SUR LA FONCTION EULÉRIENNE.

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

M. PRYM a représenté $\Gamma(x)$ par la somme de deux fonctions $P(x)$ et $Q(x)$, dont la seconde est holomorphe, la première ayant pour expression

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n(x+n)} + \cdots,$$

ou encore

$$eP(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} + \cdots.$$

Cette forme analytique, entièrement explicite, de la transcendante $P(x)$ conduit, par une voie facile, à reconnaître que l'équation $P(x) = 0$ a une infinité de racines réelles. Soit, pour un moment,

$$S_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)},$$

$$R_n = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\left[\frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \cdots\right],$$

de sorte qu'on ait

$$eP(x) = S_n + R_n.$$

Je remarque d'abord qu'en limitant la valeur de x supposée réelle par les conditions

$$n - 1 < -x < n,$$

a série $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \cdots$ est toujours positive, tandis que le facteur $x(x+1)\dots(x+n-1)$ est du signe de $(-1)^n$. Le reste R_n est donc négatif pour toute valeur impaire de n. Cela étant, faisons

$$n = 2m + 1,$$

on trouvera, par un calcul facile, que

$$S_n = \frac{X_m}{x(x+1)\cdots(x+2m)},$$

le numérateur étant le polynôme suivant:

$$\begin{aligned} X_m = \quad & (x+2)^2(x+3)(x+4)\dots(x+2m) \\ & + (x+4)^2(x+5)(x+6)\dots(x+2m) \\ & + (x+6)^2(x+7)(x+8)\dots(x+2m) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (x+2m)^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive pour les valeurs de x satisfaisant à la condition $x + 2m < 0$, les facteurs qui entrent au premier degré dans les divers termes étant tous négatifs et en nombre pair. D'ailleurs, le dénominateur $x(x+1)\dots(x+2m)$ est négatif, comme nous l'avons déjà dit; S_n étant donc, comme R_n, une quantité négative, nous voyons que dans l'intervalle considéré pour la variable, c'est-à-dire entre les deux pôles consécutifs, $x = -2m$, $x = -(2m+1)$, l'équation $P(x) = 0$ n'a aucune racine réelle. J'ajoute qu'il en est de même entre $x = -1$ et $x = -2$, car alors $S_2 = \frac{x+2}{x(x+1)}$, quantité positive dans cet intervalle ainsi que R_2. Si l'on passe à l'intervalle compris entre $x = -3$ et $x = -4$, on obtient

$$S_4 = \frac{(x+2)^2(x+3) + x + 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$

or le numérateur de cette expression changeant de signe lorsqu'on fait varier x de -3 à -4, on ne peut prononcer sûrement ni sur la présence ni sur l'absence de racines. Mais, au delà, nous allons établir qu'elles existent d'une manière absolument certaine. Je remarque dans ce but que, $P(-3-\frac{1}{2}) = 0,23\dots$ étant positif et moindre que $\frac{1}{e} = 0,36\dots$, il en résulte que, pour toute valeur du nombre entier n supérieure à 3, $P(-n-\frac{1}{2})$ est négatif. De l'équation de M. PRYM

$$P(x+1) = xP(x) - \frac{1}{e},$$

nous déduisons en effet

$$P\left(-4-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{e}+P\left(-3-\frac{1}{2}\right)}{4+\frac{1}{2}},$$

et l'on voit que le second membre, étant négatif, a une valeur absolue, évidemment moindre que $\frac{1}{e}$. Cela étant, la relation

$$P\left(-5-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{e}+P\left(-4-\frac{1}{2}\right)}{5+\frac{1}{2}}$$

fait voir que $P\left(-5-\frac{1}{2}\right)$ est encore une quantité négative, et, de proche en proche, il est clair qu'on établira qu'il en est de même pour toute valeur de l'entier n. Cela posé, l'expression

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \cdots$$

montre que, en faisant successivement

$$x = -(2m+1) - \varepsilon,$$
$$x = -(2m+2) + \varepsilon,$$

où ε est infiniment petit et positif, on obtient pour résultat deux quantités infiniment grandes et positives. Par conséquent, il existe une racine de l'équation $P(x) = 0$, comprise entre $-(2m+1)$ et $-\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)$, puis une entre les limites $-\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)$ et $-(2m+2)$.

A ce qui vient d'être démontré, j'ajoute la remarque que, en exprimant les racines par les formules

$$x = -(2m+1) - \xi_m,$$
$$x = -(2m+2) + \xi'_m,$$

les quantités ξ_m et ξ'_m, qui sont l'une et l'autre positives, décroissent indéfiniment quand m augmente. C'est dire que les zéros de la fonction $P(x)$ tendent de plus en plus à se confondre avec les pôles.