EIN NEUER BEWEIS
FÜR DIE RIEMANN'SCHE THETAFORMEL

VON

F. PRYM

in WÜRZBURG.

In einer vor Kurzem erschienenen Arbeit (1). habe ich eine von RIEMANN herrührende fundamentale Thetaformel aufgestellt und bewiesen. Der dort gegebene Beweis war von mir im Jahre 1865 auf die Anregung RIEMANN's hin verfasst worden, und ich glaubte denselben trotz einer gewissen ihm anhaftenden Schwerfälligkeit aus historischen Gründen möglichst unverändert mittheilen zu sollen. Einen zweiten, kürzeren Beweis derselben Formel, der ebenso wie der erste auf functionentheoretischen Betrachtungen beruht, habe ich dann später im CRELLE'schen Journale (2) veröffentlicht. Beiden Beweisen ist indess der Vorwurf zu machen, dass sie das innere Wesen der Formel nicht zum Ausdrucke bringen, insofern als bei ihnen in Folge der angewandten functionentheoretischen Betrachtungen und der dadurch bedingten Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten der directe Zusammenhang zwischen den beiden Seiten der Formel vollständig verborgen bleibt. Einen Einblick in das wahre Wesen der Formel gewinnt man nur, wenn man zur Ableitung derselben das, zuerst von JACOBI (3) im speciellen Falle der elliptischen

(1) Untersuchungen über die RIEMANN'sche Thetaformel und die RIEMANN'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882, Teubner.

(2) Kurze Ableitung der RIEMANN'schen Thetaformel. CRELLE's Journal Bd 93, p. 124.

(3) JACOBI, Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Gesammelte Werke, Bd I, p. 505. Berlin 1881, Reimer.

Functionen angewandte, Princip der gleichzeitigen linearen Transformation der Variablen und der Summationsbuchstaben zu Grunde legt und damit das Princip der Einschiebung eines Factors verbindet, der, von ähnlicher Wirkung wie der DIRICHLET'sche discontinuirliche Factor bei bestimmten Integralen, die nach geschehener Transformation eingetretene Beschränkung der Summation aufzuheben gestattet. Der Ausführung dieses Gedankens sind die folgenden Seiten gewidmet; dazu mag aber schon jetzt bemerkt werden, dass die Anwendbarkeit der soeben charakterisirten Methode keineswegs auf die RIEMANN'sche Thetaformel beschränkt ist, dass vielmehr die beiden obenerwähnten Principe in ihrer Verbindung von weitgehendster Bedeutung für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen sind, insofern als man mit ihrer Hülfe auf ebenso natürlichem als elementarem Wege eine Fülle der wichtigsten Thetaformeln ableiten kann.

1.

Den Ausgangspunkt für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen bildet die p-fach unendliche Reihe:

$$\vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \dots \mid w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu}$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

bei der die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Constanten $a_{\mu\mu'}$ nur der für die Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sei, unterworfen sind. Betrachtet man $w_1, \dots, w_p$ als unabhängig veränderliche Grössen, so stellt diese Reihe eine einwerthige und für endliche w auch stetige Function der complexen Veränderlichen $w_1, \dots, w_p$ dar, welche den Gleichungen:

$$\vartheta(w_1 \mid \dots \mid w_\nu + \pi i \mid \dots \mid w_p) = \vartheta(w_1 \mid \dots \mid w_\nu \mid \dots \mid w_p), \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$\vartheta(w_1 + a_{1\nu} \mid w_2 + a_{2\nu} \mid \dots \mid w_p + a_{p\nu}) = \vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \dots \mid w_p) e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}},$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche w auch immer stetige Function $f(w_1 | \dots | w_p)$ der complexen Veränderlichen $w_1, \dots, w_p$ die Bedingungen:

$$f(w_1 | \dots | w_\nu + \pi i | \dots | w_p) = f(w_1 | \dots | w_\nu | \dots | w_p),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$f(w_1 + a_{1\nu} | w_2 + a_{2\nu} | \dots | w_p + a_{p\nu}) = f(w_1 | w_2 | \dots | w_p) e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}},$$

so kann sie sich von der Function $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ nur um einen von den sämmtlichen Grössen w unabhängigen Factor unterscheiden.

Aus der Reihe $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ entsteht durch Verallgemeinerung die Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \dots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'} + \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(w_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

bei der die ε, ε' beliebige ganze Zahlen bezeichnen sollen. Die dadurch definirte neue Function $\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ ist dann mit der ursprünglichen Function $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ verknüpft durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) = \vartheta\left(w_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varepsilon_\mu}{2} a_{1\mu} + \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i | \dots | w_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varepsilon_\mu}{2} a_{p\mu} + \frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i\right)$$

$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'}}{4} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon_\mu \left(w_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)}$$

und geht, wenn die Grössen ε, ε' sämmtlich den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) = \vartheta(w_1 | \dots | w_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche genügt die allgemeinere Function den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\dots|w_\nu+\pi i|\dots|w_p)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\dots|w_\nu|\dots|w_p)\,e^{\varepsilon_\nu\pi i},$$

$$(\nu=1,2,\dots,p)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1+a_{1\nu}|\dots|w_p+a_{p\nu})=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(w_1|\dots|w_p)\,e^{-2w_\nu-a_{\nu\nu}-\varepsilon'_\nu\pi i},$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen $w_1, \dots, w_p$ freien Factor bestimmen.

Das Symbol $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der Thetafunction genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$, noch einfacher durch $[\varepsilon]$ bezeichnet werden. Ferner möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente, mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w)) \text{ statt } \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(w_1|\dots|w_p),$$

und entsprechend ein Grössensystem $w_1 | w_2 | \dots | w_p$ einfacher durch (w) zu bezeichnen. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$w_1+\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{1\mu}+\frac{\varkappa'_1}{2}\pi i \;\Big|\; \dots \;\Big|\; w_p+\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{p\mu}+\frac{\varkappa'_p}{2}\pi i,$$

wobei unter den $\varkappa, \varkappa'$ ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(w+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix}\right)$, so ergeben sich durch Betrachtung der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((w))$ definirenden Reihe leicht die im Späteren zur Anwendung kommenden Relationen:

$$(\mathrm{A})\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(w+\left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}(\!(w)\!)\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{4}-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varkappa_\mu\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{\varkappa'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

$$(\mathrm{B}_1)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\pm 2\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\quad\varepsilon'_\nu\quad\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(w)\!)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

$(\nu=1,2\ldots,$

$$(\mathrm{B}_2)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\quad\varepsilon_\nu\quad\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\pm 2\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(w)\!)=(-1)^{\varepsilon_\nu}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

$$(\mathrm{C})\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(-w)\!)=(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

aus denen für ganzzahlige λ, λ' noch die Formel:

$$(\mathrm{D})\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(w+\left|\begin{matrix}2\lambda\\ 2\lambda'\end{matrix}\right|\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(w)\!)\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\lambda_\mu w_\mu+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu-\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)\pi i}$$

folgt. Die Gleichungen (B_1), (B_2) zeigen, dass im Ganzen nur 2^{2p} wesentlich verschiedene Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(w)\!)$ existiren; als Repräsentanten derselben können diejenigen 2^{2p} angesehen werden, deren Charakteristiken nur die Zahlen 0, 1 als Elemente enthalten; Charakteristiken von dieser Art sollen Normalcharakteristiken genannt werden.

2.

Unter $u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)}$; $u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)}$; $u_1^{(3)}, \ldots, u_p^{(3)}$; $u_1^{(4)}, \ldots, u_p^{(4)}$ sollen vier Systeme von je p beliebigen Grössen verstanden werden. Bildet man dann das Product der vier in der Form:

$$\vartheta(\!(2u^{(\nu)})\!)=\sum_{m_1^{(\nu)}=-\infty}^{m_1^{(\nu)}=+\infty}\cdots\sum_{m_p^{(\nu)}=-\infty}^{m_p^{(\nu)}=+\infty}e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}m_\mu^{(\nu)}m_{\mu'}^{(\nu)}+4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}m_\mu^{(\nu)}u_\mu^{(\nu)}}$$

enthaltenen, den Werthen $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ entsprechenden Functionen $\vartheta(\!(2u^{(1)})\!)$, $\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)$, $\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)$, $\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$, so erhält man zunächst:

$$\text{(F)}\qquad \vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$= \sum_{m}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(4)}m_{\mu'}^{(4)}\right) + 4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)}u_\mu^{(1)} + \ldots + m_\mu^{(4)}u_\mu^{(4)}\right)},$$

wobei die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass jede der $4p$ Grössen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

In die rechte Seite der Formel (F) sollen jetzt an Stelle der Grössen m_μ, u_μ allgemein, d. h. für $\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$, neue Grössen n_μ, v_μ, eingeführt werden, welche mit denselben verknüpft sind durch die Gleichungen:

$$\text{(S)}\qquad \begin{aligned}
m_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(1)}, & u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(1)},\\
m_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} - m_\mu^{(3)} - m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(2)}, & u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(2)},\\
m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} - m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(3)}, & u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(3)},\\
m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} - m_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} &= 2n_\mu^{(4)}, & u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} &= 2v_\mu^{(4)},
\end{aligned}$$

oder auch durch die damit äquivalenten Gleichungen:

$$\text{(S')}\qquad \begin{aligned}
n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(1)}, & v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(1)},\\
n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(2)}, & v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(2)},\\
n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} - n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(3)}, & v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(3)},\\
n_\mu^{(1)} - n_\mu^{(2)} - n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} &= 2m_\mu^{(4)}, & v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)} &= 2u_\mu^{(4)}.
\end{aligned}$$

In Folge dieser zwischen den Grössen m und n wie zwischen den Grössen u und v gesetzten Beziehungen wird das System linearer Gleichungen:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(1)},$$

$$x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} = 2y^{(2)},$$

$$x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} = 2y^{(3)},$$

$$x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} = 2y^{(4)},$$

erfüllt, wenn man allgemein, d, h. für $\nu = 1, 2, 3, 4$:

1) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)}$,
2) $x^{(\nu)}$ durch $m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_{\mu'}^{(\nu)}$,
3) $x^{(\nu)}$ durch $u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Dasselbe System wird daher auch erfüllt, wenn man

4) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + m_{\mu'}^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + n_{\mu'}^{(\nu)}$,
5) $x^{(\nu)}$ durch $m_\mu^{(\nu)} + u_\mu^{(\nu)}$ und gleichzeitig $y^{(\nu)}$ durch $n_\mu^{(\nu)} + v_\mu^{(\nu)}$

ersetzt. Nun folgt aber aus dem obigen Systeme:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + x^{(3)^2} + x^{(4)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + y^{(3)^2} + y^{(4)^2},$$

und es bestehen daher entsprechend den fünf soeben aufgestellten Lösungen die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)^2} + m_\mu^{(2)^2} + m_\mu^{(3)^2} + m_\mu^{(4)^2} = n_\mu^{(1)^2} + n_\mu^{(2)^2} + n_\mu^{(3)^2} + n_\mu^{(4)^2},$$

$$m_{\mu'}^{(1)^2} + m_{\mu'}^{(2)^2} + m_{\mu'}^{(3)^2} + m_{\mu'}^{(4)^2} = n_{\mu'}^{(1)^2} + n_{\mu'}^{(2)^2} + n_{\mu'}^{(3)^2} + n_{\mu'}^{(4)^2},$$

$$u_\mu^{(1)^2} + u_\mu^{(2)^2} + u_\mu^{(3)^2} + u_\mu^{(4)^2} = v_\mu^{(1)^2} + v_\mu^{(2)^2} + v_\mu^{(3)^2} + v_\mu^{(4)^2},$$

$$(m_\mu^{(1)} + m_{\mu'}^{(1)})^2 + \dots + (m_\mu^{(4)} + m_{\mu'}^{(4)})^2 = (n_\mu^{(1)} + n_{\mu'}^{(1)})^2 + \dots + (n_\mu^{(4)} + n_{\mu'}^{(4)})^2,$$

$$(m_\mu^{(1)} + u_\mu^{(1)})^2 + \dots + (m_\mu^{(4)} + u_\mu^{(4)})^2 = (n_\mu^{(1)} + v_\mu^{(1)})^2 + \dots + (n_\mu^{(4)} + v_\mu^{(4)})^2,$$

aus denen durch passende Verbindung schliesslich die Gleichungen:

$$m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + m_\mu^{(2)} m_{\mu'}^{(2)} + m_\mu^{(3)} m_{\mu'}^{(3)} + m_\mu^{(4)} m_{\mu'}^{(4)} = n_\mu^{(1)} n_{\mu'}^{(1)} + n_\mu^{(2)} n_{\mu'}^{(2)} + n_\mu^{(3)} n_{\mu'}^{(3)} + n_\mu^{(4)} n_{\mu'}^{(4)},$$

$$m_\mu^{(1)} u_\mu^{(1)} + m_\mu^{(2)} u_\mu^{(2)} + m_\mu^{(3)} u_\mu^{(3)} + m_\mu^{(4)} u_\mu^{(4)} = n_\mu^{(1)} v_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} v_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} v_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)} v_\mu^{(4)}$$

hervorgehen, die für jedes μ und μ' von 1 bis p gelten. Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man nun auf der rechten Seite der Formel (F) die Grössen m und u durch die Grössen n und v ersetzen und erhält dann die neue Formel:

$$(F_1) \qquad \vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$= \sum_n e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(n_\mu^{(1)}n_{\mu'}^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(4)}n_{\mu'}^{(4)}\right) + 4\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}v_\mu^{(1)} + \ldots + n_\mu^{(4)}v_\mu^{(4)}\right)},$$

wobei jedoch die Art und Weise, wie über die Grössen n zu summiren ist, noch einer näheren Bestimmung bedarf.

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F) angedeuteten Summation tritt im allgemeinen Gliede an Stelle des Systems der vier einem beliebigen Index μ entsprechenden Grössen:

$$m_\mu^{(1)},\quad m_\mu^{(2)},\quad m_\mu^{(3)},\quad m_\mu^{(4)}$$

jede Variation zur vierten Classe mit Wiederholung, die man aus den überhaupt existirenden negativen und positiven ganzen Zahlen als Elementen bilden kann, und entsprechend muss daher bei der Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_1) angedeuteten Summation — da das allgemeine Glied dieser Summe aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite von (F) stehenden Summe durch Einführung der Grössen n, v unmittelbar erhalten wurde — an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

jedes System von Werthen und jedes nur einmal gesetzt werden, welches sich dafür aus den Gleichungen (S) ergibt, wenn man darin an Stelle des Systems der Grössen m die genannten Variationen treten lässt. Die vier irgend einer solchen Variation entsprechenden Grössen:

$$2n_\mu^{(1)},\quad 2n_\mu^{(2)},\quad 2n_\mu^{(3)},\quad 2n_\mu^{(4)}$$

ind aber, wie die Gleichungen (S) zeigen, entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade Zahlen, und entsprechend sind daher die vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

entweder sämmtlich ganze oder sämmtlich halbe Zahlen, wenn man unter einer halben Zahl eine in der Form $g+\frac{1}{2}$, wo g eine ganze Zahl bezeichnet, darstellbare Zahl versteht. Für das System dieser vier Grössen n kann aber weder jede aus den ganzen Zahlen, noch auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung auftreten, sondern es können, wie die Gleichungen (S′) zeigen, von allen diesen Variationen nur diejenigen auftreten, für welche die vier auf den linken Seiten der Gleichungen (S′) vorkommenden Verbindungen:

$$n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)},\quad n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}-n_\mu^{(3)}-n_\mu^{(4)},$$

$$n_\mu^{(1)}-n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}-n_\mu^{(4)},\quad n_\mu^{(1)}-n_\mu^{(2)}-n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)}$$

sämmtlich gerade Zahlen sind. Diese Bedingung ist, sobald die vier Grössen n sämmtlich ganze oder sämmtlich halbe Zahlen sind, immer erfüllt, wenn $n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist. Da aber auch umgekehrt die Gleichungen (S′), sobald man in ihnen an Stelle der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

irgend vier ganze oder irgend vier halbe Zahlen setzt, für welche $n_\mu^{(1)}+n_\mu^{(2)}+n_\mu^{(3)}+n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist, immer für die vier Grössen:

$$m_\mu^{(1)},\quad m_\mu^{(2)},\quad m_\mu^{(3)},\quad m_\mu^{(4)}$$

vier bestimmte ganze Zahlen liefern, und zwei verschiedenen Systemen von Zahlen $n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$, $n_\mu^{(3)}$, $n_\mu^{(4)}$ stets zwei verschiedene Systeme von Zahlen $m_\mu^{(1)}$, $m_\mu^{(2)}$, $m_\mu^{(3)}$, $m_\mu^{(4)}$ entsprechen, endlich die angestellte Betrachtung für jedes μ von 1 bis p gilt, so ergibt sich schliesslich, dass die auf der rechten Seite der Formel (F_1) angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass man im allgemeinen Gliede für jedes μ von 1 bis p an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)},\quad n_\mu^{(2)},\quad n_\mu^{(3)},\quad n_\mu^{(4)}$$

sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung, für welche, im einen wie im anderen Falle, $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine gerade Zahl ist, setzt und die Summe der so entstandenen Terme bildet.

Die in Bezug auf die Grössen n auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung, dass $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ immer eine gerade Zahl sein muss, auf folgende Weise befreit werden. Man bezeichne, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe 1, 2, ..., p versteht, mit f_μ den Ausdruck:

$$f_\mu = \frac{1 + (-1)^{n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon'_\mu = 0}^{\varepsilon'_\mu = 1} e^{\left(n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}\right)\varepsilon'_\mu \pi i};$$

die so definirte Grösse f_μ besitzt dann den Werth 1, wenn

$$n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$$

eine gerade Zahl ist, dagegen den Werth 0, wenn $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4}$ eine ungerade Zahl ist. Setzt man daher weiter:

$$F = f_1 f_2 \dots f_p = \frac{1}{2^p} \sum_{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p}^{0,1} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}\right)\varepsilon'_\mu \pi i},$$

so hat der so gebildete Ausdruck F die Eigenschaft, dass er immer verschwindet, wenn auch nur eine der p den Werthen $\mu = 1, 2, \dots, p$ entsprechenden Grössen $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine ungerade Zahl ist, während er, sobald diese p Grössen sämmtlich gerade Zahlen sind, immer den Werth 1 besitzt. Schiebt man nun diese Grösse F auf der rechten Seite der Formel (F_1) hinter dem Summenzeichen als Factor ein, so darf man alsdann die Summation in der Weise ausführen, dass allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \dots, p$, an Stelle des Systems der vier Grössen:

$$n_\mu^{(1)}, \quad n_\mu^{(2)}, \quad n_\mu^{(3)}, \quad n_\mu^{(4)}$$

sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung tritt, einerlei, ob dafür $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, da bei der neuen Summe alle diejenigen Glieder, für welche die p Grössen $n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, nicht sämmtlich gerade Zahlen sind, und denen daher keine Glieder der ursprünglichen Summe entsprechen, in Folge des bei ihnen stattfindenden Verschwindens des Factors F den Werth Null besitzen, während der Complex der übrig bleibenden Glieder, da bei jedem derselben der Factor F den Werth 1 hat, mit dem Complexe der die ursprüngliche Summe bildenden Glieder identisch ist. Es wird aber an Stelle des Systems der vier Grössen $n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$, $n_\mu^{(3)}$, $n_\mu^{(4)}$ sowohl jede aus den ganzen Zahlen, wie auch jede aus den halben Zahlen als Elementen gebildete Variation zur vierten Classe mit Wiederholung treten, wenn man:

$$n_\mu^{(1)} = \bar{n}_\mu^{(1)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad n_\mu^{(2)} = \bar{n}_\mu^{(2)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad n_\mu^{(3)} = \bar{n}_\mu^{(3)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad n_\mu^{(4)} = \bar{n}_\mu^{(4)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}$$

setzt und dann, indem man das eine Mal $\varepsilon_\mu = 0$, das andere Mal $\varepsilon_\mu = 1$ setzt, in jedem der beiden Fälle die vier Grössen $\bar{n}$ unabhängig von einander alle ganzen Zahlen durchlaufen lässt. Führt man nun auf der rechten Seite der Formel (F_1), nachdem man die mit F bezeichnete Grösse als Factor hinter dem Summenzeichen eingeschoben und die dabei vorkommende Exponentialgrösse mit der schon in der Formel (F_1) stehenden vereinigt hat, an Stelle der Grössen n die Grössen $\bar{n}$ und ε ein und ordnet die Summation in passender Weise an, so erhält man, wenn man zugleich noch linke und rechte Seite mit 2^p multiplicirt, die Formel:

$$(\mathrm{F}_2) \qquad 2^p \vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\, \vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\, \vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\, \vartheta(\!(2u^{(4)})\!) =$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0,1} \sum_{\bar{n}}^{-\infty, \ldots, +\infty} \left| \begin{array}{l} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left[\left(\bar{n}_\mu^{(1)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(\bar{n}_{\mu'}^{(1)} + \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) + \ldots + \left(\bar{n}_\mu^{(4)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(\bar{n}_{\mu'}^{(4)} + \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) \right]} \\ \times e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left[\left(\bar{n}_\mu^{(1)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(2v_\mu^{(1)} + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right) + \ldots + \left(\bar{n}_\mu^{(4)} + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(2v_\mu^{(4)} + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right) \right]} \end{array} \right|$$

wobei die auf der rechten Seite stehende, durch $\sum\limits_{\bar{n}}^{-\infty, \ldots, +\infty}$ markirte innere Summation so auszuführen ist, dass jede der $4p$ Grössen $\bar{n}$ unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, die ebendaselbst vorkommende äussere Summation dagegen so, dass jede der $2p$ Grössen ε, ε' unabhängig von den anderen die Werthe 0 und 1 annimmt.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_2) hinter dem ersten Summenzeichen stehende $4p$-fach unendliche Reihe ist aber, wie ein Blick auf die in Art. 1 aufgestellte, die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(w)\!)$ definirende Reihe zeigt, identisch mit dem Producte der vier die Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!)$$

beziehlich darstellenden Reihen. Führt man nun in (F_2) an Stelle der genannten $4p$-fach unendlichen Reihe das Product dieser vier Thetafunctionen ein, so erhält man die RIEMANN'sche Thetaformel in der Gestalt:

$$\text{(R)}\qquad 2^p\,\vartheta(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$=\sum_{\left[\substack{\varepsilon\\ \varepsilon'}\right]}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!),$$

wobei die Summation auf der rechten Seite über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung oder, was dasselbe, an Stelle von $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Normalcharakteristiken treten lässt. Da die Grössen u und v nur den Gleichungen:

$$2u_\mu^{(1)} = v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(2)} = v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(3)} = v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} + v_\mu^{(3)} - v_\mu^{(4)},$$

$$2u_\mu^{(4)} = v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(3)} + v_\mu^{(4)},$$

zu genügen haben, im Übrigen aber vollständig willkührlich gewählt werden dürfen, so kann man in der gewonnenen Formel (R) die Grössen v als unabhängige Veränderliche betrachten, und es vertreten dann die Grössen u die durch die soeben aufgestellten Gleichungen definirten linearen Functionen derselben.

3.

Die gewonnene Formel (R) ist einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig. Um zu derselben zu gelangen, lasse man, unter Benutzung der Elemente einer willkührlichen Charakteristik $\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}$, auf der rechten Seite dieser Formel das System:

$$(2v^{(1)}) \quad \text{übergehen in} \quad \left(2v^{(1)} + \left|\begin{matrix}2\eta\\ 2\eta'\end{matrix}\right|\right),$$

es gehen dann gleichzeitig die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(2u^{(1)}), \qquad (2u^{(2)}), \qquad (2u^{(3)}), \qquad (2u^{(4)})$$

beziehlich über in:

$$\left(2u^{(1)} + \left|\begin{matrix}\eta\\ \eta'\end{matrix}\right|\right), \qquad \left(2u^{(2)} + \left|\begin{matrix}\eta\\ \eta'\end{matrix}\right|\right), \qquad \left(2u^{(3)} + \left|\begin{matrix}\eta\\ \eta'\end{matrix}\right|\right), \qquad \left(2u^{(4)} + \left|\begin{matrix}\eta\\ \eta'\end{matrix}\right|\right),$$

und man erhält, wenn man auf die rechte Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (D), auf die linke die Formel (A) des Art. 1 anwendet, auch die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die allgemeinere Formel:

$$\text{(R}'\text{)} \qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}((2u^{(4)}))$$

$$= \sum_{\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}} (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu - \varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(1)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(2)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(3)}))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((2v^{(4)})).$$

Lässt man jetzt weiter, unter Benutzung der Elemente zweier willkührlicher Charakteristiken $\begin{bmatrix}\rho\\ \rho'\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{bmatrix}$, auf der rechten Seite dieser letzten Formel die Systeme:

$$(2v^{(2)}),\qquad (2v^{(3)}),\qquad (2v^{(4)})$$

beziehlich übergehen in:

$$\left(2v^{(2)}+\begin{vmatrix}\rho\\ \rho'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2v^{(3)}+\begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2v^{(4)}-\begin{vmatrix}\rho+\sigma\\ \rho'+\sigma'\end{vmatrix}\right),$$

so gehen dadurch die auf der linken Seite stehenden Systeme:

$$(2u^{(2)}),\qquad (2u^{(3)}),\qquad (2u^{(4)})$$

beziehlich über in:

$$\left(2u^{(2)}+\begin{vmatrix}\rho\\ \rho'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2u^{(3)}+\begin{vmatrix}\sigma\\ \sigma'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2u^{(4)}-\begin{vmatrix}\rho+\sigma\\ \rho'+\sigma'\end{vmatrix}\right),$$

während das System $(2u^{(1)})$ ungeändert bleibt, und man erhält, wenn man auf die rechte wie linke Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (A) des Art. 1 anwendet, auch die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, schliesslich die Formel:

$$(\mathrm{R}'')\qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\rho\\ \eta'+\rho'\end{bmatrix}(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\rho-\sigma\\ \eta'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}(\!(2u^{(4)})\!)$$

$$=\sum_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\rho\\ \varepsilon'+\rho'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\sigma\\ \varepsilon'+\sigma'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\rho-\sigma\\ \varepsilon'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!).$$

Diese Formel umfasst die Formeln (R), (R′) als specielle Fälle und ist zugleich die allgemeinste derartige Formel.

Setzt man in der Formel (R″):

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(\!(2v^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\rho\\ \varepsilon'+\rho'\end{bmatrix}(\!(2v^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\sigma\\ \varepsilon'+\sigma'\end{bmatrix}(\!(2v^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\rho-\sigma\\ \varepsilon'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}(\!(2v^{(4)})\!)=x_{|\varepsilon|},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(\!(2u^{(1)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\rho\\ \eta'+\rho'\end{bmatrix}(\!(2u^{(2)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}(\!(2u^{(3)})\!)\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\rho-\sigma\\ \eta'-\rho'-\sigma'\end{bmatrix}(\!(2u^{(4)})\!)=x'_{|\eta|}$$

und bezeichnet zur Abkürzung $(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}$ mit $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$2^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} x_{[\varepsilon]}.$$

Lässt man jetzt hierin an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Normalcharakteristiken treten, so erhält man ein System von 2^{2p} linearen Gleichungen, welches bei passend gewählter Reihenfolge der Charakteristiken eine ungemein übersichtliche Gestalt annimmt, und welches für die Untersuchung der zwischen den verschiedenen Thetafunctionen bestehenden Beziehungen insofern von fundamentaler Bedeutung ist, als es in gewissen aus ihm ableitbaren Gleichungen die Grundtypen für die Additionstheoreme der Thetafunctionen und für die damit zusammenhängenden Thetarelationen liefert. Der eingehenden Untersuchung dieses Gleichungensystems ist der fünfte Abschnitt meiner in der Einleitung erwähnten Arbeit gewidmet, auf den ich bezüglich des Näheren mir zu verweisen erlaube.

Würzburg, im Juli 1882.