ZUR THEORIE DER RAUMCURVEN.

VON

H. VALENTINER

IN KOPENHAGEN

Einleitung.

Unter den Sätzen, die von ebenen Curven gelten, sind schon seit lange viele solche Sätze bekannt, die von Constantenzählungen abhängen, so z. B. der Satz von der Anzahl von willkürlichen Punkten, durch welche man eine ebene Curve gegebener Ordnung legen kann, der CAYLEY'sche Satz, dass eine Curve n^{ter} Ordnung durch $\frac{(p+q-n-1)(p+q-n-2)}{2}$ Punkte von den Schnittpunkten einer Curve p^{ter} und einer Curve q^{ter} Ordnung gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und viele andere. Von den Raumcurven sind beinahe keine solchen Sätze bekannt. Die wichtigsten sind die, welche HALPHEN (Comptes rendus, tom. 70, p. 380) ohne Beweis veröffentlicht hat, nebst dem Satz von BRILL und NOETHER (Mathematische Annalen, Bd. VII, p. 308) und dem Satz von NOETHER (Mathematische Annalen, Bd. VIII, p. 510).

Erst in der neuesten Zeit haben mehrere Gelehrte sich wieder damit abgegeben, solche Sätze von den Raumcurven zu finden. So hat Professor STURM mehrere solche Sätze gefunden, die in dem »Report of the british association 1881» veröffentlicht sind; und zwei Arbeiten von HALPHEN und NOETHER, die ohne Zweifel auch solche Sätze enthalten, sind dieses Jahr mit dem Steinerschen Preis gekrönt worden.

Die Absicht dieser Arbeit ist auch solche Sätze zu finden. Sie ist anfangs im Jahre 1881 als Doctordissertation (¹) an der Kopenhagener

---

(¹) Unter dem Titel: Bidrag til Rumcurvernes Theori.

Universität geschrieben, hier aber bedeutend erweitert und umgearbeitet. Der erste Abschnitt enthält die Sätze, die als Grundlage meiner Untersuchungen über die Raumcurven dienen. Von diesen sind mehrere wohlbekannt, nämlich die Sätze (4), (5), (6), (7) und zum Theil (18), (19). Für den Satz (4) habe ich den Beweis mitgegeben. Dieser Satz giebt an, unter welchen Bedingungen eine Curve, die durch das vollständige Schnittpunktsystem zweier anderen Curven geht, noch jede von diesen Curven in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden muss. Der Beweis für diesen Satz ist zuerst von NOETHER (Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 351) geführt. Meinen Beweis habe ich hier mitgegeben, weil er sich nur auf Constantenzählungen stützt, und ich nicht glaube, dass ein solcher Beweis früher geführt ist.

Dagegen habe ich mich begnügt auf die Beweise der Herrn BRILL und NOETHER für die Sätze (5), (6), (7) hinzuweisen, da diese Beweise mir einfach scheinen, und sich nur auf den Satz (4) stützen. Von den nicht vorher bekannten Sätzen findet im Folgenden der Satz (11) viele Anwendungen, und ich will darauf aufmerksam machen, dass der Satz (12) eine Umkehrung des oben angeführten CAYLEY'schen Satzes enthält.

Der zweite Abschnitt handelt von der Darstellung der Curven. Hier habe ich nach dem Vorgang von CAYLEY in »Comptes rendus», tom. LIV. p. 55, die Raumcurven als Raumgebilde dargestellt, die Punkt für Punkt ebenen Curven entsprechen, was ich wie CAYLEY mittelst Kegeln und Monoiden — Flächen m^{ter} Ordnung mit einem $(m - 1)$-fachen Punkt — erreiche.

Die Hauptsätze dieses Abschnittes sind:

Wenn man durch die Linien, die man aus einem willkürlichen Punkt α zu der Curve ziehen kann, die diese in zwei Punkten treffen (die Doppelstrahlen), einen Kegel legt, so giebt es immer eine Monoide, deren Scheitel in dem Punkt α liegt, welche den Kegel zum Unterkegel hat und die Curve enthält. (¹)

und

Wenn die Anzahl h der Doppelpunkte einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung grösser als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *ist, ist jede ebene Curve Projection einer Raumcurve*

(¹) Wenn die Gleichung der Monoide $\varphi_m - a\varphi_{m-1} = 0$ ist, nennt man φ_m den Oberkegel, φ_{m-1} den Unterkegel.

n^{ter} Ordnung; ist dagegen $h \leqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, *findet dieses nur statt, wenn die Doppelpunkte so liegen, dass eine Curve $(n-4)^{ter}$ Ordnung durch einen derselben gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.*

Der dritte Abschnitt behandelt die Lage der Doppelstrahlen, besonders die niedrigste Ordnung, welche ein Kegel haben kann, der durch die aus einem willkürlichen Punkt ausgehenden Doppelstrahlen geht, sammt die Frage, durch wie viele von diesen Linien ein Kegel gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Ich will nur hier den einfachsten Satz anführen:

Wenn eine Raumcurve, c_n, $h = d - x$ scheinbare Doppelpunkte hat, kann man immer durch die Doppelstrahlen einen Kegel m^{ter} Ordnung legen, der wenigstens noch x Bedingungen erfüllen kann, wenn

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}, \qquad n-2 > m \geqq \frac{(n-2)}{2}.$$

Wenn aber die Curven auf Flächen gegebener Ordnung liegen, finden speciellere Sätze statt. Der allgemeine hier angeführte Satz ist auch von Sturm gefunden (siehe den citirten report of the british association).

Der vierte Abschnitt handelt von den Schnittpunkten der Curven und der Flächen. Die Sätze dieses Abschnittes sind wohl die wichtigsten der ganzen Abhandlung. Die Hauptsätze sind:

Wenn man durch eine Raumcurve c_n, die h scheinbare Doppelpunkte hat, zwei Flächen F_p und F_q, p^{ter} und q^{ter} Ordnung, legen kann, ist es mit

$$(p+q-4)n - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass eine Fläche F_{p+q-4}, $(p+q-4)^{ter}$ Ordnung, c_n enthalten soll, wenn F_p und F_q sich noch in einer unauflöslichen Curve c_{pq-n} schneiden. (1)

und:

Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Satz, muss F_{p+q-4} durch einen der Schnittpunkte von c_n und c_{pq-n} gehen, weil sie durch die übrigen geht.

Dieser letzte Satz ist dem angeführten Cayley'schen Satz von ebenen Curven analog.

(1) Vgl. Satz (6) von Sturm in dem report, und den oben citirten Satz von Noether.

Auch finden sich in diesem Abschnitt unter andern Resultaten die meisten von den Sätzen, die HALPHEN in »Comptes rendus», tom. LXX veröffentlicht hat.

In dem 5$^{\text{ten}}$ Abschnitt finden sich Sätze, die davon handeln, wie viele Bedingungen Raumcurven erfüllen können, die auf verschiedene Weisen definirt sind. Die Resultate dieses Abschnittes sind nicht viele und meistens bekannt; neu sind wohl nur die Resultate meiner Untersuchungen über, wie viele Bedingungen Curven erfüllen können, die auf Flächen gegebener Ordnungen liegen. Ich hoffe aber, dass die Untersuchungen selbst, und die Versuche über die bekannten Resultate hinauszuschreiten nicht ohne Interesse sind. Die meisten Versuche sind auf den geringen Kenntnissen, die man von der Lage der Doppelpunkte der ebenen Curven hat, gescheitert.

Kopenhagen, October 1882.

I.

Einleitende Sätze.

Im Folgenden wird man immer einen Kegel oder eine ebene Curve n^{ter} Ordnung φ_n nennen; es muss dann aus dem Texte gesehen werden, was gemeint wird. Ebenfalls nennt man eine Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n, eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n und eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einem $(n - 1)$-fachen Punkt M_{n-1}. Die letztgenannte Fläche wird eine Monoide genannt, und der $(n - 1)$-fache Punkt ihr Scheitel. Wenn nichts anders gesagt wird, wird vorausgesetzt, dass alle Kegel und Monoiden ihre Scheitel in demselben Punkte haben. Es werden hier als einleitende Sätze mehrere Sätze angeführt, die zum Theil wohlbekannt sind, weil man sie im Folgenden immer braucht.

1) Wenn eine Curve φ_n durch alle Schnittpunkte α von zwei andern Curven φ_p und φ_q geht, und φ_n noch φ_p in allen ihren Schnittpunkten β mit einer φ_{n-q} schneidet, wird φ_q auch von φ_n in allen ihren Schnittpunkten γ mit einer φ_{n-p} geschnitten, wenn φ_p nicht von zwei Curven φ_{p_1} und φ_{p_2} zusammengesetzt ist, durch deren Schnittpunkte φ_n geht. Es wird vorausgesetzt, dass φ_n weder φ_p noch φ_q enthält.

Dass φ_n durch die *st* zusammenfallenden Punkte geht, worin φ_p und φ_q in einem Punkt, der *s*-fach auf φ_p, *t*-fach auf φ_q ist, einander schneiden, wird sagen, dass φ_n in diesem Punkt sowohl φ_p als φ_q in *st* zusammenfallenden Punkten schneidet.

Solche Punktgruppen wie α, β, γ werden vollständige Schnittpunktsysteme zweier Curven genannt. α und β bilden zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von φ_n und φ_p. Es ist immer gleich $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ Bedingungen, dass φ_n durch α und β gehen soll.

Wir nehmen zuerst an, dass $n \geqq p + q$. Man kann dann eine Curve φ_{n-p} durch $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q legen.

Geht nun φ_n durch α und β, und kann man sie nicht durch mehr als $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q gehen lassen, müssen ihre übrigen Schnittpunkte mit φ_q auf einer Curve φ_{n-p} liegen; denn durch so viele Punkte kann man eine Curve φ_{n-p} legen, und φ_{n-p} und φ_p bilden zusammen eine Curve φ_n. Lässt man aber φ_n durch mehr als $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q gehen, muss sie φ_q enthalten. Denn lässt man φ_n durch k weitere Punkte von φ_q gehen, ist sie vollkommen dadurch bestimmt, dass sie durch

$$\frac{n(n+3)}{2} - np + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - q(n-p) + \frac{(q-1)(q-2)}{2} - k =$$

$$= \frac{(n-q-p)(n-q-p+3)}{2} + 2 - k$$

willkürlich gegebene Punkte gehen soll. Da aber eine Curve φ_{n-q}, die durch β geht, auch durch eben so viele willkürliche Punkte gelegt werden kann, wird also φ_n in diesem Fall von φ_q und φ_{n-q} zusammengesetzt sein. Ähnlicher Weise sehen wir, dass der Satz auch Gültigkeit hat, wenn $n < p + q$, indem wir zeigen, dass wir eine Curve φ_n, die durch α und β geht, nur durch $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q legen können. Der Beweis wird ganz wie im vorigen Fall geführt.

2) Eine Curve φ_n ist nur den Bedingungen unterworfen durch die Schnittpunkte von zwei Curven $\varphi_{n'}$ und φ_q zu gehen ($q < n$), von denen $\varphi_{n'}$ in

einem Punkte a einen s-fachen Punkt hat, und φ_q einen Punkt, der wenigstens s-fach ist. φ_n muss dann auch im Allgemeinen in a einen s-fachen Punkt haben, und wir können zeigen, dass von den $s(s-1)$ ersten dem a und einander benachbarten Punkten [$(s-1)$ auf jedem Zweig von φ_n genommen], durch welche φ_n nicht nothwendig gehen muss, weil sie durch die Schnittpunkte von $\varphi_{n'}$ und φ_q geht, $\frac{s(s-1)}{2}$ durch die übrigen bestimmt sind. Wir werden die dem a auf φ_n benachbarten s Punkte s_1 nennen, die diesen benachbarten Punkte s_2, u. s. w.

Von s_1 kann man nur einen Punkt willkürlich wählen. φ_n kann nämlich nur durch $\frac{(n-q+1)(n-q+2)}{2}$ willkürlich gewählte Punkte gelegt werden; wenn 2 von den Punkten s_1 willkürlich gewählt wären, würde sich φ_n in φ_q und eine φ_{n-q}, die durch a ginge, auflösen. Denn φ_n könnte nur noch durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-1$ willkürliche Punkte gelegt werden, und eine φ_{n-q}, die durch a ginge, würde mit φ_q zusammen eine φ_n bilden, die alle gegebenen Bedingungen erfüllte und noch durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-1$ willkürliche Punkte gelegt werden könnte. Auf eben dieselbe Weise sieht man, dass nur 2 von den Punkten s_2 willkürlich gewählt werden können, wenn die Punkte s_1 bestimmt sind. Denn wählte man 3 Punkte s_2 willkürlich, könnte φ_n nur noch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-3$ Bedingungen erfüllen, und eine φ_{n-q}, von der a ein Doppelpunkt wäre, könnte eben so viele Bedingungen erfüllen, so dass φ_n von einer solchen φ_{n-q} und φ_q zusammengesetzt sein müsste. Es ist auch leicht zu sehen, dass wenn $n-q \geqq 1$, wirklich 2 von den Punkten s_2 willkürlich gewählt werden können; denn sonst müsste φ_n sich in φ_q und eine φ_{n-q}, die einen doppelten Punkt in a hätte, auflösen; dieses ist aber unmöglich, da φ_n noch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-2$ Bedingungen erfüllen kann, φ_{n-q} nur $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-3$. Auf dieselbe Weise sieht man, dass man höchstens r Punkte von s_r willkürlich wählen kann, wenn $r < s$, und dass man, wenn $n-q \gtreqless r-1$, wirklich so viele Punkte willkürlich wählen kann.

Man sieht hieraus, dass es höchstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen für φ_n ist, durch die $s(s-1)$ dem a benachbarten Punkte auf $\varphi_{n'}$ zu gehen, wenn

$\varphi_{n'}$ eine bestimmte gegebene Curve ist. Man kann aber leicht zeigen, dass es wirklich so viele Bedingungen sind, wenn $n \overline{\gtreqless} q + s - 1$. Denn man kann φ_n durch einen willkürlichen Punkt von φ_q gehen lassen. φ_n muss dann φ_q enthalten und ihr übriger Theil eine ganz willkürliche Curve $(n - q)^{ter}$ Ordnung sein. Diese muss aber, um durch die genannten $s(s - 1)$ Punkte zu gehen, einen $(s - 1)$-fachen Punkt in a haben, und dieses giebt für φ_{n-q} $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen, und also ist es für $\varphi_{n'}$ wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen hierdurch zu gehen. Da es nun sowohl höchstens wie wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen sind, muss es gerade $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen sein.

3) Zwei Curven φ_m und φ_n sind nur den Bedingungen unterworfen, durch alle Schnittpunkte α von den Curven φ_p und φ_q zu gehen und ausserdem φ_p in den vollständigen Schnittpunktsystemen β und γ zu schneiden. Ein Punkt a_{st} ist s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q, und $s < t$. φ_m und φ_n müssen dann auch einen s-fachen Punkt in a_{st} haben, und es ist dann, wenn $n > p + s - 2$, mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, dass φ_n durch die $s(s - 1)$ Punkte S gehen soll, wenn S auf einer gegebenen Curve φ_m liegen, a_{st} benachbart sind, nicht zu α hören und $(s - 1)$ von den Punkten S auf jedem Zweig von φ_m liegen.

Nehmen wir an, dass β und γ die vollständigen Schnittpunktsysteme von φ_p und beziehungsweise φ_{m-q} und φ_{n-q} sind, dann bilden φ_n mit φ_{m-q} zusammen, φ_m mit φ_{n-q} zusammen zwei Curven $(m + n - q)^{ter}$ Ordnung, φ_{m+n-q} und φ'_{m+n-q}, die beide das vollständige Schnittpunktsystem $\alpha + \beta + \gamma$ mit φ_p haben. Wenn nun kein Punkt von β oder γ in a_{st} fällt, so dass weder φ_{m-q} noch φ_{n-q} durch a_{st} geht, wissen wir, 2) zufolge, dass es mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine φ_{m+n-q} durch die $s(s - 1)$ dem a_{st} auf φ'_{m+n-q} benachbarten Punkte S gehen soll, wenn φ'_{m+n-q} eine gegebene Curve ist, und $m + n - q > p + s - 2$; man muss aber immer $m + n - q > p + s - 2$ haben, da $m \geqq q$, und es gegeben ist, dass $n > p + s - 2$. Daraus folgt aber, da φ_{m-q} und φ_{n-q} nicht durch S gehen, dass es für φ_n höchstens mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist durch S zu gehen. Es müssen aber auch wenigstens so viele Bedingungen sein, denn der Beweis am Schlusse von 2) zeigt, dass, wenn alle die Schnittpunkte von φ_n und φ_p bestimmt sind, immer die ersten $s(s-1)$ von den Punkten auf φ_n, die den Schnittpunkten benachbart sind, welche in einen Punkt fallen, der s-fach sowohl auf φ_p als auf φ_n ist, durch $\frac{s(s-1)}{2}$ unter ihnen bestimmt sind. Wenn also nur die Schnittpunkte von φ_n und φ_m zum Theil bestimmt sind, müssen also die genannten Punkte durch wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ unter ihnen bestimmt sein.

Wenn φ_m oder φ_n die φ_p in Punkten schneiden, die in a_{st} fallen, ist es leicht zu sehen, dass der Satz auch in diesem Fall richtig ist, was aus dem Continuitätsprincip folgt. Übrigens ist es leicht einen directen Beweis zu führen, indem man es ganz wie in den übrigen Fällen thun kann, wenn man nur, was erlaubt ist, φ_p mit einer andern Curve p^{ter} oder q^{ter} Ordnung vertauscht, die durch α geht und von deren übrigen Schnittpunkten mit φ_m keiner in a_{st} fällt.

4) Wie in 3) nennen wir das vollständige Schnittpunktsystem von zwei Curven φ_p und φ_q α, und jeden Punkt, der s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q ist, a_{st}. Eine Curve r^{ter} Ordnung, die durch α geht und in jedem a_{st} einen s- oder t-fachen Punkt hat, je nachdem $s \lesseqgtr t$, und die φ_p noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneidet, nennen wir φ_{1r}.

Wir haben dann den folgenden Satz: Wenn eine Curve φ_n durch α geht, und in jedem Punkt a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in den Punkten schneidet, in welchen dieser auf einmal φ_q und φ_p berührt, und ausserdem in $(s+t-1)$ in a_{st} zusammenfallenden Punkten, muss φ_n ausser in α φ_p in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden. Die Curve φ_{1r} kann für jeden Punkt a_{st} eine verschiedene sein, auch ihre Ordnung kann wechseln. Die hier aufgestellten Bedingungen sind zugleich nothwendig dafür, dass φ_n ausser in α φ_p in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden soll. In dem Beweis wollen wir der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in einem a_{st} kein Zweig von φ_p einen Zweig von φ_q berührt, da es leicht zu sehen ist, dass der Satz immer richtig ist, wenn er in diesem Fall richtig ist. φ_n ist dann nur den Bedingungen unterworfen in jedem a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in $s+t-1$ zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Wir wollen zuerst den Beweis führen, indem wir

$n > p + q - 3$, und so gross annehmen, dass alle die Bedingungen, denen φ_n unterworfen ist, von einander unabhängig sind.

Nehmen wir an, dass $s < t$.

Eine Curve n^{ter} Ordnung, die φ_p in α und noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneidet, nennen wir φ_{1n}.

Es müssen immer Curven φ_{1r} existiren, deren Zweige von einer φ_{1n} in a_{st} in $s + t - 1$ zusammenfallenden Punkten geschnitten werden. Denn im Allgemeinen hat φ_{1n} in a_{st} einen s-fachen Punkt und berührt jeden Zweig von φ_p $(t - s)$-fach, und da auch jede φ_{1r} dieses thut, muss jede φ_{1r} jeden Zweig von einer φ_{1n} in a_{st} $(t - s)$-fach berühren.

Nach 3) kann aber φ_{1r}, wenn r hoch genug, dazu gebracht werden jeden Zweig von φ_{1n} in a_{st} noch in $(s - 1)$ Punkten zu berühren. Dann schneidet aber φ_{1n} jeden Zweig von φ_{1r} in a_{st} in $(s + t - 1)$ zusammenfallenden Punkten, indem sie einen s-fachen Punkt hat und jeden Zweig $(t - 1)$-fach berührt.

Ebenso sieht man, dass es Curven φ_{1r} giebt, die in a_{st} jeden Zweig von φ_{1n} in $(s + t - 1)$ zusammenfallenden Punkten schneiden, wenn $s > t$. Es ist also hiermit bewiesen, dass, wenn n hoch genug, die Bedingungen nothwendig sind. Wir wollen jetzt zeigen, dass sie zulänglich sind. Wir wollen daher sehen, wie vielen Bedingungen eine φ_n unterworfen ist, wenn sie die im Satze gegebenen Bedingungen erfüllen soll, indem n stets zulänglich gross angenommen wird.

Wir nehmen wieder an, dass in einem a_{st} $s < t$.

In a_{st} soll φ_n erstens einen s-fachen Punkt haben, was mit $\frac{s(s+1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, zweitens soll sie jeden Zweig von φ_p in $(t - s)$ Punkten berühren, was mit $s(t - s)$ Bedingungen eqvivalent ist, und drittens soll sie noch $s(s - 1)$ in a_{st} zusammenfallende Punkte S mit einer φ_{1r} gemein haben, was mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, da nach 3) $\frac{s(s-1)}{2}$ von den Punkten S beliebig gewählt werden können. Dieses ist im ganzen mit

$$\frac{s(s+1)}{2} + s(t - s) + \frac{s(s-1)}{2} = st$$

Bedingungen eqvivalent.

Ebenso sehen wir, dass es mit st Bedingungen eqvivalent ist, wenn $s > t$, dass φ_n in a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in $s + t - 1$ zusammenfallenden Punkten schneiden soll.

φ_n ist also im ganzen Σst oder pq Bedingungen unterworfen, oder kann noch $\frac{n(n+3)}{2} - pq$ Bedingungen erfüllen. Eben so viele Bedingungen kann eine φ_{1n} erfüllen, sie kann nämlich durch $(n-q)p - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_p, und, wenn ihre Schnittpunkte mit φ_p bestimmt sind, durch $\frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2}$ willkürliche Punkte gelegt werden, also im ganzen noch

$$(n-q)p - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - qp$$

Bedingungen erfüllen.

Da aber die Curven φ_{1n} alle die Bedingungen erfüllen müssen, welchen die Curven φ_n unterworfen sind, und eine φ_n nicht durch mehrere willkürliche Punkte gelegt werden kann als eine φ_{1n}, müssen die beiden Gruppen von Curven zusammenfallen.

Damit ist also der Satz bewiesen, wenn n zulänglich gross. Man kann aber zeigen, dass der Satz für $(n-1)$ richtig ist, wenn er für n richtig ist. Denn der Satz muss für eine Curve gelten, die von einer φ_{n-1}, welche durch α geht und in jedem a_{st} jeden Zweig von einer φ_{1r} in $(s+t-1)$ zusammenfallenden Punkten schneidet, und von einer willkürlichen geraden Linie L zusammengesetzt ist. Die Schnittpunkte von dieser zusammengesetzten Curve und φ_p, die nicht in α fallen, müssen also auf einer Curve φ_{n-q} liegen.

Wenn nun $n - q \geq p$, sieht man, dass L, ausser in ihren Schnittpunkten mit φ_p, von φ_{n-q} in einem vollständigen Schnittpunktsystem geschnitten wird, und 1) zufolge müssen dann auch die Schnittpunkte von φ_p und φ_{n-q}, die nicht auf L liegen, ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden und auf einer φ_{n-q-1} liegen, wodurch in diesem Fall der Satz bewiesen ist. Wenn $(n-q) < p$, muss φ_{n-q} L enthalten, und die übrigen Schnittpunkte von φ_p und φ_{n-q} auf einer φ_{n-q-1} liegen, wodurch der Satz ebenfalls in diesem Fall bewiesen ist, so dass wir jetzt bewiesen haben, dass er in allen Fällen gilt.

Aus diesem Satz folgt:

Dass, wenn eine Curve φ_n durch alle Schnittpunkte von zwei Curven φ_p und φ_q geht, und in jedem Punkt a_{st}, der s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q ist, einen $(s+t-1)$-fachen Punkt hat, wird sie noch φ_p in Punkten schneiden, die auf einer φ_{n-q} liegen. (1)

5) Aus 4) kann die allgemeine Residualtheorie abgeleitet werden.

Wenn eine Curve φ_p durch eine Gruppe von Punkten α geht, die auf einer φ_q liegen, und wir annehmen, dass kein Punkt von α Doppelpunkt auf φ_q ist, und φ_q noch die Curve φ_p in einer Punktgruppe β schneidet und einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem Punkt b_t von β hat, der t-fach auf φ_q ist, und wir durch α eine Curve φ_r legen, die gleichfalls einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat, und ausser α φ_p in einer Punktgruppe γ schneidet, alsdann wird jede Curve φ'_r, die durch γ geht und ebenfalls einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat, φ_q noch in einer Gruppe α' schneiden, durch die man eine Curve φ'_p legen kann, die durch β geht und einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat. (2)

6) Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Curven φ' $(t-1)$-fache Punkte in gewissen gegebenen t-fachen Punkten b_t von φ_n haben, durch die sie alle gehen, und dass die Punktgruppen im Allgemeinen keinen Doppelpunkt von φ_p enthalten. Wir haben dann das Theorem:

Wenn eine Curve φ'_p die Curve φ_n (ausser in den gegebenen t-fachen Punkten) in den Gruppen α und β schneidet, und β eine feste Gruppe ist, α aber q willkürliche Punkte von φ_n enthalten kann und von Q Punkten besteht, so wird eine Curve φ'_{n-3} durch alle Punkte α gehen, wenn sie durch $Q-q$ willkürliche von diesen Punkten geht. (Siehe Mathematische Annalen, Bd VII, p. 272.)

7) Aus 6) folgt der Riemann-Roch'sche Satz: Wenn φ'_{n-3}, ausser in den Punkten b_t, φ_n in den Punktgruppen α und β schneidet, die beziehungsweise von Q und R Punkten bestehen, von denen q und r Punkte willkürlich gewählt werden können, bestehen zwischen diesen Zahlen folgende Gleichungen:

---

(1) Vgl. die Abhandlung von Noether, Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 341.

(2) Vgl. die Abhandlung von Brill und Noether, Mathemathische Annalen, Bd. VII, p. 273, wo der Beweis sich findet, und die Abhandlung von Noether, Mathematische Annalen, Bd. XV, p. 517.

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2},$$

$$q = p - (R - r) - 1 \qquad\qquad r = p - (Q - q) - 1,$$

$\sum \frac{t(t-1)}{2}$ wird über alle Punkte b_t ausgestreckt.

Dieser Satz sagt eigentlich nur aus, dass es eben mit $Q - q$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Curve φ'_{n-3} durch eine Punktgruppe gehen soll, die von Q Punkten besteht, von denen q willkürlich gewählt werden können. (Siehe Mathematische Annalen, Bd. VII, p. 280.)

Aus diesem Satz folgt, dass es immer mit $\sum \frac{t(t-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass φ'_{n-3} $(t-1)$-fache Punkte in gewissen t-fachen Punkten von φ_n haben soll. Denn es können nicht mehrere Bedingungen sein, und wären es weniger, würde man eine φ'_{n-3} durch alle Schnittpunkte einer andern φ'_{n-3} mit φ_n gehen lassen können und noch durch mehrere Punkte von φ_n, was unmöglich ist.

Speciell sieht man, dass, wenn φ_n Doppelpunkte hat, können sie niemals so liegen, dass eine φ_{n-3} durch einige unter ihnen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

8) Zwei Curvenschaaren φ_p und φ_q gehen durch eine Punktgruppe β. Wir setzen voraus, dass $p > q$, und dass wir φ_q noch durch s willkürliche Punkte legen können. Eine willkürliche Curve φ_q trifft eine willkürliche Curve φ_p in einer Gruppe α. Wenn von den Punkten einer solchen Gruppe α immer noch ein Punkt P auf einer geraden Linie liegen muss, weil k Punkte von α dieses thun, muss φ_q die ganze Linie L enthalten, wenn k von ihren Punkten auf L liegen, und also alle die p Punkte, worin L φ_p schneidet, zu α gehören, weil k von diesen Punkten, α_1, dieses thun. Wir können annehmen, dass keiner von den übrigen Schnittpunkten einer geraden Linie und einer willkürlichen Curve φ_p nothwendig zu α gehören muss, wenn nur k_1 von diesen Schnittpunkten zu α gehören, indem $k_1 < k$. Denn sonst könnten wir für k eine kleinere Zahl k_1 setzen, und dann den Beweis führen, indem die Annahme für k_1 statt fände.

Wenn φ_q nicht L enthalten müsste, weil sie durch k der Schnittpunkte von φ_p und L ginge, müsste auch φ_p durch P gehen, weil sie durch β und α_1 ginge, da es sonst nicht immer nothwendig wäre, dass

φ_q durch P gehen müsste, weil sie durch β und α_1 ginge. Aber es ist unmöglich, dass φ_p durch P gehen muss, weil sie durch β und α_1 geht; denn dann müsste eine Curve zusammengesetzt von einer Curve φ_q, die durch β und $k-p+q$ willkürliche Punkte α_1 ginge, und von einer willkürlichen Curve φ_{p-q}, die durch die übrigen $p-q$ Punkte α_1 ginge, auch durch P gehen, und da φ_{p-q} nicht nothwendig durch P gehen müsste, müsste φ_q dieses thun. Dieses streitet aber gegen das, was vorausgesetzt ist, da φ_q dann durch P gehen müsste, weil sie durch eine geringere Zahl der Punkte α_1 als k ginge.

9) Eine Punktgruppe α ist dadurch bestimmt, dass sie auf einer Curve φ_n liegen soll, und dass durch sie eine Curve φ_p geht, die noch φ_p in der festen Punktgruppe β schneidet. Wenn nun alle die Punkte, in welchen eine gerade Linie L_1 φ_n schneidet, zu α gehören müssen, weil k unter ihnen dieses thun, so wird α noch die Punkte enthalten, worin eine neue gerade Linie L_2 φ_n schneidet, wenn noch $(k-1)$ von diesen zu α gehören.

Wenn α alle die Punkte enthält, in denen eine gerade Linie φ_n schneidet, werden ihre übrigen Punkte eine Gruppe α_1 bilden, die mit β zusammen auf einer Curve φ_{p-1} liegen. Umgekehrt wird jede Curve φ_{p-1}, die durch β geht, eine Gruppe α_1 ausschneiden, die zusammen mit den Punkten, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, eine Gruppe α bildet.

Wenn wir also eine Curve φ_{p-1} durch β und $(k-1)$ willkürliche Punkte einer willkürlichen geraden Linie L_2 legen und eine gerade Linie L durch einen der übrigen Schnittpunkte P von L_2 und φ_n, werden L und φ_{p-1} eine Curve φ_p bilden, die eine Gruppe α ausschneidet, welche k von ihren Punkten auf der Linie L_2 hat, und also alle Schnittpunkte von L_2 und von φ_n enthalten muss. Lassen wir nun L nicht mit L_2 zusammenfallen, sieht man, dass φ_{p-1} durch die übrigen $n-k$ Schnittpunkte von φ_n und L_2 gehen muss, und da P willkürlich gewählt ist, auch durch diesen. Daraus sieht man, dass alle Schnittpunkte von L_2 und φ_n zu α_1 gehören müssen, wenn $k-1$ Punkte von einer Gruppe α_1 auf L_2 liegen, und damit ist der Satz bewiesen.

Da α_1 alle die Punkte enthält, worin eine gerade Linie φ_n schneidet, wenn $k-1$ von diesen zu α_1 gehören, sieht man, dass sie noch alle die Punkte enthalten muss, worin eine neue gerade Linie L_3 φ_n schneidet, wenn $k-2$ von diesen Punkten zu α_1 gehören, so dass α die Punkte, worin drei willkürliche gerade Linien φ_n schneiden, enthalten muss, wenn k Punkte α auf der ersten liegen, $k-1$ auf der zweiten und $k-2$ auf der dritten.

Indem wir immer auf dieselbe Weise fortfahren, werden wir zu dem folgenden Satz geführt. Wenn alle die Punkte, worin eine gerade Linie φ_n schneidet, zu α gehören, weil k von diesen Punkten dazu gehören, wird α alle die Punkte enthalten, worin r gerade Linien φ_n schneiden, wenn k von den Schnittpunkten der ersten Linie, $k-1$ von denen der zweiten, $k-2$ von denen der dritten, ..., $(k-r+1)$ von denen der r^{ten} zu α gehören.

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist es also höchstens mit

$$\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-r)(k-r+1)}{2}$$

Bedingungen eqvivalent, dass α die Schnittpunkte von r geraden Linien und von φ_n enthalten soll, oder, wie man leicht sieht, wenn so viele von den Schnittpunkten einer willkürlichen Curve mit φ_n zu α gehören, müssen sie alle dieses thun.

10) Wenn q Punkte einer Punktgruppe α, die auf φ_n liegt, willkürlich gewählt werden können, und alle Schnittpunkte einer willkürlichen geraden Linie mit φ_n zu α gehören müssen, weil k von diesen Punkten dieses thun, muss man haben

$$\frac{k(k+1)}{2}>q.$$

Hätte man nämlich $\frac{k(k+1)}{2} \overline{\gtrless} q$, könnte man k willkürliche gerade Linien wählen und k Punkte von α auf der ersten, $(k-1)$ auf der zweiten, ..., 1 auf der letzten liegen lassen, und alle die Punkte, worin diese Linien φ_n schnitten, müssten dann nach 9) zu α gehören. Es ist aber unmöglich, dass alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, zu einer Punktgruppe gehören müssen, weil einer unter ihnen, P, dieses thut. Denn dann müssten die Punkte, worin jede Linie durch P φ_n schneidet, zu α gehören, und α folglich alle Punkte von φ_n enthalten, was unmöglich ist. Wir können also nicht $\frac{k(k+1)}{2} \overline{\gtrless} q$ haben.

11) Gegeben sind $mq + k$ Punkte α $(q > k)$, von welchen angenommen wird, dass keiner in einen Doppelpunkt fällt, die auf einer Curve φ_q liegen. Eine Curve n^{ter} Ordnung $(n > m)$, die durch α geht, kann noch durch x willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden:

Welcher ist der grösste Werth, den man x geben kann, und welche Lage hat α in diesem Fall?

Wir wollen zuerst den grössten Werth von x suchen und dann in 12) und 13) versuchen die zweite Frage zu beantworten.

Wir nehmen zuerst an

(A) $$n > m + q - 3.$$

In diesem Fall kann man zeigen, dass man immer

$$x = (n - m)q - \frac{(q-1)(q-2)}{2} - k$$

hat, und dass folglich φ_n durch keinen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

φ_n schneidet noch φ_q in einer Punktgruppe β von $nq - mq - k$ Punkten bestehend, und da x von den Punkten β willkürlich gewählt werden können, wird nach 6) eine Curve $(q-3)^{ter}$ Ordnung durch alle die Punkte β gehen, wenn sie durch $nq - mq - k - x$ willkürliche Punkte unter ihnen geht. Da aber die Anzahl der Punkte β grösser als $q(q-3)$ ist, kann keine Curve φ_{q-3} durch β gehen. Man muss daher haben

$$nq - mq - k - x > \frac{q(q-3)}{2}, \qquad x < nq - \frac{q(q-3)}{2} - mq - k.$$

Da es aber für φ_n höchstens mit $mq + k$ Bedingungen eqvivalent ist, dass sie durch α gehen soll, muss man auch haben

$$nq - \frac{(q-1)(q-2)}{2} - mq - k \gtreqless x,$$

und man sieht, dass man immer für x den obengenannten Werth bekommen muss. Zweitens nehmen wir an

(B) $$n \leqq m + q - 3.$$

α) Wir nehmen zuerst an, dass $m > q$. Wir nennen die Punktgruppe β, worin φ_n φ_q ausser in α schneidet. β besteht von $(n-m)q-k$ Punkten. Um eine untere Grenze für den höchsten Werth von x zu finden, können wir zuerst annehmen, dass α auf einer Curve φ_{m+1} liege.

Wenn α auf einer φ_{m+1} läge, könnte man φ_n durch die übrigen Schnittpunkte von φ_{m+1} und φ_q gehen lassen, und φ_n würde dann ausser in diesen Punkten φ_q in ihrem vollständigen Schnittpunktsystem mit einer Curve φ_{n-m-1} schneiden. Da φ_{n-m-1} willkürlich gewählt werden könnte, könnten $\frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2}$ von ihren Schnittpunkten mit φ_n willkürlich gewählt werden. Daraus sieht man, dass man

$$x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2} + h$$

setzen kann, indem $h \gtreqless 0$.

Eine Curve φ_{q-3} wird (nach 6)) durch alle Punkte β gehen, wenn sie durch $(n-m)q-k-x=g$ willkürliche Punkte unter ihnen geht, und wird dann noch φ_q in einer Gruppe γ schneiden, die von

$$q(q-3)-rq-q+k=(q-r-4)q+k$$

Punkten besteht, indem $r=n-m-1$. Von den Punkten γ können 7) zufolge

$$\frac{q(q-3)}{2} - g = \frac{(q-r-3)(q-r)}{2} + h - (q-k)$$

willkürlich gewählt werden.

Lassen wir jetzt $r+1$ Punkte β und $q-r-3$ Punkte γ auf einer geraden Linie L liegen, wird φ_{q-3} L enthalten, da L in mehr als $q-3$ Punkten von φ_{q-3} geschnitten wird. Dann müssen aber die beiden übrigen Schnittpunkte von L und φ_q wenigstens zu einer von den zwei Gruppen β oder γ gehören 8) zufolge, indem es leicht zu sehen ist, dass die da aufgestellten Bedingungen hier erfüllt sind. 10) zufolge müssen wir dann haben, dass wenigstens eine von den folgenden Ungleichheiten statt findet

$$(1) \qquad \frac{(r+1)(r+2)}{2} > \frac{r(r+3)}{2} + h, \quad h < 1$$

oder

$$(2)\quad \frac{(q-r-3)(q-r-2)}{2} > \frac{(q-r-3)(q-r)}{2} - q + k + h, \quad h < r - k + 3.$$

Wenn nun $r - k + 3 \overline{\gtrless} 0$, kann (2) nicht statt finden, da h nicht kleiner als 0 sein kann, und wir müssen dann haben $h < 1$, oder $h = 0$. Wenn $r - k + 3 > 0$, sehen wir (2) zufolge, dass der höchste Werth, den h haben kann, $h = r - k + 2 = n - m - k + 1$ ist.

Die höchsten Werthe, die x haben kann, sind dann,

$$\text{wenn } n \overline{\gtrless} m + k - 1,\ x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2},$$

und

$$\text{wenn } n \overline{\gtrless} m + k - 1,\ x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2} + n - m - k + 1,$$

die man in die Formel

$$x = \frac{(n-m)(n-m+3)}{2} - k + \varepsilon(m + k - n - 1)$$

zusammenfassen kann, wo $\varepsilon = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, je nachdem $n \lesseqgtr m + k - 1$.

Daraus sieht man, dass φ_n höchstens durch

$$\frac{(q+m-n-1)(q+m-n-2)}{2} + \varepsilon(m + k - n - 1)$$

von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

β) Wir nehmen jetzt an dass $m < q$. Man sieht durch dieselben Betrachtungen wie in α), dass die Formel für den höchsten Werth von x ungeändert bleibt.

Die Formel für die höchste Anzahl der Punkte α, durch welche φ_n gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, bleibt ebenfalls ungeändert, wenn $n \geqq q$, während man, wenn $n < q$, sieht, dass diese Anzahl $m(q-n) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m + k - n - 1)$ ist, wo ε dieselbe Bedeutung wie in α) hat.

12) In dem, was vorhergeht, sind die Formeln für den höchsten Werth von x entwickelt. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Lage eine solche Punktgruppe α haben muss, wenn x diesen höchsten Werth hat.

Zufolge 11) (A) hat x immer denselben Werth, welche Lage auch α hat, wenn $n > m + q - 3$, und wir können hier aus dem Werth von x nicht schliessen, welche Lage α hat. Wir fangen also damit an zu untersuchen, welche Lage α hat, wenn $m + q - 3 \geqq n > k + m - 1$, und wir wollen zeigen, dass wenn x seinen grössten Werth hat, wird eine Curve φ_n, die φ_q in einer Gruppe α schneidet, noch φ_q in einer Gruppe β von $(n - m)q - k$ Punkten schneiden, durch welche man eine Curve $(n - m)^{ter}$ Ordnung legen kann. Wenn wir dieselben Bezeichnungen wie in 11) (B) gebrauchen, sehen wir, dass $\frac{(q - r - 4)(q - r - 1)}{2}$ Punkte der Gruppe γ willkürlich gewählt werden können, indem γ die Punktgruppe ist, in welcher eine φ_{q-3}, die durch β geht, noch φ_q schneidet. Da die Ungleichheit 11) (2) (nicht aber 11) (1)) befriedigt ist, müssen nach 11) (B) und 8) alle die Punkte, in welchen eine willkürliche Gerade L φ_q schneidet, zu γ gehören, wenn $q - r - 3$ unter ihnen dieses thun. Aber dann wird gesehen (dem Schlusse von 9) zufolge), dass γ die Punkte, worin $q - r - 4$ willkürliche gerade Linien φ_q schneiden, enthalten kann, und da eine φ_{q-3} immer durch eine willkürliche Gruppe γ und eine willkürliche Gruppe β geht, sieht man, dass β auf einer Curve $(r + 1)^{ter}$ oder $(n - m)^{ter}$ Ordnung liegt.

Umgekehrt sehen wir, dass, wenn wir eine Curve φ_{n-m} durch k Punkte von φ_q legen, und durch die übrigen Punkte worin φ_{n-m} φ_q schneidet, eine Curve φ_n, φ_n noch φ_q in einer Gruppe α der genannten Beschaffenheit schneidet. Denn φ_{n-m} kann noch durch $\frac{(n - m)(n - m + 3)}{2} - k$ willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden, und der Residualtheorie zufolge, kann eine Curve φ_n, die durch α geht, durch eben so viele willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden.

Hierdurch sieht man, dass es wirklich immer Gruppen α giebt, durch welche man Curven φ_n legen kann, die noch durch x willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden können, wenn x den genannten höchsten Werth hat.

Es ist leicht zu sehen, wenn wir durch k willkürliche Punkte eine Curve φ_p legen können, dass wir uns eine Gruppe α auch dadurch hervorgebracht denken können, dass wir durch die Punkte, in welchen φ_p noch φ_q schneidet, eine Curve φ_{m+p} legen. Hieraus folgt, dass α auf einer

Curve $(n - p)^{ter}$ Ordnung liegt, wenn man durch die k willkürlichen Punkte eine Curve $(n - m - p)^{ter}$ Ordnung legen kann.

Wenn $k = 0$, wird die Gruppe α dadurch hervorgebracht, dass man eine Curve φ_{m+p} durch das vollständige Schnittpunktsystem von φ_q und einer Curve φ_p legt, und α ist dann das vollständige Schnittpunktsystem von φ_q und einer Curve φ_m. Wenn $k = 1$ oder $= 2$ ist, sehen wir, dass man sich eine Gruppe α immer dadurch hervorgebracht denken kann, dass man durch einen oder zwei willkürliche Punkte von φ_q eine gerade Linie L legt, und durch die übrigen Schnittpunkte von L und φ_q eine Curve $(m + 1)^{ter}$ Ordnung.

13) Wenn $n < k + m - 1$, wollen wir zeigen, dass α immer auf einer Curve φ_{m+1} liegt, wenn x seinen höchsten Werth hat, und dass eine Curve φ_n, die durch α geht, φ_q noch in denselben $(q - k)$ Punkten schneiden wird, in denen φ_{m+1} noch φ_q schneidet. Da in diesem Fall nur die Ungleichheit (1) 11) (B) statt findet, sehen wir nach 11) (B) und 8), dass alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie L φ_q schneidet, zu β gehören müssen, wenn $r + 1$ unter ihnen dazu gehören; dann aber sieht man, dem Schlusse von 9) zufolge, dass eine Gruppe β die Punkte enthalten kann, worin $r = n - m - 1$ gerade Linien φ_q schneiden, und da β mit α zusammen auf einer Curve n^{ter} Ordnung liegt, dass α auf einer Curve $(m + 1)^{ter}$ Ordnung φ_{m+1} liegt. φ_n muss auch durch die übrigen Schnittpunkte von φ_{m+1} und φ_q gehen; denn von β können nur $\frac{(n - m - 1)(n - m + 2)}{2}$ Punkte willkürlich gewählt werden, und da eine Curve zusammengesetzt von φ_{m+1} und von einer willkürlichen Curve φ_{n-m-1} durch eben so viele willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden kann, sieht man, dass die Behauptung richtig ist.

Wenn $n = m + k - 1$, ist $h = 0$, wenn x seinen höchsten Werth hat. Die beiden Ungleichheiten 11) (1) und (2) sind befriedigt. α gehört entweder zu der einen oder der andern Art von den hier genannten Punktgruppen.

14) Wenn man für alle Werthe von n, $n > m$, eine Curve φ_n, die durch α geht, noch durch eine Anzahl willkürlicher Punkte von φ_q, die so gross wie möglich ist, soll legen können, liegt α auf einer Curve φ_{m+1}, die noch φ_q in $(q - k)$ Punkten schneidet, die auf einer geraden Linie liegen.

Wenn $k = 1$ oder $= 2$, ist der Satz schon in 12) bewiesen. Wir nehmen jetzt an, dass $k > 2$. 13) zufolge muss α auf einer Curve $(m+1)^{ter}$ Ordnung liegen, indem wir $n < m + k - 1$ wählen können. Wenn $k = n - 1$ oder $= n - 2$, ist $n - k$ gleich 1 oder 2, und da wir immer durch so viele Punkte eine gerade Linie legen können, ist der Satz in diesem Fall bewiesen. Wenn $2 < k < n - 2$, giebt es immer, wenn n willkürlich hoch, eine Gruppe β, die aus den $q - k$ Punkten β_1, worin φ_{m+1} noch φ_q schneidet, und aus den Punkten, worin eine willkürliche Curve $(n - m - 1)^{ter}$ Ordnung φ_q schneidet, besteht. Da β aber, wenn $n > m + k - 1$, auf einer Curve $(n - m)^{ter}$ Ordnung liegen soll, muss β_1 auf einer Geraden liegen.

Umgekehrt ist's leicht zu sehen, dass, wenn β_1 auf einer geraden Linie liegt, x immer seinen höchsten Werth hat.

15) Wenn eine Punktgruppe α, die aus $mq + k$ Punkten besteht $(m > q > k)$, eine solche Lage hat, dass eine Curve n^{ter} Ordnung, wenn $n \geqq k + m - 1$, durch mehr als $\frac{(q+m-n-1)(q+m-n-2)}{2}$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, oder so, dass sie, wenn $n < k + m - 1$, wenigstens durch $\frac{(q+m-n-1)(q+m-n-2)}{2} + m + k - n - 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss α auf einer Curve q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen, indem wir annehmen, dass nicht jede Curve von einer gegebenen Ordnung, die wir durch α legen können, eine Curve enthalten muss, die durch einige von den Punkten α geht, ohne durch alle die Punkte α zu gehen.

Wir nehmen zuerst an, dass $n \geqq m + k - 1$; φ_n kann dann, ausserdem dass sie durch α geht, wenigstens durch

$$\frac{n(n+3)}{2} - mq - k + \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2} + 1 =$$

$$= \frac{(n-q)(n-q+3)}{2} + \frac{(n-m)(n-m+3)}{2} - k + 2$$

willkürliche Punkte gelegt werden.

Wenn nun φ_n eine Curve enthalten muss, die durch α geht, findet der Satz statt. Denn da φ_n, ausserdem dass sie diese Curve enthalten muss, wenigstens durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}$ willkürliche Punkte gelegt werden kann, muss diese Curve, die ein Theil von φ_n ist, höchstens von q^{ter} Ordnung sein, da φ_n sonst nur durch eine niedrigere Anzahl von willkürlichen Punkten gelegt werden könnte. Wenn φ_n sich nicht auflösen muss, können wir durch α eine neue Curve φ'_n legen, die noch φ_n in $n^2 - mq - k$ Punkten β schneidet, wovon wenigstens

$$\frac{n(n+3)}{2} - mq - k + \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$$

willkürlich gewählt werden können. Eine Curve φ_{n-3} muss dann durch alle die Punkte β gehen, wenn sie höchstens durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$$

unter ihnen geht. Eine solche Curve wird noch φ_n in einer Punktgruppe γ schneiden, wovon wenigstens $\frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$ Punkte willkürlich gewählt werden können.

γ muss 10) zufolge nicht daher alle die Punkte enthalten, worin eine willkürliche gerade Linie L φ_n schneidet, weil $(m+q-n-2)$ von diesen Punkten zu γ gehören. Lässt man also $m+q-n-2$ Punkte γ und $2n-m-q$ Punkte β auf L liegen, muss die Curve φ_{n-3}, die durch γ und β geht, L enthalten, und die 2 Punkte, worin L noch φ_n schneidet, müssen entweder zu β oder zu γ gehören, und da sie nicht zu γ gehören können, weil diese dann nach 8) alle Schnittpunkte von L und φ_n enthalten müsste, müssen sie zu β gehören. β enthält dann nach 8) alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, wenn $2n-m-q$ willkürliche Punkte unter diesen zu β gehören. Man kann dann durch α eine Curve φ_{n-1} legen, die wenigstens noch durch

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - mq - k + \frac{(m+q-n)(m+q-n-1)}{2} + 2$$

willkürliche Punkte gelegt werden kann, oder die durch

$$\frac{(m+q-n)(m+q-n-1)}{2} + 2$$

Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Wenn $n > m + k - 1$, ist also der Satz für n richtig, wenn er für $n - 1$ richtig ist. Aber auch wenn $n \leqq m + k - 1$, können wir zeigen, dass der Satz für n richtig ist, wenn er für $n - 1$ richtig ist. Setzen wir $n = m + k - 1$, sehen wir auf dieselbe Weise wie früher, dass, wenn φ_n durch $\frac{(m + q - n - 1)(m + q - n - 2)}{2} + 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss φ_{n-1} durch

$$\frac{(m + q - n)(m + q - n - 1)}{2} + 2$$

von den Punkten α gehen, weil sie durch die übrigen geht. Auf dieselbe Weise sehen wir, wenn $m + k - 1 > n > m + 1$, und φ_n durch $\frac{(q + m - n - 1)(q + m - n - 2)}{2} + m + k - n - 1$ von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, dass φ_{n-1} durch

$$\frac{(m + q - n)(m + q - n - 1)}{2} + m + k - n$$

von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Also auch in diesen Fällen ist der Satz für n richtig, wenn er für $(n - 1)$ richtig ist.

Wir wollen also zeigen, dass der Satz für $n = m + 1$ richtig ist, um zu zeigen, dass er in allen Fällen richtig ist.

Wir brauchen daher nur zu zeigen, dass, wenn eine Curve φ_{m+1} wenigstens durch $\frac{(q-2)(q-3)}{2} + \varepsilon(k-3) + 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss α auf einer Curve q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen, indem $\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, je nachdem $k \gtrless 3$. φ_{m+1} kann noch wenigstens durch $\frac{(m - q + 2)(m - q + 3)}{2} + (\varepsilon - 1)(k - 3)$ willkürliche Punkte gelegt werden. Wie vorher sieht man, dass, wenn φ_{m+1} eine Curve enthalten muss, die durch α geht, diese von niedrigerer Ordnung als der q^{ten} sein muss.

Wenn φ_{m+1} nicht eine solche Curve enthalten muss, schneidet eine neue Curve φ'_{m+1}, die durch α geht, φ_{m+1} in einer Gruppe β, die von $(m + 1)(m - q + 1) + q - k$ Punkten besteht, von welchen wenigstens

$\frac{(m-q+1)(m-q+4)}{2}+(\varepsilon-1)(k-3)$ willkürlich gewählt werden können, und wie früher sieht man, dass diese Gruppe die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_{m+1} schneidet, enthalten muss, wenn $m-q+2$ willkürliche Punkte unter diesen zu β gehören. Es ist also (dem Schlusse von 9) zufolge) höchstens mit $\frac{(m-q+1)(m-q+4)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, dass β alle die Punkte enthalten soll, worin $m-q+1$ willkürliche gerade Linien φ_{m+1} schneiden, und da wenigstens eine so grosse Anzahl von den Punkten β willkürlich gewählt werden können, muss α auf einer Curve φ_q liegen.

16) Eine Raumcurve c_m liegt ganz auf einer Fläche F_n, wenn sie so von n Ebenen geschnitten werden kann, dass n ebene Curven, wovon jede jede andere in n Punkten schneidet, durch die nm Schnittpunkte gelegt werden können. Der Satz ist dadurch einleuchtend, dass diese n ebenen Curven zusammen eine vollständige Durchschnittcurve von zwei Flächen n^{ter} Ordnung bilden. [1]

17) Wenn zwei Flächen F_p und F_q einander schneiden, und eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n durch ihre vollständige Durchschnittcurve geht, und F_n die eine Fläche F_p noch in einer vollständigen Durchschnittcurve schneidet, muss sie auch die andere in einer vollständigen Durchschnittcurve schneiden.

Dieser Satz wird wie der analoge von ebenen Curven bewiesen.

18) Wenn c_{pq} die vollständige Durchschnittcurve von zwei Flächen F_p und F_q ist, und wenn eine Fläche F_n, die eine t-fache Curve in jedem Theil c^{ts} von c_{pq} hat, welcher t-fach auf F_p ist, durch c_{pq} geht, und wenn F_n jedes Netz von F_p längs c^{ts} $(s-1)$-fach berührt, wenn c^{ts} s-fach auf φ_q ist, so schneidet F_n noch F_p in einer Curve, durch welche man eine Fläche F_{n-q} legen kann, die eine $(t-1)$-fache Curve in c^{ts} hat. Schneiden wir c_{pq} mit einer Reihe von r Ebenen P_i, und legen wir durch die Schnittpunkte von den r Ebenen und c_{pq} eine Fläche F_n, die jede P_i in einer Curve f_i schneidet, welche einen t-fachen Punkt in jedem der Schnittpunkte a_i^t von P_i und c^{ts} hat, und welche in einem solchen Punkte jedes Netz von F_p $(s-1)$-fach berührt, und nehmen wir an, dass P_i die Fläche F_p in φ_i, die Fläche F_q in ψ_i

[1] Siehe eine Abhandlung von mir: Mathematisk Tidsskrift, Kjöbenhavn 1879, p. 24.

schneidet, so können wir zeigen, dass F_n noch die r Curven φ_i in Punkten schneidet, die auf einer Fläche F_{n-q} liegen, die jede Ebene P_i in einer Curve g_i schneidet, die einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem a_i^t hat. Da dieses statt findet, wie gross auch r ist, ist hiermit auch der ursprüngliche Satz bewiesen. Wir können nämlich F_n mit der in dem ursprünglichen Satz erwähnten Fläche zusammenfallen lassen; und da r so gross gemacht werden kann, wie wir wollen, muss eine willkürliche Ebene P die Fläche F_{n-q} in einer Curve g schneiden, die einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem Schnittpunkt von P und c^{ts} hat, und die durch die übrige Durchschnittcurve der F_n mit F_p ausser c_{pq} gehen muss, da sie diese Curve in mehr als $(n-q)^2p$ Punkten schneiden muss, und die also mit der in dem ursprünglichen Satz erwähnten Fläche F_{n-q} zusammenfallen muss.

Wir fangen damit an n so gross anzunehmen, dass es für F_n und F_{n-q} unabhängige Bedingungen sind, dass ihre Schnittcurven mit den Ebenen P_i t- und $(t-1)$-fache Punkte in den Punkten a_i^t haben sollen, und dass f_i in diesen Punkten die Zweige von φ_i $(s-1)$-fach berühren sollen, so wie auch dass F_n und F_{n-q} nicht dieser Bedingungen wegen durch einen Punkt ausser den gegebenen gehen muss. Dass wir wirklich n so gross annehmen können, ist leicht zu sehen, wenn wir uns F_n und F_{n-q} von Ebenen zusammengesetzt denken, von denen beziehungsweise $t+s-1$ und $t-1$ durch die Punkte a_i^t gehen.

F_n kann durch

$$np - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\left(\frac{t(t+1)}{2} + t(s-1)\right) =$$
$$= p(n-q) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\frac{t(t-1)}{2}$$

willkürliche Punkte von φ_1 gelegt werden, ohne dass sie φ_1 enthalten muss. Wenn die Schnittpunkte von F_n und φ_1 bestimmt sind, und keiner von ihnen in einen Schnittpunkt von φ_1 und φ_2 fällt, kann F_n durch

$$p(n-q-1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden, ohne dass sie φ_2 enthalten muss.

Die Linie L_{12}, worin P_1 und P_2 einander schneiden, bildet nämlich zusammen mit φ_2 eine Curve $(p+1)^{ter}$ Ordnung. Legen wir dann eine

Curve f_2 n^{ter} Ordnung durch die n Punkte, in welchen f_1 P_2 schneidet, kann diese noch durch $np - \frac{p(p-1)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden, indem man f_2 im ganzen durch $n(p+1) - \frac{p(p-1)}{2}$ willkürliche Punkte einer von L_{12} und φ_2 zusammengesetzten Curve legen kann. Soll nun f_2 t-fache Punkte in den Punkten a_2^t haben und die Zweige von φ_2 in solchen Punkten $(s-1)$-fach berühren, kann sie noch durch

$$p(n-q-1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden. Hieraus sieht man aber, dass F_n durch ebenso viele willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden kann, da zwei Curven n^{ter} Ordnung, die einander in n Punkten schneiden, die vollständige Durchschnittcurve von ihren Ebenen und einer Fläche F_n bilden.

Auf dieselbe Weise wird gesehen, dass wir F_n durch

$$p(n-q-r+1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_r legen können, wenn die Schnittpunkte von F_n und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_{r-1}$ bestimmt sind. Nennen wir die Durchschnittlinie von P_i und P_r L_{ir}. Die Curven $f_1, f_2 \dots f_{r-1}$ bilden zusammen die vollständige Durchschnittcurve von den Ebenen $P_1, P_2 \dots P_{r-1}$ und einer Fläche F_n, also bilden ihre Schnittpunkte mit einer Ebene P_r ein vollständiges Schnittpunktsystem α einer Curve n^{ter} und einer Curve $(r-1)^{ter}$ Ordnung, und es ist für eine Curve f_r, die n^{ter} Ordnung ist, mit $n(r-1) - \frac{(r-2)(r-3)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, durch α gehen zu sollen.

Nun bilden $L_{1r}, L_{2r} \dots L_{(r-1)r}$ mit φ_r zusammen eine Curve $(p+r-1)^{ter}$ Ordnung, und da man f_r im Ganzen durch

$$n(p+r-1) - \frac{(p+r-2)(p+r-3)}{2}$$

willkürliche Punkte einer solchen Curve legen kann, kann also f_r durch

$$np - \frac{(p+r-2)(p+r-3)}{2} + \frac{(r-2)(r-3)}{2} = (n-r)p - \frac{p(p-5)}{2}$$

willkürliche Punkte von φ_r gelegt werden, ausserdem dass sie durch das Schnittpunktsystem α geht, oder sie kann, ausserdem dass sie t-fache Punkte in den Punkten a_i^t hat und die Zweige von φ_r in diesen Punkten $(s-1)$-fach berührt, noch durch

$$p(n-q-r+1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_r gelegt werden. r Curven n^{ter} Ordnung, von welchen jede jede andere in n Punkten trifft, bilden aber zusammen eine vollständige Durchschnittcurve von einer Fläche F_n und von den Ebenen dieser Curven, und es ist daher einleuchtend, dass man F_n durch die erwähnte Anzahl von willkürlichen Punkten gehen lassen kann.

Auf dieselbe Weise wird gesehen, dass man F_{n-q} durch eine eben so grosse Anzahl willkürlicher Punkte von jeder Curve $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ gehen lassen kann, und da F_{n-q} mit F_q zusammen eine Fläche F_n bildet, sieht man, dass F_{n-q} durch alle die Schnittpunkte von F_n und $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ gehen muss, die nicht in die Schnittpunkte von F_q und von diesen Curven fallen, wenn man F_n und F_{n-q} durch dieselben willkürlichen Punkte dieser Curven gehen lässt. Wenn die Schnittpunkte von F_{n-q} und von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ bestimmt sind, kann man noch F_{n-q} durch

$$b_{n-q} = \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{6} - \left((n-q)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

willkürliche Punkte gehen lassen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass der Satz für $(n-1)$ richtig ist, wenn er für n richtig ist, vorausgesetzt, dass es eine Fläche F_{n-1} giebt, die die in dem Hauptsatz angegebenen Bedingungen befriedigt. F_{n-1} wird immer mit einer willkürlichen Ebene P zusammen eine Fläche F_n bilden, und der Satz wird also für diese zusammengesetzte Fläche richtig sein; wir können aber zeigen, dass wir immer für F_{n-q} eine Fläche wählen können, die von P und einer Fläche F_{n-q-1} zusammengesetzt ist. Wir nehmen immer an, dass $r > p$, und fangen damit an r so gross anzunehmen, dass wir, wie wir eben gethan haben, den Satz direct beweisen können, und dass F_{n-q} noch

$$b_{n-q} = \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{6} - \left((n-q)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen kann, ausserdem dass ihre Schnittpunkte mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ bestimmt sind, und dass $n - q > r + p - 3$. F_{n-q} muss dann P enthalten, wenn sie durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2} - pr + 1$ willkürliche Punkte β von P geht. Denn F_{n-q} schneidet P, ausser in den Punkten β, in den rp Punkten, in welchen P $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ schneidet, und da es mit rp Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Fläche höherer als $(r+p-3)^{ter}$ Ordnung hierdurch gehen soll, wird also F_{n-q} P enthalten und noch durch

$$\frac{(n-q)(n-q+1)(n-q+2)}{6} - \left((n-q-1)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

willkürliche Punkte gelegt werden können. Durch b_{n-q} willkürliche Punkte kann man also immer eine Fläche F_{n-q} legen, wenn es eine Fläche F_n giebt, die die in dem Hauptsatze genannten Bedingungen erfüllt, und $n - q \geqq r + p - 3$.

Wenn $n = p + q + r - 3$, kann F_{n-q} noch

$$\frac{(r+p-2)(r+p-1)(r+p)}{6} - \left((r+p-3)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen. F_{n-q} wird dann eine willkürliche Ebene P enthalten, wenn sie durch $\frac{(r+p-3)(r+p)}{2} + 1 - rp + 1$ willkürliche Punkte derselben geht, indem es mit $rp - 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Fläche $(r+p-3)^{ter}$ Ordnung durch die Schnittpunkte von P und von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_r$ gehen soll. In diesem Fall wird also F_{n-q-1} noch

$$\frac{(p+r-3)(p+r-2)(p+r-1)}{6} - \left((p+r-4)rp - \frac{rp(p+r-4)}{2}\right) - 1$$

Bedingungen erfüllen können.

Indem wir auf dieselbe Weise fortfahren, sehen wir durch Induction, dass F_{n-q} wenigstens

$$\frac{(p+r-k+1)(p+r-k+2)(p+r-k+3)}{6}-\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}-$$
$$-\left((p+r-k)rp-\frac{rp(p+r-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen kann, wenn $n=p+q+r-k>r+q$. Denn diese Formel ist für $(n-1)$ richtig, wenn sie für n richtig ist, da F_{n-q} P enthalten wird, wenn sie durch

$$\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-rp+\frac{(k-1)(k-2)}{2}+1$$

willkürliche Punkte derselben geht. Wenn $n=r+q$, sehen wir dass F_{n-q} noch

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6}-\left(r^2p-\frac{rp(p+r-4)}{2}\right)=$$
$$=\frac{(r-p+1)(r-p+2)(r-p+3)}{6}+1$$

Bedingungen erfüllen kann.

F_{n-q} wird in diesem Fall P enthalten, wenn sie durch

$$\frac{(r-p+1)(r-p+2)}{2}+1$$

willkürliche Punkte derselben geht, und F_{n-q-1} muss in diesem Fall noch

$$\frac{(r-p)(r-p+1)(r-p+2)}{6}$$

Bedingungen erfüllen können.

Wenn $n=r+q-1$, muss F_{n-q} die Ebene P enthalten, wenn sie durch $\frac{(r-p)(r-p+1)}{2}$ willkürliche Punkte derselben geht, und F_{n-q-1} wird dann noch

$$\frac{(r-p-1)(r-p)(r-p+1)}{6}$$

willkürliche Bedingungen erfüllen können.

Wie vorher können wir dann durch Induction zeigen, dass F_{n-q} wenigstens

$$\frac{(r-p-k+1)(r-p-k+2)(r-p-k+3)}{6}$$

Bedingungen erfüllen kann, wenn $n = r + q - k \geqq q + p$, indem F_{n-q} P enthalten muss, wenn sie durch $\frac{(r-p-k+1)(r-p-k+2)}{2}$ willkürliche Punkte derselben geht.

Wenn $n < q + p$, und F_n von einer Ebene P und einer Fläche F_{n-1} zusammengesetzt ist, muss F_{n-q} immer diese Ebene enthalten. Der Satz ist jetzt in allen Fällen bewiesen, indem es, wenn $n \geqq p + q$, von der Anzahl der Bedingungen, die F_{n-q} noch erfüllen kann, gesehen wird, dass sie nicht F_p enthalten muss, und sie es nicht thun kann, wenn $n < p + q$, indem in diesem Fall F_{n-q} von niedrigerer Ordnung als F_p ist.

Aus dem Hauptsatz folgt, dass, wenn eine Fläche F_n eine andere Fläche F_p in einer vollständigen Durchschnittcurve c_{pq} schneidet, wovon kein Theil auf F_p doppelt ist, muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von F_p und F_n auch eine vollständige Durchschnittcurve sein. Wenn $n > p + q - 4$, ist es daher mit

$$npq - \frac{pq(p+q-4)}{2} = npq - \frac{(pq-1)(pq-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass F_n c_{pq} enthalten soll, indem h die Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten auf c_{pq} ist, während es, wenn $n \overline{\leq} p + q - 4$ mit

$$npq - \frac{pq(p+q-4)}{2} + \frac{(p+q-n-1)(p+q-n-2)(p+q-n-3)}{6}$$

Bedingungen eqvivalent ist.

Es wird gesehen, dass die Formeln für

$$n = \begin{cases} p+q-1 \\ p+q-2 \\ p+q-3 \end{cases}$$

zusammenfallen.

19) Wir nehmen an, dass zwei Flächen F_n und F_p einander in den Curven c_r und c_{pn-r} schneiden, und dass kein Theil von c_r auf F_n mehr-

fach ist, während jeder Theil c^t von c_{pn-r}, der auf F_n t-fach ist, auf F_p $(t-1)$-fach ist, (wenn $t > 1$). Ferner nehmen wir an, dass alle die Flächen, von welchen im Folgenden die Rede ist, ebenfalls $(t-1)$-fache Curven in c^t haben.

Wenn wir eine Fläche F_q durch c_r legen, und diese noch F_n in der Curve c_{qn-r} schneidet, können wir durch jede Curve c'_r, worin eine neue Fläche F'_q durch c_{qn-r} F_n schneidet, auch eine Fläche F'_p legen, die durch c_{pn-r} geht.

F'_q bildet nämlich mit F_p zusammen eine Fläche F_{p+q}, die durch die Durchschnittcurve von F_q und F_n geht, und eine $(2t-2)$-fache Curve in jedem Theil von dieser hat, der t-fach auf F_n, $(t-1)$-fach auf F_q ist, und also muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von F_{p+q} und F_n, 18) zufolge, auf einer Fläche F'_p liegen.

II.

Darstellung der Raumcurven als Schnittcurven von Kegeln und Monoiden.

20) Eine Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n kann immer dazu gebracht werden, dass sie Punkt für Punkt einer ebenen Curve entspricht. Wenn man nämlich einen Kegel φ_n, der seinen Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, durch c_n legt, und man φ_n mit einer Ebene P schneidet, kann man sich denken, dass jeder Punkt p der Raumcurve dem Punkt p' der Ebene entspricht, in welchem die Erzeugende von φ_n durch p P schneidet. Nehmen wir an, dass die Gleichung der Ebene $x_4 = 0$ ist, indem wir ein allgemeines 4-Plan-Coordinatensystem brauchen, und dass der Scheitel des Kegels in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ liegt, so ist die Raumcurve durch

$$x_4 = \frac{\varphi_m}{\varphi_{-m1}} \quad \text{und} \quad \varphi_n = 0$$

bestimmt, indem wir annehmen, dass φ_m, φ_{m-1}, φ_n homogene Functionen beziehungsweise der Ordnungen m, $m-1$ und n von x_1, x_2, x_3 sind.

$\varphi_n = 0$ ist die Gleichung des Kegels, der durch c_n geht, und $x_4 = \frac{\varphi_m}{\varphi_{m-1}}$ giebt an, dass jedem Punkt $x_1 : x_2 : x_3$, worin eine Erzeugende von

$\varphi_n \; x_4 = 0$ schneidet, ein Punkt der Raumcurve entspricht, indem dieser bestimmt ist, wenn wir die $x_1 : x_2 : x_3$ entsprechende Coordinate x_4 bestimmt haben. Man sieht auch, dass x_4 eine rationale Function von $x_1 : x_2 : x_3$ sein muss, da sonst jedem Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ mehr als ein Punkt der Raumcurve entsprechen würde. Man kann also auch die Raumcurve als Durchschnittcurve eines Kegels n^{ter} Ordnung, und einer Fläche M_{m-1} mit einem $(m-1)$-fachen Punkt in dem Scheitel des Kegels auffassen. Diese Fläche $M_{m-1}(\varphi_m - x_4\varphi_{m-1} = 0)$ wird wie vorher gesagt eine Monoide genannt, $\varphi_m = 0$ (oder kürzer φ_m) wird der Oberkegel von M_{m-1} genannt, $\varphi_{m-1} = 0(\varphi_{m-1})$ der Unterkegel.(¹) Man sieht, dass im Allgemeinen ein Kegel und eine Monoide mit den Scheiteln in demselben Punkt α einander nicht in einer Raumcurve n^{ter} Ordnung, sondern in einer Raumcurve mn^{ter} Ordnung mit einem $n(m-1)$-fachen Punkt in α schneiden. Die Flächen φ_n und M_{m-1} müssen also speciell sein oder wenigstens in besonderen Beziehungen zu einander stehen. Da der Scheitel α willkürlich gewählt werden kann, können wir annehmen, dass c_n nicht durch α geht. Die vollständige Durchschnittcurve von φ_n und M_{m-1} muss sich dann in c_n und in eine Curve $c_{n(m-1)}$ mit einem $n(m-1)$-fachen Punkt in α auflösen. Dann muss aber c_n aus $n(m-1)$ geraden Linien l bestehen. Denn jede Ebene, die durch α und noch einen Punkt von $c_{n(m-1)}$ geht, muss einen Theil dieser Curve ganz enthalten, da $c_{n(m-1)}$ von der Ebene in mehr als $n(m-1)$ Punkten geschnitten wird. Da x_4 für die Punkte der Linien l unbestimmt sein muss, hat man für Punkte dieser Linien $\varphi_m = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$.

φ_{m-1} und φ_n schneiden einander eben in $n(m-1)$ geraden Linien, und man muss also, wenn $\varphi_n = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$, auch $\varphi_m = 0$ haben. Es wird dann gesehen, dass φ_n Doppellinien haben muss. Wäre nämlich $m < n$, müssten sonst $\varphi_m = 0$ und $\varphi_{m-1} = 0$ einander in mehr als $m(m-1)$ Linien schneiden, und wäre $m > n$, hätte man

$$\varphi_n a + \varphi_{m-1} b \equiv \varphi_m,$$

indem a eine ganze homogene Function $(m-n)^{ter}$ Ordnung von $x_1 : x_2 : x_3$, b eine solche Function 1^{ster} Ordnung sind, und man könnte dann die Gleichung der Monoïde

(¹) Siehe Cayley: Comptes rendus, tom. LIV, p. 55. Considérations générales sur les courbes en espace.

$$(x_4 - b)\varphi_m = \varphi_n a$$

schreiben, welche zeigt, dass dann die Curve eben sein müsste.

Die Monoide muss alle die geraden Linien enthalten, die durch α gehen und c_n zweimal schneiden, (die Doppelstrahlen), weil die Monoide diese in $(m+1)$ Punkten schneiden muss. Wenn sich keine wirkliche Doppelpunkte auf c_n finden, sieht man, dass die Monoide durch alle Doppellinien von φ_n gehen muss. Dagegen braucht die Monoide nicht durch die Doppellinien von φ_n zu gehen, die durch wirkliche Doppelpunkte von c_n gehen, wenn diese Doppelpunkte nicht höherer Ordnung als der zweiten sind. In dieser Abhandlung soll aber nur auf solche Curven Rüchsicht genommen werden, die keine solche Specialiteten darbieten.

21) Wenn φ_n die Projection einer Raumcurve ist, können die Doppelpunkte von φ_n entweder Projectionen von wirklichen oder scheinbaren Doppelpunkten sein. Wenn c_n die Durchschnittcurve von M_{m-1} und einem Kegel φ_n ist, der durch die ebene Curve φ_n geht, wollen wir untersuchen, wann das eine und wann das andere der Fall ist. Wir nehmen an, dass keine Linie auf φ_n mehr als doppelt ist, und dass die Tangentenebenen in einer solchen Linie nicht zusammenfallen.

Nehmen wir an, dass M_{m-1} in einer Doppellinie D von φ_n die Netze von φ_n in p und q zusammenfallenden Linien schneidet, so müssen sowohl der Ober- wie der Unterkegel diese Netze in D in eben so vielen zusammenfallenden Linien schneiden.

Jeder Kegel m^{ter} Ordnung φ'_m, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_m und φ_{m-1} geht, muss M_{m-1} in einer ebenen Curve schneiden; denn φ'_m schneidet M_{m-1} in allen ihren Durchschnittlinien mit φ_{m-1}, und es kann durch einen willkürlichen ebenen Schnitt von M_{m-1} ein φ'_m gelegt werden, da φ'_m noch drei Bedingungen erfüllen kann. Soll nun c_n einen wirklichen Doppelpunkt d haben, muss jede Ebene P, die hierdurch geht, c_n in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, oder die Durchschnittcurve von P und M_{m-1} muss die beiden Netze von φ_n in d p-mal und q-mal berühren, und also muss ein φ'_m, der durch einen solchen ebenen Schnitt geht, dasselbe thun.

Da nun die Sätze von den ebenen Curven auf Kegel mit gemeinschaftlichem Scheitel unmittelbar übertragen werden können, sieht man, 2) zufolge, dass die auf einer φ'_m D benachbarten Linien durch einen unter ihnen bestimmt sind. Es giebt also im Allgemeinen kein φ'_m, der in D die beiden Netze von φ_n p- und q-fach berührt, so dass, wenn keine besonderen Bedingungen statt finden, D ein Doppelstrahl zu c_n ist. Die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass c_n auf D einen wirklichen Doppelpunkt d haben soll, ist, dass es einen Kegel φ'_m giebt, der in D die beiden Netze von φ_n p- und q-fach berührt. Dann müssen nämlich alle φ'_m, die z. B. das eine Netz von φ_n p-fach berühren, auch das andere q-fach berühren. Alle diese φ'_m müssen M_{m-1} in ebenen Curven schneiden, die die Netze von φ_n in p und q Punkten in D berühren, und deren Ebenen also c_n in zwei in D fallenden Punkten d schneiden, und da diese Schaar von φ'_m doppelt unendlich ist, muss c_n einen wirklichen Doppelpunkt in d haben.

Wenn D nur eine einfache Linie auf M_{m-1} ist, und c_n einen wirklichen Doppelpunkt haben soll, muss es ein φ'_m geben, der in D eine Doppellinie hat. Dazu ist aber nur nothwendig und zulänglich, dass φ_{m-1} alle φ'_m in zwei in D zusammenfallenden Linien schneidet. Dass dieses nothwendig ist, sieht man daraus, dass der φ'_m, der eine Doppellinie in D hat, φ_{m-1} in zwei in D zusammenfallenden Linien schneiden muss, und dass also alle φ'_m dieses thun müssen. Dass die Bedingung zulänglich ist, sieht man daraus, dass alle φ'_m die Tangentenebene P zu φ_{m-1} in D berühren müssen. Da wenigstens die eine Tangentenebene P_1 des φ_n in D von P verschieden sein muss, muss ein φ'_m, der auch P_1 berührt, eine Doppellinie in D haben.

Wenn D einfach auf M_{m-1} ist, und wenn c_n einen wirklichen Doppelpunkt auf D haben soll, ist es leicht zu sehen, dass man auch die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür dadurch ausdrücken kann, dass M_{m-1} einen Doppelpunkt auf D haben soll.

Übrigens lassen sich die angestellten Betrachtungen mit geringen Modificationen auf den Fall anwenden, wo D eine Rückkehrlinie von φ_n ist.

22) In dem, was vorhergeht, haben wir gesehen, dass man sich jede Raumcurve c_n als Durchschnittcurve von einer Monoide und einem Kegel denken kann. Wir nehmen an, dass

$$M_{m-1} \equiv \varphi_{m-1}\, x_4 - \varphi_m = 0$$

die Gleichung der Monoide ist, indem φ_m und φ_{m-1} dieselben Bedeutungen wie in 20) haben. Legen wir jetzt einen neuen Kegel φ_{m_1-1} durch die Doppellinien D von φ_n, durch welche φ_{m-1} geht, so ist es erlaubt anzunehmen, dass diese Linien nicht doppelt auf φ_{m_1-1} sind, indem es leicht zu sehen ist, dass es solche φ_{m_1-1} giebt, wenn m_1 hoch genug ist.

Die Kegel φ_m und φ_{m_1-1} bilden zusammen einen Kegel φ_{m+m_1-1}, der in jeder D jedes Netz von φ_n in einer Linie mehr schneidet als φ_{m-1}. Da D nur doppelt auf φ_n ist, sieht man, 4) zufolge, dass φ_{m+m_1-1} noch φ_n in Linien schneidet, die auf einem Kegel φ_{m_1} liegen.

Wir müssen dann haben

$$\varphi_m\varphi_{m_1-1} + a\varphi_{m_1}\varphi_{m-1} \equiv \varphi_n u$$

wo a eine Constante ist, u eine ganze homogene Function $(m+m_1-n-1)^{ter}$ Ordnung von x_1, x_2, x_3; denn jeder Kegel des Bundes

$$\varphi_m\varphi_{m_1-1} + \lambda\varphi_{m-1}\varphi_{m_1} = 0,$$

das gebildet wird durch Variation von λ, schneidet nämlich φ_n in denselben $(m+m_1-1)n$ Linien, und bestimmen wir λ so, dass der entsprechende Kegel durch eine willkürliche Erzeugende von φ_n geht, muss dieser Kegel φ_n enthalten. Hieraus folgt aber, dass

$$\varphi_{m_1-1}(\varphi_{m-1}x_4 - \varphi_m) \equiv \varphi_{m_1-1}\varphi_{m-1}x_4 - \varphi_n u + a\varphi_{m_1}\varphi_{m-1} = 0.$$

Und da dieses die Gleichung einer Fläche ist, die durch c_n geht, und die φ_n in derselben Durchschnittcurve wie

$$\varphi_{m-1}(\varphi_{m_1-1}x_4 + a\varphi_{m_1}) = 0$$

schneidet, und da φ_{m-1} nicht c_n enthalten kann, muss

$$\varphi_{m_1-1}x_4 + a\varphi_{m_1} = 0$$

dieses thun.

Wir nehmen jetzt an, dass wir einen neuen Kegel φ_{m_2-1} haben, der nur durch die Doppellinien h, die Doppelstrahlen zu c_n sind, zu gehen braucht.

φ_{m_2-1} und φ_{m_1} bilden einen Kegel $\varphi_{m_1+m_2-1}$, der durch die Durchschnittcurve von φ_n und φ_{m_1-1} geht, in jeder Linie h eine Doppellinie hat und in den übrigen Doppellinien φ_{m_1-1} in denselben Linien wie φ_n schneidet (dem Schlusse von 21) zufolge). $\varphi_{m_1+m_2-1}$ muss dann noch φ_n in Linien schneiden, die auf einem φ_{m_2} liegen, und man hat wie vorher

$$\varphi_{m_1}\varphi_{m_2-1} + a_1\varphi_{m_1-1}\varphi_{m_2} \equiv u_1\varphi_n,$$

wo a_1 und u_1 ähnliche Bedeutungen wie a und u haben, und ebenso dass c_n auf einer Monoide liegen muss, deren Gleichung

$$\varphi_{m_2-1}x_4 - aa_1\varphi_{m_2} = 0$$

ist.

Wir haben also den Satz:

Wenn man durch die geraden Linien, die man aus einem willkürlichen Punkt zu der Curve c_n ziehen kann, und die die Curve in zwei Punkten schneiden (die Doppelstrahlen), einen Kegel legt, so giebt es immer eine Monoide, die diesen Kegel zum Unterkegel hat, die die Curve enthält.

Da eine Curve c_n höchstens nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ scheinbare Doppelpunkte haben kann, und da man durch eine solche Anzahl von Linien, die durch denselben Punkt gehen, einen Kegel $(n-2)^{ter}$ Ordnung legen kann, so liegt eine Curve c_n immer auf einer Monoide $(n-1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung.

23) Wir wollen jetzt suchen die folgende Frage zu beantworten:

Wann können wir eine ebene Curve φ_n als Projection einer Raumcurve c_n auffassen?

Nehmen wir zuerst an, dass die Raumcurve c_n mehr als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ scheinbare Doppelpunkte h hat, indem h sowohl die Anzahl der Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt α als diese selbst bezeichnet. c_n liegt auf einer M_{n-2}.

Man sieht, *dass φ_n in diesem Fall immer als die Projection einer Raumcurve c_n aufgefasst werden kann.* Wenn wir nämlich durch die Doppellinien eines Kegels φ_n, der die ebene Curve projicirt, einen Kegel φ_{n-2} legen, schneidet φ_{n-2} noch φ_n in $h_1 = n(n-2) - 2h$ Linien, welche Linien auch selbst durch h_1 bezeichnet werden. Durch h und h_1 können wir einen Kegel φ_{n-1} legen, der nicht φ_{n-2} enthält; denn die Anzahl der Linien h und h_1 ist kleiner als

$$n(n-2) - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - 2,$$

also höchstens gleich $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-3$, so dass φ_{n-1} wenigstens noch 3 Bedingungen erfüllen kann, während er nur 2 erfüllen könnte, wenn er φ_{n-2} enthielte.

Nehmen wir an, dass die Gleichungen der besprochenen Kegel beziehungsweise $\varphi_n = 0$, $\varphi_{n-1} = 0$, $\varphi_{n-2} = 0$ sind, so ist eine Raumcurve c_n Durchschnittcurve von $\varphi_n = 0$ und $\varphi_{n-1} - a\varphi_{n-2} = 0$, wo a eine homogene Function erster Ordnung der Coordinaten ist.

Im Allgemeinen hat c_n h scheinbare Doppelpunkte. In speciellen Fällen kann es geschehen, dass die Curve c_n statt einiger von diesen wirkliche Doppelpunkte hat, und in einigen noch specielleren Fällen müssen immer einige von den Doppelpunkten der ebenen Curve φ_n Projectionen von wirklichen Doppelpunkten auf c_n sein, wie wir im Folgenden sehen werden.

Wenn $h \overline{\gtrless} \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, und die ebene Curve φ_n Projection einer Raumcurve ist, kann man sich immer denken, dass c_n auf einer Monoide M_{n-3} liegt, wie man, 22) zufolge, leicht sieht. Da der Unterkegel von M_{n-3} ein willkürlicher Kegel φ_{n-3} sein kann, wenn er nur durch alle Doppelstrahlen der c_n geht, können wir uns diesen aus einer Ebene P, die durch einen der Doppelstrahlen d geht, und einem Kegel φ_{n-4}, der durch die übrigen Doppelstrahlen geht, zusammengesetzt denken. Der Oberkegel φ_{n-2} muss dann aber auch P enthalten, da er P in d und den übrigen $(n-2)$ Linien, worin P den c_n projicirenden Kegel φ_n schneidet, schneiden muss. Wenn aber sowohl der Unterkegel als der Oberkegel P enthält, muss die Monoide auch P enthalten, und an der Stelle von M_{n-3} können wir dann eine Monoide M_{n-4} setzen, die φ_{n-4} zum Unterkegel hat. Da aber der Unterkegel durch alle die Doppelstrahlen gehen muss, die durch den Scheitel der Monoide gehen, muss φ_{n-4} auch durch d gehen. Man sieht also, dass jeder Kegel φ_{n-4} immer durch einen Doppelstrahl aus einem willkürlichen Punkt gehen muss, weil er durch die übrigen geht, wenn $h \overline{\gtrless} \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Auf der ebenen Curve φ_n, die die Projection von c_n sein soll, müssen also die Doppelpunkte so liegen, dass eine Curve φ_{n-4} durch einen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Umgekehrt sehen wir, dass φ_n als die Projection einer Raumcurve

c_n aufgefasst werden kann, wenn φ_n h Doppelpunkte hat, die so liegen, dass eine φ_{n-4} durch einen unter ihnen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Denn wir können einen Kegel φ_n durch die ebene Curve legen. Ein Kegel φ_{n-4}, welcher durch die Doppellinien h von φ_n geht, schneidet dann noch φ_n in einer Gruppe von Linien α, die $(n-4)n-2h$ Linien enthält, wovon $\frac{(n-4)(n-1)}{2}-h+1$ willkürlich gewählt werden können. Dann wird aber ein φ_{n-3}, welcher durch h geht, durch alle die Linien α gehen, wenn er durch

$$((n-4)n-2h)-\left(\frac{(n-4)(n-1)}{2}-h+1\right)=\frac{n(n-3)}{2}-h-3$$

willkürliche Linien unter ihnen geht (siehe 6)). Da φ_{n-3} noch 3 Bedingungen erfüllen kann, ist es nicht nothwendig, dass er φ_{n-4} enthält.

Wie vorher sehen wir also, dass es eine c_n giebt, die die Durchschnittcurve von $\varphi_n=0$ und $\varphi_{n-3}-a\varphi_{n-4}=0$ ist.

Wir haben also den Satz:

Wenn die Anzahl der Doppelpunkte einer ebenen Curve φ_n gleich oder kleiner als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ist, ist es die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass diese Curve als Projection einer Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n aufgefasst werden kann, dass eine Curve $(n-4)^{ter}$ Ordnung durch einen Doppelpunkt gehen muss, weil sie durch die übrigen Doppelpunkte geht.

Eben so wie im vorigen Fall bekommen die Raumcurven im Allgemeinen h scheinbare Doppelpunkte, die doch bisweilen durch wirkliche Doppelpunkte ersetzt werden können, und in speciellen Fällen sind immer einige der Doppelpunkte von φ_n, wenn φ_n die Projection von Raumcurven c_n sein kann, Projectionen von wirklichen Doppelpunkten auf c_n.

24) Nehmen wir an, dass eine Curve φ_n $h+D$ Doppelpunkte hat, dass $D+h>\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, und dass D Doppelpunkte von φ_n Projectionen von wirklichen Doppelpunkten jeder Raumcurve c_n, deren Projection φ_n ist, sein müssen; welche Lage müssen dann die Doppelpunkte auf φ_n haben?

Als Antwort bekommen wir den Satz:

Wenn eine ebene Curve $h + D$ Doppelpunkte hat, und man diese in zwei Gruppen, h und D, von h und D Punkten theilen kann, so dass eine φ_{n-4} durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

von den Punkten h gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass sie durch keinen der Punkte D gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte D und h geht, so sind, wenn $h > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, diese Bedingungen nothwendig und zulänglich, damit die Punkte D Projectionen von wirklichen Doppelpunkten jeder Curve c_n sein müssen, deren Projection φ_n ist.

Wir wollen durch die ebene Curve φ_n einen Kegel φ_n legen, dessen Doppellinien wir auch h und D nennen, je nachdem sie durch die Punkte h oder D gehen.

Wir können dann, nach dem, was vorausgesetzt ist, einen Kegel φ_{n-4} durch h und $D - 1$ Linien D legen, und eine Ebene P durch die letzte Linie D.

φ_{n-4} und P bilden dann einen Kegel φ_{n-3}. Nehmen wir diesen zum Unterkegel für die Monoide M_{n-3}, welche eine Curve c_n enthält, deren Projection φ_n ist, (und nach 23) giebt es immer eine solche Curve), muss der Oberkegel φ_{n-2} durch die $n - 1$ Linien gehen, worin P φ_n schneidet, und also P enthalten. Statt M_{n-3} können wir dann eine M_{n-4} setzen, die c_n enthält, deren Unterkegel φ_{n-4} gar nicht durch die eine Linie D geht. Also muss c_n auf dieser Linie einen wirklichen Doppelpunkt haben. Da aber dasselbe für alle Linien D gilt, muss c_n auf jeder D einen wirklichen Doppelpunkt haben.

Wir sehen also, dass die Bedingungen zulänglich sind; wir wollen jetzt zeigen, dass sie nothwendig sind.

Wenn die Linien D wirkliche Doppelpunkte von jeder c_n enthalten sollen, muss jeder φ_{m-1}, der durch h und D geht und in D einfache Linien hat, von jedem φ_m, der durch h und D und die übrigen Linien h_1 geht, in welchen φ_{m-1} φ_n schneidet, in jeder Linie D berührt werden; da wenn dieses nicht der Fall wäre, die Monoiden, welche φ_m und φ_{m-1} zu Ober- und Unterkegeln haben, φ_n in Curven c_n schneiden würden, die scheinbare Doppelpunkte in einigen Linien D haben würden (siehe 21)

Wenn $m > n - 3$, kann φ_m, ausserdem dass er durch die Linien h, D und h_1 geht, wenigstens noch durch

$$nm - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n(m-1) + h + D = n - p + D$$

willkürliche Linien von φ_n gelegt werden, indem wir $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ setzen.

Wenn φ_{m_1} und φ_{m_1-1} Kegel sind, die durch h gehen, aber nicht durch D, kann man durch jede Gruppe g von n Linien, worin φ_m ausser in den genannten Linien noch φ_n schneidet, einen φ_{m_1} legen, dessen übrige Durchschnittlinien mit φ_n auf einem willkürlichen φ_{m_1-1} liegen. Denn ein willkürlicher φ_{m_1-1} bildet mit φ_m zusammen einen Kegel φ_{m+m_1-1}, der durch alle Durchschnittlinien von φ_{m-1} und φ_n geht, und der, nach 4), noch φ_n in Linien schneidet, die auf einem φ_{m_1} liegen, welcher durch g geht.

Die Linien in welchen φ_{m_1-1} φ_n schneidet, die nicht in h fallen, werden j genannt. Da durch jede Gruppe g ein Kegel φ_{m_1} gelegt werden kann, der durch h und j geht, muss, nach 6), ein φ_{n-3} durch g gehen, wenn er durch h und $n - (n - p + D) = p - D$ willkürliche Linien der Gruppe g geht. Nun können g die Linien sein, worin eine willkürliche Ebene P, die durch den Scheitel von φ_n geht, φ_n schneidet, und in diesem Fall muss φ_{n-3} P enthalten. φ_{n-3} muss dann aus P und aus einem φ_{n-4}, welcher noch

$$(p-1) - (p-D) = D - 1$$

Bedingungen erfüllen kann und durch h geht, zusammengesetzt sein. φ_{n-4} muss dann durch

$$h - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + D$$

von den Linien h gehen, weil sie durch die übrigen geht. Wir bemerken aber, dass diese Bedingung auch erfüllt ist, wenn φ_{n-4} durch

$$h - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + D + k$$

von den Linien h gehen muss, weil er durch die übrigen geht.

Wir nehmen also an, dass φ_{n-4} durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + k$$

der Linien h und durch keine weiteren gehen muss, weil er durch die übrigen geht.

Wenn nun ein φ_{n-4}, welcher durch h und $D-1$ von den Linien D geht, auch daher durch den letzten gehen muss, können wir zeigen, dass φ_n nicht immer Curven c_n projicirt, die wirkliche Doppelpunkte auf D haben. Gesetzt nämlich, dass dieses der Fall sei. Dann muss jeder φ_{n-3}, welcher durch D, h und die übrigen Linien geht, worin φ_{n-4} φ_n schneidet, φ_{n-4} in den Linien D berühren. φ_{n-4} kann ausser durch h und D durch k willkürliche Linien von φ_n gelegt werden, und ein φ_{n-3}, der durch h, D und die übrigen Linien geht, worin φ_{n-4} φ_n schneidet, schneidet φ_n noch in einer Gruppe g von n Linien, wovon

$$\frac{n(n-3)}{2} - (n-4)n + h + D + k$$

willkürlich gewählt werden können.

Muss nun ein φ_{n-3} φ_{n-4} in allen den Linien D berühren, kann man durch h einen φ'_{n-3} legen, der durch eine Gruppe g gehen muss, wenn er durch

$$n - \left[\frac{n(n-3)}{2} - (n-4)n + D + h + k\right]$$

willkürliche Linien derselben geht, (was man wie oben sieht).

Da aber die Linien g in einer Ebene liegen können, und φ'_{n-3} ausser durch g und h noch durch $D+k$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann, muss es also ein φ_{n-4} geben, welcher durch h geht, und noch durch $D+k$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann, oder der durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + k + 1$$

Linien von h gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Dieses ist aber im Streit mit dem, was vorausgesetzt ist, und also unmöglich. Also kann φ_n nicht immer Curven c_n projiciren, die wirkliche Doppelpunkte auf D haben, wenn φ_{n-4} durch eine von den Linien D gehen muss, weil er durch h und die übrigen geht.

Der Beweis ist geführt, indem wir angenommen haben, dass φ_{n-4} keine Doppellinien in den Linien D hat, es ist aber nicht schwierig den Beweis auf ähnliche Weise zu führen, wenn dieses der Fall ist.

Auf ähnliche Weise sieht man:

Wenn eine ebene Curve φ_n $h + D$ Doppelpunkte hat, die man so in zwei Gruppen h und D, von h und D Punkten bestehend, theilen kann, dass eine φ_{n-4} durch einen Punkt von h gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass φ_{n-4} durch keinen Punkt von D gehen muss, weil sie durch h und die übrigen Punkte D geht, so sind diese Bedingungen, wenn

$$h + D \overline{\gtrless} \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

nothwendig und zulänglich dafür, dass die Doppelpunkte D Projectionen von wirklichen Doppelpunkten von jeder Raumcurve c_n, deren Projection φ_n ist, sein müssen.

25) Wenn eine Monoide M_{m-1} c_n enthält, werden im Folgenden die Linien derselben, die c_n in zwei Punkten schneiden (die Doppelstrahlen), immer h, die Linien, welche c_n in einem Punkte schneiden, h_1, die Linien, welche gar nicht c_n schneiden, h_0 genannt, indem h, h_1 und h_0 zugleich die Anzahl dieser Linien bezeichnen.

Wenn wir wie gewöhnlich den Oberkegel von M_{m-1} φ_m, den Unterkegel φ_{m-1} nennen, können wir durch h_1 und h_0 einen Kegel φ_{2m-n} legen, der φ_{m-1} in den Linien h_0 berührt; denn φ_m^2 (φ_m zweimal genommen) schneidet φ_{m-1} in allen denselben Linien wie φ_n, und durch die übrigen Durchschnittlinien von φ_m^2 und φ_{m-1} muss dann ein φ_{2m-n} gehen.(1)

(1) Vgl. mit dem Satz 25) Satz 3 von »On some new theorems on curves of double curvature by Professor STURM», Report of the british Association 1881, der sich leicht aus 25) ableiten lässt.

III.

Von der Lage der Doppelstrahlen.

26) Aus dem Satz 23) folgt:

Wenn eine Raumcurve, c_n, $h = d - x$ scheinbare Doppelpunkte hat, kann man immer durch die Doppelstrahlen h einen Kegel φ_m legen, der wenigstens noch x Bedingungen erfüllen kann, wenn

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$$

$$n - 2 > m \geqq \frac{(n-2)}{2}.$$

Wenn $m \geqq \frac{(n-2)}{2}$, kann man nicht durch alle die Doppelstrahlen h einen Kegel φ_{n-m-4} legen; denn könnte man dieses thun, müsste c_n auf einer M_{n-m-4} liegen. Nun ist $n - m - 4 < \frac{(n-2)}{2}$; es kann aber keine Monoide niedrigerer Ordnung als $\frac{n}{2}$ existiren, die c_n enthält. Denn der Oberkegel muss durch h und die übrigen Linien gehen, in welchen der Unterkegel den Kegel φ_n schneidet, der c_n projicirt. Wenn aber die Monoide $(m+1)^{ter}$ Ordnung ist, ist die Anzahl dieser Linien $mn - h$, und wir müssen also haben

$$mn - h \leqq m(m+1),$$

und da φ_m durch h geht,

$$2h \leqq mn, \qquad h \leqq \frac{mn}{2},$$

und also

$$\frac{mn}{2} \leqq m(m+1)$$

$$m \geqq \frac{n}{2} - 1.$$

Man kann also unter den Linien h $\frac{(n-m-4)(n-m-1)}{2}$ wählen, die so liegen, dass φ_{n-m-4} durch keine unter ihnen gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Diese Liniengruppe wird h' genannt.

Durch die übrigen $\frac{m(m+3)}{2} - x + 1$ Linien h, die h'' genannt werden, kann man einen Kegel φ_m legen, der noch x Bedingungen erfüllen kann. Denn es muss wenigstens eine Linie L unter den Linien h'' geben, durch welche φ_{n-m-4} nicht gehen muss, weil er durch h' geht, da φ_{n-m-4} nicht durch alle die Linien h gehen kann. Legt man durch die Linien h'' mit Ausnahme von L einen φ_m, kann dieser noch x Bedingungen erfüllen und muss auch durch L gehen. Denn φ_m und φ_{n-m-4} bilden zusammen einen φ_{n-4}, der durch alle die Linien h mit Ausnahme von einer geht, und nach 23) muss er auch durch diese gehen. Nun geht φ_{n-m-4} nicht durch L, also muss φ_m dadurch gehen.

φ_m muss aber auch durch alle die Linien h' gehen, wenn er durch h'' geht; denn lässt man einen φ_{n-m-4} durch alle die Linien h' mit Ausnahme von einer gehen, bildet φ_{n-m-4} mit φ_m zusammen wieder einen φ_{n-4}, der durch alle die Linien h mit Ausnahme von einer, L', gelegt ist, und der also auch durch diese gehen muss. Da φ_{n-m-4} nicht durch L' geht, muss φ_m dadurch gehen, und da L' ganz willkürlich unter den Linien h' gewählt ist, muss φ_m durch alle die Linien h' gehen.

Wenn n eine gerade Zahl ist, ist $\frac{n(n-2)}{4}$ die geringste Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten, die c_n haben kann; denn hat c_n diese oder eine kleinere Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten, muss c_n auf einer $M_{\frac{n-2}{2}}$ liegen, und man muss also haben

$$\frac{(n-2)}{2} \cdot n - h \leqq \frac{(n-2) \cdot n}{4}$$

$$h \gtreqless \frac{(n-2)n}{4}.$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, ist die geringste Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten $\frac{(n-1)^2}{4}$; wenn nämlich c_n diese oder eine geringere Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten hat, muss sie auf einer $M_{\frac{n-1}{2}}$ liegen, und also ist

$$\frac{(n-1)n}{2} - h \leqq \frac{(n-1)(n+1)}{4}.$$

27) In 26) ist erwiesen, dass ein Kegel φ_m wenigstens durch

$$\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$$

der Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt zu einer c_n gehen muss, weil er durch die übrigen geht; wir wollen aber zeigen, dass φ_m, wenn $m \overline{\gtrless} n-5$, immer durch eine noch grössere Anzahl der Doppelstrahlen gehen muss, weil er durch die übrigen geht, wenn c_n nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Nehmen wir nämlich an, dass φ_m nur durch $\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$ der Doppelstrahlen gehen muss, weil er durch die übrigen geht, und dass c_n

$$h = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2} - d$$

scheinbare Doppelpunkte hat, so muss c_n auf einer M_m liegen, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, und deren Unterkegel noch d Bedingungen erfüllen kann.

Von den Linien h_1 können d willkürlich gewählt werden. Die Linien h_1 bilden dann auf φ_n, dem c_n projicirenden Kegel, eine Gruppe von h_1 Linien, von denen d willkürlich gewählt werden können, und ein Kegel φ_{n-3}, der durch h geht, wird dann, 6) zufolge, durch alle die Linien h_1 gehen, wenn er durch $h_1 - d$ willkürliche Linien unter ihnen geht.

Ein solcher Kegel kann noch

$$r = \frac{n(n-3)}{2} - h - (h_1 - d) = \frac{n(n-3)}{2} - mn + h + d =$$

$$= (n-m-1)(n-m-3) = \frac{(n-m-4)(n-m-1)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-1)}{2}$$

Bedingungen erfüllen. Diese Zahl zeigt aber, dass der φ_{n-3} durch alle die Linien h_0 gehen muss, weil er durch h und h_1 geht, denn ein Kegel φ_{n-3}, der durch alle die geraden Linien der M_m geht, kann noch eben so viele Bedingungen erfüllen. Dann muss aber, wenn $n-3 \overline{\gtrless} m+2$, jeder Kegel φ_{m+2}, der durch die übrigen Linien der M_m geht, auch durch h_0 gehen.

Ein Kegel φ_{m+2}, der durch alle gerade Linien der M_m geht, schneidet aber noch M_m in einer Curve, die auf einer willkürlichen Fläche F_2 liegt, da er durch die vollständige Durchschnittcurve des Unterkegels und der M_m geht, und da φ_{m+2} nur 8 Bedingungen erfüllen kann, muss c_n auf einer F_2 liegen.

Umgekehrt kann ein Kegel φ_m nicht durch eine grössere Anzahl der Doppelstrahlen, als hier angegeben, gehen, weil er durch die übrigen geht, wenn c_n auf einer F_2 liegt. c_n muss zwei Erzeugende von F_2, die zu verschiedenen Reihen gehören, zusammen in n Punkten schneiden, weil die Erzeugenden zusammen einen ebenen Schnitt von F_2 bilden. Wenn c_n also jede Erzeugende der einen Reihe in k Punkten schneidet, muss sie jede Erzeugende der anderen Reihe in $(n-k)$ Punkten schneiden. Wenn man einen Punkt P von F_2 zum Augenpunkt nimmt, sieht man, dass c_n in der einen Erzeugenden von F_2, die durch P geht, einen scheinbaren k-fachen Punkt hat, und in der anderen einen scheinbaren $(n-k)$-fachen Punkt hat, und dass sie keine andere scheinbare Doppelpunkte hat. c_n hat also

$$h = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

scheinbare Doppelpunkte.

Ein Kegel niedrigerer Ordnung als der $(n-k-1)^{ten}$ kann, wenn $n-k \geq k$, nicht durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt gelegt werden; denn c_n würde sonst auf einer Monoide niedrigerer Ordnung als der $(n-k)^{ten}$ liegen, was unmöglich ist, da diese jede Erzeugende der einen Reihe in $(n-k)$ Punkten schneiden würde, und also F_2 ganz enthalten würde. Eine Monoide, die ihren Scheitel in einem Punkt hat, der nicht auf F_2 liegt, kann aber F_2 nicht enthalten. Ein Kegel m^{ter} Ordnung, der durch h geht, kann, 26) zufolge, noch durch

$$\frac{m(m+3)}{2} - h + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2} = l$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, indem $n-3 > m \geq n-k-1$. Die Monoide M_m kann also, ausserdem dass sie c_n enthält, noch l Bedingungen erfüllen.

Bezeichnen $p_1, p_2 \ldots.$ u. s. w. ebene Schnitte von F_2, können wir eine solche M_m durch $(2m - n + 3)$ Punkte von p_1, durch $(2m - n + 1)$ Punkte von $p_2, \ldots.,$ durch $(n - 2k + 3)$ Punkte von $p_{(m+k-n+1)}$ legen, und man sieht dann, dass M_m $p_1, p_2, \ldots., p_{m+k-n+1}$ enthalten muss, und dass sie noch durch $n - 2k$ willkürliche Punkte gelegt werden kann.

Lässt man M_m noch durch $n - 2k$ willkürliche Punkte P_i von F_2 gehen, sieht man, dass M_m jede Erzeugende der einen Reihe f_i, welche durch einen P_i geht, und c_n in $(n - k)$ Punkten schneidet, enthalten muss; denn f_i schneidet M_m in P_i, in den $(n - k)$ Punkten, worin f_i c_n schneidet, und in den Punkten, worin f_i $p_1, p_2, \ldots., p_{m+k-n+1}$ schneidet, zusammen in $(m + 2)$ Punkten.

Eine M_m, die c_n enthält, kann nicht mehrere Bedingungen, als oben angegeben, erfüllen. Denn könnte sie noch eine erfüllen, könnte man M_m noch durch einen willkürlichen Punkt von F_2 legen, und sie müsste dann die eine Erzeugende, die durch diesen Punkt ginge, enthalten, und also F_2 in einer Curve höherer Ordnung als $2(m + 1)$ schneiden, was unmöglich ist, ohne dass sie F_2 enthält. Wie oben sieht man aber, dass M_m F_2 nicht enthalten kann.

28) Wir wollen in den folgenden Paragraphen die Principien entwickeln, nach welchen man vorgehen muss, um die niedrigste Ordnung des Kegels zu finden, den man durch die Doppelstrahlen h einer gegebenen Raumcurve legen kann.

Nehmen wir an, dass c_n auf einer M_m liegt, deren Unterkegel φ_m und deren Oberkegel φ_{m+1} ist. Eine willkürliche Fläche F_p schneidet jede gerade Linie, die auf M_m liegt, in p Punkten, und also hat die vollständige Durchschnittcurve $c_{(m+1)p}$ von F_p und M_m einen scheinbaren p-fachen Punkt in jeder geraden Linie der Monoide M_m, wenn man den Scheitel α zum Augenpunkt nimmt.

Umgekehrt liegt jede Curve $c_{(m+1)p}$, die einen scheinbaren p-fachen Punkt in jeder geraden Linie der M_m hat, auf einer F_p; denn der $\varphi_{(m+1)p}$, welcher $c_{(m+1)p}$ projicirt und seinen Scheitel in α hat, hat eine p-fache Linie in jeder geraden Linie der Monoide und schneidet also M_m in denselben Linien wie φ_m^p (φ_m p-mal genommen). Die übrige Durchschnittlinie von $\varphi_{(m+1)p}$ und M_m muss also, 18) zufolge, auf einer F_p liegen.

Nennen wir den Kegel, der c_n projicirt, φ_n, sehen wir, dass $\varphi_{(m+1)p}$ φ_n in denselben Linien schneidet wie φ_m^{p-1}, und, da $\varphi_{(m+1)p}$ sowohl in den Linien h, die $(p - 1)$-fach auf φ_m^{p-1}, doppelt auf φ_n sind, als in den

Linien h_1, die $(p-1)$-fach auf φ_m^{p-1}, einfach auf φ_n sind, p-fache Linien hat, dass, 4) zufolge, die übrigen Durchschnittlinien von φ_n und $\varphi_{(m+1)p}$ auf einem φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht, liegen müssen.

Das Resultat dieser Untersuchungen ist also:

Wenn c_n auf einer M_m liegt, liegen die Schnittpunkte von c_n und F_p auf einem Kegel φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht.

Der umgekehrte Satz gilt nicht immer; im nächsten Abschnitt soll etwas näher untersucht werden, wann dieses der Fall ist.

29) Indem wir die Bezeichnungen von 28) beibehalten, nehmen wir an, dass φ_{m+p}, ausser den Punkten, die auf h und h_1 liegen, c_n noch in einer Gruppe H_p schneidet, die aus np Punkten besteht, von denen man z_p willkürlich wählen kann. Wenn ein φ_{n-3} durch H_p gelegt werden kann, und wenn φ_{n-3} durch h geht und noch x Bedingungen erfüllen kann, kann man durch h einen φ_{n-p-3} legen, der noch x Bedingungen erfüllen kann. Denn durch H_p geht ein φ_{m+p}, und φ_{n-3} bildet mit φ_m zusammen einen φ_{n+m-3}, der durch alle Schnittlinien von diesem φ_{m+p} und von φ_n geht, und der Doppellinien in allen den Linien h hat. Also muss, nach 4), φ_{n+m-3} φ_n noch in Linien schneiden, die auf einem φ_{n-p-3}, welcher durch h geht, liegen, und der Residualtheorie zufolge weiss man, dass φ_{n-3} durch eben so viele willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann wie φ_{n-p-3}.

Nach 6) geht aber φ_{n-3} durch eine Gruppe H_p, wenn er durch $np-z_p$ willkürliche Punkte dieser Gruppe gelegt wird; und da φ_{n-3} $\frac{n(n-3)}{2}-h$ Bedingungen erfüllen kann, ist die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass man einen φ_{n-3} durch eine H_p legen kann, dass

$$np-z_p \overline{\overline{<}} \frac{n(n-3)}{2}-h$$

$$z_p \overline{\overline{>}} np-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h+1.$$

Man hat also den Satz:

Wenn ein φ_{m+p}, der durch die Linien h und h_1 einer Monoide M_m geht, welche eine Curve c_n enthält, noch z_p Bedingungen erfüllen kann, geht ein φ_{n-p-3}, der noch $z_p-np+\frac{(n-1)(n-2)}{2}-h-1$ Bedingungen erfüllen kann, durch h, wenn

$$z_p \overline{\gtrless} np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1.$$

Da man durch jedes vollständige Schnittpunktsystem einer F_p und einer c_n einen φ_{m+p} legen kann, kann φ_{m+p} wenigstens durch ebenso viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie F_p. Wenn also F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann man durch h einen φ_{n-p-3} legen, wenn

$$y_p \overline{\gtrless} np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1.$$

30) Wir wollen jetzt eine untere Grenze dafür bestimmen, durch wie viele Punkte einer Raumcurve c_n wir immer eine F_p legen können, wenn wir annehmen, dass c_n auf einer F_q liegt, und dass

$$n = mq + k \qquad (q > k), \qquad p \overline{\lessgtr} m + q - 3.$$

Wir wollen zuerst $m > q$ annehmen. Eine Fläche F_p kann nicht c_n enthalten, wenn $p < q$, und eine solche Fläche kann man also durch

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1$$

willkürliche Punkte von c_n legen.

Wenn $q \overline{\overline{<}} p \overline{\overline{<}} m$, kann eine Fläche F_p nicht c_n enthalten ohne sich in F_q und eine F_{p-q} aufzulösen.

F_p kann also durch ebenso viele willkürliche Punkte von c_n wie von F_q gelegt werden, ohne dass sie c_n enthalten muss. F_p kann daher durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden. Wenn $k = 0$, gilt diese Formel nicht für $p = m$.

Wenn endlich $p > m$ (oder wenn $k = 0$ auch $= m$), kann eine F_p, ausserdem dass sie c_n in n Punkten schneidet, die in einer Ebene liegen, wenigstens durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_{p-1}. Ist es wenigstens a_p Bedingungen für F_p durch die Punkte gehen zu sollen, worin eine Ebene c_n schneidet, und kann man F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n legen, hat man

$$y_p \overline{\gtrless} a_p + y_{p-1},$$

und wie leicht zu sehen

$$y_p \overline{\gtrless} \sum_{p-r+1}^{p} a_p + y_{p-r}.$$

Nun wissen wir (siehe 11)), dass eine Curve p^{ter} Ordnung höchstens durch

$$\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)$$

Punkte einer Gruppe α von n Punkten gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, wenn α auf einer unauflöslichen Curve q^{ter} Ordnung liegt, $m+1 \overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} m+q-3$ und $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m+k-p-1 \lesseqgtr 0$. Daraus folgt dass

$$a_p \overline{\gtrless} n - \left(\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)\right),$$

und da

$$y_m = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{mq(m-q+4)}{2},$$

$$y_p \overline{\gtrless} y_m + \sum_{m+1}^{p} a_p \overline{\gtrless} \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{mq(m-q+4)}{2}$$

$$+ \sum_{m+1}^{p} \left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

$$- \frac{(p-m)(p-m+1)(p-m+2)}{6} - \varepsilon_1 \frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p-k-m+1 \lesseqgtr 0$.

Nehmen wir jetzt an, dass $m < q$. Dann kann eine F_p, wenn $p < m+1$ und $k > 0$ (und wenn $p < m$, $k = 0$) c_n nicht enthalten, und sie kann daher durch $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1$ willkürliche Punkte der c_n gelegt werden. Wenn $p > m$, müssen wir auf dieselbe Weise verfahren wie in dem Fall, wo $p > m > q$. Wenn wir dieselben Bezeichnungen behalten, wissen wir, 11) zufolge, dass, wenn $q > p > m$,

$$a_p \geqq n - \left(m(q-p) + \frac{(m-3)m}{2} + \varepsilon(m + k - p - 1)\right),$$

indem $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$, und da

$$y_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1,$$

$$y_p \gtreqless y_m + \sum_{m+1}^{p}\left(n - m(q-p) - \frac{m(m-3)}{2} - \varepsilon(m + k - p - 1)\right)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2} - \varepsilon_1 \frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p - m - k + 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $k = 0$, ist die Formel auch für $p = m$ richtig.

Wir nehmen jetzt an, dass $m + q - 3 \gtreqless p \gtreqless q$. Wir haben dann, 11) zufolge,

$$a_p \gtreqless n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m + k - p - 1),$$

indem $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$,

$$y_p \gtreqless y_{q-1} + \sum_{q}^{p}\left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m + k - p - 1)\right)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$

$$- \frac{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}{6} - \varepsilon_1 \frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p - k - m + 1 \lesseqgtr 0$.

31) Nachdem wir in 30) Formeln dafür entwickelt haben, wie gross man immer y_p annehmen kann, und in 29) gesehen haben, dass man durch h einen φ_{n-p-3} legen kann, wenn

$$y_p \overline{\overline{>}}\, pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1,$$

$$h \overline{\overline{<}}\, y_p - pn + \frac{(n-3)n}{2},$$

finden wir die folgenden Sätze:

Wenn c_n auf einer F_q liegt, und $n = mq + k$, $m > q > k$, wissen wir, dass wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt einen φ_{n-p-3} legen können in den Fällen:

1) Wenn $p < q$ und

$$h \overline{\overline{<}}\, \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1.$$

2) Wenn $m \geqq p \geqq q$ und

$$h \overline{\overline{<}}\, \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}.$$

3) Wenn $m + q - 3 > p > m$ und

$$h \overline{\overline{<}}\, \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

$$- \frac{(p-m)(p-m+1)(p-m+2)}{6} - \varepsilon_1 \frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, *je nachdem* $p - k - m + 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $m < q$, und sonst dieselben Bedingungen wie im Falle $m > q$ bestehen, können wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkte einen φ_{n-p-3} legen in den Fällen:

1) Wenn $p \leqq m$, und

$$h \overline{\overline{<}}\, \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1.$$

2) Wenn $m < p < q$, *und*

$$h \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$
$$- \varepsilon_1 \frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2}.$$

3) Wenn $m + q - 3 > p > q$ *und*

$$h \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - pn + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$
$$- \varepsilon_1 \frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2} - \frac{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}{6},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, *je nachdem* $p - m - k + 1 \lesseqgtr 0$.

Man hat in diesen Formeln nicht darauf Rücksicht genommen, dass $k = 0$ sein kann, es ist aber leicht zu sehen, wie man dieses thun kann.

Die hier gefundenen Formeln drücken nur aus, was immer statt finden muss, nicht aber, dass man niemals durch h einen Kegel $(n-p-3)^{ter}$ Ordnung legen kann, wenn die Anzahl der Doppelstrahlen grösser, als hier angegeben ist. (1)

32) *Wir wollen jetzt zeigen, dass wenn* $p \geqq m + q - 3$, *ein* φ_{m+p}, *der durch* h *und* h_1 *geht, immer durch*

$$np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von c_n *gelegt werden kann, indem* c_n *auf einer* M_m *liegt.*

Wir brauchen dieselben Bezeichnungen wie in 29). φ_{m+p} ist nur den Bedingungen unterworfen durch h und h_1 gehen zu sollen, und wenn p zulänglich hoch, ist dieses mit $h + h_1$ Bedingungen eqvivalent. Also kann man, wenn p zulänglich hoch und $m + p > n$, φ_{m+p} durch

$$n(m+p) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (h + h_1)$$

willkürliche Punkte von c_n legen.

Nun bilden h und h_1 zusammen die Schnittlinien des Unterkegels φ_m und des c_n projicirenden Kegels φ_n, und, da h Doppellinien auf φ_n sind, muss man $2h + h_1 = mn$, $h + h_1 = mn - h$ haben.

(1) Wir wollen später zu diesem Punkt zurückkommen.

Also kann φ_{m+p} durch

$$np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden.

Nun kann man zeigen, dass, wenn dieses für p richtig ist, es auch für $p-1$ richtig ist, wenn es mit n Bedingungen eqvivalent ist, dass φ_{m+p} durch die Punkte gehen soll, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet. Eine φ_{m+p}, die durch eine Gruppe H_{p_1} geht, schneidet nämlich noch c_n in einer Gruppe H_{p-p_1}. Denn durch H_{p_1} geht ein φ_{m+p_1}, und φ_{m+p} und φ_m bilden einen φ_{2m+p}, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_{m+p_1} und von φ_n geht, und da φ_{2m+p} Doppellinien in den Linien h hat, die doppelt auf φ_n sind, schneidet φ_{2m+p} noch φ_n in Linien, die auf einem φ_{m+p-p_1} liegen.

Auf dieselbe Weise sieht man, dass zwei willkürliche Gruppen H_{p-p_1} und H_{p_1} zusammen eine Gruppe H_p bilden. Nehmen wir jetzt an, dass man φ_{m+p} durch z_p willkürliche Punkte von c_n legen kann. Ein φ_{m+p}, der durch die Punkte geht, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, kann, da die Ebene c_n in Punkten schneidet, die eine Gruppe H_1 bilden, noch durch eine willkürliche Punktgruppe H_{p-1} gelegt werden. Wenn es nun mit α_p Bedingungen eqvivalent ist, dass φ_{m+p} durch die Punkte gehen soll, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, hat man

$$z_p = \alpha_p + z_{p-1}, \qquad z_{p-1} = z_p - \alpha_p,$$

und, wenn $\alpha_p = n$, $z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, ist also

$$z_{p-1} = (p-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Nun bilden die Punkte, worin eine willkürliche F_p c_n schneidet, eine Gruppe H_p, und da, 11) zufolge, F_p, wenn $p > m + q - 3$, durch keinen der Punkte, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss keiner von diesen Punkten zu einer H_p gehören, weil die übrigen dieses thun. Wenn $p > m + q - 3$, ist also $\alpha_p = n$, und nach dem, was vorher gesagt ist, hat man auch

$$z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn $p \geqq m + q - 3$.

Da also, wenn $p \geqq m + q - 3$, $z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, kann man niemals eine φ_{n-3} durch eine H_p legen, wenn $p \geqq m + q - 3$, *und man kann also niemals einen Kegel niedrigerer Ordnung als*

$$n - 3 - (m + q - 4) = n - m - q + 1$$

durch h legen.

Da nach dem, was hier angeführt ist, φ_{m+p} niemals durch weniger als $pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und da man durch h einen Kegel φ_{n-p-3} legen kann, wenn φ_{m+p} durch mehrere willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, sieht man, dass

$$z_p = np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn

$$(n - p - 3)n < 2h$$

$$h > \frac{(n-p-3)n}{2},$$

indem man sonst durch h einen Kegel φ_{n-p-3} legen könnte, der φ_n in mehr als $(n - p - 3)n$ Linien schneiden würde.

33) Wir werden jetzt die im Vorhergehenden entwickelten Formeln dazu verwenden, den kleinsten Werth von h zu finden, wenn c_n auf einer F_q liegt, $n = mq + k$, $m > q$.

Wir wissen (30)), dass

$$y_{m+q-3} \geqq \frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2},$$

und (32)) dass

$$z_{m+q-3} = (m + q - 3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und da nach 28)

$$z_{m+q-3} \geqq y_{m+q-3},$$

müssen wir also haben

$$h \overline{\overline{>}} \frac{(n-q+k)(n-m-k)}{2}. \text{[1]}$$

34) Wenn h seinen kleinsten Werth hat, und $q < m$, liegt c_n auf einer F_{m+1}. In diesem Fall kann nämlich eine F_{m+1} nicht durch mehr als

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+1)q(m-q+5)}{2} - 1 - \varepsilon_1 \frac{(2-k)(3-k)}{2}$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden ohne diese zu enthalten. Denn könnte man F_{m+1} noch durch x willkürliche Punkte von c_n legen, könnte man auch eine Fläche F_{m+2} durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+2)q(m-q+6)}{2} - 4 - \varepsilon_1 \frac{(3-k)(4-k)}{2} + x$$

Punkte von c_n legen u. s. w., so dass man eine Fläche F_{m+q-3} durch

$$\frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} + x$$

willkürliche Punkte von c_n legen könnte, was man durch das Verfahren von 30) sieht, indem ε_1 dieselbe Bedeutung wie in 30) hat. Dieses ist aber unmöglich, denn wir haben

$$y_{m+q-3} \overline{\overline{<}} z_{m+q-3},$$

$$\frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} + x \overline{\overline{<}}$$

$$(m+q-3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und dieses kann, wenn h seinen kleinsten Werth hat, nur statt finden, wenn $x = 0$.

Da man eine F_{m+1} durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+1)q(m-q+5)}{2}$$

willkürliche Punkte von F_q legen kann, geht also immer eine F_{m+1} durch

[1] Dieses ist zuerst von HALPHEN gefunden, Comptes rendus, tom. LXX, p. 380.

c_n. Die F_{m+1}, welche durch c_n geht, schneidet noch F_q in einer ebenen Curve c_{q-k}. Denn nimmt man an, dass c_{q-k} h' scheinbare Doppelpunkte hat, weiss man (siehe SALMON, Geom. of three dim. 3 ed. p. 315), dass

$$h - h' = \frac{(n-q+k)(q-1)m}{2}$$

$$= \frac{(n-q+k)(n-m-k)}{2},$$

und dass also $h' = 0$ ist.

Daraus folgt, dass wenn $k = 0$, und h seinen kleinsten Werth hat, c_n die vollständige Durchschnittcurve einer F_q und einer F_m ist.

Wenn h seinen kleinsten Werth hat, zeigt 32), dass man durch h einen $\varphi_{n-m-q+1}$ legen kann. Wenn $k = 0$, ist $n - m - q + 1 = (m-1)(q-1)$, *so dass man durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt zu der vollständigen Durchschnittcurve einer Fläche m^{ter} Ordnung und einer Fläche q^{ter} Ordnung einen Kegel $(m-1)(q-1)^{ter}$ Ordnung legen kann.*

IV.

Die Lehre von den Schnittpunkten der Raumcurven und der Flächen.

35) In dem vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, (29)), dass alle die Punkte, worin eine Fläche F_p eine Raumcurve c_n, die auf einer M_m liegt, schneidet, auf einem φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht, liegen. Wenn ein solcher φ_{m+p} c_n in einer Punktgruppe H_p, wovon z_p Punkte willkürlich gewählt werden können, schneidet, und wenn eine F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, muss $y_p \overline{\overline{<}} z_p$ sein. Liegt nun c_n auf einer F_q, wissen wir, dass (siehe 32))

$$z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn

$$n = mq + k \qquad (q > k),$$

$$p > m + q - 4.$$

Unter denselben Voraussetzungen haben wir also

$$y_p \overline{\overline{<}} pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass, wenn p zulänglich hoch ist, $y_p = z_p$. Denn, wenn die Schnittpunkte von φ_{m+p} und c_n bestimmt sind, kann man immer, wenn p zulänglich hoch, φ_{m+p} noch durch h_0 legen, ohne dass φ_{m+p} daher den Kegel φ_n, der c_n projicirt, enthalten muss. φ_{m+p} geht dann durch alle die geraden Linien der M_m, und da diese Linien zusammen die vollständige Durchschnittcurve von M_m und dem Unterkegel φ_m bilden, muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von φ_{m+p} und M_m auf einer F_p liegen, so dass die Schnittpunkte von c_n und φ_{m+p}, die nicht auf h oder h_1 liegen, auf einer F_p liegen.

Wenn also p so gross wie hier angenommen ist, muss man $y_p = z_p$ haben.

Wir wollen jetzt zeigen, dass wenn $p = n - 2$, kann man immer φ_{m+p}, wenn seine Schnittpunkte mit c_n bestimmt sind, durch h_0 legen. Wir können $m \overline{\overline{<}} n - 2$ annehmen. Dann muss φ_{m+n-2} durch keine der Linien gehen, worin φ_m und φ_{m+1} einander schneiden, weil sie durch die übrigen geht, da $m + n - 2 > m + (m + 1) - 3$ (siehe 11)).

Es ist also für einen φ_{m+n-2} mit $m(m + 1)$ Bedingungen eqvivalent durch alle die geraden Linien der Monoide gehen zu sollen. φ_{m+n-2} kann dann noch durch $z_{n-2} = (n-2)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden ohne φ_n zu enthalten. Denn φ_{m+n-2} kann, ausserdem dass er durch h, h_1, h_0 und z_{n-2} willkürliche Punkte von c_n geht, noch

$$\frac{(m+n-2)(m+n+1)}{2} - m(m+1) - (n-2)n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h =$$

$$= m(n-3) - \frac{m(m-3)}{2} - h = u_{n-2}$$

willkürliche Bedingungen erfüllen. Könnte nun ein φ_{m+n-2}, der durch alle die geraden Linien der Monoide ginge, nicht durch z_{n-2} willkürliche Linien von φ_n gelegt werden ohne diesen zu enthalten, müsste er sich in diesem Falle in φ_n und einen φ_{m-2}, der durch h_0 ginge und noch u_{n-2}

Bedingungen erfüllen könnte, auflösen. Ein φ_{m-2}, der durch h_0 ginge, müsste also durch u_{n-2} willkürliche Punkte von φ_m gelegt werden können.

φ_{m-2} und φ_n würden aber zusammen einen φ_{n+m-2} bilden, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_m und φ_{m+1} ginge, und also noch φ_m in Linien, die auf einem φ_{n-3} lägen, welcher durch h ginge, schneiden müsste. Man müsste also einen solchen φ_{n-3} durch u_{n-2} willkürliche Punkte von φ_m legen können. Es ist aber für einen φ_{n-3} h Bedingungen durch alle die Linien h gehen zu sollen (7)), und im Ganzen kann ein φ_{n-3} durch

$$(n-3)m - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

willkürliche Linien von φ_m gelegt werden; ein φ_{n-3}, der durch h geht, kann also nur noch durch

$$m(n-3) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h = u_{n-2} - 1$$

willkürliche Linien von φ_m gelegt werden, und es ist unmöglich, dass ein φ_{m-2} durch h_0 und u_{n-2} willkürliche Linien von φ_m gelegt werden kann. Daraus sieht man, dass ein φ_{m+n-2}, der durch z_{n-2} willkürliche Punkte von c_n geht, nicht c_n enthalten muss, weil er durch h_0 gelegt wird. Da die Schnittpunkte von c_n und φ_{m+n-2} durch z_{n-2} unter ihnen bestimmt sind, kann man also, was zu beweisen war, einen willkürlichen φ_{n+m-2}, dessen Schnittpunkte mit c_n bestimmt sind, durch h_0 legen, ohne dass er daher φ_n enthalten muss.

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die Formel

$$y_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

für $p = n - 2$ gilt, sie auch für $p > n - 2$ richtig sein muss. Man kann es zum Beispiel durch Induction thun. Wir wissen dass

$$y_{p+1} \overline{\gtrless} y_p + n,$$

wenn p so gross ist, dass es für eine F_{p+1} mit n Bedingungen eqvivalent ist, durch alle die Punkte gehen zu sollen, worin eine Ebene c_n schneidet; denn eine F_{p+1}, welche durch alle die Punkte geht, worin eine Ebene c_n

schneidet, kann wenigstens noch durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_p, da die Ebene und eine F_p zusammen eine F_{p+1} bilden. Wenn nun

$$y_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wissen wir also, dass

$$y_{p+1} \overline{\overline{>}} (p+1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Da aber auch

$$y_{p+1} \overline{\overline{<}} z_{p+1},$$

und

$$z_{p+1} = (p+1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

muss man $y_{p+1} = z_{p+1}$ haben, und der Satz ist für $p+1$ richtig, wenn er für p richtig ist und $p \overline{\overline{>}} n-2$. Wir haben also jetzt bewiesen:

Wenn $p \overline{\overline{>}} n-2$, sind die Schnittpunkte einer F_p und einer c_n, die h scheinbare Doppelpunkte hat, durch

$$pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

unter ihnen bestimmt.

Die Methode, welche hier verwendet ist, um die Zahl y_p zu finden, welche angiebt, durch wie viele Punkte die Schnittpunkte einer c_n und einer F_p bestimmt sind, ist aber ausser den Fällen $p \overline{\overline{>}} (n-2)$ selten brauchbar, und wir müssen also andere Methoden suchen.

36) Wir wollen jetzt einige Hülfssätze über vollständige Durchschnittcurven zweier Flächen entwickeln, weil wir diese Sätze im Folgenden brauchen. Diese Sätze sind Sätzen von ebenen Curven ganz analog, auch die Beweise sind analog.

Eine Fläche F_s, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem α einer Fläche F_r und einer vollständigen Durchschnittcurve c_{pq} zweier Flächen F_p und F_q geht, schneidet noch c_{pq} in dem vollständigen Schnittpunktsystem von c_{pq} und einer F_{s-r}.

Wir setzen voraus, dass F_r durch keinen Punkt geht, der doppelt sowohl auf F_p als F_q ist, und dass F_r keinen Doppelpunkt auf c_{pq} hat, so dass es immer vollständig bestimmt ist, wie man es verstehen soll, dass F_s durch die Durchschnittpunkte von F_r und c_{pq} gehen soll.

Uebrigens kann c_{pq} sowohl unauflöslich wie auflöslich sein, wie auch Theile davon mehrfach auf einer der Flächen F_p oder F_q sein können.

Erstens ist der Satz richtig, wenn s so hoch ist, dass es für eine Fläche F_s mit pqr Bedingungen eqvivalent ist durch α gehen zu sollen, und wenn $s > p + q + r - 4$. Denn, wenn $s > p + q - 4$, kann F_s (18)) im Ganzen durch

$$spq - \frac{pq(p+q-4)}{2} - 1$$

willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden; wenn F_s also durch α geht, und s so gross ist, dass F_s durch keinen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte derselben geht, kann sie noch durch

$$(s-r)pq - \frac{pq(p+q-4)}{2} - 1$$

willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden. Durch so viele Punkte kann aber auch eine F_{s-r} gelegt werden, da $(s-r) > p + q - 4$, woraus man sieht, dass der Satz in diesem Fall richtig ist, da eine F_r und eine F_{s-r} zusammen eine F_s bilden.

Darnach können wir zeigen, dass der Satz für $(s-1)$ richtig ist, wenn er für s richtig ist.

Der Beweis wird geführt, indem wir zeigen, dass eine Fläche F_t, die c_{pq} in pq Punkten schneidet, die auf einer Ebene liegen, noch c_{pq} in Punkten schneiden wird, die auf einer F_{t-1} liegen. Denn der Satz wird für eine F_s, die aus einer F_{s-1}, welche durch α geht, und einer willkürlichen Ebene P zusammengesetzt ist, gelten. Diese zusammengesetzte Fläche wird c_{pq} ausser in α auch in Punkten schneiden, die auf einer F_{s-r} liegen; und, da F_{s-r} durch alle die Schnittpunkte von P und c_{pq} geht, liegen, wenn der oben angeführte Satz richtig ist, ihre übrigen Schnittpunkte auf einer F_{s-r-1}. Hierdurch ist aber bewiesen, dass unter der gemachten Voraussetzung der Satz für $s-1$ richtig ist, wenn er für s richtig ist, und wir wollen jetzt die Voraussetzung beweisen.

Nennt man α_t die Anzahl der Bedingungen, mit welchen es eqvivalent ist, dass eine F_t durch alle die Punkte β gehen soll, worin eine willkürliche Ebene P c_{pq} schneidet, während man die Anzahl willkürlicher Punkte von c_{pq}, durch welche man eine F_t legen kann, a_{tpq} nennt, sieht man aus den in 18) entwickelten Formeln, dass

$$a_{tpq} = a_{(t-1)pq} + a_t.$$

Diese Formel sagt aber aus, dass eine F_t, welche durch β geht, noch durch eben so viele willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden kann wie eine F_{t-1}, und also dass eine F_t, welche durch β geht, c_{pq} noch in Punkten schneiden wird, die auf einer F_{t-1} liegen.

37) Aus 36) folgt die Residualtheorie für vollständige Durchschnittcurven.

Indem dieselben Voraussetzungen wie in 36) von c_{pq}, F_p, F_q u. s. w. stattfinden, wollen wir beweisen:

Wenn eine Fläche F_r eine vollständige Durchschnittcurve c_{pq} in zwei Punktgruppen α und β schneidet, die zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von F_r und c_{pq} bilden, und wir durch α eine F_s legen, die c_{pq} noch in der Gruppe γ schneidet, so schneidet eine neue Fläche s^{ter} Ordnung F'_s, welche durch γ geht, c_{pq} noch in einer Punktgruppe α', durch welche man eine Fläche r^{ter} Ordnung, F'_r, die durch β geht, legen kann.

Der Beweis wird dadurch geführt, dass F'_s und F_r zusammen eine F_{r+s} bilden, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem α und γ von c_{pq} und F_s geht, und deren übrige Schnittpunkte mit c_{pq}, α' und β, also auf einer F'_r liegen müssen.

38) Man kann nun auch einen dem Riemann-Roch'schen Satz analogen Satz für vollständige Durchschnittcurven finden, den ich auch den Riemann-Roch'schen Satz nennen werde.

Wenn eine Fläche F_r eine vollständige Durchschnittcurve, c_{pq}, zweier Flächen F_p und F_q in zwei Punktgruppen schneidet, wovon die eine α fest ist, während die andere β, die von Q Punkten besteht, q' variable Punkte enthalten kann, geht eine F_{p+q-4} durch alle die Punkte β, wenn sie durch $Q - q'$ willkürliche Punkte unter ihnen gelegt wird.

Wir setzen voraus, dass $Q - q' < \frac{pq(p+q-4)}{2}$, und wollen später zeigen, dass dieses immer stattfinden muss, wenn β auf einer F_{p+q-4} liegen soll.

Wählen wir $(q' - 1)$ willkürliche feste Punkte γ auf c_{pq}, so bilden die übrigen Punkte von jeder Gruppe β, welche γ enthält, eine Gruppe β' aus $Q - q' + 1$ Punkten bestehend, wovon ein Punkt P willkürlich gewählt werden kann.

Wenn man nun durch einen Punkt P von β', der nicht zu allen Gruppen β' gehört, eine Ebene E legt, und wenn man durch die übrigen $Q - q'$ Punkte β' eine F_{p+q-4} legt, bilden E und F_{p+q-4} zusammen eine F_{p+q-3}, die c_{pq} ausser in β' in einer Gruppe γ' schneidet. Der Residualtheorie zufolge muss nun jede F_{p+q-3}, die durch γ' geht, aus c_{pq} eine Gruppe β' ausschneiden.

γ' besteht theils aus den Punkten γ'', worin die Ebene E c_{pq} ausser in P schneidet, theils aus den Punkten γ''', worin F_{p+q-4} noch c_{pq} schneidet, ausser in den Punkten, wodurch sie gelegt ist. Nun muss jede F_{p+q-3}, die durch γ'' geht, auch durch P gehen, da γ'' und P zusammen das vollständige Schnittpunktsystem zweier ebenen Curven φ_p und φ_q bilden, und F_{p+q-3} E in einer φ_{p+q-3} schneidet, welche durch alle die Schnittpunkte von φ_p und φ_q P ausgenommen gelegt ist und also auch durch P gehen muss, da jede ebene Curve φ_{p+q-3} durch einen der Schnittpunkte von φ_p und φ_q gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

P muss also zu γ' oder zu jeder Gruppe β' gehören, und da es gegeben ist, dass er nicht zu jeder Gruppe β' gehört, muss er zu γ' gehören. Da nun P nicht zu den Punkten γ'' gehört, worin E c_{pq} schneidet, muss er zu γ''' gehören, und F_{p+q-4} also durch P gehen.

F_{p+q-4} muss also durch alle Punkte β' gehen. Da es aber in einer bestimmten Gruppe $\beta = \beta' + \gamma$ vollständig willkürlich ist, ob wir uns einen Punkt P von β' variabel denken und die Punkte von γ fest, oder ob wir uns P fest und einen Punkt P' von γ variabel denken, sehen wir, dass F_{p+q-4} auch durch einen willkürlichen Punkt von γ gehen muss, weil sie durch die $Q - q'$ Punkte β' geht, und also die ganze Gruppe β enthalten.

Wir wollen jetzt zeigen, dass man niemals $Q - q' > \frac{pq(p+q-4)}{2}$ haben kann, wenn β auf einer F_{p+q-4} liegen soll. Denn F_{p+q-4} schneidet c_{pq} noch in einer Gruppe δ, die aus $R = (p+q-4)pq - Q$ Punkten besteht. Es ist nun für F_{p+q-4} höchstens mit R Bedingungen eqvivalent durch δ gehen zu sollen, und da F_{p+q-4} im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche

Punkte von c_n gelegt werden kann, hat man also $q' \overline{\gtrless} \frac{pq(p+q-4)}{2} - R$, und da $Q = pq(p+q-4) - R$, $Q - q' \overline{\lessgtr} \frac{pq(p+q-4)}{2}$.

Wir haben bewiesen, dass F_{p+q-4} durch die ganze Gruppe β gehen muss, weil sie durch $Q - q'$ Punkte derselben gelegt wird, wir können aber auch zeigen, dass sie nicht durch die ganze Gruppe β zu gehen braucht, weil sie durch weniger als $Q - q'$ Punkte der β gelegt wird. Denn F_{p+q-4} schneidet c_{pq} noch in $R = (p+q-4)pq - Q$ Punkten γ, deren

$$r \overline{\gtrless} \frac{pq(p+q-4)}{2} - (Q - q')$$

willkürlich gewählt werden können, da es ja höchstens $Q - q'$ Bedingungen für F_{p+q-4} ist durch β zu gehen, und sie im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden kann. Da aber die Gruppe γ r variable Punkte enthält, geht F_{p+q-4} hierdurch, wenn sie durch

$$R - r \overline{\lessgtr} pq(p+q-4) - Q - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - (Q - q')\right)$$

oder

$$R - r \overline{\lessgtr} \frac{pq(p+q-4)}{2} - q' \tag{1}$$

Punkte der γ gelegt wird. Eine F_{p+q-4}, die durch γ geht, schneidet also c_{pq} noch in einer Gruppe β, deren wenigstens

$$\frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r)$$

Punkte willkürlich gewählt werden können, und da wir wissen, dass nur q' Punkte β willkürlich gewählt werden können, müssen wir haben

$$\frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r) \overline{\lessgtr} q', \tag{2}$$

und indem wir (1) und (2) vergleichen, sehen wir, dass

$$q' = \frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r).$$

Wenn nun c_{pq} h scheinbare Doppelpunkte hat, und wir

$$P = \frac{(pq-1)(pq-2)}{2} - h$$

setzen, haben wir

$$R - r = P - q' - 1$$
$$Q - q' = P - r - 1$$
$$R + Q = 2(P-1)$$
$$R - Q = 2(r - q').$$

Für das Folgende ist es wichtig zu bemerken, dass man diesen, so wie die vorhergehenden Sätze, verwenden kann, wenn c_{pq} eine auflösliche Curve ist.

38) Wir wollen jetzt unter eins die folgenden zwei Sätze beweisen:

1) Wenn zwei Flächen F_p und F_q einander in den unauflöslichen Curven c_n und c_{n_1} schneiden, wo $n + n_1 = pq$, muss eine F_{p+q-4} durch einen Schnittpunkt von c_n und c_{n_1} gehen, weil sie durch die übrigen geht.

2) Wenn c_n h scheinbare Doppelpunkte hat, sind $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ ihrer Schnittpunkte mit einer F_{p+q-4} durch die übrigen bestimmt, während $y_{p+q-4} = n(p+q-4) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ von diesen Schnittpunkten willkürlich gewählt werden können, indem dieselben Bedingungen wie im vorigen Satz stattfinden.

Wir nehmen an, dass c_{n_1} h' scheinbare Doppelpunkte hat. c_n und c_{n_1} schneiden einander in t Punkten, die t genannt werden, und wir haben

$$t = 2h - n(n - p - q + 1).\text{[1]}$$

Setzen wir jetzt

$$n = mq + k\ (k < q),\ n_1 = pq - n = m_1 q + k_1 = (p - m - 1)q + (q - k),$$

sehen wir, da sowohl

$$p + q - 4 > m + q - 4$$

als

$$p + q - 4 > m_1 + q - 4,$$

---

[1] Siehe z. B. SALMON: Geometry of three dimensions, third ed. p. 316.

35) zufolge, dass es für F_{p+q-4} höchstens mit

$$\left.\begin{aligned} y_{p+q-4}+1 &= (p+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1 \\ y'_{p+q-4}+1 &= (p+q-4)n_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h' + 1 \end{aligned}\right\} .$$

Bedingungen eqvivalent ist die Curve $\left.\begin{matrix} c_n \\ c_{n_1} \end{matrix}\right\}$ enthalten zu sollen. Wir können also annehmen, dass es mit $\left.\begin{matrix} y_{p+q-4}+1-\beta_1 \\ y'_{p+q-4}+1-\beta_2 \end{matrix}\right\}$ Bedingungen für F_{p+q-4} eqvivalent ist $\left.\begin{matrix} c_n \\ c_{n_1} \end{matrix}\right\}$ enthalten zu sollen, indem $\left.\begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} 0$.

Wir wollen jetzt eine F_{p+q-4} durch t legen und annehmen, dass sie durch x Punkte t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. F_{p+q-4} muss dann c_n enthalten, wenn sie noch durch $y_{p+q-4}+1-\beta_1-(t-x)$ willkürliche Punkte der c_n gelegt wird, und ebenso muss sie auch c_{n_1} enthalten, wenn sie noch durch $y'_{p+q-4}+1-\beta_2-(t-x)$ willkürliche Punkte der c_{n_1} gelegt wird. Da es nun (18)) für eine F_{p+q-4} mit $\frac{(p+q-4)pq}{2}+1$ Bedingungen eqvivalent ist die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q enthalten zu sollen, muss man haben

$$\begin{aligned} &(y_{p+q-4}+1-\beta_1-(t-x)) + (y'_{p+q-4}+1-\beta_2-(t-x)) + t - x \\ &= y_{p+q-4}+y'_{p+q-4}-\beta_1-\beta_2-t+x+2 \overline{\gtrless} \frac{(p+q-4)pq}{2}+1. \end{aligned}$$

Nun hat man aber die Relation

$$h - h' = \frac{(n-n_1)(p-1)(q-1)}{2} \quad (^1)$$

oder

$$\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) - \left(\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - h'\right) = \frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2}$$

und also

$$\begin{aligned} y_{p+q-4}+y'_{p+q-4}-t &= (p+q-4)pq-(n-1)(n-2)+2h \\ &+ \frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2} - (2h - n(n-p-q+1)) \\ &= \frac{pq(p+q-4)}{2} - 2. \end{aligned}$$

[1] Siehe Salmon: Geometry of three dimensions, third ed. p. 315.

Daraus sieht man, dass

$$x - \beta_1 - \beta_2 \overline{\gtrless} 1, \qquad x \overline{\gtrless} \beta_1 + \beta_2 + 1.$$

Nehmen wir jetzt an, dass c_n auf einer Monoide $\mathfrak{M}_m$ liegt, dann wissen wir (28)), dass die Punkte G_{p+q-4}, worin eine F_{p+q-4} c_n schneidet, auf einem Kegel $\varphi_{m+p+q-4}$, der durch h und h_1 geht, liegen, und dass (6)), wenn sich G_{p+q-4} in zwei Gruppen t und β theilt, ein φ_{n-3}, welcher durch h geht, durch β gehen wird, wenn er durch $Q - q'$ Punkte der β gelegt wird, indem β Q Punkte enthält, wovon q' willkürlich gewählt werden können.

Nun schneidet, wenn $h < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, eine F_{p+q-4}, welche durch t geht, c_n noch in einer Gruppe β aus $n(n-3) - 2h$ Punkten bestehend, von welchen $q' = y_{p+q-4} - \beta_1 - t + x = \frac{n(n-3)}{2} - h + x - \beta_1 - 1$ willkürlich gewählt werden können; denn aus dem Vorhergehenden sehen wir, dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, noch durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und dass sie nicht, wenn $h < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, c_n enthalten muss, da $q' \overline{\gtrless} 0$, weil $x \geqq \beta_1 + 1$ und in diesem Fall

$$\frac{n(n-3)}{2} - h \geqq 0.$$

Ein φ_{n-3}, der durch h geht, geht also auch durch β, wenn er durch

$$n(n-3) - 2h - \left(\frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1\right) = \frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_1 - x + 1$$

willkürliche Punkte der β geht. Nun müssen wir aber

$$\frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_1 - x + 1 \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1, \qquad x \overline{\lessgtr} \beta_1 + 1$$

haben, weil sonst ein φ_{n-3}, der durch h geht, durch alle Punkte einer willkürlichen Gruppe β gehen müsste, weil sie durch eine geringere Anzahl unter ihnen ginge, als man willkürlich wählen könnte; was unmöglich ist.

Man hat also

$$x \overline{\gtrless} \beta_1 + \beta_2 + 1$$
$$x \overline{\lessgtr} \beta_1 + 1,$$

was nur stattfinden kann, wenn $\beta_2 = 0$, $x = \beta_1 + 1$.

Auf dieselbe Weise sehen wir, dass $\beta_1 = 0$.

Wenn $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, kann kein φ_{n-3} durch h gelegt werden; der Satz ist aber gleichwohl richtig. Wir haben in diesem Fall

$$t = (n-1)(n-2) - n(n-p-q+1) = n(p+q-4) + 2.$$

Wie vorher finden wir, dass

$$x \overline{\gtrless} 1 + \beta_1 + \beta_2 .$$

Wir können dann nicht $\beta_2 > 0$ haben, denn F_{p+q-4} muss c_n enthalten, wenn er durch t geht, und das wäre nicht nothwendig, wenn $\beta_2 > 0$, da F_{p+q-4} dann, ausserdem dass sie durch t ginge, durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1 \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_2 \overline{\gtrless} 0$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden könnte. Wenn $h' < \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}$, sieht man wie vorher, dass $\beta_1 = 0$, und wenn $h' = \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}$, sieht man wie hier, dass $\beta_1 = 0$.

Wir haben jetzt den Satz in allen Fällen bewiesen, wenn man nur durch die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q eine F_{p+q-4} legen kann. Wir wollen jetzt sehen, ob der Satz (*1*) pag. 199 auch richtig ist, wenn dieses nicht der Fall ist.

Wir müssen dann

$$p + q - 4 < p$$
$$p + q - 4 < q$$

oder

$$q < 4$$
$$p < 4$$

haben. Den Fall wo $p \overline{\overline{<}} 2$, $q \overline{\overline{<}} 2$ können wir auslassen, da die Fläche F_{p+q-4} dann gar nicht existirt. Ebenso können wir den Fall $p = 3$, $q = 1$ auslassen. Wir müssen also entweder $p = 3$, $q = 3$ oder $p = 3$, $q = 2$ setzen.

Wenn $p = 3$, $q = 3$, ist $F_{p+q-4} = F_2$ und entweder n oder $n_1 \leqq 4$, so dass wenigstens eine der Curven c_n oder c_{n_1} auf einer F_2 liegt. Es ist leicht zu zeigen, dass der Satz richtig ist.

Wenn $p = 3$, $q = 2$, kann n und n_1 die Werthe (1, 5), (2, 4), (3, 3) haben. Im ersten und zweiten Fall sieht man, dass der Satz richtig ist, dagegen sieht man, dass er im dritten Fall nicht richtig ist; denn F_{p+q-4} ist $= F_1$ und ist also eine Ebene, und die beiden Curven c_n und c_{n_1} sind Raumcurven 3^ter Ordnung, die sich in 5 Punkten schneiden, und durch deren Schnittpunkte keine Ebene gelegt werden kann.

Wenn c_{n_1} eine zusammengesetzte Curve ist, müssen in allen Fällen

$$x \overline{\gtrless} \beta_1 + 1, \qquad x \overline{\gtrless} \beta_1 + \beta_2 + 1$$

richtig sein, und also $\beta_2 = 0$, $x = \beta_1 + 1$ sein, wenn nur c_n eine nicht auflösliche Curve ist, und kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist.

3) *Es ist also, wenn c_n unauflöslich ist und kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist, immer mit $y'_{p+q-4} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine F_{p+q-4} die c_n residuale Curve c_{n_1} enthalten soll,* und

4) *Eine F_{p+q-4}, die durch die Schnittpunkte zweier Curven c_n und c_{n_1} geht, schneidet immer c_n noch in einer Gruppe von $n(n-3) - 2h$ Punkten, wovon $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürlich gewählt werden können.*

Der letzte Satz wird dadurch bewiesen, dass F_{p+q-4} ausser durch t durch $y_{p+q-4} - \beta_1 - (t - x)$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann. Er ist auch in dem Fall richtig, wo Theile von c_{n_1} Doppelcurven auf den beiden Flächen F_p und F_q sind. (1)

---

(1) Da ich nicht sonst die Fälle behandele, wo Theile von c_{n_1} Doppelcurven auf den beiden Flächen F_p und F_q sind, werde ich nur in dieser Note den Beweis für die gemachte Behauptung führen. Ich nehme also an, dass der Beweis wie oben geführt ist für den Fall, wo kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist. Wenn nun r so gross ist, dass eine F_r, die durch c_n geht, durch keine Doppelcurve von F_q zu gehen bedarf, denken wir uns eine solche F_r durch c_n gelegt, und dass F_r noch F_q in $c_{n'}$, wovon kein Theil doppelt auf F_q ist, schneidet. Eine F_{q+r-4}, welche durch $c_{n'}$ geht, kann noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden. Wenn wir nun aber statt $c_{n'}$ eine Curve setzen, die aus c_{n_1} und einer willkürlichen vollständigen Durchschnittcurve $c_{(r-p)q}$ von F_q und einer F_{r-p} besteht, sieht man, dass eine F_{r+q-4}, welche hierdurch geht, wenigstens durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt

39) Indem wir stets voraussetzen, dass kein Theil von c_n oder c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist, und dass c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und F_p bilden, werden wir entwickeln, wie die Anzahlen von willkürlichen Punkten in mehreren Punktgruppen auf c_n und c_{n_1} von einander abhängen.

Erstens wollen wir eine Beziehung zwischen den Zahlen y_{p+q-4} und y'_{p+q-4} entwickeln, wenn $\begin{cases} y_{p+q-4} \\ y'_{p+q-4} \end{cases}$ angeben, durch wie viele willkürliche Punkte das vollständige Schnittpunktsystem von $\begin{cases} c_n \\ c_{n_1} \end{cases}$ und F_{p+q-4} bestimmt ist.

Die Curven c_n und c_{n_1} können zusammengesetzt oder unauflöslich sein, wie auch Theile von ihnen mehrfach auf einer der Flächen F_p oder F_q sein können.

F_{p+q-4} kann im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche Punkte von c_{pq}, die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q, gelegt werden. Wenn also die Schnittpunkte von F_{p+q-4} und c_n bestimmt sind, kann F_{p+q-4} noch durch

$$\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}$$

willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden. F_{p+q-4} schneidet also auf c_{n_1} eine Punktgruppe α aus, die aus $n_1(p+q-4)$ Punkten besteht, von welchen $\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}$ willkürlich gewählt werden können. Aus 37) folgt aber, dass eine F_{p+q-4} durch die ganze Gruppe α gehen muss, wenn sie durch

$$n_1(p+q-4) - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}\right)$$

willkürliche Punkte der α geht.

---

werden kann. Da aber eine F_{r+q-4}, die durch $c_{(r-p)q}$ geht, F_q noch in einer Curve schneidet, durch welche man eine F_{p+q-4} legen kann, sieht man, dass auch eine F_{p+q-4}, die durch c_{n_1} geht, wenigstens noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und dass also dasselbe für eine F_{p+q-4}, welche durch t geht, stattfinden muss. Wie vorher zeigt man, dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, nicht durch mehr als $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann.

Da α aber auch das vollständige Schnittpunktsystem von F_{p+q-4} und c_{n_1} ist, und die Schnittpunkte von c_{n_1} und F_{p+q-4} durch y'_{p+q-4} unter ihnen bestimmt sind, muss es für F_{p+q-4} mit y'_{p+q-4} Bedingungen eqvivalent sein durch α zu gehen, *und also hat man*

$$y'_{p+q-4} = n_1(p+q-4) - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}\right),$$

$$y'_{p+q-4} - y_{p+q-4} = \frac{(n_1 - n)(p+q-4)}{2}.$$

Wenn wir annehmen, dass c_n und c_{n_1} beziehungsweise h und h' Doppelpunkte hat, und wir $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ und $\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - h'$ beziehungsweise das Geschlecht von c_n und c_{n_1} nennen und mit g und g' bezeichnen, haben wir

$$y'_{p+q-4} - y_{p+q-4} = g' - g.$$

Wenn c_n eine unauflösliche Curve ist, wissen wir, dass es für F_{p+q-4} mit $(p+q-4)n_1 - g' + 1$ Bedingungen eqvivalent ist c_{n_1} enthalten zu sollen, und wenn diese Zahl k grösser als y'_{p+q-4} ist, finden wir

$$y_{p+q-4} = (p+q-4)n - g - k + 1.$$

Wenn c_{n_1} nur aus Curven besteht, die einander schneiden, und von denen keine doppelt auf F_p oder F_q ist, ist es leicht zu sehen, dass $k = 1$, und also

$$y_{p+q-4} = (p+q-4)n - g.$$

Wenn k grösser als 1 sein soll, muss also c_{n_1} entweder aus mehreren Curven, die nicht einander schneiden, bestehen, oder c_{n_1} muss Theile enthalten, die doppelt auf einer der Flächen F_p oder F_q sind.

40) Wir haben schon früher die Bezeichnungen y_r und z_r gebraucht. y_r ist die Anzahl von willkürlichen Punkten auf c_n, durch welche man eine F_r legen kann. z_r ist die Anzahl von willkürlichen Punkten auf c_n, durch welche man eine φ_{m+r}, der durch h und h_1 geht, legen kann, indem man sich denkt, dass c_n auf einer M_m liegt.

Nennt man die Gruppen von nr beweglichen Punkten, worin F_r und φ_{m+r} c_n schneiden, G_r und H_r, weiss man, dass die Gruppen G_r zu den Gruppen H_r gehören, und dass die Gruppen G_r und H_r, wenn r zulänglich hoch, zusammenfallen.

Wenn $n = m_1 q + k$, und c_n auf einer unauflöslichen F_q liegt, wissen wir auch, dass

$$z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn $r \gtreqless m_1 + q - 3$, und dass, wenn

$$\text{sowohl } r \gtreqless m_1 + q - 3 \text{ als } y_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

die Gruppen G_r und H_r zusammenfallen.

Da eine H_r aus einer willkürlichen H_s und einer willkürlichen H_{r-s} zusammengesetzt sein kann, wenn $s < r$, muss auch, wenn r zulänglich hoch, eine F_r, welche durch eine G_s geht, c_n noch in einer willkürlichen H_{r-s} schneiden können. Daraus sieht man, dass man die Gruppen H ganz unabhängig von den Monoiden, die durch c_n gehen, definiren kann. Im Folgenden werden die Bezeichnungen y_r, z_r, G_r, H_r immer dieselbe Bedeutung wie hier haben. Wir können jetzt die Residualtheorie auf Raumcurven übertragen, auch wenn sie nicht vollständige Durchschnittcurven sind, wenn nur die Zahlen r und r_1 so gross sind, dass G_r und H_r, G_{r_1} und H_{r_1} identisch sind. Unter dieser Voraussetzung hat man: Wenn durch eine Punktgruppe α, die auf c_n liegt, zwei Flächen F_r und F_{r_1} gehen, die c_n beziehungsweise in den Punktgruppen β und β_1 schneiden, und, wenn man durch β eine neue Fläche r^{ter} Ordnung F'_r, die c_n in α_1 schneidet, legt, kann man auch durch β_1 eine neue Fläche r_1^{ter} Ordnung F_{r_1}, die durch α_1 geht, legen.

Der Beweis wird ganz wie der für den analogen Satz von vollständigen Durchschnittcurven geführt. Fallen nur die Gruppen G_r und H_r zusammen, nicht aber die Gruppen G_{r_1} und H_{r_1}, kann man wohl durch jede neue Gruppe α_1, die von einer F'_{r_1} ausgeschnitten wird, eine F_r legen, nicht aber eine F'_{r_1} durch jede Gruppe α_1, die von einer F'_r ausgeschnitten wird.

41) Indem wir dieselben Bezeichnungen wie in 40) für die Zahlen und Gruppen, die zu c_n gehören, brauchen, und die entsprechenden Zahlen und Gruppen, die zu c_{n_1} gehören, y'_r, z'_r, G'_r, H'_r nennen, wollen wir zeigen, wie die Zahlen, die zu c_n gehören, von denen, die zu c_{n_1} gehören, abhängen.

Die vollständige Durchnittcurve zweier Flächen, F_p und F_q, wird c_{pq}

genannt, und die Anzahl willkürlicher Punkte auf c_{pq}, durch welche man eine F_r legen kann, wird a_{rpq} genannt.

Durch eine Gruppe G_r legen wir eine F_r. F_r wird dann c_{n_1} in einer Gruppe G'_r schneiden und kann noch durch $a_{rpq} - y_r$ willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden. Eine F_{p+q-4} wird dann (37)) durch G'_r gehen, wenn sie durch $n_1 r - a_{rpq} + y_r$ Punkte der G'_r geht. Nehmen wir jetzt an, dass c_n und c_{n_1} unauflöslich sind oder wenigstens nicht aus mehreren Curven, die doppelt auf einer der Flächen F_p oder F_q sind, oder die nicht einander schneiden, zusammengesetzt sind, wissen wir, dass eine F_{p+q-4} durch

$$y'_{p+q-4} = n_1(p+q-4) - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von $c_{n'}$ gelegt werden kann, und dass also F_{p+q-4}, ausserdem dass sie durch G'_r geht, noch durch eine willkürliche Gruppe $H'_{p+q-r-4}$ gelegt werden kann. Eine $H'_{p+q-r-4}$ ist aber durch $z'_{p+q-r-4}$ willkürliche Punkte bestimmt, und F_{p+q-4} kann, ausserdem dass sie durch G'_r geht, noch durch

$$y'_{p+q-4} - (n_1 r - a_{rpq} + y_r)$$

willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden, so dass

$$z'_{p+q-r-4} = y'_{p+q-4} - n_1 r + a_{rpq} - y_r.$$

Ebenso findet man entsprechende Formeln, indem man n und n_1, y und y', z und z' vertauscht.

42) Wir fragen jetzt, unter welchen Bedingungen

$$z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

ist? Wir nehmen an, dass p so hoch ist, dass c_{n_1} eine unauflösliche Curve ist.

Wir haben dann (41))

$$z_r = y_{p+q-4} - n(p+q-r-4) + a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4},$$

und also, wenn $z_r > rn - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + h$,

$$rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h < y_{p+q-4} - n(p+q-r-4) + a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4}$$

oder

$$a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4} > 0.$$

Nun ist es mit $y'_{p+q-r-4} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{n_1} enthalten soll, und mit $a_{(p+q-r-4)pq} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{pq} enthalten soll.

Die Ungleichheit

$$a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4} > 0$$

oder

$$a_{(p+q-r-4)pq} + 1 > y'_{p+q-r-4} + 1$$

giebt also an, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{n_1} enthalten kann ohne c_n zu enthalten, oder dass c_n mit einer $c_{n+(q-r-4)q}$ corresidual ist. Nun wissen wir, dass, wenn

$$z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt einen φ_{n-r-3} legen können, oder dass c_n auf einer M_{n-r-3} liegt, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat.

Die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass c_n auf einer M_{n-r-3}, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, liegen soll, ist also, dass c_n mit einer $c_{n+(q-r-4)q}$ corresidual ist, wenn c_n auf einer F_q liegt.

Wenn man also die niedrigste Ordnung der Curven kennt, die c_n corresidual sind, kennt man auch die niedrigste Ordnung der Monoide, die man durch c_n legen kann.

Man sieht auch umgekehrt, dass, wenn man den niedrigsten Werth der Ordnung der Monoide, die man durch eine Curve c_n legen kann, kennt, kennt man auch die niedrigste Ordnung der Monoide, die man durch eine willkürliche c_n corresiduale Curve legen kann. Man muss doch bemerken, dass wenn die Scheitel der Monoiden specielle Lagen bekommen, diese Sätze nicht immer gelten, indem dann die Doppelstrahlen mehr als zweifach werden können.

Wenn man $r = p$ setzt, giebt

$$a_{rpq} - y'_r$$

an, durch wie viele Punkte man eine c_n corresiduale Curve c'_n legen kann; nennen wir diese Zahl q_n, wenn die Curve c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegt, hat man

$$q_n = z_{q-4} - \left((q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right).$$

Setzen wir $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h = p_1$, bekommen wir für $q = 4$

$$4_n = p_1.$$

Also wenn eine c_n auf einer F_4 liegt, kann man eine c_n corresiduale Curve c'_n durch p_1 willkürliche Punkte legen. Man kann aber zeigen, dass alle Curven, die durch Variation ihrer Constanten in c_n übergehen können, und die auf derselben F_q wie c_n liegen, c_n corresidual sind, wenn F_q keine mehrfachen Punkte hat.

Wenn c_n auf einer F_3 liegt, existirt keine H_{q-4}, und z_{q-4} hat keinen Sinn. Man weiss aber, dass es mit

$$pn_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent ist, dass F_p c_{n_1} enthalten soll, und da F_p im Ganzen durch $\frac{3p(p+1)}{2}$ willkürliche Punkte von F_3 gelegt werden kann, dass die c_n corresidualen Curven c'_n durch

$$3_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h + n - 1$$

willkürliche Punkte von F_3 gelegt werden können, oder, wenn ihr Geschlecht p_1 genannt wird, dass

$$3_n = p_1 + n - 1.$$

Auf dieselbe Weise bekommen wir

$$2_n = p_1 + 2n - 1.$$

Wir wissen, dass die ebenen Curven durch $\frac{n(n+3)}{2} - d$ willkürliche Punkte gelegt werden können, wenn d die Anzahl ihrer Doppelpunkte bezeichnet, n ihre Ordnung, und wir können also auch

$$1_n = p_1 + 3n - 1$$

schreiben. Wir sehen dann eine merkwürdige Analogie zwischen den Zahlen 1_n, 2_n, 3_n, und dass diese Analogie für 4_n aufhört.

43) Wir wollen jetzt die meisten dieser Resultate auf eine andere Weise ableiten, um dadurch eine Verification der gefundenen Resultate zu finden.

Wir nehmen also an, dass eine c_n auf einer F_q liegt, h scheinbare Doppelpunkte hat und unauflöslich ist, und dass F_q keine Doppelcurve hat. Weiter nehmen wir an, dass wir wissen, dass, wenn $p \geqq (n-2)$, es mit

$$pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent ist, dass F_n c_n enthalten soll.

Durch c_n legen wir eine F_p, die F_q noch in c_{n_1} schneidet.

Wenn r zulänglich hoch, wird die vollständige Durchschnittcurve c_{pq} von F_p und F_q vollständig bestimmt sein durch ihre Schnittpunkte mit c_{rq}, die vollständige Durchschnittcurve von F_q und F_r. Eine c_{n_1} residuale Curve c'_n ist dann durch ihre Schnittpunkte mit c_{rq} vollständig bestimmt, und dann wird nach 37) eine F_{r+q-4} durch die Schnittpunkte von c'_n und c_{rq} gehen, wenn sie durch $nr - q_n$ unter ihnen geht, indem c'_n durch q_n willkürliche Punkte von F_q oder c_{rq} gelegt werden kann.

Wenn nun $r > n - 2$, schneidet F_{r+q-4} c_n noch in einer Gruppe H_{q-4}, worin z_{q-4} Punkte willkürlich gewählt werden können, und man hat, da F_{r+q-4} im Ganzen durch $(r+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann,

$$(r+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h = nr - q_n + z_{q-4}$$

oder

$$q_n = z_{q-4} - \left((q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right),$$

wie wir in 42) gefunden haben.

Legen wir durch c_{n_1} eine F_{p+r}, so schneidet F_{p+r} F_q noch in einer c_{n+rq}, die nicht aus mehreren Curven, die einander nicht schneiden, zusammengesetzt ist.

c_{rq+n} kann durch

$$q_{rq+n} = z''_{q-4} - \left((q-4)(rq+n) - \frac{(rq+n-1)(rq+n-2)}{2} + h''\right)$$

willkürliche Punkte von F_q gelegt werden, indem wir alle Zahlen und Gruppen, die zu c_{rq+n} gehören, mit zwei Marken bezeichnen.

Wenn es nun mit v_{p+r} Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p+r} c_{n_1} enthalten soll, haben wir nun auch, wenn F_{p+r} im Ganzen durch $a_{(p+r)q}$ willkürliche Punkte von F_q gelegt werden kann,

$$a_{(p+r)q} - v_{p+r} = q_{rq+n}.$$

Wir wollen jetzt suchen, wie gross z''_{q-4} ist, wenn $r \leqq q-4$.

Wenn F_{p_1+q-4} $(p_1 > n + rq - 2)$ durch das vollständige Schnittpunktsystem einer F_{p_1} und einer c_{n+rq} geht, giebt $z''_{q-4} + 1$ an, mit wie vielen Bedingungen es eqvivalent ist, dass eine solche F_{p_1+q-4} c_{n+rq} enthalten soll. Nun kann eine c_{n+rq} aus c_n und einer vollständigen Durchschnittcurve c_{qr} von F_q und F_r zusammengesetzt sein. Da eine F_{p_1+q-4}, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem einer solchen c_{n+rq} und einer F_{p_1} geht, c_{qr} noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem α mit einer F_{q-4} schneidet, und da α ein vollständig willkürliches Schnittpunktsystem von c_{qr} und einer F_{q-4} sein kann, sieht man, dass es mit $a_{(q-4)rq} + 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p_1+q-4} c_{rq} enthalten soll.

Wenn nun F_{p_1+q-4} c_{rq} enthält, schneidet sie F_q noch in einer $c_{(p_1+q-r-4)q}$, die auf einer $F_{p_1+q-r-4}$ liegt und durch das vollständige Schnittpunktsystem von c_n und F_{p_1} geht, und die nur diesen Bedingungen unterworfen ist. Eine solche $c_{(p_1+q-r-4)q}$ kann noch durch z_{q-r-4} willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und es ist also noch mit $z_{q-r-4} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass F_{p_1+q-4} c_n enthalten soll. Wir haben also

$$z''_{q-4} + 1 = (a_{(q-4)rq} + 1) + (z_{q-r-4} + 1),$$
$$z''_{q-4} = a_{(q-4)rq} + z_{q-r-4} + 1.$$

Da $h'' = h + nr(q-1) + \frac{q(q-1)r(r-1)}{2}$, finden wir nach einigen Berechnungen

(1) $$z_{q-r-4} + v_{p+r} = (p+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - n(r+p) + a_{(r+p)pq} + 1.$$

Wenn $r > q-4$, findet man auf dieselbe Weise wie wenn $r \leqq q-4$, dass $z''_{q-4} = a_{(q-4)rq}$, indem F_{p_1+q-4} dann c_n enthalten muss, wenn sie c_{rq} enthält, und beim Ausrechnen finden wir

(2) $$v_{p+r} = (p+r)n_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h' + 1.$$

Die hier gefundene Formel (1) ist mit der in 41) gefundenen Formel identisch, wenn man da $p+r$ statt r setzt und die Buchstaben y, z, n mit y', z', n_1 vertauscht, wenn c_{n_1} nicht aus Curven zusammengesetzt ist, die einander nicht schneiden, indem unter diesen Bedingungen $v_{p+r} = y'_{p+r} + 1$. Dagegen sieht man, dass die Formel (1) hier nur für r positiv bewiesen ist, während die Formel in 41) immer richtig ist, wenn $p+r > 0$. Andererseits gilt die Formel in 41) nicht, wenn c_{n_1} aus Curven zusammengesetzt ist, die einander nicht schneiden, während die Formel (1) auch in diesem Fall richtig ist.

Wenn $r = (q-4)$, giebt (1) einen neuen Beweis für den Satz 38) 3), während (2) nur eine leichte Folge aus dem Satz 38) 3) ist.

44) Wenn eine F_{p+q-4} durch die oft genannte Gruppe t geht, schneidet sie c_n noch in einer Punktgruppe G, die $n(n-3)-2h$ Punkte enthält, wovon $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürlich gewählt werden können.

Ein φ_{n-3}, der durch die Doppelstrahlen h aus einem willkürlichen Punkt geht, wird G enthalten, wenn er durch $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürliche Punkte der G geht. Nun schneidet φ_{n-3} c_n, ausser in den Punkten, die auf den Doppelstrahlen h liegen, in einer Punktgruppe H, die $n(n-3)-2h$ Punkte enthält, wovon $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürlich gewählt werden können. Die Punktgruppen G und H sind also identisch, da jede Gruppe G zu den Gruppen H gehört, eben so viele Punkte wie H enthält und durch eben so viele willkürliche Punkte wie H bestimmt ist.

Wenn eine Punktgruppe H_r sich in zwei Gruppen α und β theilt, wovon β fest ist, α aber q willkürliche Punkte enthält, wird ein φ_{n-3}, der durch h geht, wenn α aus Q Punkten besteht, durch α gehen, wenn er durch $Q-q$ willkürliche Punkte der α geht.

Dieses kann man auch so ausdrücken: eine Gruppe H wird alle Punkte einer Gruppe α enthalten, wenn $Q-q$ willkürliche Punkte α zu H gehören. Da die Gruppen G und H identisch sind, muss aber dasselbe von G gelten, und man hat also den Satz:

Wenn eine Gruppe H_r aus zwei Gruppen α und β zusammengesetzt ist, und wenn β eine feste Gruppe ist, α aber q willkürliche Punkte enthalten kann, wird eine F_{p+q-4}, die durch t geht, wenn α Q Punkte enthält, durch *alle die Punkte α gehen, wenn sie durch $Q - q$ willkürliche Punkte unter ihnen geht.*

Man kann aber auch diesen Satz direct beweisen, wenn man nur weiss, dass, wenn p zulänglich hoch, F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass man unter derselben Voraussetzung F_{p+q-4} durch $(p+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Punkte von c_n legen kann und die Residualtheorie verwenden, wenn die Flächen, von denen die Rede ist, $(p+q-4)^{ter}$ oder höherer Ordnung sind. Zuerst kann man bemerken, dass, wenn t das Schnittpunktsystem der Curven c_n und c_{n_1}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bilden, ist, bildet t zusammen mit den Punkten a, worin eine willkürliche Ebene P c_n schneidet, das Schnittpunktsystem t_1 zweier Curven c_n und c_{n_1+q}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und einer F_{p+1} bilden. Denn P schneidet F_q in einer ebenen Curve φ_q, und diese bildet mit c_n und c_{n_1} die vollständige Durchschnittcurve von F_q und einer F_{p+1}, die aus F_p und P besteht. Also muss eine F_{p+q-3} durch einen Punkt von t_1 gehen, weil sie durch die übrigen geht.

Indem wir dieselben Bezeichnungen wie im Vorhergehenden brauchen, sehen wir der Residualtheorie zufolge, dass eine willkürliche Gruppe α, wenn r_1 zulänglich hoch, durch eine F_{r_1}, die c_n noch in einer festen Gruppe β_1 schneidet, ausgeschnitten werden kann.

Wir nehmen zuerst an, dass $Q - q \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - h$, und denken uns eine Gruppe α, die noch aus $(Q-q)$ Punkten δ besteht, durch q willkürliche Punkte γ bestimmt. Durch einen Punkt P von γ legen wir eine Ebene E und durch δ eine F_{p+q-4}, die durch t geht, und nehmen an, dass p so gross ist, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Die Punkte, worin E und F_{p+q-4} noch c_n schneiden, nennen wir a_1 und b. Eine F_{r_1}, die durch γ mit Ausnahme von P geht, wird c_n noch in einer Gruppe α_1 schneiden, die aus $Q - q + 1$ Punkten besteht, wovon einer willkürlich gewählt werden kann, und der Residualtheorie zufolge muss jede Gruppe α_1 durch eine F_{p+q-3}, die durch t, a_1 und b geht, ausgeschnitten werden, da F_{p+q-4} und E zusammen eine F_{p+q-3}, die durch eine α_1 geht, bilden.

Eine F_{p+q-3}, die durch t und a_1 geht, muss aber auch durch P gehen, da die Punkte b und die Punkte a, worin E c_n schneidet, eine Gruppe t_1 bilden, und F_{p+q-3} durch einen Punkt einer Gruppe t_1 gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Dann muss P aber zu b gehören. Denn P muss entweder zu jeder Gruppe α_1 oder zu den festen Punkten, worin F_{p+q-3} c_n schneidet, gehören. Zu jeder Gruppe α_1 kann er nicht gehören, da nicht jede F_{r_1}, die durch β und γ mit Ausnahme von P gelegt ist, durch P gehen muss, da alle die Punkte γ willkürlich gewählt sind. Es ist gegeben, dass P nicht zu a_1 gehört, also muss er zu b gehören. Wir haben also bewiesen, dass F_{p+q-4} durch noch einen Punkt der Gruppe α gehen muss, weil sie durch $Q-q$ willkürliche Punkte dieser Gruppe geht, und wie in 37) beweisen wir, dass F_{p+q-4} durch alle die Punkte α gehen muss, und dass sie nicht nothwendig durch α gehen muss, weil sie durch eine geringere Anzahl als $Q-q$ willkürliche Punkte der α geht, ebenso wie, dass $Q-q$ nicht grösser als $\frac{n(n-3)}{2}-h$ sein kann, wenn α auf einer F_{p+q-4}, die durch t geht, liegen soll.

Wir haben jetzt den Beweis geführt, wenn $p+q-4$ so gross, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Da aber eine F_{p_1+q-4}, die durch eine Gruppe t' geht, immer wenigstens noch durch $\frac{n(n+3)}{2}-h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, (was man wie in 38) beweist), wenn t' eine ähnliche Bedeutung für F_{p_1+q-4} wie t für F_{p+q-4} hat, und da sie c_n, ausser in t', noch in $n(n-3)-2h$ Punkten G' schneidet, muss eine Gruppe G mit einer G' zusammenfallen, wenn $\frac{n(n-3)}{2}-h$ von den Punkten G' zu G gehören, und also müssen die Gruppen G und G' identisch sein.

45) Wir wollen jetzt suchen die Frage zu beantworten:

Wenn c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bilden, durch wie viele Punkte t_r der Schnittpunkte t von c_n und c_{n_1} muss dann eine $F_{p+q-r-4}$ gehen, weil sie durch die übrigen geht?

Nehmen wir erst an, dass $p+q-r-4$ so gross ist, dass die Schnittpunkte von $F_{p+q-r-4}$ und c_n durch

$$y_{p+q-r-4} = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

unter ihnen bestimmt sind, und dass die Gruppen $H_{p+q-r-4}$ und $G_{p+q-r-4}$ identisch sind.

Wir denken uns eine $F_{p+q-r-4}$ durch t gelegt. Wenn $F_{p+q-r-4}$ nicht c_n enthalten muss, weil sie durch t geht, kann man durch die Schnittpunkte von c_n und $F_{p+q-r-4}$ eine F_{p+q-4} legen, die c_n noch in einer Gruppe H_r schneidet.

Umgekehrt sieht man, dass eine F_{p+q-4}, die durch eine H_r geht, c_n noch in einer Gruppe $G_{p+q-r-4}$ schneidet, so dass die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass man eine $F_{p+q-r-4}$ durch t legen kann, ohne dass sie daher c_n enthalten muss, ist: dass man durch eine Gruppe H_r eine F_{p+q-4}, die durch t geht, legen kann, ohne dass daher F_{p+q-4} c_n enthalten muss. Nun besteht H_r aus rn Punkten, von denen z_r willkürlich gewählt werden können, und 44) zufolge wird eine F_{p+q-4}, die durch t geht, durch H_r gehen, wenn sie durch $nr - z_r$ willkürliche Punkte der H_r geht, und

$$nr - z_r \leqq \frac{n(n-3)}{2} - h,$$

$$z_r > nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

In diesem Fall kann F_{p+q-4} noch durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und da die Residualtheorie verwendet werden darf, kann eine $F_{p+q-r-4}$ durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden.

Da $F_{p+q-r-4}$ im Ganzen durch $y_{p+q-r-4}$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und es mit $t - t_r$ Bedingungen eqvivalent ist, dass $F_{p+q-r-4}$ durch t gehen soll, hat man

$$y_{p+q-r-4} = \frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r + t - t_r$$

oder

$$t_r = z_r + 1.$$

z_r kann niemals kleiner als $nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ sein, und wenn sie diese Grösse hat, muss eine $F_{p+q-r-4}$ c_n enthalten, weil sie durch t geht, und man muss also

$$y_{p+q-r-4} + 1 = t - t_r, \qquad t_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1 = z_r + 1$$

haben.

Wir haben also den Satz:

Eine $F_{p+q-r-4}$ geht durch $z_r + 1$ Punkte von t, weil sie durch die übrigen geht, wenn $p + q - r - 4$ so gross ist, dass

$$y_{p+q-r-4} = n(p + q - r - 4) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und die Gruppen $H_{p+q-r-4}$ und $G_{p+q-r-4}$ identisch sind.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in allen Fällen, wenn man eine $F_{p+q-r-4}$ durch t legen kann,

$$t_r = (p + q - r - 4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$$
$$- y_{p+q-r-4} + z_r + 1.$$

Erstens nehmen wir an, dass $z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, und wollen dann zeigen, dass $F_{p+q-r-4}$ durch t und $\frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten. Wie vorher finden wir, dass eine F_{p+q-4}, die durch alle Schnittpunkte einer $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, gelegt ist, noch durch eine willkürliche Gruppe H_r gelegt werden kann.

Umgekehrt weiss man aber nicht, dass eine F_{p+q-4}, die durch eine H_r und t geht, c_n ausser in H_r noch in einer $G_{p+q-r-4}$ schneiden muss; denn man darf die Residualtheorie nicht verwenden. Da es mit $nr - z_r$ Bedingungen eqvivalent ist (44)), dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, durch H_r gehen soll, und da eine F_{p+q-4}, die auch durch H_r geht, noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, also höchstens durch $\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und man hat also

$$y_{p+q-r-4} - t + t_r \overline{\lessgtr} \frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r;$$

Nun haben wir in 41) gesehen, dass wenn c_n und $c_{n'_1}$ unauflösliche Curven sind, und zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und $F_{p'}$ bilden,

$$z_{p'+q-r-4} = y_{p'+q-4} - nr + a_{rp'q} - y'_r,$$

oder, wenn man r statt $p' + q - r - 4$ setzt,

$$z_r = y_{p'+q-4} - n(p' + q - r - 4) + a_{(p'+q-r-4)p'q} - y'_{p'+q-r-4},$$

indem wir die Grössen, die sich auf $c_{n'_1}$ beziehen, durch Marken bezeichnen. Man kann diese Formel auch so schreiben

$$a_{(p'+q-r-4)pq} - (y'_{p'+q-r-4} + 1) = z_r - \left(nr - \frac{n(n-3)}{2} + h\right),$$

wo $a_{(p'+q-r-4)pq} - (y'_{p'+q-r-4} + 1)$ ausdrückt, durch wie viele Punkte von c_n man eine $F_{p'+q-r-4}$, die $c_{n'_1}$ enthält, legen kann, ohne dass sie c_n enthalten muss, und wo die Gleichung ausserdem zeigt, dass eine $F_{p'+q-r-4}$ durch $c_{n'_1}$ gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, da

$$z_r - \left(nr - \frac{n(n-3)}{2} + h\right) \geqq 0.$$

Indem wir $p' > p$ annehmen, kann $c_{n'_1}$, da man durch c_n eine F_p legen kann, aus c_n und der vollständigen Durchschnittcurve $c_{(p'-p)q}$ einer willkürlichen $F_{p'-p}$ und einer F_q zusammengesetzt sein.

Da eine $F_{p'+q-r-4}$, die durch $c_{(p'-p)q}$ geht, F_q noch in einer Curve $c_{(p+q-r-4)q}$, die auf einer $F_{p+q-r-4}$ liegt, schneidet, sieht man, dass man durch c_{n_1} eine $F_{p+q-r-4}$ legen kann, die noch durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, ohne dass sie daher c_n enthalten muss. Eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, kann also, ohne c_n zu enthalten, wenigstens durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - rn + z_r - h$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und da sie auch höchstens durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann sie durch eben diese Anzahl willkürlicher Punkte von c_n gelegt werden, ohne dass sie c_n enthalten muss. Man hat also in diesem Fall,

$$\text{wenn } z_r > nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

$$y_{p+q-r-4} - t + t_r = \frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$$

oder

$$t_r = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - y_{p+q-r-4} + z_r + 1,$$

was wir beweisen wollten.

Wenn $z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, kann keine $F_{p+q-r-4}$ durch t gelegt werden ohne c_n zu enthalten. Denn wenn p' zulänglich hoch, weiss man aus dem Vorhergehenden, dass keine $F_{p'+q-r-4}$ durch die Gruppe t' gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, indem wir durch Marken die Grössen bezeichnen, die sich zu p' referiren. Nun kann aber t' aus t und dem Schnittpunktsystem α von einer $F_{p'-p}$ und c_n zusammengesetzt sein, und, wenn wir durch t eine $F_{p+q-r-4}$ legen könnten, die nicht c_n enthielte, könnte man durch eine solche t' eine $F_{p'+q-r-4}$, die nicht c_n enthielte, legen. Da dieses gegen unsere Voraussetzungen streiten würde, muss also, wenn $z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, c_n enthalten, und wir haben also

$$t - t_r = y_{p+q-r-4} + 1$$

oder

$$t_r = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - y_{p+q-r-4} + z_r + 1,$$

so dass auch in diesem Fall der Satz bewiesen ist.

Man kann diese Sätze so zusammenfassen:

Wenn eine $F_{p+q-r-4}$ durch die Punkte geht, worin zwei Curven c_n und c_{n_1}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve zweier Flächen F_p und F_q bilden, einander schneiden, ist es immer mit

$$z_r - \left(nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right)$$

Bedingungen eqvivalent, dass $F_{p+q-r-4}$ c_n enthalten soll.

Diese Sätze haben viele Aehnlichkeit mit dem CAYLEY'schen Satz von ebenen Curven, namentlich, wenn

$$z_r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{2} - 1$$

und

$$y_{p+q-r-4} = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

ein Fall, der oft eintrifft, wenn r sehr niedrig; denn dann hat man

$$t_r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6},$$

und dieser Satz ist dem CAYLEY'schen Satz ganz analog.

46) Ehe ich weiter gehe, will ich zeigen, wie man die in diesem Abschnitte gefundenen Sätze naturgemäss entwickeln kann, ohne die Theorie der Monoiden zu benutzen.

Erst kann man die Residualtheorie und den RIEMANN-ROCH'schen Satz für vollständige Durchschnittcurven entwickeln, wie es hier in 37) und 38) gethan ist.

Darnach kann man den Satz 39), dass

$$(1) \qquad y_{p+q-4} - y'_{p+q-4} = \frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2},$$

entwickeln.

Indem wir hier $p+1$ statt p setzen, haben wir

$$(2) \qquad y_{p+q-3} - y''_{p+q-3} = \frac{(n-n_1-q)(p+q-3)}{2},$$

wo y''_{p+q-3} sich zu der Curve c_{n_1+q}, worin eine F_{p+1}, die durch c_n geht, noch F_q schneidet, referirt.

Wenn nun c_{n_1} nicht aus mehreren Curven, die einander nicht schneiden, besteht, geben aber

$$a_{(p+q-4)q} - (y'_{p+q-4} + 1)$$

und

$$a_{(p+q-3)q} - (y''_{p+q-3} + 1)$$

beide an, durch wie viele Punkte von F_q man die sowohl der c_{n_1} wie der c_{n_1+q} residuale Curve $c_{n+(q-4)q}$ legen kann, indem wir durch a_{rq} die Anzahl der willkürlichen Punkte auf F_q bezeichnen, durch welche die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bestimmt ist.

Wir müssen also

(3) $$a_{(p+q-4)q} - y'_{p+q-4} = a_{(p+q-3)q} - y''_{p+q-3}$$

haben.

Indem wir (1), (2), (3) combiniren, finden wir

$$y_{p+q-3} = y_{p+q-4} + n$$

und also

(4) $$y_{p+q+r-4} = y_{p+q-4} + rn.$$

Mit Hülfe der Gleichung (4) ist es möglich die Residualtheorie für Raumcurven zu entwickeln, indem die Flächen, von denen in dieser Theorie die Rede ist, doch $(p + q - 4)^{ter}$ oder höherer Ordnung sein müssen.

Wenn eine Fläche F_r niedrigerer Ordnung als $(p + q - 4)$ ist, kann man doch zeigen, dass wenn zwei Flächen F_r und $F_{p+q+s-4}$ $(s \geqq 0)$ durch eine Punktgruppe α auf c_n gehen und c_n noch in den Gruppen β und γ schneiden, kann man durch jede Gruppe α', die durch eine F'_r, welche durch β geht, ausgeschnitten wird, eine $F_{p+q+s-4}$ legen.

Aus der Residualtheorie folgt:

(5) *Wenn eine $F_{p+q+s-4}$ $(s \geqq 0)$ durch einen Punkt einer Punktgruppe α, die auf c_n liegt, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und eine $F_{p+q+r-4}$ $(r \geqq 0)$ c_n in einer festen Punktgruppe β schneidet, während die übrigen Schnittpunkte von c_n und $F_{p+q+r-4}$ eine Gruppe γ bilden, die aus Q Punkten, wovon q' willkürlich gewählt werden können, besteht, wird eine $F_{p+q+s-4}$, die durch α geht, durch alle Punkte γ gehen, wenn sie durch $Q - q'$ willkürliche Punkte unter ihnen geht.*

Dagegen kann man noch nicht zeigen, dass es für $F_{p+q+s-4}$ nicht mit weniger als $Q - q'$ Bedingungen eqvivalent ist durch γ gehen zu sollen, wenn $F_{p+q+s-4}$ nur durch einen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte α geht.

Darnach werde ich zeigen, dass, wenn r zulänglich gross, F_r noch durch $y_r - t$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, wenn F_r c_{n_1} enthält.

Denn legen wir durch c_{n_1} eine F_{r_1}, wo r_1 so gross ist, dass F_{r_1} nicht c_n enthalten muss, weil sie durch c_{n_1} geht, dann ist es leicht zu sehen, dass wir uns r so gross denken können, dass F_r durch keinen Punkt von α, worin F_{r_1} c_n ausser in t schneidet, gehen muss, weil sie durch c_{n_1} und die übrigen Punkte α geht. Es ist also für F_r mit $r_1 n - t$ Bedingungen eqvivalent durch α gehen zu sollen.

Wenn $r - r_1$ zulänglich gross, und in allen Fällen $r - r_1 \geqq p + q - 4$, sehen wir weiter, dass die $(r - r_1)n$ Punkte β, worin F_r c_n ausser in t und α schneidet, auf einer F_{r-r_1} liegen müssen, und dass diese F_{r-r_1} vollständig willkürlich sein kann, da eine F_{r_1}, die durch c_{n_1} geht, zusammen mit einer willkürlichen F_{r-r_1} eine F_r bildet. Wir sehen also, dass die Schnittpunkte von F_r und c_n durch

$$r_1 n - t + y_{r_1 - r}$$

Bedingungen bestimmt sind, oder dass man eine so grosse Anzahl unter ihnen willkürlich wählen kann. Nach (4) haben wir aber

$$y_{r-r_1} + r_1 n = y_r$$

und sehen also, dass man $y_r - t$ der Schnittpunkte von F_r und c_n willkürlich wählen kann.

Da es mit $y'_r + 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r c_{n_1} enthalten soll, und da es mit $y_r - t + 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r noch c_n enthalten soll, ist es also mit $y_r + y'_r - t + 2$ Bedingungen eqvivalent, dass F_r sowohl c_n wie c_{n_1} enthalten soll. Da aber c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve c_{pq} einer F_p und einer F_q bilden, und wir wissen, dass es mit $rpq - \frac{pq(p+q-4)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r c_{pq} enthalten soll, hat man

$$y_r + y'_r - t + 2 = rpq - \frac{pq(p+q-4)}{2},$$

und da

$$y_r = (r - (p+q-4))n + y_{p+q-4}$$

$$y'_r = (r - (p+q-4))n_1 + y'_{p+q-4},$$

ist also

$$y_{p+q-4} + y'_{p+q-4} - t + 2 = \frac{pq(p+q-4)}{2};$$

da ferner

$$y_{p+q-4} - y'_{p+q-4} = \frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2},$$

wird endlich

$$y_{p+q-4} = (p+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

$$y'_{p+q-4} = (p+q-4)n_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h'.$$

Man sieht, dass wenn wir noch beweisen können, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, haben wir das Material dazu alle die Sätze zu entwickeln, die in diesem Abschnitt entwickelt sind.

Dieses ist aber leicht zu zeigen. Denn nehmen wir an, dass es mit $(t-x)$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p+q-4} durch t gehen soll, dann sehen wir, wie in 38), dass

$$(y_{p+q-4}+1) + (y'_{p+q-4}+1) - t + x \overline{\gtrless} \frac{pq(p+q-4)}{2} + 1,$$

und indem wir die Werthe von y_{p+q-4} und y'_{p+q-4} einsetzen, dass $x \overline{\overline{>}} 1$. Indem wir den Satz (5) brauchen, ist es aber leicht zu zeigen, auf ähnliche Weise wie wir es in 38) durch Anwendung des RIEMANN-ROCH'schen Satzes gethan haben, dass $x = 1$.[1]

47) Zum Schlusse werde ich einige Formeln angeben, die den Formeln 31) analog sind und angeben, mit wie vielen Bedingungen es höchstens eqvivalent ist, dass eine F_p die Raumcurve c_n enthalten soll, wenn man nur von c_n weiss, dass sie auf einer unauflöslichen F_q liegt und h scheinbare Doppelpunkte hat.

Wir haben schon gezeigt (32)), dass, wenn $n = mq + k$ $(q > k)$, ist

$$z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn zugleich

$$r \overline{>} m + q - 3,$$

und da wir wissen, dass

$$y_r \overline{\overline{<}} z_r,$$

haben wir den Satz:[2]

---

[1] Vgl. mit den Sätzen 38)—46) NOETHERS Abhandlung, Math. Ann. Bd. VIII, p. 510.

[2] Der Satz ist in 35) bewiesen, hier zum Vergleich mit dem Folgenden wiederholt.

(*1*) *Wenn* $b_p = np - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right)$ *gesetzt wird,* $n = mq + k$ $(q > k)$, *und wir annehmen, dass* c_n *auf einer Fläche* q^{ter} *Ordnung liegt, wird es, wenn* $p > m + q - 4$, *für eine Fläche* p^{ter} *Ordnung mit höchstens* $b_p + 1$ *Bedingungen eqvivalent sein* c_n *enthalten zu sollen.*

Wenn wir eine F_p durch alle die Punkte α legen, worin eine Ebene P c_n schneidet, kann sie wenigstens durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_{p-1}. Ist es nun mit α_p Bedingungen eqvivalent, dass F_p durch α gehen soll, haben wir

$$y_p \overline{\overline{>}}\, y_{p-1} + \alpha_p$$

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}}\, y_p - \alpha_p.$$

Setzen wir jetzt für α_p eine Grösse β_p, die gleich oder kleiner als α_p ist, haben wir ebenfalls

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}}\, y_p - \beta_p.$$

Nun wissen wir aber (11)), dass wenn

$$m + q - 3 \geqq p \geqq m + 1,$$

kann F_p nicht durch mehr als

$$\frac{(q + m - p - 1)(q + m - p - 2)}{2} + \varepsilon(m + k - p - 1)$$

unter den Punkten gehen müssen, worin eine Ebene c_n schneidet, weil F_p durch die übrigen geht, indem $\varepsilon = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \gtrless 0$, und $m > q$. Es muss also in allen Fällen wenigstens

$$n - \frac{(q + m - p - 1)(q + m - p - 2)}{2} - \varepsilon(m + k - p - 1)$$

Bedingungen für F_p sein durch die Punkte, worin eine Ebene c_n schneidet, gehen zu sollen. Wir können also diese Grösse für β_p setzen, und haben also

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}}\, y_p - \left(n - \frac{(q + m - p - 1)(q + m - p - 2)}{2} - \varepsilon(m + k - p - 1)\right),$$

indem $p \overline{\overline{<}}\, q + m - 3$.

Man sieht, dass

$$y_{p-r} \overline{\overline{\lessgtr}} y_p - a_p - a_{p-1} \cdots a_{p-r+1}$$

und also, da

$$y_{m+q-3} \overline{\overline{\lessgtr}} (m+q-3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h = b_{m+q-3},$$

$$y_p \overline{\overline{\lessgtr}} b_{m+q-3} - \sum_{p+1}^{m+q-3} \left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6} +$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2},$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, je nachdem $m+k-p-1 \gtrless 0$.

Für $q > m$ gilt diese Formel auch, wenn $m+q-3 \geqq p \geqq q-1$.

Wenn $m < p < q-1$, wissen wir, dass eine Fläche F_p höchstens durch

$$m(q-p) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m+k-q-1)$$

der Punkte, worin eine Ebene e_n schneidet, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, so dass es also wenigstens

$$n - \left(m(q-p) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

Bedingungen für F_p sein muss durch eine solche Punktgruppe gehen zu sollen. Wir können also diese Grösse für β_p setzen. Diese Grösse kann aber auch als

$$n - \left(\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1) - \frac{(p-q+1)(p-q+2)}{2}\right)$$

geschrieben werden. Wir finden

$$-\sum_{p+1}^{q-1} \frac{(p-q+1)(p-q+2)}{2} = -\frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}$$

und

$$y_p \overline{\gtrless} b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}.$$

Wir haben also den folgenden Satz:

(*2*) *Wenn eine Curve c_n auf einer unauflöslichen Fläche F_q liegt, und $n = mq + k$, $q > k$, ist es höchstens für eine F_p mit*

$$b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass sie c_n enthalten soll, wenn $m > q$,

$$m + q - 3 > p \geqq m + 1.$$

Wenn $m < q$, ist es, wenn $m + q - 3 > p > q - 1$, höchstens mit eben so vielen Bedingungen eqvivalent, dass F_p c_n enthalten soll, und wenn $q > p \geqq m + 1$, wird es höchstens mit

$$b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6} + 1$$

Bedingungen eqvivalent sein. b_p hat dieselbe Bedeutung wie in (1), und $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$. Wenn $k = 0$, sieht man, dass die entwickelten Formeln auch für $p = m$ gelten.

48) Wir wollen nun die in 47) entwickelten Formeln dazu brauchen, zu suchen:

Wie niedrig kann man jedenfalls die Ordnung p einer F_p annehmen, wenn F_p durch eine c_n, die auf einer unauflöslichen F_q liegt, gehen soll?

Die Ordnung, die man durch diese Formeln findet, ist aber nicht immer die niedrigste, indem sie nur von h, n und q abhängen, während es noch andere Umstände giebt, die darauf Einwirkung haben. So z. B. wenn

$n=8$, $h=21$, $q=4$, wird im Allgemeinen die niedrigste Ordnung von F_p 4 sein, in speciellen Fällen aber 3.

Wenn es höchstens d_p Bedingungen für F_p ist c_n enthalten zu sollen, und F_p durch a_{pq} willkürliche Punkte von F_q gelegt werden kann, wird F_p c_n enthalten können, wenn

$$a_{pq} - d_p \geqq 0,$$

ohne dass daher F_p F_q enthalten muss. Daher sieht man:

Wenn

$$p > m + q - 4,$$

wird man (47)) eine Fläche p^{ter} Ordnung durch c_n legen können, wenn:

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{qp(p-q+4)}{2} \geqq np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1,$$

oder wenn

$$(1) \qquad h \overline{\overline{<}} \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2} - np + \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wenn $m + q - 3 > p \geqq m + 1$, $m > q$, haben wir (47, (2)), dass c_n auf einer Fläche F_p liegen wird, wenn $m > q$ und

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{qp(p-q+4)}{2} \geqq np - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$+ h + 1 + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2},$$

oder wenn

$$(2) \qquad h \leqq \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2} - np$$

$$+ \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$- \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2},$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$.

Die Formel (2) muss aber auch gelten, wenn $m < q$, indem, wenn $m + q - 3 > p \geqq q - 1$, der Ausdruck für die Anzahl willkürlicher

Punkte von F_q, durch welche F_p gelegt werden kann, und ebenfalls (47 (2)) der Ausdruck für die Anzahl der Bedingungen, die F_p höchstens erfüllen muss um c_n zu enthalten, derselbe wird für $m < q$, als für $m > q$, und wenn $m + 1 \overline{\overline{<}} p < q - 1$, zu beiden Grössen das Glied

$$-\frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}$$

hinzukommt, welches also wegfällt, da es auf beiden Seiten des Ungleichheitszeichens vorkommt. Wie in 47) sieht man auch hier, dass die entwickelten Formeln, wenn $k = 0$, auch für $p = m$ gelten müssen.

49) Wir wollen jetzt auch die hier gefundenen Formeln dazu verwenden, den kleinsten Werth zu finden, den h haben kann, wenn c_n auf einer unauflöslichen Fläche F_q liegen soll.

Wenn

$$h \overline{\overline{<}} \frac{m(q-1)(qm-q+2k)}{2} + \varepsilon \frac{(k-2)(k-3)}{2},$$

wo $\varepsilon = 1$, wenn $k < 2$, sonst $= 0$ ist, sieht man (48 (2)), dass c_n auf einer F_{m+1} liegen muss, indem $n = mq + k$.

F_{m+1} schneidet noch F_q in einer Curve c_{q-p}, und wenn c_{q-p} h' scheinbare Doppelpunkte hat, hat man

$$h - h' = \frac{(n-q+k)m(q-1)}{2}.$$

Nun kann h' nicht kleiner als 0 sein, und also muss der kleinste Werth, den h haben kann

$$m_q = \frac{(n-q+k)m(q-1)}{2} = \frac{m(q-1)(qm-q+2k)}{2}$$

sein.

Wenn $h' = 0$, ist c_{n-q} eine ebene Curve, und wir haben also:

Wenn c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegt und h seinen kleinsten Werth hat, kann man durch c_n eine F_{m+1} legen, die F_q noch in einer ebenen Curve schneidet.

Wir können auch m_q unter anderen Formen schreiben, wie

$$m_q = \frac{(q-1)(n-q+k)(n-k)}{2q} = \frac{(n-m-k)(n-q+k)}{2}.\ (^1)$$

---

(1) Vergl. mit 49) und 50) die Resultate, wozu Halphen gekommen ist: Comptes rendus, tom. 70, p. 380.

50) Bezeichnen wir mit m_q dasselbe wie in 49), sehen wir, dass

$$m_q = m_{m+1}.$$

Denn $n = (m+1)(q-1) + (m-q+k+1)$, so dass wir m_{m+1} bekommen, indem statt q $m+1$, statt m $q-1$, und statt k $(m-q+k+1)$ gesetzt wird, was m_q ungeändert lässt.

Wenn $q < r < m+1$, $n = mq + k$, müssen wir

$$m_q < m_r$$

haben; denn eine Curve c_n, die $h = m_r$ hat und auf einer unauflöslichen Fläche F_r liegt, muss auch auf einer Fläche F_{m_1+1} liegen, indem $n = rm_1 + k_1$; aber $m_1 < m$, so dass, wenn $h = m_r$ und c_n auf einer unauflöslichen F_r liegt, muss sie auch auf einer unauflöslichen F_{m+1} liegen, und da c_n nicht auf einer F_q liegen kann (sie müsste dann die Durchschnittcurve von F_q und F_r sein, was unmöglich ist, da $rq < n$); muss man $m_q < m_r$ haben.

Wenn durch eine unauflösliche c_n eine Fläche $(m+1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung gelegt werden kann, sieht man hieraus, dass c_n auch auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegt, wenn $h \overline{\overline{<}} m_q$.

Wenn man

$$(m+1)n < \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{6} - 1,$$

$$n < \frac{(m+1)^2 + 6(m+1) + 11}{6}$$

hat, sieht man, dass immer eine Fläche $(m+1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung durch c_n gehen muss.

Aber auch in vielen Fällen wenn n grösser als diese Zahl ist, kann man zeigen, dass c_n immer auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegt, wenn $h \overline{\overline{<}} m_q$. (1)

Wissen wir von einer Fläche F_r, dass ihre Schnittpunkte mit c_n durch $p_r - 1$ unter ihnen bestimmt sind, und dass es $n - \alpha_r$ Bedingungen für F_r ist, durch alle die Punkte, worin eine Ebene P c_n schneidet, gehen zu sollen, so muss F_{r-1} c_n enthalten, wenn sie durch $p_r - n + \alpha_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt wird; denn durch die Schnittpunkte von c_n und einer Fläche zusammengesetzt aus P und F_{r-1} kann immer eine F_r gelegt werden,

(1) Wahrscheinlich thut sie es immer.

von den Schnittpunkten von F_r und c_n, die nicht in P fallen, können aber $p_r - n + \alpha_r - 1$ willkürlich gewählt werden, und F_{r-1} kann also höchstens durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden ohne c_n zu enthalten. Wir haben also

$$p_r - n + \alpha_r \overline{\overline{>}} p_{r-1}.$$

c_n muss auf einer F_r liegen, wenn

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6} - 1 - p_r = u_r \geqq 0.$$

Wenn nun $n = mq + k$, $m > q > k$, $\alpha_r = 0$ für $r \overline{\overline{>}} m + q - 3$, und wenn für $m + q - 3 > r \geqq m + 1$

$$\alpha_r \overline{\overline{<}} \frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)}{2} + \varepsilon(k+m-r-1),$$

wo $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $k + m - r - 1 \lesseqgtr 0$, sehen wir, da

$$p_r = n_r - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

wenn $r \overline{\overline{>}} n - 2$, und da

$$p_{r-k} \overline{\overline{<}} p_r - kn + \alpha_r + \alpha_{r-1} \cdots \alpha_{r-k+1},$$

dass, wenn die obengenannten Grössen für α_r gesetzt werden und $r < m + q - 3$,

$$\begin{aligned} p_r \overline{\overline{<}} nr &- \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1 \\ &+ \sum_{r+1}^{m+q-3}\left(\frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)}{2} + \varepsilon(k+m-r-1)\right) \\ = nr &- \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1 \\ &+ \frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)(m+q-r-3)}{6} \\ &+ \varepsilon\frac{(k+m-r-1)(k+m-r-2)}{2}, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $k + m - r - 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $h \overline{\overline{<}} m_q$, muss dann c_n auf einer F_{m+1} liegen, weil wir dann haben

$$u_{m+1} \geqq \frac{(m-q+2)(m-q+3)(m-q+4)}{6} + \varepsilon_1 \frac{(2-k)(3-k)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $k \gtrless 2$.

Ist $k = 0$, kann man unter denselben Voraussetzungen auf dieselbe Weise sehen, dass c_n auf einer F_m liegen muss.

Aber dann sieht man aus den vorhergehenden Bemerkungen, dass unter denselben Voraussetzungen muss auch c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegen.

Wenn also c_n nicht auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen soll, müssen also wenigstens einige Grössen α_r grösser als hier angenommen sein.

Dann muss aber (15)) eine willkürliche Ebene c_n in Punkten schneiden, die auf einer ebenen Curve niedrigerer Ordnung als der q^{ten} liegen müssen.

Wir sehen also:

Wenn $h \leqq m_q$, schneidet eine willkürliche Ebene c_n in Punkten, welche auf einer Curve q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen.

Wenn $h < m_3$, muss c_n, wenn sie existirt, immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Kopenhagen d. 10 März 1883.

D. 10 März habe ich von Herrn Noether eine Abhandlung »Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven» empfangen, habe aber darauf keine Rücksicht nehmen können in den hier veröffentlichten 4 Abschnitten, da sie von meiner Hand schon damals fertig waren. Dagegen hat die Abhandlung des Herrn Noether mich dazu veranlasst den 5^{ten} Abschnitt meiner Abhandlung, »Von der Anzahl der Bedingungen, die eine Raumcurve erfüllen kann», vorläufig nicht zu veröffentlichen, indem die Resultate des Herrn Noether weiter gehend als die meinigen sind. Da aber eben hier noch viel zu thun übrig scheint, hoffe ich später die Resultate meiner weiteren Untersuchungen hierüber zu veröffentlichen.

Kopenhagen Mai 1883.