SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

PAR

M. ELLIOT,

à BESANÇON.

L'objet de ce travail est l'intégration d'une équation différentielle à coefficients doublement périodiques qui comprend comme cas particulier l'équation de LAMÉ. Dans une lettre adressée à M. HEINE, (1) M. HERMITE, à qui l'on doit la solution complète de l'équation de LAMÉ, (2) en a achevé l'étude par l'examen du cas où le module est égal à l'unité, et a fait connaître en même temps trois équations linéaires qui ont pour intégrales des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. C'est l'une de ces équations dont je m'occupe ici; elle peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dz^2} - 2m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\frac{dX}{dz} = [(n - m + 1)(n + m)k^2\lambda^2(z) + h_1]X$$

m et n étant des entiers positifs, h_1 une constante quelconque, et $\lambda(z)$ la fonction elliptique au module k.

La propriété qu'ont en général deux des intégrales de cette équation d'être des fonctions de seconde espèce conduit naturellement à l'introduction de leurs dérivées logarithmiques qui sont des fonctions de première

(1) Journal de Crelle, Tome 89.

(2) Annali di matematica, Serie II Tome IX et Comptes Rendus, Années 1877 et suivantes.

espèce, et à leur expression par les fonctions θ.[1] Mais on n'obtient ainsi que la forme des intégrales, et les arguments des fonctions θ qui restent inconnus doivent être déterminés par d'autres considérations. M. FUCHS a indiqué pour cet objet, et relativement à l'équation de LAMÉ, une méthode basée sur les résultats obtenus par lui dans un important mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre par des fonctions algébriques.[2] La transformée à laquelle donne lieu l'équation de LAMÉ, quand on change de variable indépendante en substituant la fonction $\lambda(z)$ à son argument, se trouve être ainsi un cas particulier d'une classe d'équations linéaires étudiées par M. FUCHS et dans les intégrales desquelles figureraient les fonctions θ abéliennes.

Lorsqu'on reste dans le domaine des fonctions doublement périodiques, on peut dans un assez grand nombre de cas arriver directement à la solution complète de la question en cherchant l'expression de la dérivée logarithmique au moyen de la fonction $\lambda(z)$ et de sa dérivée, sous la forme qui résulte du théorème bien connu de LIOUVILLE. C'est ce que je me suis proposé de montrer dans ce qui suit, en prenant comme exemple l'équation (1). La première partie contient la recherche de l'intégrale générale quand deux solutions sont des fonctions de seconde espèce. La deuxième est relative aux solutions doublement périodiques de première espèce. Dans la troisième, j'étudie les cas particuliers où le module est égal à l'unité ou à zéro en mettant à profit la forme analytique donnée par M. HERMITE.

I.

1. En faisant disparaître de l'équation (1) le terme en $\frac{dX}{dz}$ par le procédé ordinaire qui consiste ici à prendre

$$X = [\lambda(z)]^m Y,$$

---

(1) FUCHS, Journal de M. RÉSAL 1878.

(2) Journal de Crelle, Tome 81.

on ramène l'équation à celle-ci

$$(2)\qquad \frac{d^2Y}{dz^2}=\left[n(n+1)k^2\lambda^2(z)+h+\frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}\right]Y,$$

où l'on a posé $h=h_1-m^2(k^2+1)$. Faisons maintenant dans l'équation (2) la substitution

$$y=-\frac{1}{Y}\frac{dY}{dz},$$

elle deviendra

$$(3)\qquad \frac{dy}{dz}-y^2=-n(n+1)k^2\lambda^2(z)-h-\frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}.$$

La recherche des solutions doublement périodiques de seconde espèce pour les équations (2) ou (1) revient à celle des solutions de l'équation (3) qui sont des fonctions doublement périodiques admettant les deux périodes ω et ω' de la fonction $\lambda^2(z)$. On peut ajouter aussi, d'après le beau théorème de M. Picard, qu'elle revient en général à savoir dans quels cas les équations (1) ou (2) ont leurs intégrales uniformes.

Le second membre de l'équation (3) n'admet que les deux pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ qui sont du second ordre avec les coefficients $-m(m+1)$ et $-n(n+1)$. On en conclut aisément que y doit admettre le pôle simple $z=0$ avec l'un des deux résidus m ou $-(m+1)$, le pôle simple $z=\frac{\omega'}{2}$ avec l'un des deux résidus n ou $-(n+1)$, et en outre d'autres pôles simples avec le résidu -1. Soit en effet $z=\alpha$ un infini de y, et admettons que $\frac{A}{(z-\alpha)^p}$ soit le premier terme du développement en série de y aux environs de $z=\alpha$. Si α est différent de 0 et de $\frac{\omega'}{2}$, la différence $\frac{dy}{dz}-y^2$ doit être finie pour $z=\alpha$. Or le terme qui a été écrit donne les deux suivants, $-\frac{Ap}{(z-\alpha)^{p+1}}$ et $-\frac{A^2}{(z-\alpha)^{2p}}$ entre lesquels il faut d'abord qu'il y ait réduction, d'où l'on conclut que p doit être égal à 1. Il faut ensuite que la constante A satisfasse à l'équation $A+A^2=0$, ce qui entraine la condition $A=-1$. Lorsque $\alpha=0$, on voit de la même façon que p doit encore être l'unité, et que l'on doit avoir

$A + A^2 = m(m+1)$, ce qui donne pour A l'une des valeurs m ou $-(m+1)$; et quand $\alpha = \frac{\omega'}{2}$, on trouve de même $p = 1$ avec l'une des valeurs n ou $-(n+1)$ pour A.

2. On conclut de ce qui précède trois formes possibles d'une intégrale doublement périodique pour l'équation (3). 1° Une fonction admettant les pôles simples 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus m et n. D'après une proposition fondamentale de la théorie des fonctions doublement périodiques, une telle fonction devra admettre en outre $m+n$ pôles simples avec le résidu -1. 2° Une fonction admettant les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus m et $-(n+1)$, qui devra admettre en outre $m-n-1$ pôles simples de résidu -1. 3° Une fonction admettant les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus $-(m+1)$ et n, et en outre $n-m-1$ pôles simples de résidu -1. Il est clair qu'on ne peut admettre l'existence des pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus $-(m+1)$ et $-(n+1)$, ce qui serait inconciliable avec l'existence d'autres pôles dont les résidus doivent être tous négatifs.

Considérons la première forme qui, comme nous le verrons un peu plus loin, est la seule admissible. Posons $u = \lambda^2(z)$, $u_i = \lambda^2(z_i)$; la fonction

$$(4) \qquad -\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{1}{u-u_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\frac{du_i}{dz_i}}{u-u_i} + \frac{m}{2}\frac{\frac{du}{dz}}{u}$$

admet les $m+n$ pôles simples $z_1, z_2, \ldots z_{m+n}$ avec le résidu -1. Si dans cette même fonction, où les constantes $\frac{du_i}{dz_i}$ gardent la détermination qu'elles avaient d'abord, on remplace z par $-z_i$, les deux termes infinis se détruisent, et la fonction reste finie. Pour $z = 0$, le seul terme $\frac{1}{u}\frac{du}{dz}$ devient infini avec le résidu 2, et par suite la fonction devient infinie avec le résidu m. Pour $z = \frac{\omega'}{2}$, les termes $-\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\frac{1}{u-u_i}$ deviennent tous infinis avec le résidu $+1$, et $\frac{1}{u}\frac{du}{dz}$ avec le résidu -2, en sorte que la fonction devient infinie avec un résidu égal à $m+n-m = n$. En se rappelant la propriété fondamentale des fonctions uniformes doublement périodiques, savoir qu'une telle fonction se réduit à une constante quand elle ne devient plus infinie, on voit que l'expression (4) ne peut différer que par une constante de l'intégrale que nous cherchons pour l'équation (3). Or il est aisé de voir que cette constante est nulle.

3. Pour qu'une fonction doublement périodique y satisfasse à l'équation (3), il faut en effet que l'expression

$$\frac{dy}{dz} - y^2 + n(n+1)k^2\lambda^2(z) + h + \frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}$$

ne devienne plus infinie, et jusqu'à présent nous avons réalisé seulement pour cette fonction la propriété de ne présenter, dans les développements en série relatifs à ses différents pôles, aucun terme infini du second ordre. Soit aux environs d'un de ces pôles, $z = \zeta$

$$y = \frac{a}{z - \zeta} + b + \ldots$$

La dérivée $\frac{dy}{dz}$ ne donne effectivement qu'un seul terme infini qui est du second ordre; mais le carré de y donne le terme $\frac{2ab}{z-\zeta}$ qui doit être nul. La constante a est égale à -1 pour les $m+n$ pôles z_i, en sorte que l'on doit avoir $b = 0$. On arrive à la même conclusion pour les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$, a ayant les valeurs m et n. Restreignons-nous à la considération du pôle $z = \frac{\omega'}{2}$. Les termes $-\frac{1}{2}\frac{\frac{du_i}{dz_i}}{u - u_i}$ s'annulent. L'expression $-\frac{1}{2}\frac{\frac{du}{dz}}{u - u_i}$ devient, en posant $z = \frac{\omega'}{2} + z'$,

$$\frac{\lambda'(z')}{\lambda(z') - k^2\lambda^2(z_i)\lambda^3(z')}$$

dont le développement ne contient pas évidemment de terme indépendant de z'. Il en est de même pour l'expression $\frac{m}{u}\frac{du}{dz}$. Donc il n'y a aucune constante à ajouter à l'expression déjà trouvée pour y.

4. Appelons $\varphi(u)$ le polynôme du degré $m+n$ dont les racines sont $u_1, u_2, \ldots u_{m+n}$; l'expression (4) prend la forme

$$y = -\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz} - \frac{1}{2}\frac{\psi}{\varphi} + \frac{m}{2u}\frac{du}{dz} \tag{5}$$

où ψ désigne un polynôme en u qui est au plus du degré $m+n-1$. Or nous pouvons déterminer immédiatement ce polynôme par cette seule remarque que la différence $\frac{dy}{dz} - y^2$ doit être rationnelle en u et ne pas contenir la première puissance de $\frac{du}{dz}$. Observant en effet que

$$\frac{du^2}{dz^2} = 4u(1-u)(1-k^2u)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2[3k^2u^2 - 2(k^2+1)u + 1]$$

la différence $\frac{dy}{dz} - y^2$ donnera comme coefficient de $\frac{du}{dz}$

$$\frac{m}{2}\frac{\psi}{u\varphi} - \frac{1}{2\varphi}\frac{d\psi}{du}$$

et en l'égalant à zéro, on obtient la condition $\frac{d\psi}{\psi} = m\frac{du}{u}$, ou bien $\psi = Nu^m$, N étant une constante arbitraire.

Les considérations qui précèdent mettent en évidence l'impossibilité d'une intégrale répondant à la deuxième et à la troisième formes indiquées dans le n° 2. La fonction y relative à la deuxième hypothèse est en effet représentée par les formules (4) et (5), en supposant que le signe $\sum$ se rapporte seulement à $m-n-1$ quantités, et que les fonctions φ et ψ sont la première du degré $m-n-1$ et la seconde du degré $m-n-2$ au plus. La condition $\psi = Nu^m$ à laquelle on parvient de la même façon ne peut donc être remplie.

La troisième hypothèse conduit pour y aux expressions

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\sum_{i=1}^{i=n-m-1}\frac{1}{u-u_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-m-1}\frac{1}{u-u_i}\frac{du_i}{dz_i} - \frac{m+1}{2u}\frac{du}{dz}$$

$$-\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz}-\frac{1}{2}\frac{\psi}{\varphi}-\frac{m+1}{2u}\frac{du}{dz}$$

ψ étant un polynôme en u dont le degré est au plus $n-m-2$. Or en égalant à zéro le coefficient de $\frac{du}{dz}$ dans la différence $\frac{dy}{dz}-y^2$, on trouve la condition $\frac{d\psi}{\psi}+(m+1)\frac{du}{u}=0$ qui ne peut être satisfaite par un polynôme.

Ces impossibilités disparaissent lorsque $N=0$; mais cette circonstance sera examinée dans la deuxième partie.

5. Revenant à la première forme, l'expression de y pourra s'écrire, en posant $\frac{\varphi(u)}{u^m}=F(u)$

$$y=-\frac{1}{2F}\frac{dF}{du}\frac{du}{dz}-\frac{N}{2F}$$

et la substitution de cette valeur de y dans l'équation (3) donne

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned}&\frac{dF^2}{du^2}\frac{du^2}{dz^2}-2F\left[\frac{d^2F}{du^2}\frac{du^2}{dz^2}+\frac{dF}{du}\frac{d^2u}{dz^2}\right]-N^2+\\&+4F^2\left[n(n+1)k^2u+h+\frac{m(m+1)}{u}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

La question est de satisfaire à cette équation en choisissant convenablement les coefficients du polynôme $\varphi(u)$. Or si l'on prend la dérivée par rapport à u du premier membre de l'équation (α) qui est rationnel en u, il se présente une simplification importante qui consiste en ce que la fonction $F(u)$ se met en facteur, et cette fonction se trouve alors assujettie à vérifier l'équation linéaire du troisième ordre

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&-2[k^2u^3-(k^2+1)u^2+u]\frac{d^3F}{du^3}-3[3k^2u^2-2(k^2+1)u+1]\frac{d^2F}{du^2}+\\&+\left[[2n(n+1)-6]k^2u+2(h+k^2+1)+\frac{2m(m+1)}{u}\right]\frac{dF}{du}+\\&+\left[n(n+1)k^2-\frac{m(m+1)}{u^2}\right]F=0\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant

$$F(u) = u^n + A_{n-1}u^{n-1} + \dots + A_0 + \frac{A_{-1}}{u} + \dots + \frac{A_{-m}}{u^m}$$

où l'on peut choisir égal à l'unité le coefficient de u^n puisqu'il s'agit de satisfaire à une équation linéaire. Un calcul facile donne pour le coefficient de u^p après cette substitution

$$(\gamma) \left\{ \begin{array}{l} (n-p)(n+p+1)(2p+1)k^2A_p + 2(p+1)[h+(p+1)^2(k^2+1)]A_{p+1} + \\ \qquad + (2p+3)(m-p-1)(m+p+2)A_{p+2} \end{array} \right.$$

et cette expression donne lieu aux remarques suivantes.

1° Pour $p = n$ le coefficient de A_p étant nul, et les termes A_{n+1}, A_{n+2} n'existant pas, les termes du degré le plus élevé de l'équation (β) se détruisent d'eux-mêmes.

2° Pour $p = -m-2$ les termes A_p, A_{p+1} n'existent pas et le coefficient de A_{p+2} est nul; c'est à dire que les termes du degré négatif le plus élevé de l'équation (β) disparaissent.

3° Si l'on égale à zéro l'expression (γ), on aura successivement, en faisant $p = n-1,\ n-2, \dots 0,\ -1, \dots -m$, les coefficients de même indice en fonction des précédents qui seront connus, pourvu que le coefficient de A_p ne s'annule jamais, ce qui arrivera si le facteur $n+p+1$ n'est jamais nul ou bien si $n+1$ *est supérieur* à m, hypothèse que nous supposerons vérifiée dans tout ce qui suit.

4° Les coefficients A_{n-1}, A_{n-2}, ... A_{-m} étant ainsi déterminés, il restera dans l'équation (β) des termes du degré $-m-1$. Il est facile de voir que leur coefficient est nul, en vertu des valeurs attribuées déjà aux A. En effet, s'il en était autrement, le premier membre de l'équation (β) se réduirait à $\frac{c}{u^{m+1}}$, c étant une constante différente de zéro, et le premier membre de l'équation (α) aurait pour dérivée le produit de ce terme par $F(u)$. Or cette dérivée contiendrait un terme en $\frac{1}{u}$, lequel ne peut exister dans la dérivée d'une fraction rationnelle. On obtiendrait effectivement un tel terme en multipliant par $\frac{c}{u^{m+1}}$ le terme en u^m de $F(u)$; mais il reste à prouver que son coefficient A_m n'est pas nul. Supposant en effet $A_m = 0$, et faisant dans l'expression (γ) $p = m - 1$, on trouve $A_{m-1} = 0$. On en conclut immédiatement que tous les suivants $A_{m-2}, \ldots A_{-m}$ seraient aussi nuls; $F(u)$ serait alors divisible par u^{m+1} et l'équation (α) montre que l'on aurait $N = 0$, hypothèse que nous écartons pour le moment.

5° Il n'est pas sans intérêt de vérifier directement que la dernière équation se trouve être ainsi une conséquence des précédentes. On y parvient en se servant de la relation suivante entre les coefficients.

$$(6) \qquad A_{-l} = \frac{(m-l+1)(m-l+2)\ldots(m+l)}{(n-l+1)(n-l+2)\ldots(n+l)}\frac{1}{k^{2l}}A_l$$

qui a lieu pour les valeurs entières de l non supérieures à m. On la vérifie sans difficulté au moyen de l'équation (γ), en établissant que si elle est vraie pour les valeurs entières $1, 2, \ldots l$, elle l'est encore pour $l+1$. Cela étant, le coefficient de u^{-m-1} s'obtient en faisant $p = -m-1$ dans la relation (γ); il est égal à

$$-2m[(h + m^2(k^2+1))A_{-m} + (2m-1)A_{-m+1}]$$

ou en remplaçant au moyen de la relation (6) A_{-m} et A_{-m+1} en fonction de A_m et de A_{m-1}

$$-\frac{1 \cdot 2 \ldots 2m}{(n-m+1)\ldots(n+m)}\frac{1}{k^{2m}}[2m(h+m^2(k^2+1))A_m +$$
$$+ (n-m+1)(n+m)(2m-1)k^2A_{m-1}].$$

Or la quantité entre crochets est nulle, comme on le constate immédiatement en faisant $p = m - 1$ dans la relation (γ).

6. L'équation (β) étant vérifiée identiquement, le premier membre de l'équation (α) qui a une dérivée nulle se réduit à une constante. On pourra profiter de l'indétermination de N pour que cette constante soit nulle, et l'équation (α), à laquelle était ramené le problème, admettra comme solution la fraction rationnelle $F(u)$.

On aura en faisant dans l'équation (α) $u = 1$ pour déterminer la constante N.

$$N^2 = 4F(1)\{[n(n+1)k^2 + h + m(m+1)]F(1) - (k^2-1)F'(1)\}$$

Regardons N^2 comme une fonction de la constante h. La relation $(\gamma) = 0$ montre que A_{n-1} est du premier degré en h, A_{n-2} du second degré, ... A_0 du degré n. Mais à partir de là, les degrés vont en diminuant, comme l'indique la relation (6). On voit ainsi que N^2 est un polynôme en h du degré $2n + 1$.

Revenons actuellement à la fonction Y. On a en supposant N différent de zéro l'intégrale

$$Y = c\sqrt{F}e^{\frac{N}{2}\int\frac{dz}{F}}$$

où c est une constante arbitraire, et comme on trouve pour N deux valeurs, on obtiendra deux intégrales particulières. Le rapport de ces deux intégrales ne peut être une constante puisque les derivées logarithmiques sont évidemment distinctes. On connaît ainsi l'intégrale générale de l'équation (2); mais on peut exprimer cette intégrale au moyen des fonctions θ, ce qui se fera maintenant sans difficulté.

7. Remarquons pour cela que l'on peut connaître les $m + n$ valeurs de la variable z pour lesquelles y devient infinie avec le résidu -1. Elles font partie en effet des $2(m + n)$ valeurs de z égales et de signes contraires que l'on obtient en égalant $F(u)$ à zéro. N étant supposé différent de zéro, nous savons déjà (N° 5, 4°) qu'aucune des valeurs de u ne peut être nulle. L'équation (α) où l'on remplace u par une des racines u_i de $F(u)$ donne

$$N = \pm\ 2F'(u_i)\sqrt{u_i(1 - u_i)(1 - k^2u_i)}$$

et montre que toutes les racines sont simples sans qu'aucune d'elles puisse être 1 ou $\frac{1}{k^2}$. Choisissons actuellement pour N une de ses deux déterminations. Les deux valeurs z_i et $-z_i$ qui répondent à la même valeur de u_i, abstraction faite des périodes, donnent à la dérivée $\frac{du}{dz}$ des valeurs égales et de signes contraires. Prenant celle de ces valeurs de z qui donne pour $2\frac{dF}{du}\frac{du}{dz}$ la détermination adoptée pour N, on aura une première série de $m + n$ valeurs de z que nous pouvons appeler maintenant $z_1, z_2, \ldots z_{m+n}$ et qui seront les pôles cherchés de la fonction y. La seconde détermination de N donnerait lieu au choix des valeurs $-z_1$, $-z_2$, ... $-z_{m+n}$.

Considérons maintenant l'expression

$$(7)\qquad -\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\theta'_1(z-z_i)}{\theta_1(z-z_i)}+m\frac{\theta'_1(z)}{\theta_1(z)}+n\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}+c$$

Les propriétés des fonctions θ montrent que cette expression possède les deux périodes ω et ω' et qu'elle admet les $m+n$ pôles z_i avec le résidu -1, le pôle $z=0$ avec le résidu m, le pole $z=\frac{\omega'}{2}$ avec le résidu n. Elle ne diffère donc de y que par une constante. Pour trouver cette constante, comparons les termes indépendants de z, dans les développements en série relatifs au pôle $z=0$, de l'expression (7) et de la valeur (4) de y (N° 2). La première donne immédiatement

$$\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\theta'_1(z_i)}{\theta_1(z_i)}+c.$$

Quant à la seconde, observons que les $m+n$ premiers termes s'annulent pour $z=0$ avec $\frac{du}{dz}$; les $m+n$ suivants donnent

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dz_i}=\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\lambda'(z_i)}{\lambda(z_i)}=\sum_{i=1}^{i=m+n}\left[\frac{\theta'_1(z_i)}{\theta_1(z_i)}-\frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}\right]$$

Quant au terme $\frac{m}{2u}\frac{du}{dz}=m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}$, il devient infini pour $z=0$, mais ne donne dans le développement aucun terme constant. On en conclut que y coïncidera avec la fonction (7), si l'on fait

$$c=-\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}$$

et par suite en désignant par c_1 une constante arbitraire, on aura pour l'intégrale Y l'expression

$$Y=c_1\frac{\theta_1(z-z_1)\theta_1(z-z_2)\ldots\theta_1(z-z_{m+n})}{[\theta_1(z)]^m[\theta(z)]^n}e^{z\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}}$$

On obtiendra une seconde intégrale en remplaçant les z_i par $-z_i$, ce qui revient, comme on voit, au changement de signe de la variable z. Quant à l'intégrale de l'équation (1) en X, on l'obtient en multipliant Y par $[\lambda(z)]^m$, ou à une constante près par $\left[\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}\right]^m$. Il suffira donc de remplacer θ_1 par θ dans le dénominateur de l'expression de Y.

Intégrales doublement périodiques.

II.

8. Supposons que l'on donne à h une des $2n+1$ valeurs qui annulent N. La valeur de y devient alors

$$y = -\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz} + \frac{m}{2u}\frac{du}{dz} \tag{8}$$

Les racines de $\varphi(u)$ répondant à des pôles de y dont le résidu est -1, on voit que toutes ces racines doivent être doubles, à moins qu'elles ne soient 0, 1 ou $\frac{1}{k^2}$; car alors les expressions

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dz} = 2\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}, \quad \frac{1}{u-1}\frac{du}{dz} = 2\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}, \quad \frac{1}{u-\frac{1}{k^2}}\frac{du}{dz} = 2\frac{\nu'(z)}{\nu(z)}$$

deviennent respectivement infinies du premier ordre avec le résidu 2, en sorte que les valeurs 1 et $\frac{1}{k^2}$, quand elles sont racines de $\varphi(u)$ ne peuvent être que des racines simples. Quant à la racine $u=0$, nous savons que le résidu correspondant de y doit être m ou $-(m+1)$, et en nous plaçant d'abord dans la première hypothèse, l'équation (8) montre que φ ne doit admettre aucune racine nulle. Il est facile de trouver les différentes formes dont est susceptible y, et par suite les intégrales X et Y des équations (1) et (2).

Si $m + n$ est pair, on peut d'abord composer $\varphi(u)$ avec $\frac{n+m}{2}$ racines doubles différentes de 1 et $\frac{1}{k^2}$; $\varphi(u)$ sera alors le carré d'un polynôme $\Phi_{\frac{n+m}{2}}(u)$ dont l'indice désigne le degré en $u = \lambda^2(z)$, en sorte que

$$y = -\frac{d}{dz}\log \Phi_{\frac{n+m}{2}}(u) + \frac{m}{2}\frac{d}{dz}\log u$$

et par suite

$$\text{(a)} \qquad Y = u^{-\frac{m}{2}}\Phi_{\frac{n+m}{2}}(u), \quad X = \Phi_{\frac{n+m}{2}}(u)$$

On peut aussi composer $\varphi(u)$ avec $\frac{n+m}{2} - 1$ racines doubles auxquelles on adjoint les racines simples 1 et $\frac{1}{k^2}$, ce qui donne

$$y = -\frac{d}{dz}\log \Phi_{\frac{n+m}{2}-1}(u) - \frac{d}{dz}\log \mu(z) - \frac{d}{dz}\log \nu(z) + \frac{m}{2}\frac{d}{dz}\log u$$

et par suite

$$\text{(b)} \qquad X = \Phi_{\frac{n+m}{2}-1}(u)\mu(z)\nu(z)$$

Lorsque $m + n$ est impair, il faut que $\varphi(u)$ ait $\frac{m+n-1}{2}$ racines doubles avec l'une des deux racines simples 1 ou $\frac{1}{k^2}$, ce qui donne pour X les deux formes

$$\text{(c)} \qquad X = \Phi_{\frac{n+m-1}{2}}(u)\mu(z)$$

$$\text{(d)} \qquad X = \Phi_{\frac{n+m-1}{2}}(u)\nu(z)$$

Examinons maintenant la seconde hypothèse où le résidu de y relatif au pôle $z = 0$ est $-(m + 1)$. Il faut évidemment que $\varphi(u)$ admette $2m + 1$ racines nulles, en sorte que $\varphi(u)$ sera le produit de u^{2m+1} par un polynôme en u du degré $n + m - 2m - 1 = n - m - 1$ lequel n'aura encore que des racines doubles avec l'adjonction possible des racines simples $1, \frac{1}{k^2}$.

Si $n+m$ est pair, il faut donner à $\varphi(u)$ $\frac{n-m-2}{2}$ racines doubles avec l'une ou l'autre des racines simples $1, \frac{1}{k^2}$ et l'on a pour X

$$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-2}{2}}(u)\mu(z) \tag{e}$$

$$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-2}{2}}(u)\nu(z) \tag{f}$$

Si $n+m$ est impair, $\varphi(u)$ aura $\frac{n-m-1}{2}$ racines doubles, ou bien $\frac{n-m-3}{2}$ seulement avec les deux racines simples $1, \frac{1}{k^2}$, et nous avons pour X les formes suivantes

$$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-1}{2}}(u) \tag{g}$$

$$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-3}{2}}(u)\mu(z)\nu(z). \tag{h}$$

9. Les huit formes précédentes sont les seules possibles pour X. Nous allons voir que toutes répondent effectivement à des intégrales de l'équation (1) pour les diverses valeurs de h ou de h_1 qui satisfont à la condition $N=0$, en suivant la même marche que Lamé [1] dans le cas particulier de $m=0$.

Pour trouver les solutions de la forme (a), faisons dans l'équation (1) la substitution $u=\lambda^2(z)$; on obtiendra l'équation

$$\text{(a')}\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2X}{du^2}+\\ &+[2(3-2m)k^2u^2+4(m-1)(k^2+1)u+2(1-2m)]\frac{dX}{du}-\\ &-[(n-m+1)(n+m)k^2u+h_1]X=0\end{aligned}\right.$$

---

[1] Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes, pages 281 et suivantes.

Substituons dans cette équation un polynôme en u dont le terme général est $A_p u^p$. On trouvera en égalant à zéro le coefficient de u^p

$$(\mathrm{a}'')\left\{\begin{aligned} &(2p-m-n-2)(2p+n-m-1)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)(k^2+1)-h_1]A_p+\\ &\qquad +2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

ce qui montre que $m+n$ étant pair, l'équation (a′) peut être satisfaite par un polynôme du degré $\frac{n+m}{2}$. Car les termes en $u^{\frac{n+m}{2}-1}$, qui sont ceux dont le degré est le plus élevé, ont un coefficient nul, comme l'indique l'expression (a″). En donnant à p les valeurs $\frac{n+m}{2}$, $\frac{n+m}{2}-1$, ... 1, on calculera successivement les coefficients $A_{\frac{n+m}{2}-1}$, $A_{\frac{n+m}{2}-2}$, ... A_0, $A_{\frac{n+m}{2}}$ étant supposé égal à l'unité, et l'on trouvera des valeurs finies pour chacun d'eux. Mais pour que l'équation (a′) soit vérifiée, il faut encore que l'ensemble des termes répondant à $p=0$ soit nul, c'est à dire que l'on ait

$$2(1-2m)A_1-h_1A_0=0,$$

ce qui détermine la constante h_1 par une équation algébrique dont le degré est $\frac{n+m}{2}+1$. Car on voit immédiatement que $A_{\frac{n+m}{2}-1}$ est du premier degré en h_1, $A_{\frac{n+m}{2}-2}$ du second degré, ... A_0 du degré $\frac{n+m}{2}$.

Pour avoir les solutions de la forme (b), on fera dans l'équation (a′) la substitution $X=\sqrt{(1-u)(1-k^2u)}\Phi(u)$ qui donne

$$(\mathrm{b}')\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2\Phi}{du^2}+\\ &+[(14-4m)k^2u^2+4(m-2)(k^2+1)u+2(1-2m)]\frac{d\Phi}{du}+\\ &+\{[(m-2)(m-3)-n(n+1)]k^2u+(2m-1)(k^2+1)-h_1\}\Phi=0\end{aligned}\right.$$

Substituant dans cette équation un polynôme en u dont le terme général est $A_p u^p$, on trouve en égalant à zéro le coefficient de u^p

$$(b'')\left\{\begin{aligned}&(2p-n-m)(2p+n-m+1)k^2A_{p-1}+\\&+[(2p+1)(2m-2p-1)(k^2+1)-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

en sorte que l'équation (b′) sera satisfaite par un polynôme du degré $\frac{n+m}{2}-1$ dont on peut supposer le premier coefficient égal à l'unité, et dont les autres se calculeront par l'équation (b″), pourvu que h_1 satisfasse à l'équation obtenue en faisant $p=0$

$$[(2m-1)(k^2+1)-h_1]A_0+2(1-2m)A_1=0$$

qui est du degré $\frac{n+m}{2}$ en h_1.

Les solutions des formes (c) et (d) s'obtiennent en faisant dans l'équation (a′) les substitutions $X=\sqrt{1-u}\,\Phi(u)$, $X=\sqrt{1-k^2u}\,\Phi(u)$, qui donnent les équations différentielles

$$(c')\left\{\begin{aligned}&[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2\Phi}{du^2}+\\&+\{(10-4m)k^2u^2+4[(m-1)(k^2+1)-1]u+2(1-2m)\}\frac{d\Phi}{du}+\\&+\{[(m-1)(m-2)-n(n+1)]k^2u+2m-1-h_1\}\Phi=0\end{aligned}\right.$$

$$(d')\left\{\begin{aligned}&[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2\Phi}{du^2}+\\&+\{(10-4m)k^2u^2+4[(m-1)(k^2+1)-k^2]u+2(1-2m)\}\frac{d\Phi}{du}+\\&+\{[(m-1)(m-2)-n(n+1)]k^2u+(2m-1)k^2-h_1\}\Phi=0\end{aligned}\right.$$

Substituant dans ces équations un polynôme dont le terme général est A_pu^p, on aura les deux relations récurrentes

$$(c'')\left\{\begin{aligned}&(2p-n-m-1)(2p+n-m)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)k^2-(2p+1)(2p-2m+\\&+1)-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

$$(d'')\left\{\begin{aligned}&(2p-n-m-1)(2p+n-m)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)-(2p+1)(2p-2m+\\&+1)k^2-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

et ces dernières relations montrent qu'en supposant $m+n$ impair, on pourra satisfaire aux équations (c′) et (d′) par des polynômes du degré $\frac{n+m-1}{2}$, pourvu que h_1 vérifie l'une ou l'autre des équations

$$(2m-1-h_1)A_0 + 2(1-2m)A_1 = 0$$
$$[(2m-1)k^2 - h_1]A_0 + 2(1-2m)A_1 = 0$$

qui sont du degré $\frac{n+m+1}{2}$ en h_1.

Passons aux formes (e) et (f). Les polynômes Φ qui y entrent s'obtiendront en remplaçant dans les équations (c′) et (d′) Φ par $u^{\frac{2m+1}{2}}\Phi$. On trouve ainsi

$$(\mathrm{e}')\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\frac{d^2\Phi}{du^2} + \\ &+ \{(14+4m)k^2u^2 - 4[(m+2)(k^2+1)+1]u + 4m+6\}\frac{d\Phi}{du} + \\ &+ \{[(m+2)(m+3) - n(n+1)]k^2u - (2m+1)(k^2+1) - 2m - 3 - h_1\}\Phi = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{f}')\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\frac{d^2\Phi}{du^2} + \\ &+ \{(14+4m)k^2u^2 - 4[(m+2)(k^2+1)+k^2]u + 4m+6\}\frac{d\Phi}{du} + \\ &+ \{[(m+2)(m+3) - n(n+1)]k^2u - 4(m+1)(k^2+1) + 2m + 3 - h_1\}\Phi = 0 \end{aligned}\right.$$

qui donnent lieu aux relations récurrentes

$$(\mathrm{e}'')\left\{\begin{aligned} &(2p-n+m)(2p+m+n+1)k^2A_{p-1} - [(2p+1)(2p+2m+1)k^2 + \\ &+ 4(p+1)(p+m+1) + h_1]A_p + 2(p+1)(2p+2m+3)A_{p+1} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{f}'')\left\{\begin{aligned} &(2p-n+m)(2p+m+n+1)k^2A_{p-1} - [4(p+1)(m+p+1)k^2 + \\ &+ (2p+1)(2p+2m+1) + h_1]A_p + 2(p+1)(2p+2m+3)A_{p+1} = 0 \end{aligned}\right.$$

En supposant $m+n$ pair, ces relations montrent que l'on peut satisfaire aux équations (e′) et (f′) par un polynôme du degré $\frac{n-m}{2}-1$, pourvu que h_1 vérifie l'une ou l'autre des équations

$$-[(2m+1)k^2+4(m+1)+h_1]A_0+2(2m+3)A_1=0$$

$$-[4(m+1)k^2+2m+1+h_1]A_0+2(2m+3)A_1=0$$

équations en h_1 du degré $\frac{n-m}{2}$.

Remplaçons maintenant dans l'équation (a′), Φ par $u^{\frac{2m+1}{2}}\Phi$. Nous aurons pour l'équation linéaire à laquelle doit satisfaire le polynôme Φ de la fonction (g)

$$(g')\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2\Phi}{du^2}+\\ &+[(4m+10)k^2u^2-4(m+2)(k^2+1)u+4m+6]\frac{d\Phi}{du}+\\ &+\{[(m+1)(m+2)-n(n+1)]k^2u-(2m+1)(k^2+1)-h_1\}\Phi=0\end{aligned}\right.$$

qui donne la relation récurrente

$$(g'')\left\{\begin{aligned} &(2p-n+m-1)(2p+n+m)k^2A_{p-1}-[(2p+1)(2p+2m+1)(k^2+1)+\\ &+h_1]A_p+2(p+1)(2m+2p+3)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

et l'équation (g′) admettra comme solution un polynôme du degré $\frac{n-m-1}{2}$, si h_1 vérifie l'équation du degré $\frac{n-m+1}{2}$

$$[(2m+1)(k^2+1)+h_1]A_0+2(2m+3)A_1=0$$

Enfin on obtiendra le polynôme Φ de la fonction (h) en remplaçant Φ par $u^{\frac{2m+1}{2}}\Phi$ dans l'équation (b′), ce qui donne

$$(h')\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\frac{d^2\Phi}{du^2}+\\ &+[(4m+18)k^2u^2-4(m+3)(k^2+1)u+4m+6]\frac{d\Phi}{du}+\\ &+\{[(m+3)(m+4)-n(n+1)]k^2u-4(m+1)(k^2+1)-h_1\}\Phi=0\end{aligned}\right.$$

qui donne lieu à la relation récurrente

$$(\mathrm{h}'')\left\{\begin{aligned}&(2p-n+m+1)(2p+n+m+2)k^2A_{p-1}-[4(p+1)(p+m+1)(k^2+1)+\\&\qquad+h_1]A_p+2(p+1)(2m+2p+3)A_{p+1}=0\end{aligned}\right.$$

L'équation (h') admettra comme solution un polynôme du degré $\frac{n-m-3}{2}$, si h_1 vérifie l'équation du degré $\frac{n-m-1}{2}$

$$-[4(m+1)(k^2+1)+h_1]A_0+2(2m+3)A_1=0$$

Les solutions que nous venons de trouver auraient pu être déduites de l'intégrale générale du N° 6 qui se réduit dans le cas particulier de $N=0$ à $c\sqrt{F}$, le polynôme F devant satisfaire à l'équation du troisième ordre (α). Mais il eût été plus difficile de mettre en évidence les différentes formes de F qui résultent très simplement, comme on l'a vu, de la considération des résidus. On voit aussi que l'équation $N=0$ s'est trouvée décomposée en quatre autres, en sorte qu'en ajoutant les degrés des équations en h_1 que nous avons obtenues soit pour $m+n$ pair, soit pour $m+n$ impair, nous devons reproduire le degré $2n+1$ de l'équation $N=0$, et c'est ce que l'on vérifie immédiatement.

Nous pouvons encore remarquer que dans le cas de $N=0$, nous avons trouvé des solutions correspondant à la première et à la troisième forme du N° 2. La deuxième forme n'a rien donné par suite de la condition $n+1>m$ qui a été reconnue nécessaire. Ajoutons que si dans l'équation (2), on change z en $\frac{\omega'}{2}+z$; on obtient une nouvelle équation qui ne diffère de la première que par le changement de n en m, en sorte que le cas où $n+1$ serait inférieur à m se ramène à celui qui a été traité.

Cas particuliers où le module est égal à l'unité, ou à zéro.

III.

10. Lorsque le module est égal à l'unité, l'intégrale générale se ramène encore à la recherche des solutions de l'équation (β). Mais on

peut faire dépendre la question d'une équation du second ordre seulement, comme l'a fait M. HERMITE pour un autre cas. Remarquons que la fonction $\lambda(z)$ qui s'annule pour $z=0$ doit être remplacée par $v=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$, en sorte que dans les résultats précédents u désignerait le carré de cette fonction de z. Mais il y a avantage à prendre comme élément, dans la formation de la dérivée logarithmique, au lieu de u, la fonction v elle-même dont la dérivée par rapport à z est égale à $1-v^2$ c'est à dire à une fonction *rationnelle* de v.

En remplaçant u par v^2 dans l'expression (4) de y (N° 2), on aura

$$y = v(v^2-1)\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{1}{v^2-v_i^2}+\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{v_i(v_i^2-1)}{v^2-v_i^2}+\frac{m}{v}\frac{dv}{dz}.$$

Or, si l'on réunit les deux termes qui répondent à la même valeur de i, on trouve par la suppression du facteur $v+v_i$

$$\frac{v^3-v+v_i^3-v_i}{v^2-v_i^2}=\frac{v^2-v_iv+v_i^2-1}{v-v_i}=\frac{v^2-1}{v-v_i}-v_i=-\frac{1}{v-v_i}\frac{dv}{dz}-v_i$$

d'où

$$y=-\frac{dv}{dz}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{1}{v-v_i}-\sum_{i=1}^{i=m+n}v_i+\frac{m}{v}\frac{dv}{dz}.$$

Désignons par $\psi(v)$ le polynôme du degré $m+n$ dont les racines sont v_i, par c la constante $\sum v_i$, et par $F(v)$ le quotient de $\psi(v)$ par v^m, on aura alors

$$y=-\frac{1}{F}\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz}-c$$

et cette valeur de y substituée dans l'équation

$$\frac{dy}{dz}-y^2=-n(n+1)v^2-h-\frac{m(m+1)}{v^2}$$

donnera l'équation du second ordre

$$(1-v^2)^2\frac{d^2F}{dv^2}+2(c-v)(1-v^2)\frac{dF}{dv}+\left[c^2-n(n+1)v^2-h-\frac{m(m+1)}{v^2}\right]F=0$$

La constante c se détermine immédiatement en faisant $v = \pm 1$ et en écartant pour un moment le cas où F s'annulerait pour une de ces valeurs. On a ainsi

$$c^2 = n(n+1) + h + m(m+1). \tag{9}$$

Moyennant cette valeur de c, le facteur $1 - v^2$ se supprime de l'équation différentielle, et l'on obtient pour l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction F

$$(1-v^2)\frac{d^2F}{dv^2} + 2(c-v)\frac{dF}{dv} + \left[n(n+1) - \frac{m(m+1)}{v^2}\right]F = 0 \tag{10}$$

Substituant dans cette équation

$$F(v) = v^n + A_{n-1}v^{n-1} + \ldots + A_0 + \frac{A_{-1}}{v} + \ldots + \frac{A_{-m}}{v^m}$$

on aura, en égalant à zéro le coefficient de v^p, la relation récurrente

$$-(p-n)(p+n+1)A_p + 2c(p+1)A_{p+1} + (p-m+1)(p+m+2)A_{p+2} = 0 \tag{11}$$

L'équation (11) où l'on fera successivement $p = n-1, n-2, \ldots 0, \ldots -m$ donnera les coefficients de F. Pour être assuré que l'équation (10) est satisfaite, il faut montrer que les termes des degrés $-(m+1)$ et $-(m+2)$ sont nuls. C'est ce qui résulte immédiatement, pour les seconds, de la formule (11) où l'on fait $p = -(m+2)$. Quant aux premiers, il n'y a qu'à répéter le calcul fait au N° 5 en utilisant la relation

$$A_{-l} = \frac{(m-l+1)(m-l+2)\ldots(m+l)}{(n-l+1)(n-l+2)\ldots(n+l)}A_l \tag{12}$$

Remarquons que la fonction F satisfait à l'équation différentielle indépendamment de l'hypothèse que F ne s'annule pas pour $v = \pm 1$, et comme à une valeur de h répondent, par l'équation (9), deux valeurs de c égales et de signes contraires, on trouvera ainsi deux solutions rationnelles de l'équation différentielle excepté dans le cas de $c = 0$ où elles se confondent. L'équation différentielle (10) ne changeant pas, quand on change v en $-v$ et c en $-c$, il en résulte que si $F(v, c)$ est une première solution, la seconde solution qui est $F(v, -c)$ peut s'écrire $F(-v, c)$.

Revenant de la dérivée logarithmique à la fonction Y, on aura les deux solutions

$$Y_1 = F(v,\ c)e^{cz},\quad Y_2 = F(-v,\ c)e^{-cz}$$

qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de z en $-z$, puisque v est une fonction impaire de z.

11. Les deux intégrales obtenues se confondent pour $c = 0$; mais d'après la recherche générale faite plus haut, cette circonstance doit se présenter pour $2n + 1$ valeurs de h, c'est à dire pour n valeurs de c, abstraction faite du signe et de la valeur $c = 0$. Or il arrive ici que ces valeurs de c sont des nombres entiers que nous allons déterminer.

Une condition nécessaire pour que les deux intégrales aient un rapport constant, c'est que la fonction $F(v)$ admette l'un des facteurs $v + 1$ ou $v - 1$, la fonction $F(-v)$ admettant alors les facteurs $v - 1$ ou $v + 1$. Car dans l'hypothèse admise, les deux dérivées logarithmiques sont identiques, et l'on aura

$$-\frac{1}{F(v)}\frac{dF(v)}{dv}\frac{dv}{dz} - c = -\frac{1}{F(-v)}\frac{dF(-v)}{dv}\frac{dv}{dz} + c$$

ou bien

$$2cF(v)F(-v) = (1 - v^2)\left[F(v)\frac{dF(-v)}{dv} - F(-v)\frac{dF(v)}{dv}\right]$$

Cela posé, il est facile de voir que $c = q$ est la condition pour que la fonction $F(v)$ admette le facteur $1 - v$ au degré entier q de multiplicité. Car l'équation (10) devra alors être vérifiée par une expression de la forme $(1 - v)^q \Phi(v)$, où $\Phi(v)$ est une fraction rationnelle n'admettant que le pôle $v = 0$ à distance finie. Différentions deux fois cette expression, et substituons dans l'équation (10). On trouvera des termes contenant tous le facteur $(1 - v)^q$ à l'exception de ceux-ci

$$(1 - v)^{q-1}\Phi(v)[q(q - 1)(v + 1) - 2q(c - v)].$$

Il est donc nécessaire que la parenthèse s'annule pour $v = 1$, ce qui donne $c = q$. Maintenant, pour voir si cette condition est suffisante, faisons dans l'équation (10) avec l'hypothèse $c = q$, la substitution $F(v) = (1 - v)^q \Phi(v)$, on aura l'équation

$$(13) \qquad (1-v^2)\frac{d^2\Phi}{dv^2} - 2(q+1)v\frac{d\Phi}{dv} + \left[n(n+1) - q(q+1) - \frac{m(m+1)}{v^2}\right]\Phi = 0$$

On s'assure aisément que $c = -q$ est une condition nécessaire pour que $F(v)$ admette le diviseur $(1+v)^q$, et que la substitution $F = (1+v)^q\Phi$ conduit encore à l'équation différentielle précédente.

Il nous reste à établir que l'équation (13) admet comme solution une expression rationnelle de la forme

$$\Phi(v) = v^{n-q} + \ldots + A_0 + \ldots + \frac{A_{-m}}{v^m}.$$

Or en égalant à zéro le coefficient de v^p après la substitution, on obtient

$$(n-p-q)(n+p+q+1)A_p + (p-m+1)(p+m+2)A_{p+2} = 0$$

qui montre que $\Phi(v)$ ne contiendra que des termes de même parité. Deux cas sont maintenant à distinguer, suivant que m et $n-q$ sont de même parité ou non. Dans le premier cas, les valeurs $n-q-2$, $n-q-4$, $\ldots -m$ données successivement à p détermineront les coefficients correspondants de la fonction Φ qui satisfera à l'équation différentielle avec la seule restriction que $n-q \geqq -m$ ou $q \leqq n+m$. On obtiendra ainsi pour q les valeurs

$n+m,\quad n+m-2,\quad \ldots\quad 2,\quad 0$ si $m+n$ est pair

$n+m,\quad n+m-2,\quad \ldots\quad 3,\quad 1$ si $m+n$ est impair.

Dans le second cas, en donnant à p les valeurs $n-q-2$, $n-q-4$, $\ldots (m+1)$, on déterminera les coefficients de même indice; mais en faisant $p = m-1$, on trouve $A_{m-1} = 0$, et par suite tous les coefficients suivants sont nuls. La fonction $\Phi(v)$ est alors

$$\Phi(v) = v^{n-q} + A_{n-q-2}v^{n-q-2} + \ldots + A_{m+1}v^{m+1}$$

et il y aura une solution de cette forme si $n-q \geqq m+1$ ou bien $q \leqq n-m-1$, ce qui donne pour q les valeurs

$n-m-1,\quad n-m-3,\quad \ldots\quad 3,\quad 1$ si $m+n$ est pair

$n-m-1,\quad n-m-3,\quad \ldots\quad 2,\quad 0$ si $m+n$ est impair.

On aperçoit immédiatement que, quelle que soit la parité de $m + n$, il y aura $n + 1$ valeurs de q, en comptant $q = 0$, qui donneront des solutions de l'équation (13). Telles sont les valeurs exceptionnelles de c, et il est bien facile de voir que, dans ce cas, les deux intégrales trouvées plus haut ont un rapport constant; car on peut les mettre sous cette forme

$$(-1)^q \Phi(v)(1-v)^q e^{qz}, \quad \Phi(v)(1+v)^q e^{-qz}$$

dont le rapport est ± 1, puisque $\frac{1+v}{1-v} = e^{2z}$.

12. Lorsque c a l'une de ces valeurs exceptionnelles, on peut trouver une seconde solution en employant, comme l'a fait M. Hermite, la méthode de D'Alembert. Introduisons pour cela la fonction

$$\Psi(v, c) = e^{2cz}F(v, c) - (-1)^q F(v, -c)$$

qui s'annule identiquement pour $c = q$. L'intégrale générale peut s'écrire, en désignant par c_1 et c_2 deux constantes arbitraires

$$c_1 e^{cz} F(v, c) + c_2 e^{-cz} \Psi(v, c).$$

Posons maintenant $c = q + \varepsilon$ où ε est infiniment petit et $c_2\varepsilon = c'_2$; on aura l'intégrale

$$c'_2 e^{-qz} \frac{d}{dc} \Psi(v, q)$$

Or on a

$$\frac{d}{dc} \Psi(v, c) = 2ze^{2cz}F(v, c) + e^{2cz} \frac{d}{dc} F(v, c) - (-1)^q \frac{d}{dc} F(v, -c)$$

ce qui donne pour l'intégrale générale

$$c_1 e^{qz} F(v, q) + c'_2 [2ze^{qz}F(v, q) + e^{qz} \frac{d}{dc} F(v, q) - (-1)^q e^{-qz} \frac{d}{dc} F(v, -q)]$$

Soit par exemple $n = 2$, $m = 1$, $c = 1$. L'équation en Y est

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} = \left(6v^2 - 7 + \frac{2}{v^2}\right) Y$$

or l'on a

$$F(v,\ c) = v^2 - cv + \frac{1}{3}c^2 - \frac{c}{3v}$$

et l'intégrale générale est après une réduction facile

$$c_1 e^{2z}(v-1)\left(v+\frac{1}{3v}\right) + c'_2 e^z\left[z(v-1)\left(v+\frac{1}{3v}\right) + \frac{1-3v^2}{3(v+1)}\right]$$

comme on peut le constater par une substitution directe.

Cas où le module est nul.

13. La fonction $\lambda(z)$ se réduit alors à $\sin z$ et l'équation (2) devient

$$\frac{d^2Y}{dz^2} = \left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 z} + h\right]Y. \tag{14}$$

C'est, sauf le changement de z en $\frac{\pi}{2} - z$, et pour le cas particulier où $-h$ est le carré d'un nombre entier au plus égal à m, l'équation que LAMÉ a rencontrée dans la recherche des températures d'un ellipsoide planétaire dont on entretient les différents points de la surface à des températures connues. (¹) On peut la ramener à l'équation ordinaire de LAMÉ où le module est égal à l'unité et rentrer ainsi dans un cas étudié complètement par M. HERMITE. Nous savons, en effet que pour $k = 1$, la fonction $\lambda(z)$ doit être remplacée par $\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$ ou bien par $-i \operatorname{tg} zi$. Si l'on pose alors $zi = \frac{\pi}{2} - z'$, $h' = -h - n(n+1)$, l'équation

$$\frac{d^2Y}{dz^2} = [n(n+1)k^2\lambda^2(z) + h]Y$$

(¹) LAMÉ. Leçons sur les fonctions inverses ..., page 249.

devient

$$\frac{d^2Y}{dz'^2} = \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 z'} + h'\right] Y$$

qui ne diffère de l'équation (14) que par le changement de m en n et de h en h'.

Mais dans le cas général où les deux intégrales sont distinctes, c'est à dire quand $-h$ n'est pas le carré d'un nombre entier au plus égal à m, l'équation (14) peut être intégrée sous une autre forme. L'équation $(\gamma) = 0$ du N° 5 se réduit pour $k = 0$ à celle-ci

$$(\gamma') \qquad 2(p+1)[h + (p+1)^2]A_{p+1} + (2p+3)(m-p-1)(m+p+2)A_{p+2} = 0$$

et détermine pour la fonction $F(u)$ une expression qui ne contient plus que des termes de degrés négatifs en $u = \sin^2 z$

$$F(u) = A_0 + \frac{A_{-1}}{u} + \ldots + \frac{A_{-m}}{u^m}$$

où l'un des coefficients A restera arbitraire, en sorte que l'on pourra faire $A_{-m} = 1$. C'est ce qui résulte immédiatement de la relation (γ'), en remarquant qu'elle est vérifiée d'elle-même pour $p = -1$ et pour $p = -m-2$. Cette fonction F satisfera à l'équation (α) du N° 5, si l'on détermine convenablement la constante N. Mais la forme trouvée pour F conduit naturellement au changement de variable $u = \frac{1}{v}$, et l'on constate aisément que l'équation (α) peut s'écrire ainsi

$$(\alpha') \qquad \frac{d^2F}{dv^2}\frac{dv^2}{dz^2} - 2F\left[\frac{d^2F}{dv^2}\frac{dv^2}{dz^2} + \frac{dF}{dv}\frac{d^2v}{dz^2}\right] - N^2 + 4F^2[m(m+1)v + h] = 0$$

où l'on a maintenant

$$\frac{dv^2}{dz^2} = 4v^2(v^2-1), \qquad \frac{d^2v}{dz^2} = 2v(3v-2)$$

en sorte que si, dans l'équation précédente, on fait $v = 0$, on trouve $N^2 = 4hA_0^2$ qui fournit bien les valeurs exceptionnelles de h indiquées plus haut, quand on égale N à zéro.

Il résulte des calculs relatifs au cas général, que l'on arrive à l'équation (α') en faisant dans l'équation

$$\frac{dy}{dz} - y^2 = - m(m+1)v - h$$

la substitution

$$y = -\frac{1}{2F}\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz} - \frac{N}{2F} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{v - v_i} - \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{\left(\frac{dF}{dv}\right)_{v_i}}\frac{1}{v - v_i}$$

Or l'équation (α') où l'on fait $v = v_i$ donne

$$N = \pm \left(\frac{dF}{dv}\right)_{v_i}\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z_i}$$

et si l'on choisit z_i de façon que, substituée dans la fonction $\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz}$, elle donne la détermination adoptée pour N, on pourra écrire

$$y = \frac{\cos z}{\sin^3 z}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}} + \sum_{i=1}^{i=m}\frac{\cos z_i}{\sin^3 z_i}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}}.$$

L'expression qui figure sous le second signe $\sum$ est égale à

$$\frac{\cos z_i \sin^2 z}{\sin z_i(\sin^2 z_i - \sin^2 z)}$$

c'est une fonction dont la période est π. Elle devient infinie pour $z = z_i$ et $z = - z_i$ avec les résidus $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, ce qui conduit facilement à l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\cot(z_i - z) + \frac{1}{2}\cot(z_i + z) - \cot z_i$$

On aura donc

$$y = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{d}{dz}\log\left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dz}\log\sin(z_i - z) - \frac{d}{dz}\log\sin(z_i + z)\right] - \sum_{i=1}^{i=m}\cot z_i$$

et en passant de la dérivée logarithmique à la fonction Y

$$Y = c_1 e^{z \sum_{i=1}^{i=m} \cot z_i} \prod_{i=1}^{i=m} \sqrt{\frac{\sin (z_i - z)}{\sin (z_i + z)} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i} \right)}$$

Le terme placé sous le radical se réduit à $\dfrac{\sin^2 (z_i - z)}{\sin^2 z \sin^2 z_i}$. Donc, en faisant entrer dans la constante c_1 l'inverse du produit des quantités $\sin z_i$, on aura pour Y l'intégrale

$$c_1 \frac{\sin (z - z_1) \sin (z - z_2) \ldots \sin (z - z_m)}{\sin^m (z)} e^{z \sum_{i=1}^{i=m} \cot z_i}.$$

On aura une seconde intégrale en adoptant la seconde valeur de N, ce qui revient au changement de signe de tous les z_i, ou encore au changement de z en $-z$.