UEBER DIE TRANSCENDENTE FUNCTION

$Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$.

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN

IN HELSINGFORS.

Indem man das Verfahren, welches HERMITE in CRELLES Journal Bd. 90 verwendet hat um die von PRYM charakterisirte Function $Q(x)$ in der Form

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{x-1}{\lambda} P(\lambda+1) R(x-1-\lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{a^{x+\lambda}-1}{\underline{|\lambda}(x+\lambda)},$$

wo

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underline{|n}(x+n)}, \qquad R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(a+n)}(a+n)^x, \qquad a > 1,$$

auszudrücken, nur unbedeutend verändert, kann man jene Function durch eine einzige Reihe, die an Einfachheit dem ersten Theile des besprochenen Ausdruckes für $Q(x)$ gleichkommt, darstellen.

Von der Gleichung

$$Q(x) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt$$

ausgehend, bringe ich durch die Substitution $t = n + 1 - \tau$ das Integral

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt$$

auf die Form

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-(n+1)} (n+1)^{x-1} \int_{0}^{1} e^{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{n+1}\right)^{x-1} d\tau$$

oder

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-(n+1)} (n+1)^{x-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} (n+1)^{-\lambda},$$

wo

$$A_{\lambda} = \int_{0}^{1} e^{\tau} \tau^{\lambda} d\tau.$$

Hieraus folgt

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1)} (n+1)^{x-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} (n+1)^{-\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1)} (n+1)^{x-1-\lambda}.$$

Setzt man jetzt

$$R(x) = e^{-2} 2^{x} + e^{-3} 3^{x} + e^{-4} 4^{x} + \cdots,$$

so kann man den letzten Ausdruck für $Q(x)$ auf folgende Weise schreiben

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} R(x-1-\lambda).$$

Wie sich leicht ergiebt, konvergirt diese Reihe gleichmässig in jedem endlichen Gebiete der Veränderlichen x.

Die Grössen A_{λ}, von denen $A_0 = e - 1$ ist, lassen sich durch die Recursionsformel

$$A_{\lambda} + \lambda A_{\lambda-1} = e$$

berechnen.