1 = (x_1 x_3 x_2 \ldots x_q)(x_{q+1} \ldots) \ldots$, welche aus t durch Transformation mit $(x_2 x_3)$ hervorgegangen ist. Ihr entspreche τ_1 in Σ. Da nun $t_1 . t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ wird, so muss $\tau_1 . \tau^{-1}$ eine Substitution dritter Ordnung sein, woraus folgt, dass τ, τ_1 gemeinsame Elemente haben, da sonst $\tau_1 . \tau^{-1}$ von der Ordnung q bleiben würde. Transformirt man $t_1 t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ durch t und seine Potenzen, so erkennt man, dass die erhaltenen Substitutionen eine transitive Gruppe entstehen lassen, welche $(x_1 x_2 x_3)$ umfasst und folglich die alternirende Gruppe $\mathfrak{A}_1$ der verbundenen q Elemente $x_1, x_2, \ldots x_q$ wird. Die entsprechende Gruppe A_1 in Σ enthält höchstens $2q - 1$ Elemente. Sind die Elemente transitiv mit einander verbunden, dann folgt aus Hülfss. VI, dass es nur q sein können und daraus, dass auch die Gruppe A_1 alternirend in q Elementen φ ist und demnach ein $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$ enthält. Die transitive Gruppe Σ umfasst $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$, enthält also die alternirende Gruppe der ρ Elemente φ und da endlich Σ wie $\mathfrak{S}$ zusammengesetzt dagegen A wie $\mathfrak{A}$ einfach ist, so wird Σ symmetrisch, $\rho!$ wird $= n!$ und $\rho = n$. Intransitiv kann A_1 nicht sein, da jeder intransitive Teil mindestens q Elemente enthalten müsste.

Als Zusätze ergeben sich: *Sobald $\rho > n$ ist, enthält Σ keine Substitution, welche potenzirt eine cyklische Substitution liefert, deren Ordnung gleich einer Primzahl wäre; ebensowenig eine Substitution von einem der Grade 5 oder 7.*

Die Schlüsse, welche man aus diesen verschiedenen Sätzen auf die Divisorensysteme von Discriminanten machen kann, sind so ersichtlich, dass sie nicht aufgeführt zu werden brauchen. Nur der erste und einfachste sei hervorgehoben: *Wendet man auf die ρ Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ von $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Substitutionen der x an, so bestimmt die hierdurch gebildete zur symmetrischen Gruppe der x isomorfe Gruppe der φ eine Classe von Gleichungen ρ^{ten} Grades; für keine Gattung ihrer Wurzeln besitzt die zugehörige Discriminante Divisorensysteme erster oder zweiter Stufe.*

Berlin d. 19 Januar 1883.